蜂考速成课

《材料力学》

习题答案

（微信扫一扫）

课时一　截面法

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 内容概要	★★★	0～4	填空
2. 截面法	必考	基础知识	填空

1. 基础知识

题 1. 为了保证工程构件的正常工作，构件应满足_____、_____、_____。

解：强度条件、刚度条件、稳定性条件。

题 2. 在材料力学中，变形固体的三个基本假设为：_____、_____、_____。

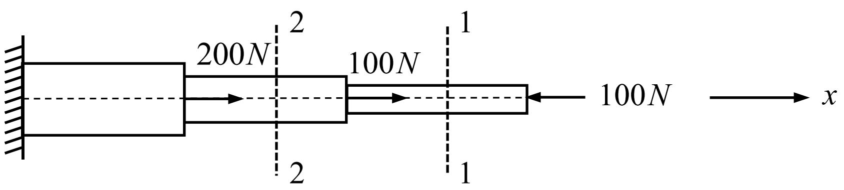
解：连续性假设、均匀性假设、各向同性假设。

题 3. 在材料力学中，变形的四种基本形式为_____、_____、_____、_____。

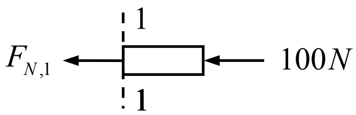
解：拉压、剪切、扭转、弯曲。

2. 截面法

题 1. 杆件受力如图所示，则1−1截面的轴力为_____，2−2截面的轴力为_____。



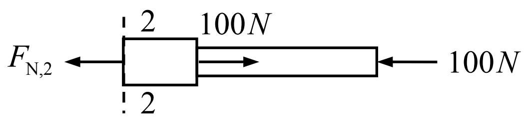
解：1−1截面：



$$F_{N,1}+100=0 \quad \Rightarrow F_{N,1}=-100N$$

截面法：截、取、代、平

2−2截面：

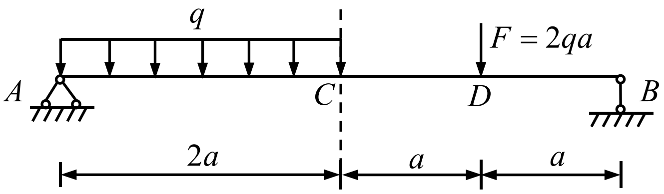


$$F_{N,2}+100=100 \quad \Rightarrow F_{N,2}=0N$$

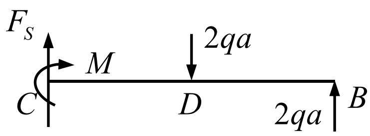
题 2. 材料力学中求内力的基本方法是_____。

解：截面法。

题 3. 图示简支梁，中间截面 C 的内力分别为：_____、_____。



解：$q\times 2a\times a+2qa\times 3a=F_B\times 4a \quad \Rightarrow F_B=2qa(\uparrow)$



F_S：使隔离体顺时针转动为正

M：下侧受拉为正

$F_S+2qa=2qa \quad \Rightarrow F_S=0$

$2qa\times a+M=2qa\times 2a \quad \Rightarrow M=2qa^2$

答案：$F_S=0$，$M=2qa^2$

课时一　练习题

1. 材料力学的主要任务是解决零件设计中的强度问题、_____问题和_____问题。

2. 材料力学中，对可变形固体作出了三个基本假设，即连续性、均匀性和_____假设。

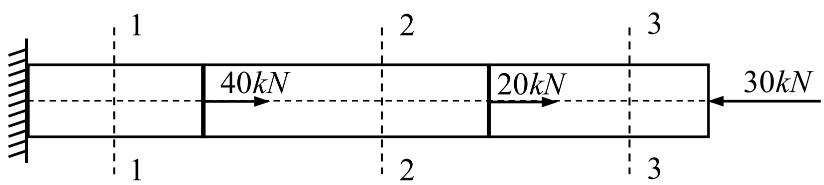
3. 下列变形中，不属于基本变形的是（　）。

A.扭转　　B.剪切　　C.斜弯曲　　D.拉伸与压缩

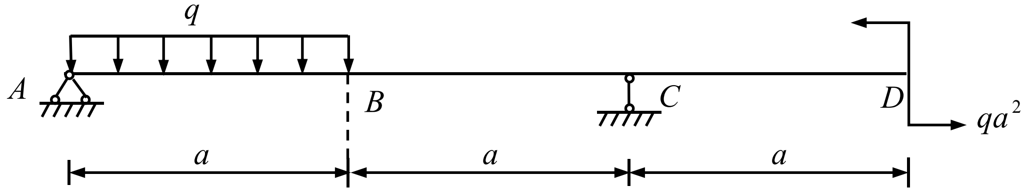
4. 在材料力学中，分析计算杆件内力采用的是（　）。

A.几何法　B.解析法　C.截面法　D.矢量法

5. 如图所示结构，截面1−1、2−2、3−3的轴力分别为_____、_____、_____。



6. 如图所示外伸梁，截面 B 的内力分别为：$F_S=$_____，$M=$_____。

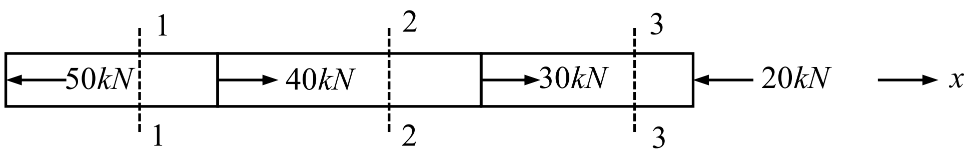


课时二 拉压变形

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 轴力图	必考	5～8	作图题
2. 应力、应变与变形		8～12	大题
3. 应力应变曲线	★★★	0～3	填空、选择

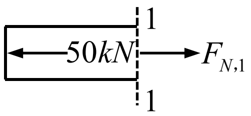
1. 轴力图

题 1. 如图所示杆件，画出轴力图



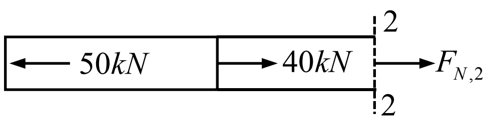
解题思路（考试时不必写出）

（1）1−1 截面：



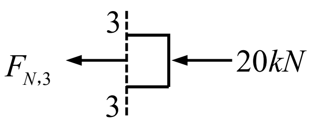
$F_{N,1}=50kN$

（2）2−2 截面：



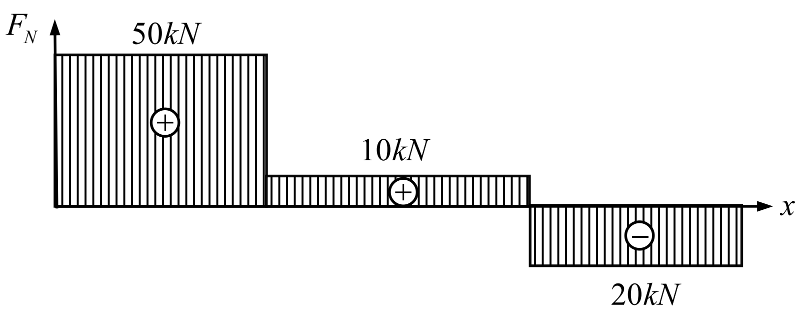
$50=40+F_{N,2}\ \Rightarrow F_{N,2}=10kN$

（3）3−3 截面：



$F_{N,3}+20=0 \Rightarrow F_{N,3}=-20kN$

解：



微信扫一扫 4 小时速成课程

2. 应力、应变与变形

（1）应力：$\sigma=\dfrac{F_N}{A}$ （单位面积上的内力）

（2）应变：$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F_N}{EA}$ （单位长度变形）

（3）变形：$\Delta l=\varepsilon\cdot l=\dfrac{F_N l}{EA}$

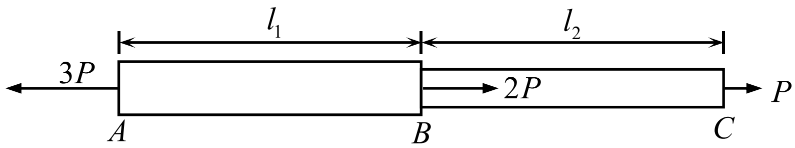
（E:弹性模量）

（以圆截面杆为例）

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{F_N}{\pi\left(d/2\right)^2}=\frac{4F_N}{\pi d^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma=\dfrac{4F_N}{\pi d^2}\le[\sigma] & \Rightarrow \text{强度校核}\\ d\ge\sqrt{\dfrac{4F_N}{\pi[\sigma]}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ F_N\le\dfrac{[\sigma]\cdot\pi d^2}{4} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

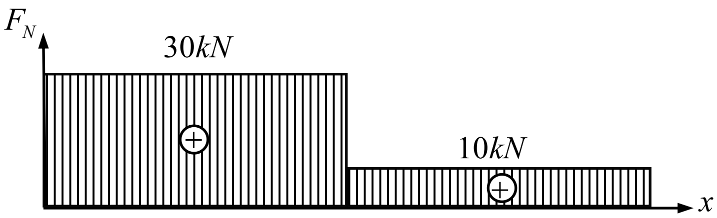
题 1. 图示阶梯形杆 $AC, P=10kN, l_1=l_2=200mm, A_1=100mm^2, A_2=40mm^2, E=200GPa$，求：（1）绘制轴力图；（2）确定杆横截面上的最大正应力是多少？处于哪一段？（3）AC 杆轴向总变形 ΔL_{AC}



$1MPa=10^6Pa$

$1GPa=10^9Pa$

解：（1）



（2）$\sigma_{AB}=\dfrac{F_{N_{AB}}}{A_1}=\dfrac{30\times10^3}{100\times10^{-6}}=3\times10^8Pa=300MPa$

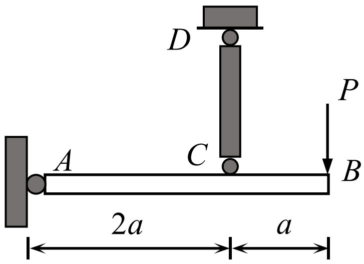
$$\sigma_{BC}=\frac{F_{N_{BC}}}{A_2}=\frac{10\times10^3}{40\times10^{-6}}=2.5\times10^8Pa=250MPa$$

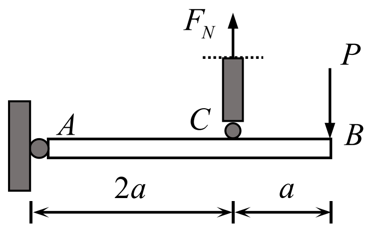
$\sigma_{\max}=\sigma_{AB}=300MPa$，处于 AB 段

（3）$\Delta l_{AC}=\Delta l_{AB}+\Delta l_{BC}=\dfrac{F_{N_{AB}}\cdot l_1}{EA_1}+\dfrac{F_{N_{BC}}\cdot l_2}{EA_2}$

$$=\left(\frac{30\times10^3\times200\times10^{-3}}{200\times10^9\times100\times10^{-6}}+\frac{10\times10^3\times200\times10^{-3}}{200\times10^9\times40\times10^{-6}}\right)m=5.5\times10^{-4}m=0.55mm$$

题 2. 刚性杆 ACB 由圆杆 CD 悬挂在 C 点，B 端作用集中力 $P=25kN$。已知 CD 杆的直径 $d=20mm$，许用应力 $[\sigma]=160MPa$。（1）试校核 CD 杆的强度；2）求结构的许可载荷 $[P]$。





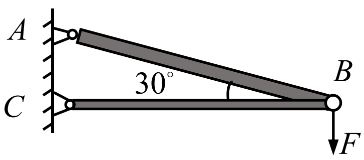
解：（1）$F_N \times 2a = P \times 3a \quad \Rightarrow F_N = \dfrac{3}{2}P$

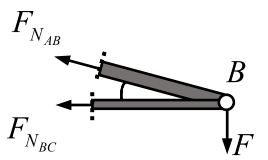
$$\sigma = \frac{4F_N}{\pi d^2} = \frac{6P}{\pi d^2} = \frac{6\times 25\times 10^3}{\pi\times(20\times 10^{-3})^2} = 119.37MPa < [\sigma] \quad \Rightarrow CD\text{杆满足强度条件}$$

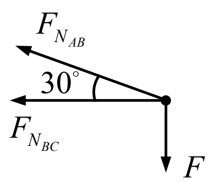
（2）$\sigma = \dfrac{4F_N}{\pi d^2} = \dfrac{6P}{\pi d^2} \le [\sigma]$

$$P \le \frac{[\sigma]\pi d^2}{6} = \frac{160\times 10^6\times\pi\times\left(20\times 10^{-3}\right)^2}{6} = 33.51kN \quad \Rightarrow [P] = 33.51kN$$

题 3. 如图所示平面桁架结构，已知材料为脆性材料，其许用拉应力 $[\sigma_t]=40MPa$，许用压应力 $[\sigma_c]=100MPa$，AB 杆直径是 BC 杆直径的 2 倍，集中力 $F=100kN$，试按结构强度安全条件设计 AB 杆的直径。







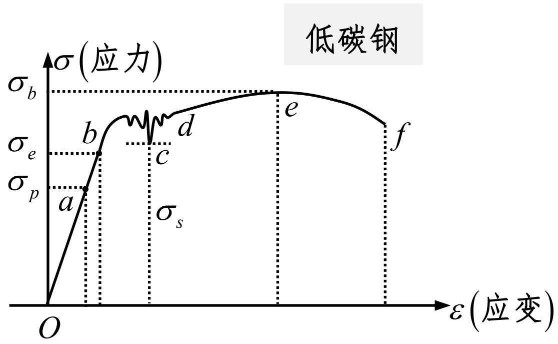
解：$\begin{cases} F_{N_{BC}} + F_{N_{AB}}\cos 30^\circ = 0 \\ F - F_{N_{AB}}\sin 30^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{N_{AB}} = 200kN \quad (\text{拉}) \\ F_{N_{BC}} = -100\sqrt{3}kN \quad (\text{压}) \end{cases}$

$$\sigma_{AB} = \frac{4F_{N_{AB}}}{\pi d_{AB}^2} \le [\sigma_t] \qquad \Rightarrow d_{AB} \ge \sqrt{\frac{4F_{N_{AB}}}{\pi[\sigma_t]}} = \sqrt{\frac{4\times 200\times 10^3}{\pi\times 40\times 10^6}} = 79.8mm$$

$$\sigma_{BC} = \frac{4\left|F_{N_{BC}}\right|}{\pi d_{BC}^2} \le [\sigma_c] \qquad \Rightarrow d_{BC} \ge \sqrt{\frac{4\left|F_{N_{BC}}\right|}{\pi[\sigma_c]}} = \sqrt{\frac{4\times 100\sqrt{3}\times 10^3}{\pi\times 100\times 10^6}} = 46.96mm$$

$d'_{AB} = 2d_{BC} = 93.9mm$，故 $[d_{AB}] = 93.9mm$

3. 应力、应变曲线



材料	塑性材料	脆性材料
代表	低碳钢	铸铁
变形	塑性屈服	脆性断裂

1. 弹性阶段（ob 段）$\rightarrow$弹性变形

（1）σ_p：比例极限

（2）σ_e：弹性极限

2. 屈服阶段（bd 段）$\rightarrow$塑性变形

（1）现象：应力变化不大，应变显著增加；

（2）σ_s：屈服极限（塑性材料的极限应力）

3. 强化阶段（de 段）$\rightarrow$弹性变形+塑性变形

σ_b：强度极限

4. 局部变形阶段（ef 段）

曲线末端对应横坐标值越大，材料塑性越好

题 1. 低碳钢拉伸试验的四个阶段分别为________、________、________、________。

解：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段

题 2. 塑性材料的极限应力是（　　）

A.比例极限　　B.弹性极限　　C.屈服极限　　D.强度极限

答案：C

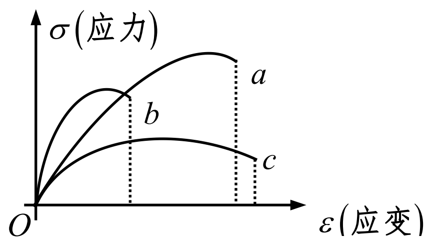
题 3. 塑性材料试件拉伸实验时，在强化阶段（　　）

A.只发生弹性形变　　B.只发生塑性形变

C.只发生线弹性形变　　D.弹性变形与塑性变形同时发生

答案：D

题 4. 用三种不同材料制成尺寸相同的试件，在相同的实验条件下进行拉伸试验，得到应力——应变曲线图，比较三条曲线，可知弹性模量最大的材料是（　　），塑性最好的材料是（　　）。（材料编号填写 a,b,c）



