

高斯课堂系列课程

《力学》

习题答案

(微信扫一扫)



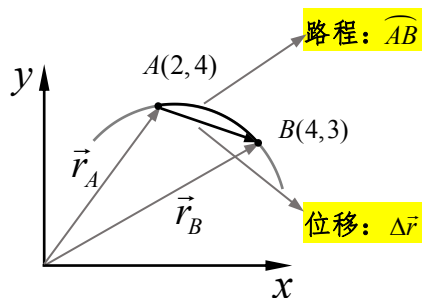
版权声明：

内容来自高斯课堂原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

课时一 质点运动学(一)

考点	重要程度	占 分	常见题型
1. 位移/速度/加速度	基础知识	0~3	选择
2. $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ 型	必考	5~10	大题
3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型			
4. 相对运动	★★★	0~3	填空

1. 位移、速度、加速度



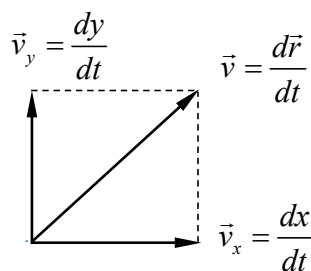
①位矢 (位置矢量): 描述质点位置

$$\vec{r}_A = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad \vec{r}_B = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

②位移: 起点指向终点, 矢量有大小, 有方向

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4-2)\vec{i} + (3-4)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

③路程: \widehat{AB} (弧长)

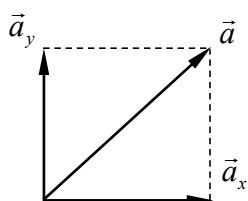


④速度 (矢量有大小, 有方向)

$$\text{平均速度: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1}$$

$$\text{速度 (瞬时速度): } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\text{速度大小: } |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \frac{ds}{dt}$$



⑤加速度:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

一个是速度对时间导数, 表示加速度

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

一个是速度大小对时间导数, 表示切向加速度大小

$$\text{大小: } |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2}$$

补充知识点:

圆周运动向心加速度: $a_n = \frac{v^2}{R}$, 方向指向圆心

题 1. 一质点在 xoy 平面内运动，其运动学方程为 $x=3\cos 4t$ ， $y=3\sin 4t$ ，则 t 时刻质点的位矢

$\vec{r}(t) =$ _____

解： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 3\cos 4t \vec{i} + 3\sin 4t \vec{j}$

题 2. 已知平面内运动方程为 $x=at^2, y=bt^2$ （其中 a, b 为常量），则该质点运动轨迹为（ ）

A. 双曲线

B. 抛物线

C. 圆周

D. 直线

解： $\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$ 是直线方程，故选 D。

题 3. 一运动质点在某瞬间矢径 $\vec{r}(x, y)$ 的端点处，其速度大小为（ ）

A. $\frac{dr}{dt}$

B. $\frac{d\vec{r}}{dt}$

C. $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$

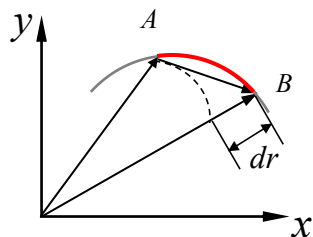
D. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

解： A. $\frac{dr}{dt}$ 表示 $|\vec{r}|$ 大小的变化量，为径向变化，故错误。

B. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ，表示速度，即有大小又有方向，故错误。

C. $d|\vec{r}| = dr$ ，和 A 一样，故错误。

D. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ ，故正确。



题 4. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（ v 表示任一时刻质点的速率）（ ）

A. $\frac{dv}{dt}$

B. $\frac{v^2}{R}$

C. $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$

D. $\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

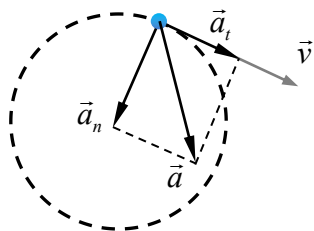
解：质点作圆周运动，故有切向加速度和法向加速度

A. $\frac{dv}{dt} = a_t$ 切向加速度大小

B. $\frac{v^2}{R} = a_n$ 法向加速度大小

C. $a_t + a_n$ 为代数和，错误。

D. $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$ ，正确



2. $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ 型

题 1. 质点的运动方程为 $\vec{r} = (2 + 2t^2)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t\right)\vec{j}$ ，求 $t = 2$ 时的速度和加速度。

$$\text{解： } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} + 2t\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

解题步骤：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

题 2. 已知某质点的运动方程为 $x = 2t$ ， $y = 2 - t^2$ ，式中 x 以 m 计， t 以 s 计，求：

- 1) 位置矢量表达式，速度和加速度表达式；
- 2) 前 $2s$ 内质点的平均速度和平均加速度；
- 3) 第 $2s$ 内质点的平均速度；
- 4) 计算 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度。

$$\text{解： (1) } \vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}$$

$$(2) \quad t = 0 \text{ 时 } \vec{r}_0 = 2\vec{j}, \quad \vec{v}_0 = 2\vec{i}$$

$$t = 2 \text{ 时 } \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - 2\vec{j} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j}}{2 - 0} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = (2\vec{i} - 4\vec{j}) - 2\vec{i} = -4\vec{j}$$