解：$\underline{\ b\ }$、$\underline{\ c\ }$

题 5. 低碳钢冷作硬化后，其比例极限______、塑性______。

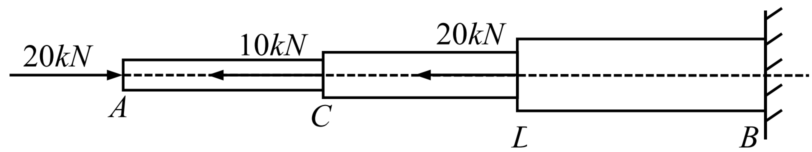
解：提高、降低

题 6. 由杆截面骤然变化（或几何外形局部不规则）而引起的局部应力骤增现象，称为________。

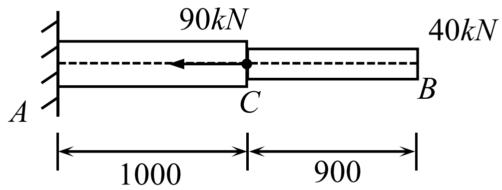
解：应力集中

课时二　练习题

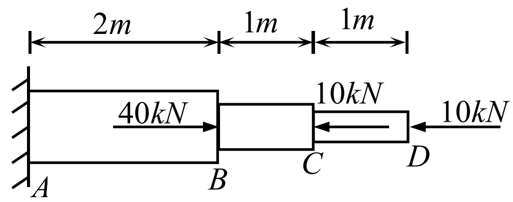
1.如图所示杆件，画轴力图。



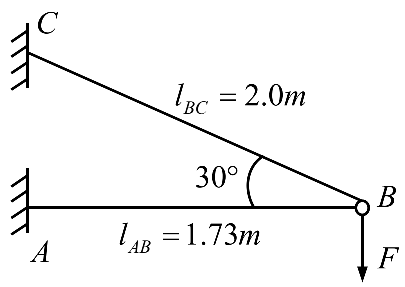
2.图示阶梯杆，已知 AC 段杆的横截面积 $A_1=1000mm^2$。CB 段杆的横截面积 $A_2=500mm^2$，材料的弹性模量 $E=200GPa$。（1）作出该杆的轴力图；（2）求出该杆横截面的最大正应力；（3）求出该杆的总轴向变形量。



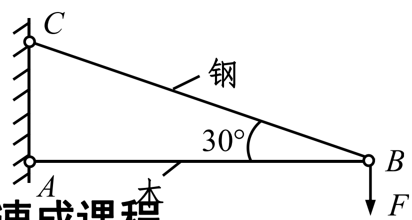
3.如图所示，阶梯轴 $ABCD$，AB 段直径为 $40mm$，BC 段直径为 $30mm$，CD 段直径为 $20mm$，其它参数见图，弹性模量 $E=200GPa$。试求（1）杆件 $ABCD$ 的内力图；（2）计算杆件最大应力；（3）D 点位移量。



4.钢木架构如图所示，$F=10kN$，BC 杆为钢制圆杆，直径 $d=20mm$，许用应力 $[\sigma]=160MPa$。AB 杆为木杆，横截面积为 $A=500mm^2$，许用应力 $[\sigma]=40MPa$。试校核两杆的强度。



5.图示简易吊车中，BC 为钢杆，AB 为木杆。木杆 AB 的横截面积 $A_1=100cm^2$，许用应力 $[\sigma]_1=7MPa$；钢杆 BC 的横截面积 $A_2=6cm^2$，许用拉应力 $[\sigma]_2=160MPa$，试求许可吊重 F。



6. 低碳钢拉伸试件的应力、应变关系大致可分为 4 个阶段，下面（ ）结论是正确的。

A.弹性阶段、塑性阶段、强化阶段、局部变形阶段
B.弹性阶段、屈服阶段、塑性阶段、断裂阶段
C.弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、断裂阶段
D.弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段

7. 低碳钢在弹性阶段将发生（ ）

A.弹性变形 *B*.塑性变形 *C*.弹塑性变形 *D*.局部变形

8. 低碳钢在拉伸破坏试验过程中所承受的最大应力是（ ）

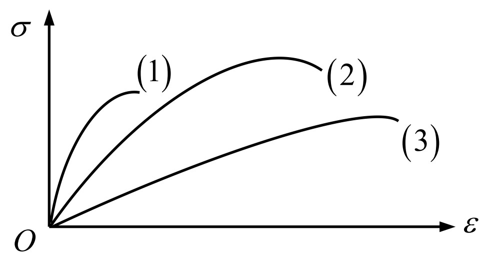
A.比例极限σ_p *B*.屈服极限σ_s *C*.强度极限σ_b *D*.作用应力$[\sigma]$

9. 低碳钢拉伸试验在屈服阶段的力学性能指标为（ ）

A.σ_p *B*.σ_s *C*.σ_b

10. 用三种不同的材料制成尺寸相同的试件，在相同的试验条件下进行拉伸试验，得到应力-应变曲线如图所示，比较三条曲线，可知材料______的拉伸强度最高，材料_____的弹性模量最大。

A.(1) *B*.(2) *C*.(3)



11.低碳钢拉伸经过冷作硬化后，以下四种指标中哪种得到提高（ ）

A.强度极限 *B*.比例极限 *C*.截面收缩率 *D*.延伸率

12.应力集中一般出现在（ ）

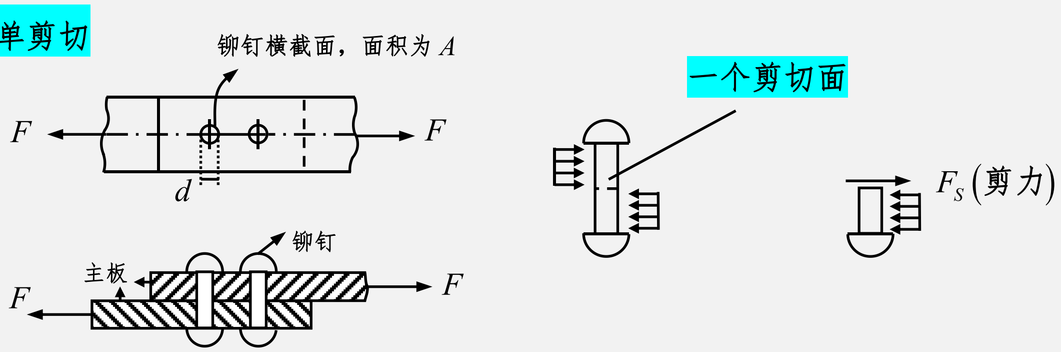
A.光滑圆角处 *B*.孔槽附近 *C*.等直轴段的中点 *D*.截面均匀变化处

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 剪切的强度计算	★★★★	0～10	填空、大题
2. 挤压的强度计算			

课时三　连接件

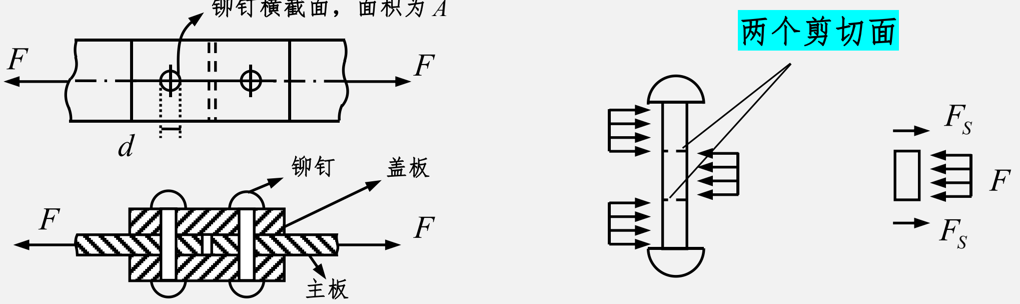
1. 剪切的强度计算

1）单剪切



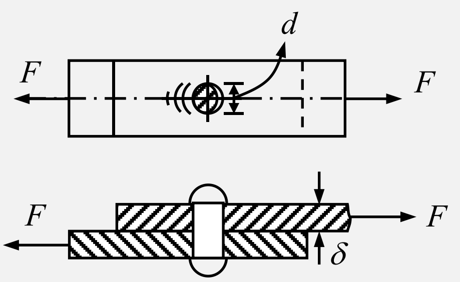
剪力：$F_s = \dfrac{F}{n}$　　切应力：$\tau = \dfrac{F_s}{A}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

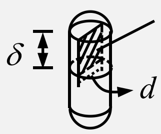
1）双剪切



剪力：$F_s = \dfrac{F}{2n}$　　切应力：$\tau = \dfrac{F_s}{A}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

2. 挤压的强度计算





挤压面：直径投影面
（面积为 $A_{bs} = d\delta$）

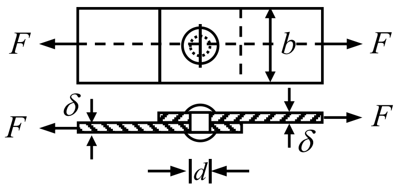
挤压面：与外力方向垂直

挤压力：$F_{bs} = \dfrac{F}{n}$　　挤压应力：$\sigma_{bs} = \dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

题 1. 在连接件上，剪切面和挤压面分别____、____于外力方向。

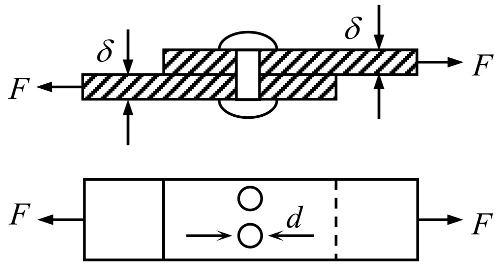
解：平行、垂直

题 2. 如图所示，板受拉力 F 作用，板厚 δ。铆钉直径为 d，则铆钉承受的剪切应力和挤压应力分别为_____、_____

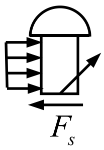


解：$\dfrac{4F}{\pi d^2}$、$\dfrac{F}{d\delta}$

题 3. 图示连接件，用两个铆钉连接两个钢板。已知铆钉的直径是 $d=20mm$，钢板厚度 $\delta=10mm$。铆钉材料的许用应力 $[\tau]=80MPa$，$[\sigma_{bs}]=150MPa$。若 $F=40kN$，请画出铆钉受力图并校核铆钉的强度。



解：(1) 铆钉受力图：



(2) $n=2 \quad F_S=\dfrac{F}{2}=20kN$

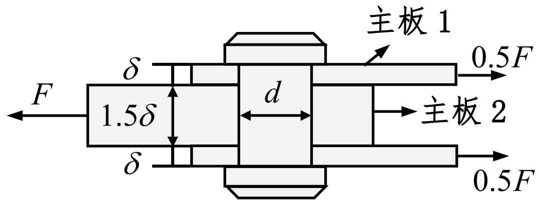
$$\tau=\frac{F_s}{A}=\frac{F_s}{\pi(d/2)^2}=\frac{4F_s}{\pi d^2}=\frac{4\times20\times10^3}{\pi\times\left(20\times10^{-3}\right)^2}=63.66MPa<[\tau]$$

$$n=2 \quad F_{bs}=\frac{F}{2}=20kN$$

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{F_{bs}}{d\delta}=\frac{20\times10^3}{20\times10\times10^{-6}}=100MPa<[\sigma_{bs}]$$

$\Rightarrow$ 该铆钉满足强度条件。

题 4. 铆接头的尺寸和受力如图，则铆接头的切应力 $\tau=$_____最大挤压应力 $\sigma_{bs}=$_____。



解:双剪切 $F_s=\dfrac{F}{2n}=\dfrac{F}{2} \qquad \tau=\dfrac{F_s}{A}=\dfrac{F/2}{\pi(d/2)^2}=\dfrac{2F}{\pi d^2}$

最大挤压：

主板 1：$F_{bs}=\dfrac{0.5F}{n}=0.5F \qquad \sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}=\dfrac{0.5F}{d\times\delta}=\dfrac{F}{2d\delta}$

主板 2：$F_{bs}=F/n=F \qquad \sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}=\dfrac{F}{d\times1.5\delta}=\dfrac{2F}{3d\delta}$

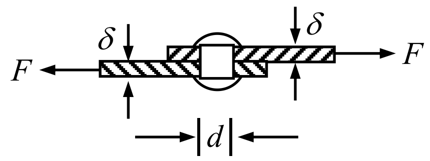
故最大挤压应力：$\sigma_{bs}==\dfrac{2F}{3d\delta}$

课时三　练习题

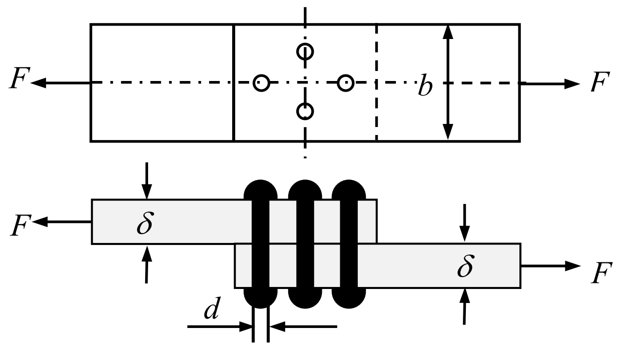
1. 如图示，板受拉力 F 作用，板厚 δ，铆钉杆直径 d。则铆钉承受的剪切应力为（　）。

A. $\dfrac{4F}{\pi d^2}$　　B. $\dfrac{F}{d\delta}$

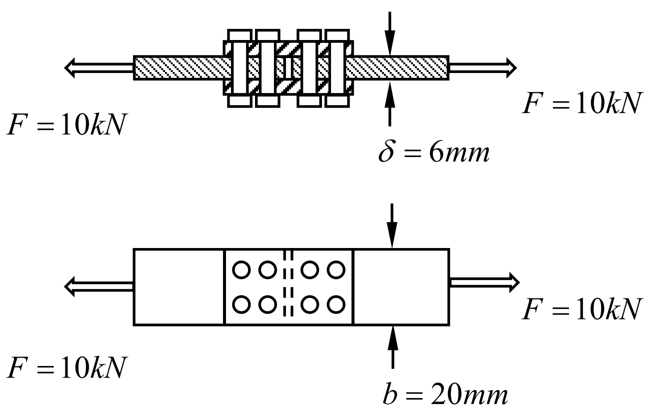
C. $\dfrac{F}{2d\delta}$　　D. $\dfrac{2F}{\pi d\delta}$



2. 图示铆接接头，受力 $F=110kN$，钢板厚度 $\delta=1cm$，宽度 $b=28.5cm$。铆钉直径 $d=1.6cm$，许用剪应力 $[\tau]=140MPa$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=320MPa$。试校核此接头的剪切和挤压强度（假设每个铆钉受力相等）。



3. 图示连接件中，已知：$F=10kN$，主板厚度 $\delta=6mm$，8 个铆钉材料、尺寸均相同，横截面直径 $d=5mm$。试计算：（1）在剪切面上每个铆钉所受的剪应力 τ；（2）主板对每个铆钉的挤压力 σ_{bs}。

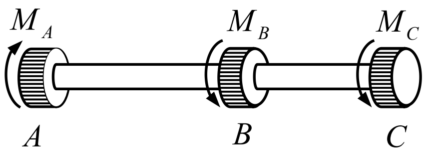


课时四 扭转变形

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 扭矩图	必考	5～8	作图题
2. 强度和刚度的应用		8～12	大题

1. 扭矩图

题 1. 如图，传动轴转速为 $n=300r/\min$，主动轮 A 输入功率 $P_1=400kW$，从动轮 B,C 的输出功率分别为 $P_2=160kW, P_3=240kW$。画出传动轴上的扭矩图。



$M_e = 9550 \times \dfrac{P}{n}$

力偶矩 M_e $(N\cdot m)$

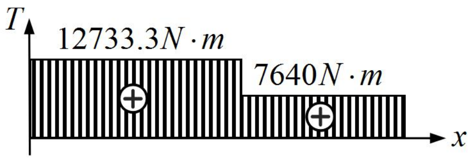
功率 P (kW)

转速 n $(r/\min)$

解：$M_A = 9550 \times \dfrac{P_1}{n} = 9550 \times \dfrac{400}{300} = 12733.3N\cdot m$

$M_B = 9550 \times \dfrac{P_2}{n} = 9550 \times \dfrac{160}{300} = 5093.3N\cdot m$

$M_C = 9550 \times \dfrac{P_3}{n} = 9550 \times \dfrac{240}{300} = 7640N\cdot m$

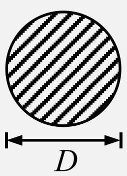


扭矩的正负：
四指环绕和扭矩一致
大拇指背离截面为正
大拇指指向截面为负

2. 强度和刚度的应用

(1) 极惯性矩 I_P 与抗扭转截面系数 W_P

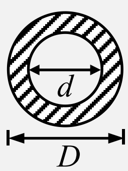
①实心圆截面：



极惯性矩：$I_P = \dfrac{1}{32}\pi D^4$

扭转截面系数：$W_P = \dfrac{1}{16}\pi D^3$

②空心圆截面：



极惯性矩：$I_p = \dfrac{1}{32}\pi D^4\left(1-\alpha^4\right)$，其中 $\alpha = \dfrac{d}{D}$

扭转截面系数：$W_P = \dfrac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)$

(2) 强度校核及其应用

切应力：$\tau=\dfrac{T}{I_P}\rho$　　最大扭转切应力：$\tau=\dfrac{T}{I_P}\cdot R=\dfrac{T}{W_P}$

实心圆截面：$\tau=\dfrac{T}{W_P}=\dfrac{16T}{\pi D^3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tau=\dfrac{16T}{\pi D^3}\le[\tau] & \Rightarrow \text{强度校核}\\ D\ge\sqrt[3]{\dfrac{16T}{\pi[\tau]}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ T\le\dfrac{[\tau]\cdot\pi D^3}{16} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

(3) 刚度校核及其应用

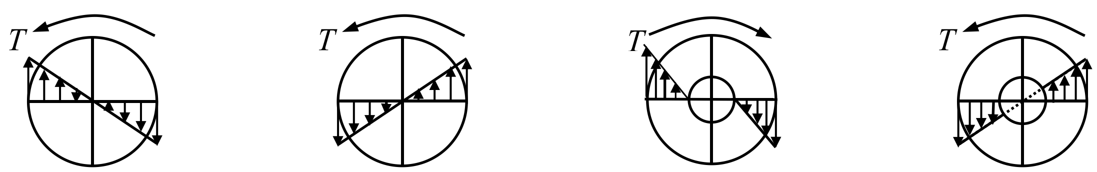
扭转变形：$\varphi'=\dfrac{T}{GI_P}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$　（单位长度扭转角）　　G:切变模量

实心圆截面：$\varphi'=\dfrac{32T}{G\pi D^4}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'=\dfrac{32T}{G\pi D^4}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}\le[\varphi'] & \Rightarrow \text{刚度校核}\\ D\ge\sqrt[4]{\dfrac{32T}{G\pi[\varphi']}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ T\le\dfrac{G\pi D^4[\varphi']}{32}\times\dfrac{\pi}{180^\circ} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

(4) 两截面之间的相对扭转角： $\varphi=\dfrac{T\cdot l}{GI_P}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

题 1. 以下应力分布图中哪些是正确的（　）。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

$A.$图$(a)(b)$正确　　$B.$图$(b)(c)$正确　　$C.$图$(c)(d)$正确　　$D.$图$(b)(d)$正确

答案：D　　1）切应力方向与扭矩T方向一致　　2）切应力沿径向（直径）线性分布

题 2. 轴的扭转切应力公式$\tau_P=T\rho/I_P$，适用于如下面轴（　）。

$A.$矩形截面轴　　$B.$椭圆截面　　$C.$圆形截面　　$D.$任意形状截面轴

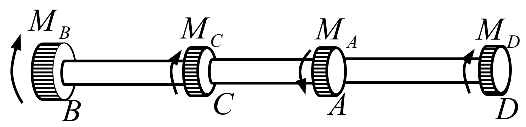
答案：C

题 3. 当实心圆轴的直径缩小至原来 $\frac{1}{2}$ 倍，其抗弯刚度将变为原来的（　　）倍。

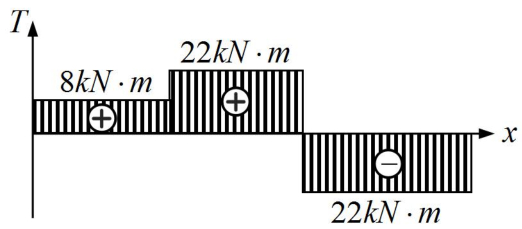
$A.\frac{1}{16}$　　$B.\frac{1}{8}$　　$C.\frac{1}{4}$　　$D.\frac{1}{2}$

答案：A　刚度 $=GI_P$，G 为定值，$I_P=\frac{1}{32}\pi D^4$，$I_P'=\frac{1}{32}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\times\frac{1}{32}\pi D^4=\frac{1}{16}I_p$

题 4. 如图所示等直圆轴，直径 $d=120mm$，已知外力偶矩 $M_A=44kN\cdot m$，$M_B=8kN\cdot m$，$M_C=14kN\cdot m$，$M_D=22kN\cdot m$，已知材料的许用应力 $[\tau]$=100MP_a，$G=80GP_a$，许用单位长度扭转角 $[\varphi']$=1.0°/m。（1）作扭矩图；（2）试校核该圆轴是否满足强度和刚度要求。



解：

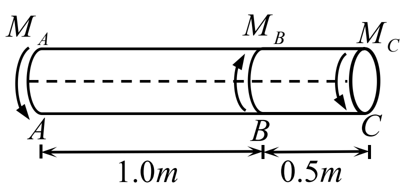


$$\tau=\frac{T}{W_P}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{16\times22\times10^3}{\pi\times\left(120\times10^{-3}\right)^3}=64.8\times10^6P_a=64.8MP_a<[\tau]$$

$$\varphi'=\frac{T}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{32T}{G\pi D^4}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{32\times22\times10^3}{80\times10^9\times\pi\times(120\times10^{-3})^4}\times\frac{180^0}{\pi}=0.77°/m<[\varphi']$$

$\Rightarrow$ 该圆轴满足强度和刚度要求

题 5. 如图示等截面圆杆，已知外力偶矩 $M_A=2.99kN\cdot m, M_B=7.20kN\cdot m, M_C=4.21kN\cdot m$，许用切应力 $[\tau]=70MP_a$，许用单位长度扭转角 $[\theta]=1°/m$，切变模量 $G=80GP_a$。（1）试确定该轴直径 d；（2）按所确定的直径计算 AC 截面之间的相对扭转角。



解：（1）利用截面法，得 AB 和 BC 段扭矩分别为 $T_1=-2.99kN\cdot m$ $T_2=4.21kN\cdot m$

按强度条件设计 d $\tau=\dfrac{T}{W_P}=\dfrac{16T}{\pi d^3}\leq[\tau]$

$$\Rightarrow d\geq\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times4.21\times10^3}{\pi\times70\times10^6}}=0.0674m=67.4mm$$

按刚度条件设计 d $\varphi'=\dfrac{T}{GI_P}\times\dfrac{180°}{\pi}=\dfrac{32T}{G\pi d^4}\times\dfrac{180°}{\pi}\leq[\varphi']$

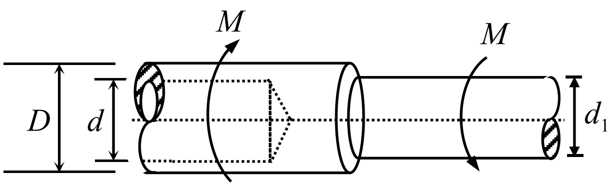
$$d\geq\sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi[\varphi']}\times\frac{180°}{\pi}}=\sqrt[4]{\frac{32\times4.21\times10^3}{80\times10^9\times\pi\times1°}\times\frac{180°}{\pi}}=0.0744m=74.4mm$$

综上： $d=74.4mm$

（2） $\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}=\left(\dfrac{T_1\cdot l_{AB}}{GI_P}+\dfrac{T_2\cdot l_{BC}}{GI_P}\right)\times\dfrac{180°}{\pi}$

$$=\frac{(T_1\cdot l_{AB}+T_2\cdot l_{BC})\times32}{G\pi d^4}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{(-2.99\times10^3\times1+4.21\times10^3\times0.5)\times32}{80\times10^9\times\pi\times(74.4\times10^{-3})^4}\times\frac{180°}{\pi}=-0.21°$$

题 6. 图示为一船用推进器主轴，一段是实心的，直径 $d_1=28cm$，另一段是空心的，外径 $D=29.6cm$，内径 $d=14.8cm$，若材料的许用切应力 $[\tau]=50MP_a$，试求此轴所允许传递的转矩 M 。



解： $\alpha=\dfrac{d}{D}=\dfrac{14.8}{29.6}=0.5$

按实心段确定 M： $\tau=\dfrac{T}{W_{P1}}=\dfrac{16M}{\pi d_1^3}\leq[\tau]$

$$M\leq\frac{[\tau]\cdot\pi d_1^3}{16}=\frac{50\times10^6\times\pi\times(28\times10^{-2})^3}{16}=215.5kN\cdot m$$

按空心段确定 M： $\tau=\dfrac{T}{W_{P2}}=\dfrac{M}{\frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)}\leq[\tau]$

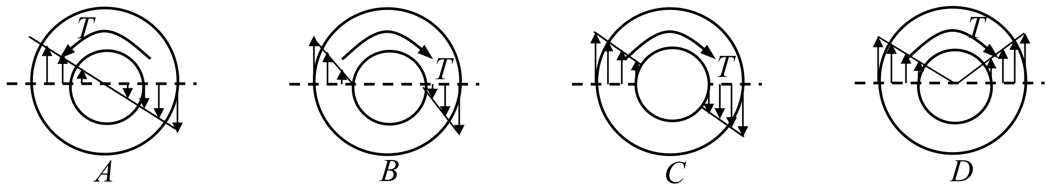
$$M\leq\frac{[\tau]\cdot\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}=\frac{50\times10^6\times\pi\times(29.6\times10^{-2})^3\times(1-0.5^4)}{16}=238.7kN\cdot m$$

故 $[M]=215.5kN\cdot m$

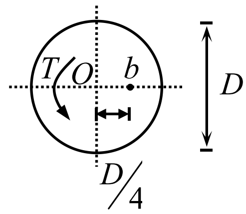
课时四　练习题

1．已知圆轴扭转时，传递的功率为 $P=15kW$，转速为 $n=150r/\min$。则相应的外力偶矩为______ $N\cdot m$。

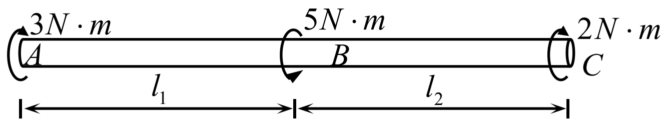
2．空心圆轴扭转时横截面上的切应力分布图如下所示，其中正确的分布是（　　）。



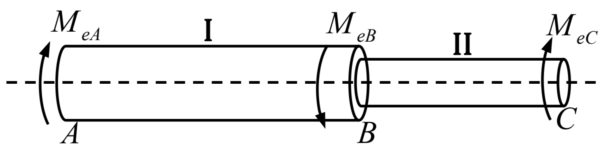
3．一根实心截面圆轴。其直径为 D，则其极惯性矩 I_P 为_____。若该截面扭矩 $T=6kN\cdot m$，直径 $D=100mm$，则横截面上 b 点的切应力 $\tau_b=$______（注明单位）



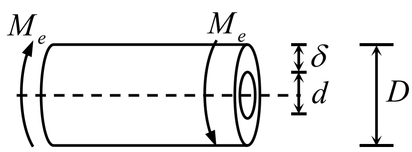
4．图示轴受钮，若使两端面间相对扭转角为零，则 $\frac{l_1}{l_2}=$______。



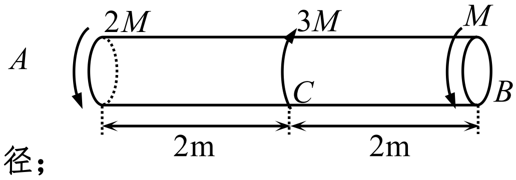
5．如图所示阶梯状圆轴，AB 段直径 $d_1=120mm$，BC 段直径 $d_2=100mm$。扭转力偶矩为 $M_{eA}=22kN\cdot m, M_{eB}=36kN\cdot m, M_{eC}=14kN\cdot m$。已知材料的许用切应力 $[\tau]=80MP_a$，（1）试作出扭矩图；（2）试校核轴的强度。



6．某汽车的主传动轴是用 40 号钢的电焊钢管制成，钢管外径 $D=76mm$，壁厚 $\delta=2.5mm$。材料的许用切应力 $[\tau]=100MP_a$，切变模量为 $G=80GP_a$，轴的许用单位扭转角 $[\varphi']=1°/m$，试按轴的强度和刚度条件设计 M_e。



7．如图示，传动轴系钢制实心圆截面轴，且各力偶矩的作用面是轴的横截面，已知力偶矩 $M=40kN\cdot m$，钢的切变模量 $G=80GP_a$，许用切应力 $[\tau]=40MP_a$，轴的许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1°/m$。求：



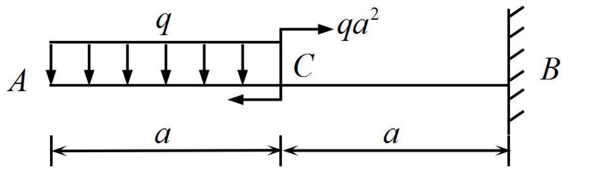
（1）作该传动轴的扭矩图；
（2）综合考虑强度条件和刚度条件确定该传动轴的直径；
（3）试按所确定的传动轴直径计算截面 B 相对截面 A 的扭转角（用弧度表示）

课时五 弯曲应力

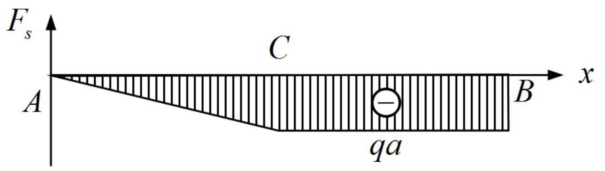
考点	重要程度	占分	题型
1. 内力图	必考	5～10	作图
2. 应力计算		8～12	大题

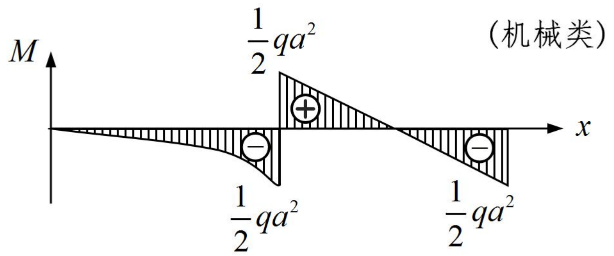
1. 内力图

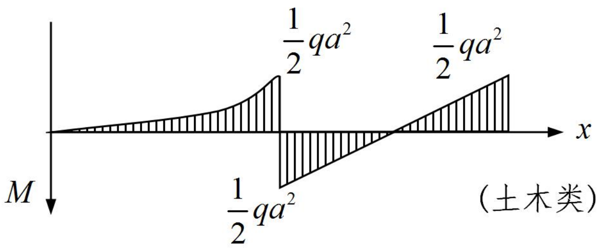
题 1. 试作图示梁的剪力图与弯矩图。



解：

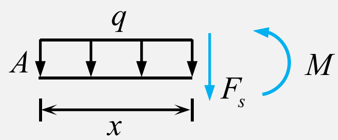






解题思路（不必在试卷上呈现）

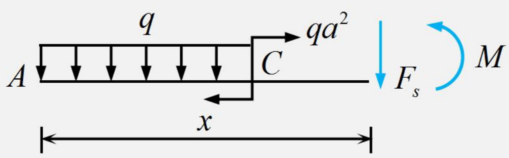
①1-1 截面：（$0 \le x < a$）



剪力方程：$qx + F_s = 0 \quad \Rightarrow F_s = -qx$

弯矩方程：$qx \cdot \frac{x}{2} + M = 0 \quad \Rightarrow M = -\frac{1}{2}qx^2$

②2-2 截面：（$a \le x < 2a$）



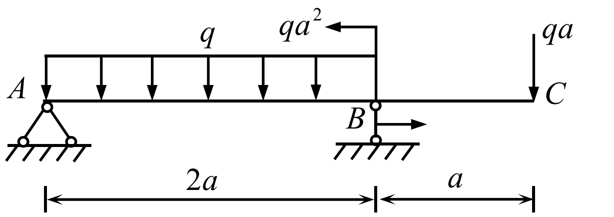
剪力方程：$qa + F_s = 0 \quad \Rightarrow F_s = -qa$

弯矩方程：$qa \cdot (x - \frac{a}{2}) + M = qa^2$

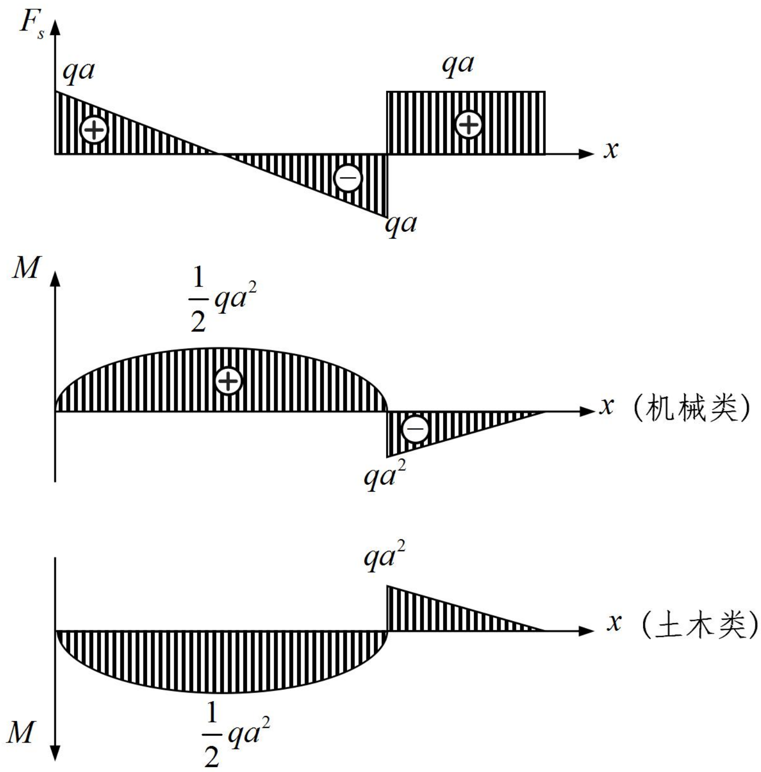
$$\Rightarrow M = -qax + \frac{3}{2}qa^2$$

注：画剪力图和弯矩图的时候，一般不通过列方程求函数的方法，简单方法见视频课程

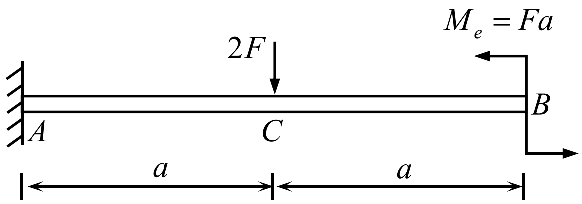
题 2. 求出支座反力并作图示外伸梁的剪力图与弯矩图。



解：$\begin{cases} F_A + F_B = 2qa + qa \\ 2qa \times a + qa \times 3a = F_B \times 2a + qa^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_A = qa \\ F_B = 2qa \end{cases}$

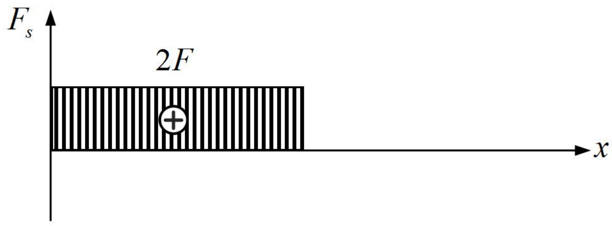


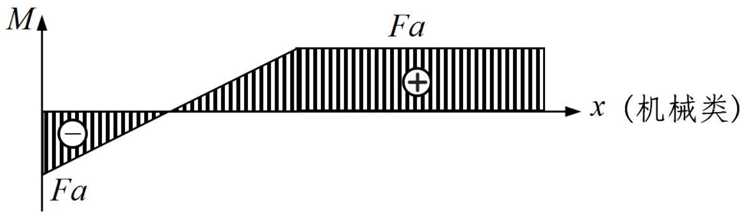
题 3. 试作梁的剪力图和弯矩图。

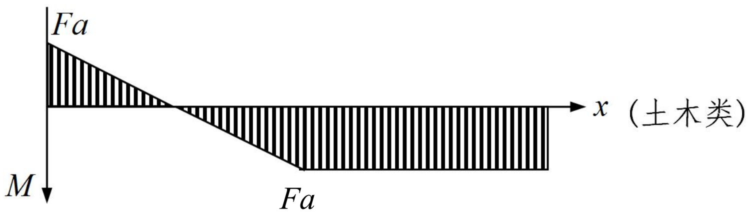


解：A 端支座反力：$F_A = 2F$

A 端弯矩：$M_A + 2F \times a = Fa \quad \Rightarrow M_A = -Fa$

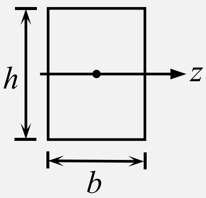






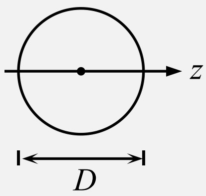
2. 应力计算

（1）中性轴惯性矩 I_z、抗弯曲截面系数 W_z



$$I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

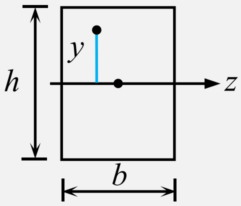
$$W_z = \frac{1}{6}bh^2$$



$$I_z = \frac{1}{64}\pi D^4$$

$$W_z = \frac{1}{32}\pi D^3$$

（2）正应力计算：



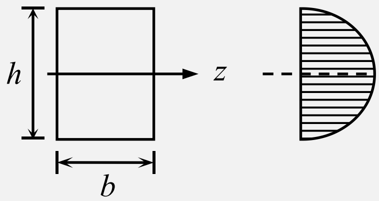
正应力 $\sigma = \dfrac{M}{I_z}y$

最大正应力：$y = \dfrac{h}{2}$ 时　$\sigma_{\max} = \dfrac{M}{I_z}\cdot\dfrac{h}{2} = \dfrac{M}{W_z}$

最小正应力：$y = 0$ 时　$\sigma_{\min} = 0$

（3）切应力计算：

1）应力分布

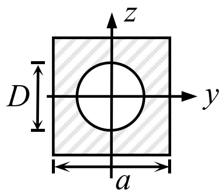


2）两种特殊截面的最大切应力 $\tau_{\max}$

矩形截面：$\tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{F_s}{A}$

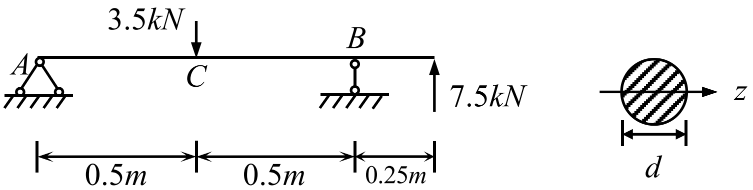
圆形截面：$\tau_{\max} = \dfrac{4}{3}\dfrac{F_s}{A}$

题 1. 图示正方形边长为 a，圆孔直径为 D，若在该正方形中间位置挖去此圆孔，则剩下部分图形的惯性矩 $I_y = I_z =$______。

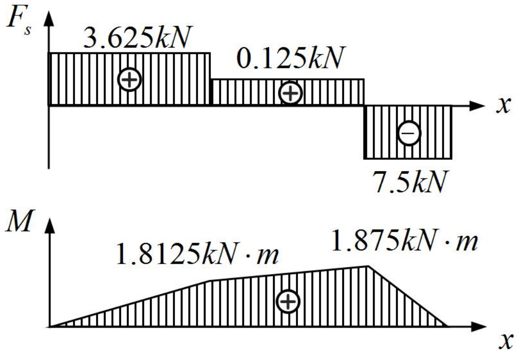


解：$I_y = I_z = \dfrac{1}{12}a^4 - \dfrac{1}{64}\pi D^4$

题 2. 图示圆形截面木梁，已知 $d=130mm$，材料的许用正应力 $[\sigma]=10MPa$，许用切应力 $[\tau]=2MPa$，试作出其剪力图和弯矩图，并校核梁的强度。



解：



（机械类）

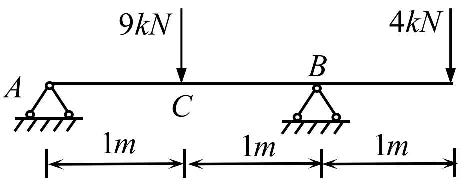
剪力最大值：$F_s=7.5kN$　　弯矩最大值：$M=1.875kN\cdot m$

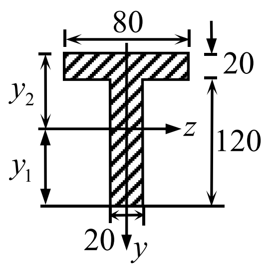
$$\sigma=\frac{M}{W_Z}=\frac{M}{\frac{1}{32}\pi d^3}=\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{32\times1.875\times10^3}{\pi\times(130\times10^{-3})^3}=8.7MPa<[\sigma]$$

$$\tau=\frac{4}{3}\frac{F_s}{A}=\frac{4}{3}\times\frac{F_s}{\pi\cdot(d/2)^2}=\frac{4}{3}\times\frac{4F_s}{\pi d^2}=\frac{4}{3}\times\frac{4\times7.5\times10^3}{\pi\times(130\times10^{-3})^2}=0.75MPa<[\tau]$$

$\Rightarrow$ 满足强度条件

题 3. 图示 T 型截面铸铁梁，已知截面惯性矩 $I_z=763cm^4$，$y_1=88mm$，最大正弯矩在截面 C 上，$M_c=2.5kN\cdot m$，最大负弯矩在截面 B 上，$M_B=4kN\cdot m$，材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=30MPa$，许用压应力 $[\sigma_c]=60MPa$，试校核此梁的强度。





解：由题知：$M_C=2.5kN\cdot m$（下拉上压）　$M_B=4kN\cdot m$（上拉下压）

①对 C 点：

$$\sigma_t=\frac{M_C y_1}{I_z}=\frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{763\times10^{-8}}=28.8MPa<[\sigma_t]$$

$$\sigma_c=\frac{M_C y_2}{I_z}=\frac{2.5\times10^3\times52\times10^{-3}}{763\times10^{-8}}=17.04MPa<[\sigma_c]$$

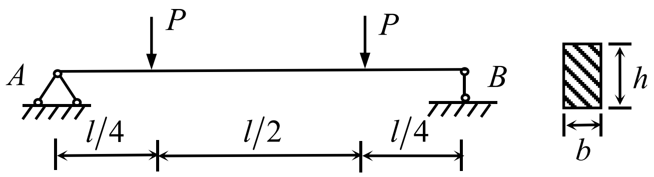
②对 B 点：

$$\sigma_t=\frac{M_B y_2}{I_z}=\frac{4\times10^3\times52\times10^{-3}}{763\times10^{-8}}=27.3MPa<[\sigma_t]$$

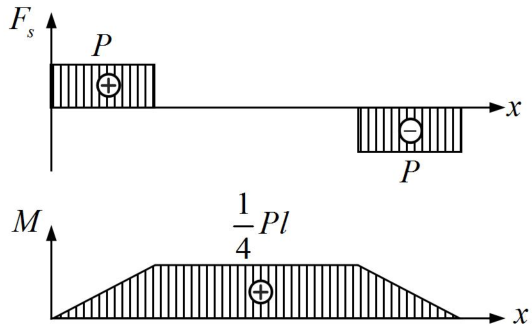
$$\sigma_c=\frac{M_B y_1}{I_z}=\frac{4\times10^3\times88\times10^{-3}}{763\times10^{-8}}=46.1MPa<[\sigma_c]$$

$\Rightarrow$满足强度条件

题 4. 一矩形截面简支木梁，梁上载荷如图所示，已知 $l=4m$，梁的弯曲许用正应力 $[\sigma]=10MPa$，截面尺寸 $h=200mm$，$b=100mm$，试确定许用载荷 P。



解：



（机械类）

求支座反力：

$$\begin{cases}F_A+F_B=P+P\\ P\times1+P\times3=F_B\times4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_A=P\\ F_B=P\end{cases}$$

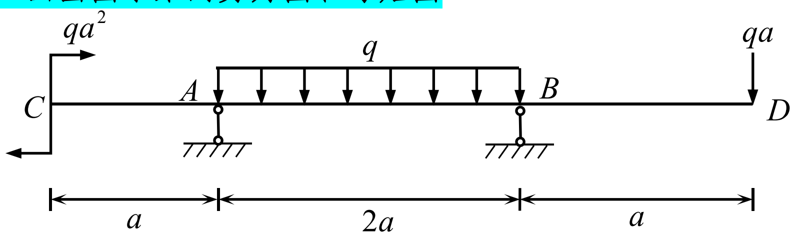
$$\Rightarrow M_{max}=\frac{1}{4}Pl$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{\frac{1}{4}Pl}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{3Pl}{2bh^2}\le[\sigma]$$

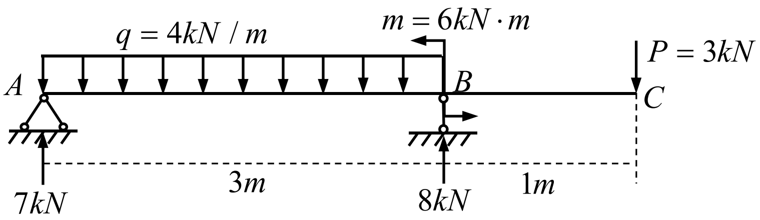
$$P\le\frac{2bh^2[\sigma]}{3l}=\frac{2\times100\times200^2\times10^{-9}\times10\times10^6}{3\times4}=6.67kN$$

课时五　练习题

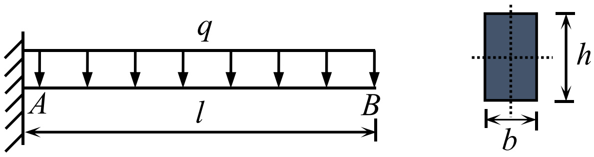
1．画出图示梁的剪力图和弯矩图



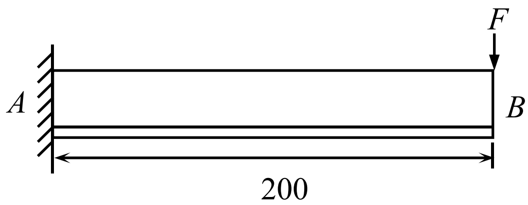
2．画出图示梁的剪力图和弯矩图，约束力大小，方向如图。

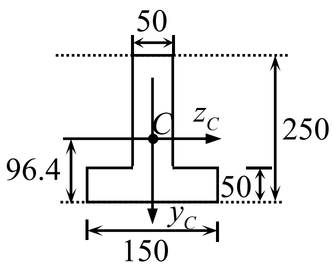


3．下图所示矩形截面悬臂梁，已知 $l=3m$，$b=90mm$，$h=180mm$，若许用应力 $[\sigma_t]=120MP_a$，试求该梁的许可载荷 $[q]$。

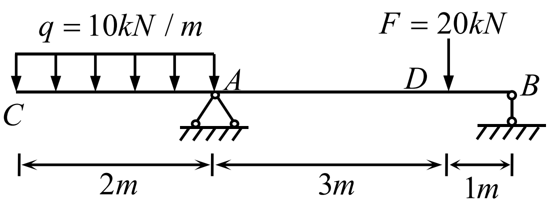


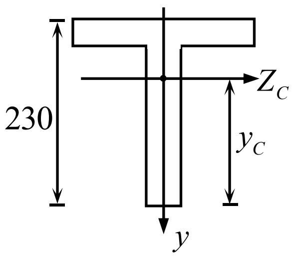
4．⊥型截面铸铁悬臂梁，尺寸及载荷如图所示，若材料的拉伸许用应力 $[\sigma_t]=40MP_a$，压缩许用应力 $[\sigma_c]=160MP_a$，截面对形心轴 z_c 的惯性矩为 $10180cm^4$，求许用载荷 $[F]$





5．图示 T 型截面铸铁梁承受载荷作用，已知铸铁的许用拉应力 $[\sigma_t]=40MP_a$，许用压应力 $[\sigma_c]=160MP_a$，$I_{zc}=6.01\times10^7mm^4$，$y_c=157.5mm$，试按正应力条件校核该梁的强度。



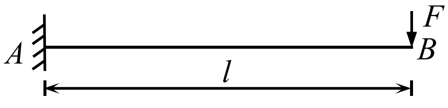


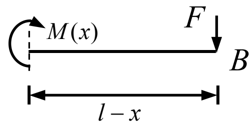
课时六　弯曲变形

考点	重要程度	占分	题型
1. 积分法求变形	★★★	3～8	填空、选择、大题
2. 叠加法求变形	必考	4～10	填空、选择、大题

1. 积分法求变形

题 1. 一悬臂梁受力如图所示，求该梁的挠曲线方程及 B 端的挠度和转角。





转角：

$$\theta(x)=\frac{1}{EI}\int M(x)dx$$

挠度：

$$w(x)=\int\theta(x)dx$$

解：任意 x 位置截断取右侧

由弯矩方程得：$M(x)=F(x-l)$

$$\theta(x)=\frac{1}{EI}\int M(x)dx=\frac{1}{EI}\int F(x-l)dx=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x^2-lx)+C$$

$$w(x)=\int\theta(x)dx=\int\left[\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x^2-lx)+C\right]dx=\frac{F}{EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}lx^2)+Cx+D$$

当 $x=0$ 时，$\theta=0$，$w=0$，解得 $C=0$，$D=0$

故转角：$\theta(x)=\dfrac{F}{EI}(\dfrac{1}{2}x^2-lx)$

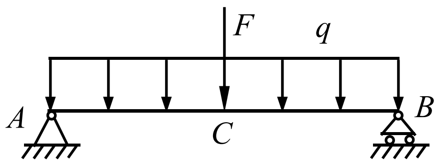
挠度：$w(x)=\dfrac{F}{EI}(\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}lx^2)$

当 $x=l$ 时，$\theta(l)=-\dfrac{Fl^2}{2EI}$ $(\curvearrowright)$　　$w(l)=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$ $(\downarrow)$

题 2. 积分法求梁弯曲变形时，积分常数通常需要依据_____条件和_____条件求解。

解：边界、连续性。

题 3. 用积分法计算图示梁的弯曲变形时，边界条件是（ ）。



解：$w_A=0$，$w_B=0$。

题 4. 等截面直梁在弯曲变形时，挠曲线的曲率在最大处（ ）一定最大。

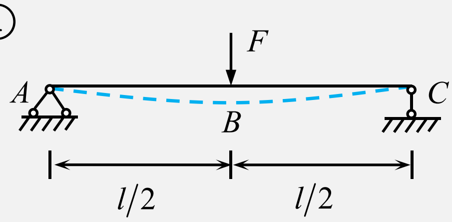
A.挠度　　B.转角　C.剪力　　D.弯矩

解：D

2. 叠加法求变形

简单载荷作用下的挠度和转角（六个必记）

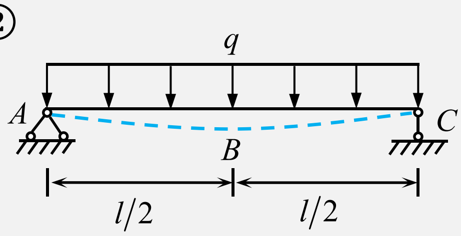
①



$$y_B=\frac{Fl^3}{48EI}(\downarrow)$$

$$\theta_A=\frac{Fl^2}{16EI}(↻)\qquad \theta_C=\frac{Fl^2}{16EI}(↺)$$

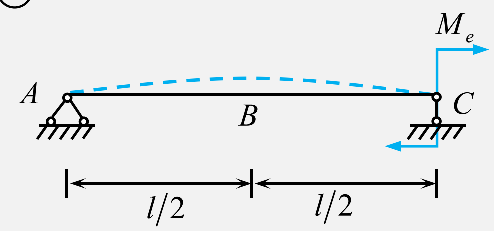
②



$$y_B=\frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

$$\theta_A=\frac{ql^3}{24EI}(↻)\qquad \theta_C=\frac{ql^3}{24EI}(↺)$$

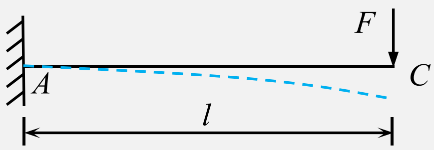
③



$$y_B=\frac{M_el^2}{16EI}(\uparrow)$$

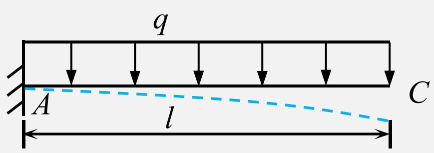
$$\theta_A=\frac{M_el}{6EI}(↺)\qquad \theta_C=\frac{M_el}{3EI}(↻)$$

④



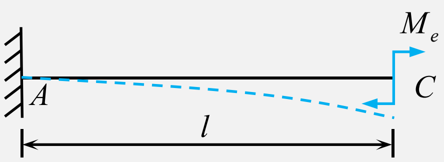
$$y_C=\frac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{Fl^2}{2EI}(↻)$$

⑤



$$y_C=\frac{ql^4}{8EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{ql^3}{6EI}(↻)$$

⑥

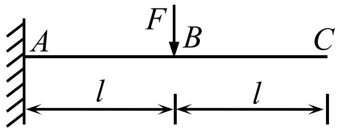


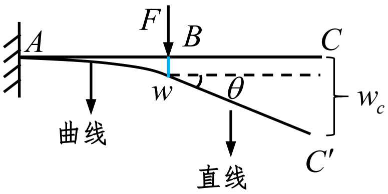
$$y_C=\frac{M_el^2}{2EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{M_el}{EI}(↻)$$

题 1. 用叠加法求横梁截面的挠度、转角时，需要满足的条件是______和_______。

解：线弹性、小变形

题 2. 梁 B 点的挠度、转角大小分别是 w 和 θ，则 C 点的挠度大小是_______。

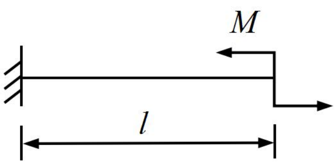




解：$w_C = w + \theta l$

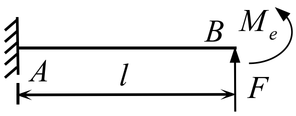
题 3. 图示悬臂梁自由端承受集中力偶。若梁的长度减小一半，则梁的最大挠度是原来的（　）。

$A.\dfrac{1}{2}$　　$B.\dfrac{1}{4}$　　$C.\dfrac{1}{8}$　　$D.\dfrac{1}{16}$

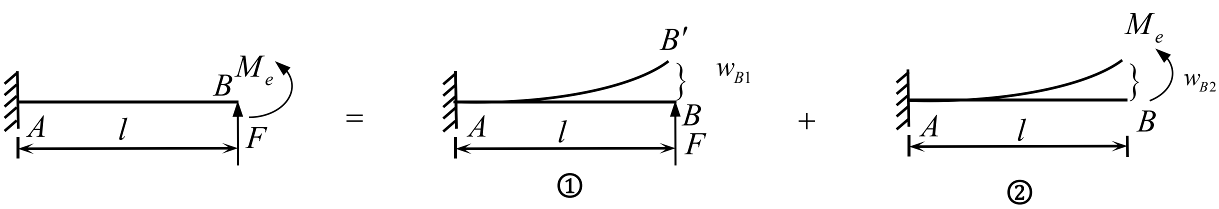


答案：**B**　　解：$w_{max} = \dfrac{Ml^2}{2EI}$，$w'_{max} = \dfrac{M(\frac{l}{2})^2}{2EI} = \dfrac{1}{4}\dfrac{Ml^2}{2EI} = \dfrac{1}{4}w_{max}$

题 4. 图示悬臂梁，弯曲刚度为 EI，在自由端承受力 F 和力偶 M_e。若 $w_B = 0$，试求 F 和 M_e 的关系，并求此时的 θ_B。



解：



$$w_B = w_{B1} + w_{B2} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{M_e l^2}{2EI} = \frac{2Fl^3 + 3M_e l^2}{6EI} = 0 \quad \Rightarrow M_e = -\frac{2}{3}Fl$$

$$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{M_e l}{EI} = \frac{Fl^2}{2EI} - \frac{2Fl^2}{3EI} = -\frac{Fl^2}{6EI}$$

课时六 练习题

1. 度量梁变形后横截面位移的两个基本量为：_____和_____。

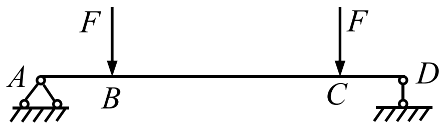
2. 等截面直梁在弯曲变形时，挠曲线曲率最大值所在截面的（　　）

A.挠度最大　　*B*.转角最大　　*C*.剪力最大　　*D*.弯矩最大

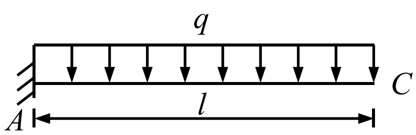
3. 图示结构，用积分法计算 *AD* 梁的位移时，梁的位移边界条件为（　　）

$A.\ w_A=0,\theta_D=0$　　$B.\ \theta_A=0,w_D=0$

$C.\ \theta_A=0,\theta_D=0$　　$D.\ w_A=0,w_D=0$



4. 如图所示，一悬臂梁梁长为 l，作用有均布载荷 q，梁的刚度为 EI，求该梁的挠度曲线方程，以及 C 端的挠度和转角。

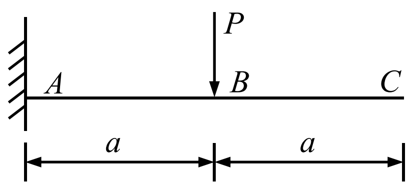


5. 应用叠加原理求梁变形时的条件（　　）

A.必须是小变形的梁　　*B*.必须是静定的梁

C.必须是等截面的梁　　*D*.必须是平面弯曲的梁

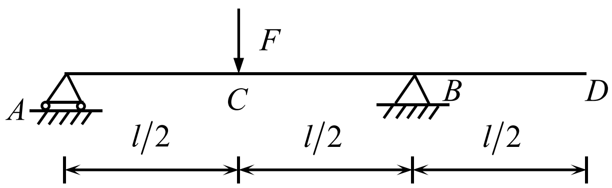
6. 如图所示悬臂梁 AC，如果已知 B 截面的转角和挠度，则 C 截面处的挠度值是_______。



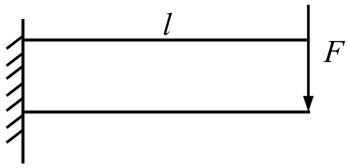
7. 一外伸梁受力如图所示，抗弯刚度为 EI。已知 A 截面的转角 $\theta_A=-\dfrac{Fl^2}{16EI}$，则截面 D 的挠度为（　　）。

$A.\ w_D=\dfrac{Fl^3}{16EI}$　　$B.\ w_D=-\dfrac{Fl^3}{16EI}$

$C.\ w_D=\dfrac{Fl^3}{32EI}$　　$D.\ w_D=-\dfrac{Fl^3}{32EI}$



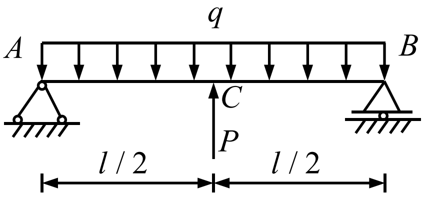
8． 如图所示悬臂梁自由端挠度 $y=\dfrac{Fl^3}{3EI}$，若杆长减少一半，则自由端挠度为（　　）



$A.\dfrac{y}{8}$　　　　$B.\dfrac{y}{2}$

$C.2y$　　　　$D.8y$

9． 求图示梁 C 点挠度为零时 p 与 q 的关系。



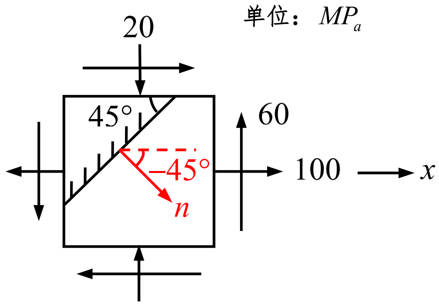
课时七　应力状态分析

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 斜截面上应力	必考	$8\sim12$	大题
2. 主应力与最大切应力			
3. 强度理论	★★★★	$0\sim3$	填空、大题

1. 斜截面上应力

正应力：$\sigma_\alpha=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha$　切应力：$\tau_\alpha=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha$

题 1. 已知图示平面应力状态的单元体，试求指定斜截面上的应力 $\sigma_\alpha,\tau_\alpha$。



解：$\sigma_x=100MP_a$　$\sigma_y=-20MP_a$　$\tau_x=-60MP_a$　$\alpha=-45°$

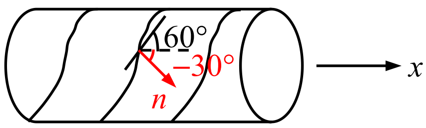
① $\sigma_{-45°}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha$

$$=\frac{100-20}{2}+\frac{100-(-20)}{2}\cos(-90°)+60\sin(-90°)=-20\,MP_a$$

② $\tau_{-45°}=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha$

$$=\frac{100-(-20)}{2}\sin(-90°)-60\cos(-90°)=-60\,MP_a$$

题 2. 如图所示，以绕带焊接成的封闭圆管，焊缝为螺旋线。管的内径为 $d=300mm$，壁厚为 $\delta=1mm$，内压 $P=0.5MP_a$。求沿焊缝斜面上的正应力和切应力。



封闭管内压公式

$\sigma_x=\dfrac{Pd}{4\delta}$　$\sigma_y=\dfrac{Pd}{2\delta}$

解：$\sigma_x=\dfrac{Pd}{4\delta}=\dfrac{0.5\times300}{4\times1}=37.5MP_a$　$\sigma_y=\dfrac{Pd}{2\delta}=\dfrac{0.5\times300}{2\times1}=75MP_a$　$\tau_x=0$　$\alpha=-30°$

$$\sigma_{-30°}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha$$

$$=\frac{37.5+75}{2}+\frac{37.5-75}{2}\times\cos(-60°)-0=46.875MP_a$$

$$\tau_{-30°}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha=\frac{37.5-75}{2}\sin(-60°)+0=16.24\,MP_a$$

2. 主应力与最大切应力

主应力、方位角、最大切应力公式：

主应力：$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}$　　方位角：$\tan 2\alpha=\dfrac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$

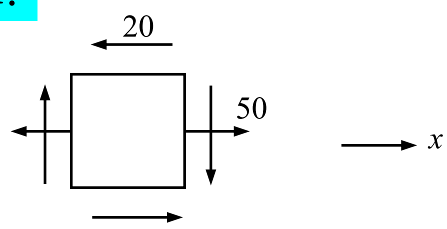
最大切应力：$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

题 1. 已知应力状态如图所示，图中应力单位均为 MP_a，求：

（1）主应力大小，主平面位置；

（2）在单元体上绘出主平面位置及主应力方向；

（3）面内最大切应力。



解：$\sigma_x=50MP_a\quad \sigma_y=0\quad \tau_x=20MP_a$

（1）$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}=\dfrac{50+0}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{50-0}{2}\right)^2+20^2}=\begin{cases}57.02MP_a\\-7.02MP_a\end{cases}$

$$\sigma_1=57.02MP_a\quad \sigma_2=0MP_a\quad \sigma_3=-7.02MP_a$$

$$\tan 2\alpha=\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-2\times 20}{50}=-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha_1=-19.3^\circ\quad \alpha_2=70.7^\circ$$

①求出主应力：$\sigma_{\max}$，$\sigma_{\min}$，σ_z

②主应力排序：$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$

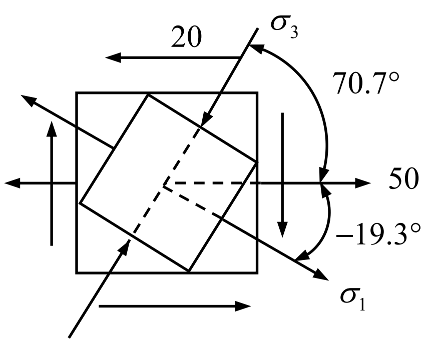
③求方位角

④作图

τ_x 为正，负的角度对应 $\sigma_{\max}$；

τ_x 为负，正的角度对应 $\sigma_{\min}$。

（2）作图：

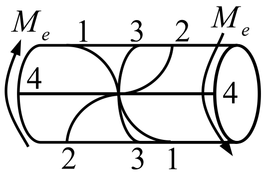


（3）最大切应力：$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\dfrac{57.02-(-7.02)}{2}MP_a=32.02MP_a$

题 2. 进行应力分析时，单元体上剪切应力等于 0 的面称为_______，其上正应力称为_____。

解 ：主平面、主应力

题 3. 图示低碳钢圆轴，两端受扭。关于圆轴的破坏截面，正确的是（　　）。



$A.$沿纵横面4-4破坏　　$B.$沿螺旋面1-1破坏

$C.$沿横截面3-3破坏　　$D.$沿螺旋面2-2破坏

解：C

题 4. 铸铁试件受扭破坏（　　）。

$A.$沿45°斜截面断裂，由最大拉应力引起　　$B.$沿45°斜截面断裂，由最大切应力引起

$C.$沿横截面断裂，由最大切应力引起　　$D.$沿横截面断裂，由最大拉应力引起

解：A

3. 强度理论

第一类强度理论（脆性材料）

①第一强度理论（最大拉应力理论）：$\sigma_{r1}=\sigma_1$

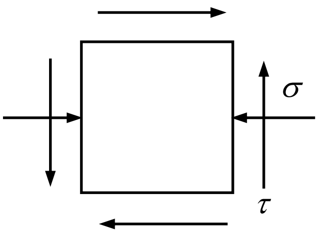
②第二强度理论（最大伸长线应变理论）：$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$

第二类强度理论（塑性材料）

③第三强度理论（最大切应力理论）：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$

④第四强度理论（形状改变比能理论）：$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}$

题 1.如图所示单元体，$\sigma=-8MP_a,\tau=-3MP_a$，则该单元体的主应力分别为______和______；用第四强度理论计算强度时的相当应力 $\sigma_{r4}=$_________。



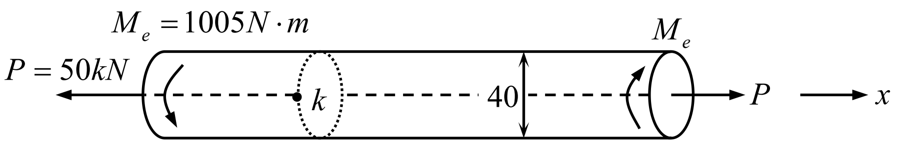
解：$\sigma_x=-8MP_a\quad \sigma_y=0\quad \tau_x=-3MP_a$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^{\ 2}}=-4\pm 5=\begin{cases}1\ \ MP_a\\ -9MP_a\end{cases}$$

$$\sigma_1=1MP_a\quad \sigma_2=0MP_a\quad \sigma_3=-9MP_a$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}=\sqrt{91}MP_a$$

题 2. 圆轴受力如图，试求（1）圆轴表面 k 点的主应力；（2）k 点的第三强度理论相当应力。



解：(1) 由截面法得 k 点：$F_N = 50kN \quad T = -1005N\cdot m$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{4F_N}{\pi d^2}$$

$$\tau = \frac{T}{W_P} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma_x = \frac{4F_N}{\pi d^2} = \frac{4\times 50\times 10^3}{\pi\times(40\times 10^{-3})^2} = 39.79MP_a \qquad \sigma_y = 0$$

$$\tau_x = \frac{T}{W_P} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{-16\times 1005}{\pi\times(40\times 10^{-3})^3} = -79.98MP_a$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} = \frac{39.79+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{39.79-0}{2}\right)^2+79.98^2} = \begin{cases}102.31MP_a\\ -62.52MP_a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 102.31MP_a \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -62.52MP_a$$

(2) 第三强度理论：$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 164.83MP_a$

课时七 练习题

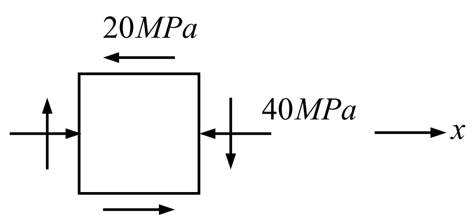
1. 用单元体表示点的应力状态，在主平面上（　）。

A.正应力一定最大 *B*.正应力一定为零

C.切应力一定最大 *D*.切应力一定为零

2. 适用于脆性断裂的强度理论分别为________和__________，适用于塑性屈服的强度理论分别为_______和_________。

3. 图示单元体所描述的应力状态为平面应力状态，单元体第一主应力 $\sigma_1 =$_____MP_a，最大切应力 $\tau_{\max} =$_____MP_a。

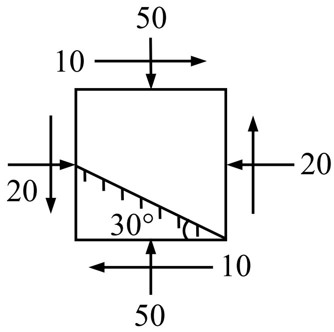


4. 某单元体如图所示，试用解析法求：

（1）指定斜截面上的应力；

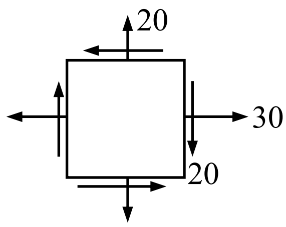
（2）主应力的数值；

（3）在单元体上绘出主应力的位置及主应力的方向。

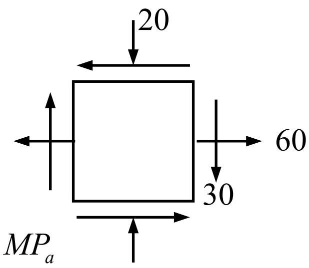


5. 已知某构件危险点处应力状态如图所示，图中应力单位均为 MP_a，求：

（1）主应力的大小及主平面位置；
（2）在单元体上绘出主应力方向；
（3）最大剪应力；
（4）若材料的许用应力为 $80MP_a$，试用第四强度理论校核强度。



6. 构件为钢制件，其危险点应力状态如图所示，$\sigma_x = 60MP_a$，$\sigma_y = -20MP_a$，$\tau_x = 30MP_a$，试按最大切应力理论计算该种情形下的相当应力 σ_{r3}。



单位：MP_a

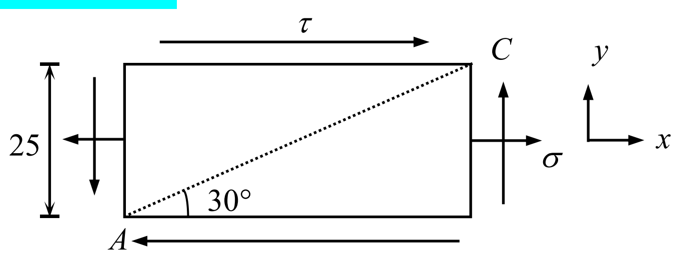
课时八　应变状态分析

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 广义胡克定律	★★★★★	5～10	大题

1. 广义胡克定律

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}\left[\sigma_\alpha - \mu(\sigma_{\alpha+90^0} + \sigma_z)\right]$$（任意角度的应变）

题 1. 从钢构件内取出一单元体，已知 $\sigma = 30MP_a, \tau = 15MP_a$，材料的弹性模量和泊松比分别为 $E = 200GP_a, \mu = 0.30$，试求对角线 AC 的长度改变 Δl。



解：(1) 求给定方向及垂直方向的应力

$$\sigma_x = 30MP_a,\ \sigma_y = 0MP_a,\ \tau_x = -15MP_a$$

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \frac{30}{2} + \frac{30}{2}\cos 60^\circ - (-15)\sin 60^\circ = 35.49MP_a$$

$$\sigma_{120^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \frac{30}{2} + \frac{30}{2}\cos 240^\circ - (-15)\sin 240^\circ = -5.49MP_a$$

$$\sigma_z = 0$$

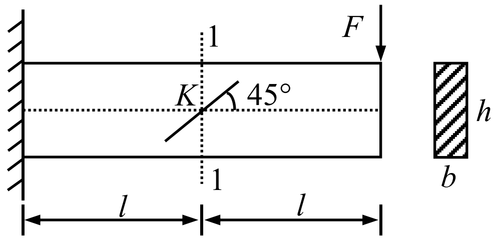
(2) 求给定方位的应变

$$\varepsilon_{30^\circ} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{30^\circ} - \mu(\sigma_{120^\circ} + \sigma_z)\right] = \frac{1}{200\times 10^9}\times\left[35.49 - 0.3\times(-5.49)\right]\times 10^6 \approx 0.1857\times 10^{-3}$$

(3) 求对角线 AC 的长度改变 Δl

$$\Delta l_{AC} = l_{AC}\cdot\varepsilon_{30^\circ} = \frac{25}{\sin 30^\circ}\times 0.1875\times 10^{-3} = 9.285\times 10^{-3}mm$$

题 2. 矩形截面悬臂梁尺寸如图所示，其弹性模量 E，泊松比 μ 均已知，自由端受集中载荷 F 作用。试求悬臂梁外表面中间位置一点 K 点与水平成 $45°$ 方向的线应变 $\varepsilon_{45°}$。



解：$\sigma_x = 0MP_a \qquad \sigma_y = 0MP_a \qquad \tau_x = \frac{3}{2}\frac{F_s}{A} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}$

$$\sigma_{45°} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 90° - \tau_x \sin 90° = 0 + 0 - \frac{3}{2}\frac{F}{bh} = -\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

$$\sigma_{135°} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 270° - \tau_x \sin 270° = 0 + 0 + \frac{3}{2}\frac{F}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

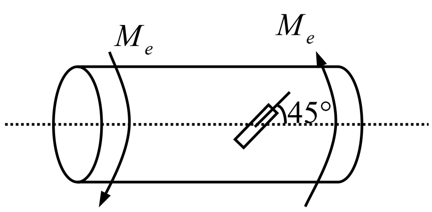
$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_{45°} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{45°} - \mu(\sigma_{135°} + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left(-\frac{3}{2}\frac{F}{bh} - \mu\cdot\frac{3}{2}\frac{F}{bh}\right) = \frac{-3(1+\mu)F}{2Ebh}$$

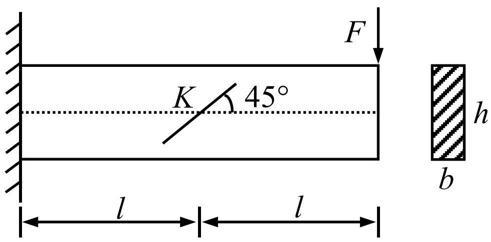
课时八　练习题

1. 图示一受扭圆截面杆，左右两侧面作用外力偶矩 M_e，材料的弹性模量 E、泊松比 μ 已知，杆的直径为 d，求其前侧表面与轴线成 $45°$ 方向的线应变 $\varepsilon_{45°}$。

2. 矩形截面悬臂梁尺寸如图所示，其弹性模量为 E，泊松比为 μ，现测得梁外表面中间位置一点 K 点与水平方向成 $45°$ 的线应变为 $\varepsilon_{45°}$，试求作用于自由端的集中力 F。



题一



题二

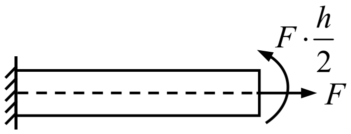
课时九　组合变形

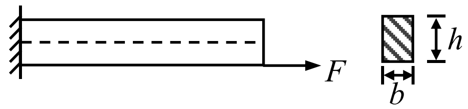
考点	重要程度	占分	常见题型
1. 拉（压）弯组合变形	★★★★	8～10	大题
2. 拉扭组合变形	★★★	8～10	大题
3. 弯扭组合变形	★★★★★	8～12	大题

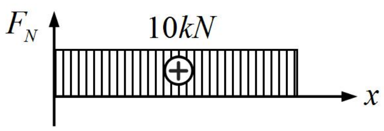
1. 拉（压）弯组合变形

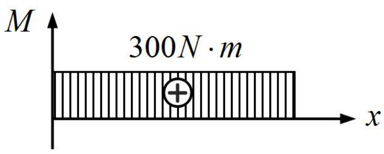
题 1. 如图所示矩形截面悬臂梁，$F=10kN, b=40mm, h=60mm, [\sigma]=20MPa$，试校核该梁的强度。

解：









(机械类)

解题步骤
1. 判断组合类型
2. 画出内力图
3. 找出危险点
4. 代公式校核

危险点在悬臂梁下侧

$$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W_z}=\frac{F_N}{bh}+\frac{6M}{bh^2}$$

$$=\frac{10\times10^3}{40\times10^{-3}\times60\times10^{-3}}+\frac{6\times300}{40\times10^{-3}\times\left(60\times10^{-3}\right)^2}$$

$$=16.67MPa<[\sigma]$$

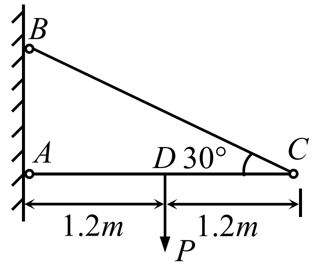
$\Rightarrow$ 该梁满足强度条件。

拉压正应力：$\sigma=\frac{F_N}{A}$

弯曲正应力：$\sigma=\frac{M}{W_z}$

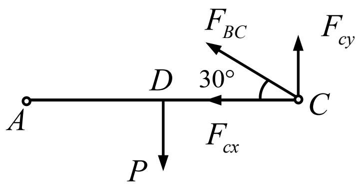
拉弯应力：$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W_z}$

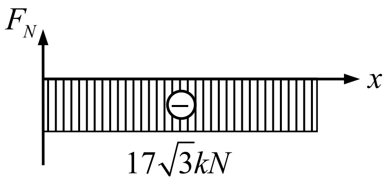
题 2.（压弯）悬臂吊车如图所示。横梁用 20a 工字钢制成。其截面系数$W_Z = 237cm^3$，横截面面积$A = 35.5cm^2$，荷载$P = 34kN$，横梁材料的许用应力$[\sigma] = 125MPa$。试校核该横梁AC的强度。

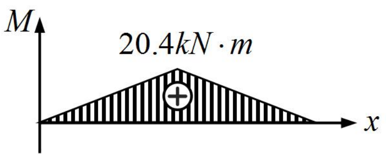


解：设BC杆的内力为F_{BC}

$$\begin{cases} F_{cy} \cdot 2l = P \cdot l \\ F_{cy} = F_{cx} \tan 30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{cx} = 17\sqrt{3}kN \\ F_{cy} = 17kN \end{cases}$$







(机械类)

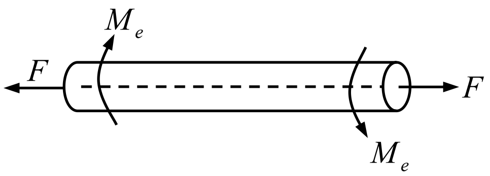
D截面的最上侧为危险点

$$\sigma = \frac{|F_N|}{A} + \frac{M_{\max}}{W_Z} = \frac{17\sqrt{3} \times 10^3}{35.5 \times 10^{-4}} + \frac{20.4 \times 10^3}{237 \times 10^{-6}} = 94.37MPa < [\sigma]$$

$\Rightarrow AC$满足强度条件

2. 拉扭组合变形

题 1. 如图所示圆轴，直径 $d=60mm$，轴的两端作用有 $M_e=4kN\cdot m,\ F=10kN$，材料的许用应力 $[\sigma]=200MPa$，试用第三强度理论校核轴的强度。



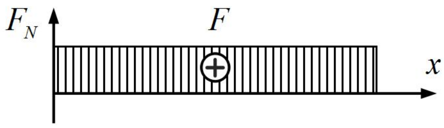
拉压正应力：$\sigma=\dfrac{F_N}{A}$

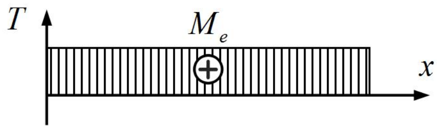
扭转切应力：$\tau_x=\dfrac{T}{W_P}$

第三强度理论：

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_x^{\ 2}+4\tau_x^{\ 2}}$

解：由截面法得 $F_N=F$，$T=M_e$





危险点为轴的最外层：

$$\sigma_x=\frac{F_N}{A}=\frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\frac{4F}{\pi d^2}=\frac{4\times10\times10^3}{\pi\times\left(60\times10^{-3}\right)^2}=3.54MPa$$

$$\tau_x=\frac{T}{W_P}=\frac{M_e}{\frac{1}{16}\pi d^3}=\frac{16M_e}{\pi d^3}=\frac{16\times4\times10^3}{\pi\times\left(60\times10^{-3}\right)^3}=94.3MPa$$

第三强度理论：$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_x^{\ 2}+4\tau_x^{\ 2}}=\sqrt{3.54^2+4\times94.31^2}=188.65MPa<200MPa$

该轴满足强度条件

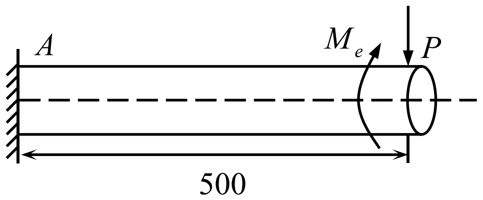
3. 弯扭组合变形

题 1. 如图钢制实心圆截面杆受横向力 P 及扭转力偶矩 M_e 共同作用，且 $P=3kN$, $M_e=2kN\cdot m$，已知杆直径 $d=60mm$，材料的许用应力 $[\sigma]=160MPa$，试求：

1）作出杆件的内力图；

2）用单元体表示杆件固定端截面顶端 A 点的应力状态；

3）校核钢杆的强度。



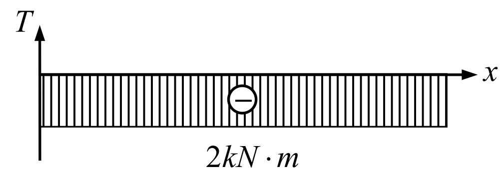
扭转切应力：$\tau_x=\dfrac{T}{W_P}$

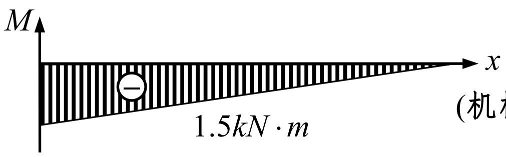
弯曲正应力：$\sigma_x=\dfrac{M}{W_Z}$

第三强度理论：

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_x{}^2+4\tau_x{}^2}$

解：（1）



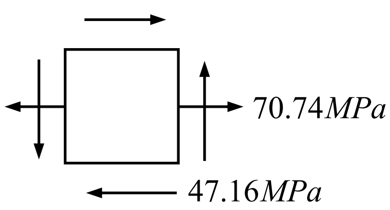


(机械类)

（2）A 点即为危险点

$$\sigma_x=\frac{|M_{\max}|}{W_Z}=\frac{32|M_{\max}|}{\pi d^3}=\frac{32\times1.5\times10^3}{\pi\times(60\times10^{-3})^3}=70.74MPa$$

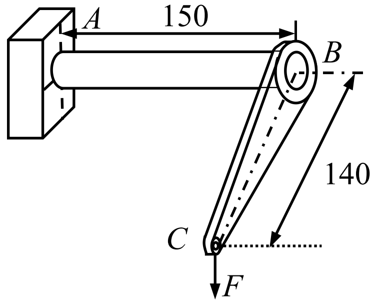
$$\tau_x=\frac{T}{W_P}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{-16\times2\times10^3}{\pi\times(60\times10^{-3})^3}=-47.16MPa$$



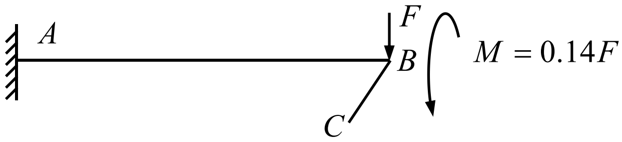
（3）$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_x{}^2+4\tau_x{}^2}=\sqrt{70.74^2+4\times(-47.16)^2}=117.9\,MPa<[\sigma]$

满足强度条件

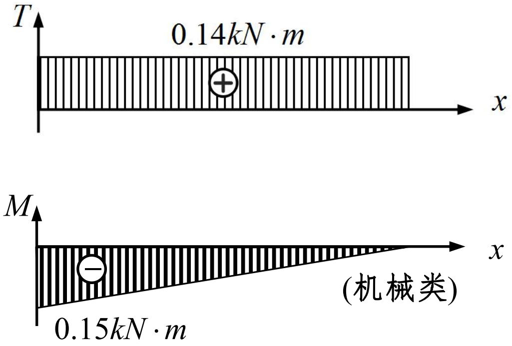
题 2. 如图所示，试按第三强度理论设计轴 AB 的直径。已知载荷 $F=1kN$，许用应力 $[\sigma]=160MP$，画出 AB 轴的受力图及内力图



解：（1）



（2）



> 扭转切应力：$\tau_x=\dfrac{T}{W_P}$
>
> 弯曲正应力：$\sigma_x=\dfrac{M}{W_Z}$
>
> 第三强度理论：
>
> $$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}=\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi d^3}$$

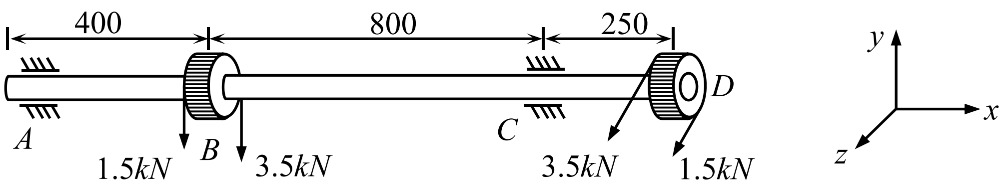
（3）$\sigma_{r3}=\dfrac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}=\dfrac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi d^3}\le[\sigma]$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{0.15^2+0.14^2}\times10^3}{\pi\times160\times10^6}}=0.0236m=23.6mm$$

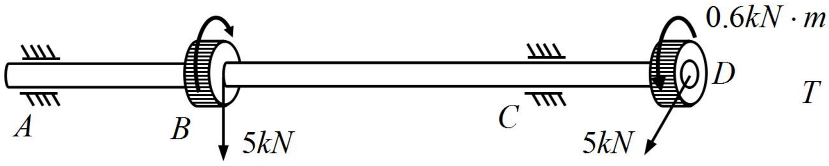
$d=23.6mm$

> 步骤：
>
> ①将力向截面形心简化，生成一个力和一个力偶
>
> ②作出内力图
>
> ③用 $M_{\max}=\sqrt{M_y{}^2+M_z{}^2}$ 求 $M_{\max}$
>
> ④用 $\sigma_{r,3}=\dfrac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}\le[\sigma]$ 反求 d

题 3. 如图所示传动轴，轮 B 带的张力铅直向下，轮 D 带的张力沿水平方向，B、D 两轮直径均为 $D=600mm$，轴材料的许用应力 $[\sigma]=80MPa$。试按第三强度理论确定轴的直径 d。

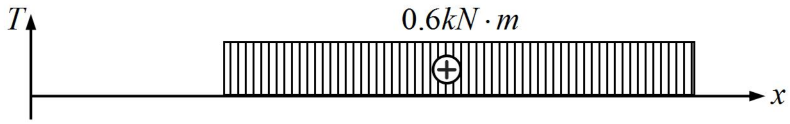


解：将力向截面形心进行简化

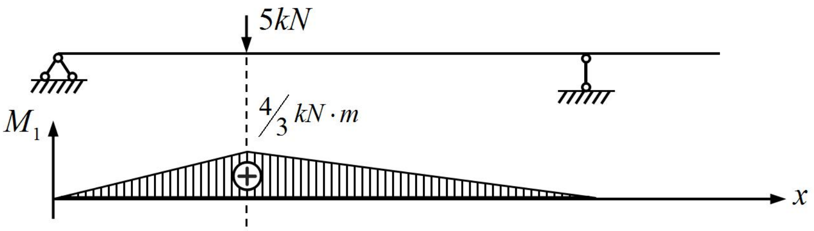


$$T=(3.5-1.5)\frac{0.6}{2}=0.6kN\cdot m$$

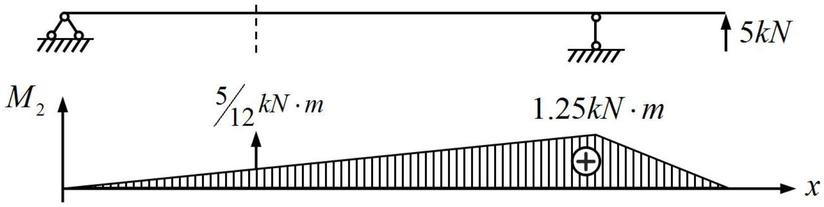
作内力图：①扭矩图



②xoy平面内：



③xoz平面内：



求最大弯矩$M_{\max}$

$$M_B=\sqrt{M_{1,B}{}^2+M_{2,B}{}^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=1.397kN\cdot m$$

$$M_C=1.25kN\cdot m \qquad \Rightarrow M_{\max}=1.397kN\cdot m$$

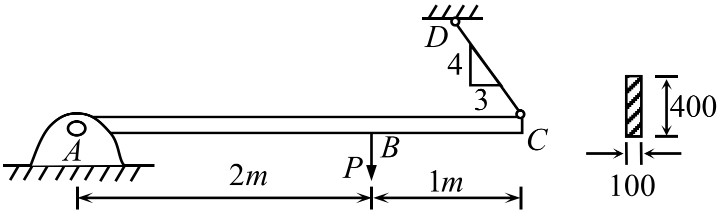
求直径d

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_{\max}{}^2+T_{\max}{}^2}}{W_Z}=\frac{32\sqrt{M_{\max}{}^2+T_{\max}{}^2}}{\pi d^3}\le[\sigma]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32\times\sqrt{1.397^2+0.6^2}\times10^3}{\pi\times80\times10^6}}=0.0578m=57.8mm$$

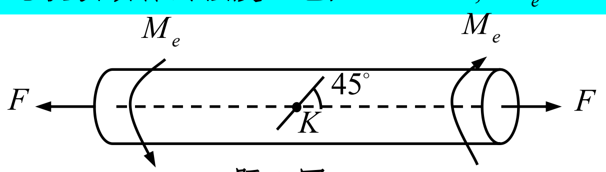
课时九 练习题

1. 已知矩形梁的尺寸为$100mm\times400mm$，A点铰支座，梁ABC由CD拉住，梁的许用应力为$20MPa$，求竖向力P的最大值。

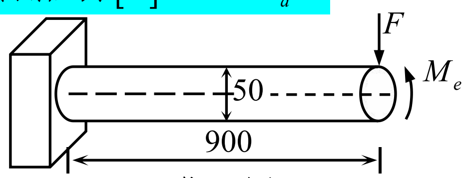


2. 如图所示的圆轴，直径为d，弹性模量为E，泊松比为μ，承受轴向拉力F和扭力偶矩$M_e=Fd$的作用，在轴表面K处测得与轴线成$45°$方向的正应变$\varepsilon_{45°}$，试求拉力F。

3. 圆截面钢杆尺寸如图所示(单位mm)，承受横向载荷F和扭力偶矩M_e作用。试按第三强度理论校核该杆的强度。已知$F=1kN$，$M_e=1.2kN\cdot m$，许用应力$[\sigma]=160MP_a$。



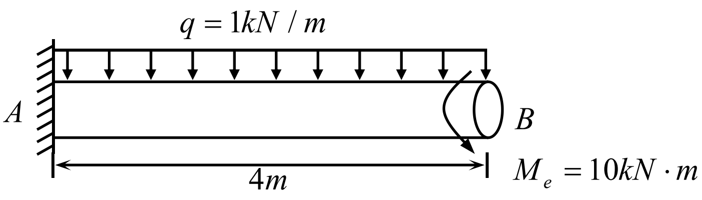
题 2 图



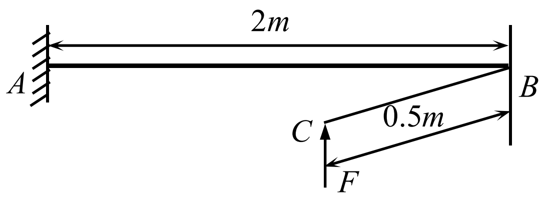
题 3 图

4. 图示圆形截面钢杆，已知杆的直径$d=100mm$，$[\sigma]=160MPa$，试按第三强度理论校核其强度。

5. 图示钢制圆杆AB的横截面积为$A=80\times10^{-4}m^2$，抗弯截面系数$W=100\times10^{-6}m^2$，材料的许用应力$[\sigma]=180MPa$，$F=8kN$，用第三强度理论校核强度。

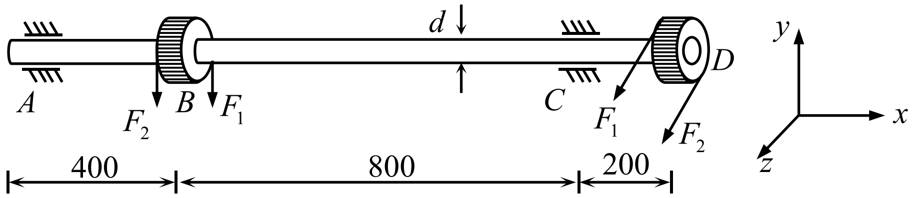


题 4 图



题 5 图

6. 如图所示传动轴，直径$d=50mm$。D轮上的皮带是水平的，B轮上的皮带是铅直的。若两轮的直径均为$500mm$，且$F_1=4kN$，$F_2=2kN$，$[\sigma]=160MPa$，试用第三强度理论进行强度校核。



课时十　压杆稳定

考点	重要程度	占分	题型
1. 临界压力	★★★★	3～5	选择、填空
2. 稳定性计算	必考	8～12	大题

1. 基础知识

临界压力：$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

变形公式：$F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$　（适用于长细杆（大柔度杆））

1）$F\le F_{cr}$ 时，杆件稳定；$F>F_{cr}$ 时，杆件失稳

2）μ：压杆的长度因数（杆端约束情况）

支持方式	两端铰支	一端自由 另一端固定	两端固定	一端铰支 另一端固定
μ	1.0	2.0	0.5	0.7

3）E：弹性模量（材料特性）　I：中性轴惯性矩（截面尺寸）　l：杆长

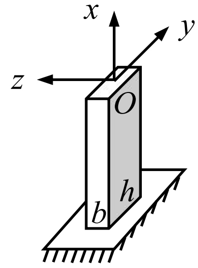
λ：柔度系数　A：横截面积

题 1. 影响细长压杆稳定性的主要因素有__________、__________、__________、__________。

解：材料特性、截面尺寸、杆端约束情况、杆长

题 2. 图示压杆，一端固定一端自由，横截面为矩形，且 $h>b$，压杆失稳时首先__________

A. 在yoz面内弯曲　*B.* 在xoy面内弯曲　*C.* 在xoz面内弯曲



答案：***C***

由 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 知，临界压力与 I 成正比，故压杆首先在惯性矩小的平面内失稳。

题 3. 材料和柔韧度都相同的两根压杆（ ）

$A.$ 临界应力一定相等，临界压力不一定相等

$B.$ 临界应力不一定相等，临界压力一定相等

$C.$ 临界应力和压力都一定相等

$D.$ 临界应力和压力都不一定相等

答案：A.

由 $F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$ 知，当 E、λ 相同时，σ_{cr} 相同。但若截面面积 A 不同时，F_{cr} 则不同。

2. 稳定性计算

稳定性解题步骤：

1） 惯性半径：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}$

2） 柔度系数：$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$

3） 计算：$\lambda_s=\dfrac{a-\sigma_s}{b}$、$\lambda_p=\pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}}$

常见横截面惯性半径：

圆截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\dfrac{d}{4}$

圆环截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi(D^4-d^4)}{\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)}}=\dfrac{\sqrt{D^2+d^2}}{4}$

矩形截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}}=\dfrac{h}{\sqrt{12}}$ （h 为较小边长）

4） 判别类型，计算临界压力 F_{cr}

① $\lambda\le\lambda_s$ 小柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=\sigma_s A$

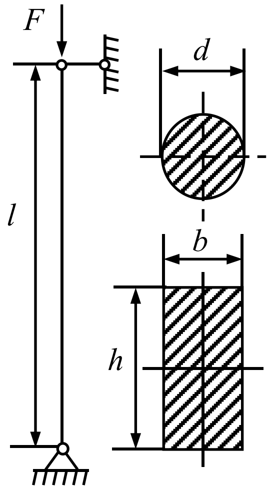
② $\lambda_s<\lambda<\lambda_p$ 中柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=(a-b\lambda)A$

③ $\lambda\ge\lambda_p$ 大柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$

题 1. 如图，两端球形铰支细长压杆，弹性模量 $E=200GPa$。试用欧拉公式计算其临界载荷。

（1）圆形截面：$d=25mm, l=1.1m$

（2）矩形截面：$h=2b=40mm, l=1.0m$



解：(1)：1）惯性半径 i

$$i=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\frac{d}{4}$$

2）柔度系数 λ

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{4\mu l}{d}=\frac{4\times1\times1.1}{25\times10^{-3}}=176$$

3）临界力 F_{cr}

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^3 Ed^2}{4\lambda^2}=\frac{\pi^3\times200\times10^9\times(25\times10^{-3})^2}{4\times176^2}=31.28kN$$

(2)：1）惯性半径 i

$$i=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}hb^3}{bh}}=\frac{b}{\sqrt{12}}$$

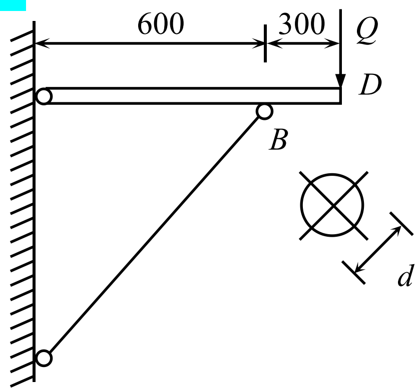
2）柔度系数 λ

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\sqrt{12}\mu l}{b}=\frac{\sqrt{12}\times1\times1.0}{20\times10^{-3}}=173$$

3）临界力 F_{cr}

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{173^2}\times20\times40\times10^{-6}=52.76kN$$

题 2. 题中托架 AB 杆的直径 $d=2mm$，长度 $l=1000mm$，两端可视为铰支，材料为 $Q235$ 钢，$E=200GPa$，$\sigma_p=200MPa$，$\sigma_s=235MPa$，其直线经验公式为 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$。若 $Q=40N$，AB 杆的稳定安全系数 $n_{st}=2$，则 AB 杆是否安全。



解：①惯性半径：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\dfrac{d}{4}$

②柔度系数：$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{4\mu l}{d}=\dfrac{4\times1\times1}{2\times10^{-3}}=200$

③由 $\sigma_{cr}=a-b\lambda=304-1.12\lambda \quad \Rightarrow a=304, b=1.12$

$\lambda_s=\dfrac{a-\sigma_s}{b}=\dfrac{304-235}{1.12}=61.6 \qquad \lambda_p=\pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}}=\pi\times\sqrt{\dfrac{200\times10^9}{200\times10^6}}=99.35$

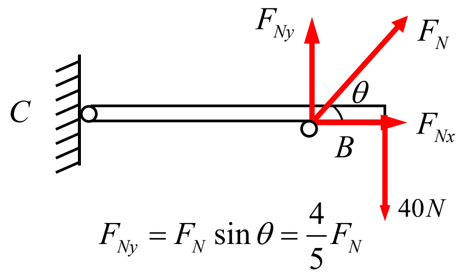
④判别类型，计算临界压力 F_{cr} $\qquad \lambda>\lambda_p \Rightarrow$ 此杆为大柔度杆

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^3Ed^2}{4\lambda^2}=\frac{\pi^3\times200\times10^9\times(2\times10^{-3})^2}{4\times200^2}=155N \qquad \Rightarrow [F_{cr}]=\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{155}{2}=77.5N$$

⑤求 AB 的内力

$\dfrac{4}{5}F_N\times600=40\times900 \qquad \Rightarrow F_N=75N$

$F_N<[F_{cr}] \qquad \Rightarrow AB$杆安全



$F_{Ny}=F_N\sin\theta=\dfrac{4}{5}F_N$

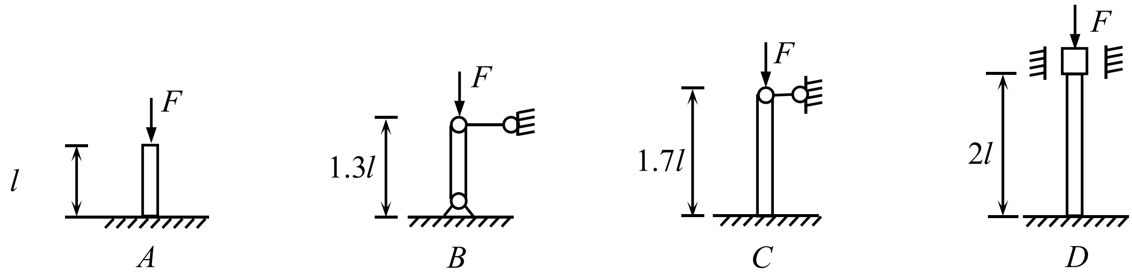
课时十 练习题

1. 压杆的临界力与________、________和________等因素有关。

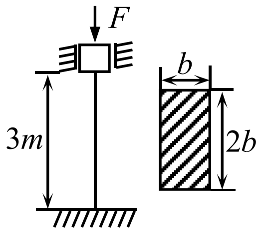
2. <判断题>细长压杆总是在惯性矩较小的方向最先失稳（　）。

3. 一圆截面的细长压杆，保持其它条件不变，若仅将压杆直径缩小一半，则临界力变为原来的________倍；若仅将压杆长度缩小一半，则临界力变为原来的________倍。

4. 直径、材料相同，而约束不同的圆截面细长压杆，哪个临界力最大（　　）



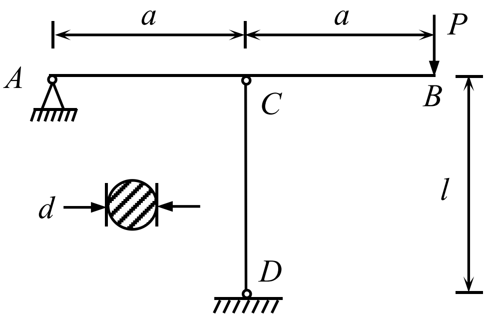
5. 如图所示，两端固定的压杆，材料为 $Q235$ 钢，$b=40mm$,$E=200GPa$ ，$\sigma_p=200MPa$ 。试计算图示矩形截面压杆的临界力。



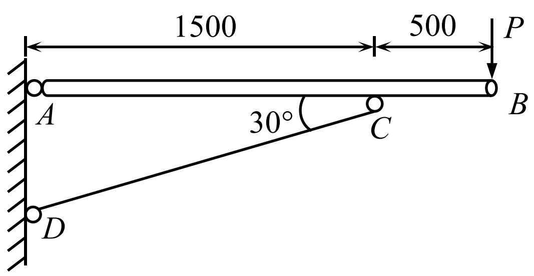
6. 图示结构中，CD 为圆形截面钢杆，已知 $l=800mm$ 、$d=20mm$ ，钢材的弹性模量 $E=2\times10^5MPa$ ，比例极限 $\sigma_p=200MPa$ ，$\lambda_p=100$ ，$\lambda_s=60$ ，稳定安全系数 $n_{st}=3$ ，经验公式 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda(MPa)$ ，试求：

（1）计算 CD 杆的柔度；

（2）从 CD 杆的稳定性角度考虑求该结构的容许荷载 $[P]$ 。



7. 图示所示，AB 为刚性梁。CD 为钢管，其外径 $D=4cm$ ，内径 $d=3cm$ ，长度 $l=1m$ ，弹性模量 $E=200GPa$ ，直线公式中对应的 $a=300MPa$ ，$b=1.12MPa$ ，用欧拉公式的下限柔度值 $\lambda_1=100$ （即 $\lambda_p=100$ ），应用直线公式的下限柔度值 $\lambda_2=60$ （即 $\lambda_s=60$ ），规定安全因数 $n_{st}=4$ ，试按压杆 CD 的稳定条件求许可荷载 P 的最大值。

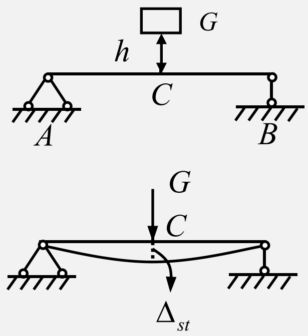


课时十一　冲击载荷与交变应力

考点	重要程度	占分	题型
1. 冲击载荷	★★★	3～10	填空、大题
2. 交变应力	★★	0～3	填空

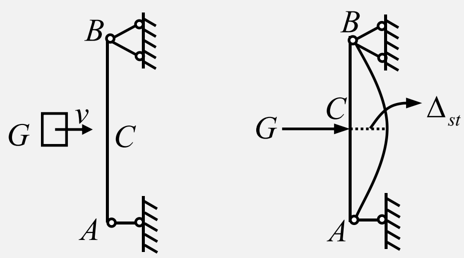
1. 冲击载荷

（1）竖直冲击



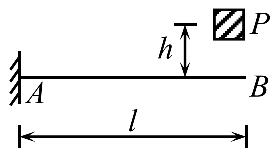
冲击载荷因数：$K_d = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{st}}}$

（2）水平冲击



冲击载荷因数：$K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

题 1. 图示梁的抗弯刚度为 EI，若在梁的端点 B 截面正上方高 h 处受到重量为 P 的物体冲击，则梁的最大挠度应为________。



解：（1）求对应静载荷作用下的静位移

$$\Delta_{st} = w_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$

（2）求冲击载荷因数 K_d

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Pl^3}}$$

（3）计算最大挠度 w_d

$$w_d = K_d w_B = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Pl^3}}\right)\frac{Pl^3}{6EI}$$

解题步骤：

1求静物理量

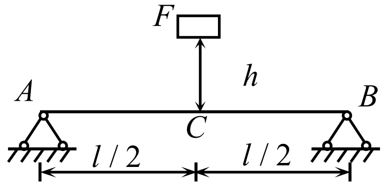
2求冲击载荷因数 K_d

3欲求量等于静物理量乘以 K_d

题 2. 图示简支梁抗弯刚度为 EI，重量为 F 的物体从高度 h 处自由下落冲击中点 C。跨长为 l 的简支梁中点作用有集中力 F 时，梁中点的挠度 $w=\dfrac{Fl^3}{48EI}$，梁的弯曲截面系数为 W_Z，试求：

（1）动荷系数 K_d 表达式（用 G、h、l、EI、W_Z 表示）；

（2）AB 梁的最大正应力。



解：（1）$\Delta_{st}=w_C=\dfrac{Fl^3}{48EI}$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{96EIh}{Fl^3}}$$

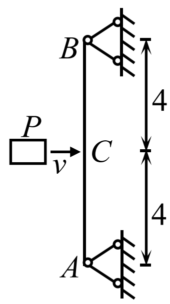
（2）①求 AB 梁的静最大应力

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Fl \qquad \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_Z}=\frac{Fl}{4W_Z}$$

②求 AB 梁的动最大应力

$$\sigma_d=K_d\sigma_{\max}=\left(1+\sqrt{1+\frac{96EIh}{Fl^3}}\right)\frac{Fl}{4W_Z}$$

题 3. 如图示，冲击物的重量 $P=500kN$，冲向梁时的速度 $v=0.35m/s$，冲击载荷作用在梁的中点处，梁的抗弯截面模量 $W=10\times10^{-3}m^3$，截面对中性轴的惯性矩 $I=5\times10^{-3}m^4$，弹性模量 $E=200GPa$，许用应力 $[\sigma]=160MPa$，试校核梁在承受水平冲击载荷作用时强度



解:(1)求静最大应力：

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Pl \qquad \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{Pl}{4W}=\frac{500\times10^3\times8}{4\times10\times10^{-3}}=100MPa$$

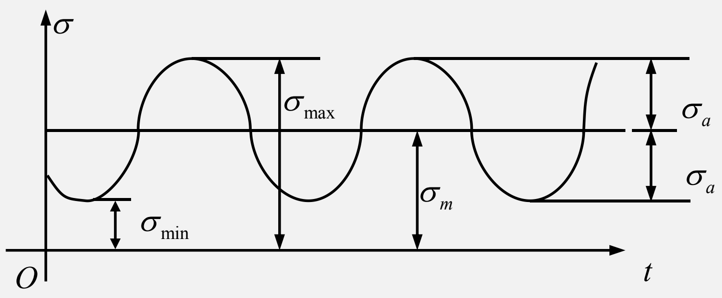
(2)求冲击载荷因数 K_d：

$$\Delta st=\frac{Pl^3}{48EI} \qquad K_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}=\sqrt{\frac{48EIv^2}{gPl^3}}=\sqrt{\frac{48\times200\times10^9\times5\times10^{-3}\times0.35^2}{9.8\times500\times10^3\times8^3}}=1.531$$

(3)求动最大应力，并校核

$$\sigma_d=K_d\cdot\sigma_{\max}=1.531\times100=153.1MPa<[\sigma]$$　　满足强度条件

2. 交变应力

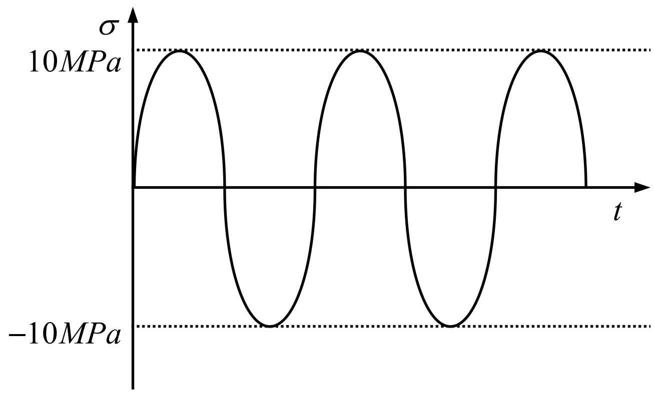


（1）循环特征：$r=\dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

（2）应力幅值：$\sigma_a=\dfrac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$

（3）平均应力：$\sigma_m=\dfrac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$

题 1. 交变应力随时间变化的曲线如图示，其所表示的交变应力对应的循环特征 $r=$______，应力幅值 $\sigma_a=$______平均应力 $\sigma_m=$______



解：$-1,\ 10,\ 0$

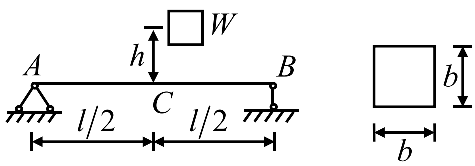
解析：$r=\dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}=\dfrac{-10}{10}=-1$

$$\sigma_a=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\frac{10-(-10)}{2}=10$$

$$\sigma_m=\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}=\frac{10+(-10)}{2}=0$$

课时十一　练习题

1. 正方形横截面简支梁如图所示，重物重量 $W=1kN$，至高度 $h=50mm$ 自由下落冲击梁的中点 C。已知梁的跨度 $l=3m$，正方形横截面边长 $b=120mm$，材料的弹性模量 $E=200GPa$，求梁的最大弯曲正应力。



2. 图示，交变应力的循环特征 r，平均应力 σ_m，应力幅度 σ_a 分别为_______。

$A.\ -10,20,10$　　　$B.\ 30,10,20$

$C.\ -\dfrac{1}{3},20,10$　　　$D.\ -\dfrac{1}{3},10,20$