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{-4\vec{j}}{2 - 0} = -2\vec{j}$$

$$(3) \quad t = 1 \text{ 时 } \vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} \quad t = 2 \text{ 时 } \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - (2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j}}{2 - 1} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$(4) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j} \quad \text{故 } 1s \text{ 末和 } 2s \text{ 末质点的加速度 } \vec{a} = -2\vec{j}$$



3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

题 1. 设质点沿 x 轴作匀变速直线运动，加速度为 a 不随时间变化，初速度为 v_0 ，初位置为 x_0 ，试根据速度、加速度的定义求出该质点的速度公式和运动学方程。

$$\text{解: } a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$\text{解得: } v - v_0 = at \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt = (v_0 + at) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$\text{解得: } x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

匀变速直线运动:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

题 2. 一质点做直线运动，加速度 $a = 2m/s^2$ ，开始时 $v_1 = 2m/s$ ，一段时间后 $v_2 = 6m/s$ ，问质点在这段时间内的位移大小。

$$\text{解: 由 } v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \quad 6^2 - 2^2 = 2 \times 2 \times (x_2 - x_1) \quad x_2 - x_1 = 8m$$

题 3. 质点沿直线运动，加速度 $a = 4 - t^2$ ，式中 a 的单位为 m/s^2 ， t 的单位为 s ，如果当 $t = 3s$ 时， $x = 9m, v = 2m/s$ ，求质点的运动方程。

$$\text{解: } a = 4 - t^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = (4 - t^2) dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (4 - t^2) dt$$

$$\text{解得: } \Rightarrow v = v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \quad \text{①}$$

$$v = v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \left(v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \right) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \right) dt$$

$$\text{解得: } x = x_0 + v_0 t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 \quad \text{②}$$

$$t = 3s \quad x = 9m \quad v = 2m/s \text{ 代入 ① ② 得: } v_0 = -1m/s \quad x_0 = 0.75m$$

$$\text{所以质点的运动方程为: } x = 0.75 - t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 \quad (m)$$

题 4. 一质点沿一直线运动，其加速度为 $a = -2x$ ，式中 x 的单位为 m ， a 的单位为 m/s^2 。试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系。设当 $x_0 = 1$ 时， $v_0 = 4m/s$ 。

$$\text{解: } a = -2x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -2x$$



$$\text{分离变量得: } vdv = -2xdx \quad \Rightarrow \int_{v_0}^v vdv = \int_{x_0}^x -2xdx$$

$$\text{解得: } \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -x^2 + x_0^2$$

$$\text{代入 } x_0 = 1 \quad v_0 = 4 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - 8 = -x^2 + 1 \quad \Rightarrow v^2 = -2x^2 + 18$$

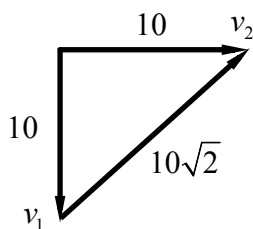
4. 相对运动

题 1. 甲船以 $v_1 = 10m/s$ 的速度向南航行, 乙船以 $v_2 = 10m/s$ 的速度向东航行, 则甲船上的人观察乙船的速度大小为 _____

解: v_1 : 牵连速度; v_2 : 绝对速度

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{\text{相对}}$$

$$\vec{v}_{\text{相对}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 10\sqrt{2}m/s$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{绝对}} &= \vec{v}_{\text{牵连}} + \vec{v}_{\text{相对}} \\ \vec{a}_{\text{绝对}} &= \vec{a}_{\text{牵连}} + \vec{a}_{\text{相对}} \end{aligned}$$

课时一 练习题答案

1. 一质点在平面内运动, 其运动方程为 $x = 2t, y = 4t^2 + 4t + 1$, 则此运动的轨迹方程为 ()

$$A. y = x^2 + x + 1$$

$$B. y = (x+1)^2$$

$$C. y = 2(x+1)$$

$$D. y = (x+2)^2$$

2. 质点作曲线运动, \vec{r} 表示位置矢量, \vec{v} 表示速度, \vec{a} 表示加速度, s 表示路程, a_t 表示切向加速度, 下列表达式中正确的 ()

$$\textcircled{1} \frac{dv}{dt} = \vec{a} \quad \textcircled{2} \frac{dr}{dt} = v \quad \textcircled{3} \frac{ds}{dt} = v \quad \textcircled{4} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = a_t$$

$$A. \textcircled{1}\textcircled{4}$$

$$B. \textcircled{2}\textcircled{4}$$

$$C. \textcircled{2}$$

$$D. \textcircled{3}$$

3. 质点作曲线运动, \vec{r} 表示位置矢量, s 表示路程, v 表示速率, a_t 表示切向加速度, 下列表达式中 ()

$$A. \frac{dv}{dt} = a, \frac{d|\vec{r}|}{dt} = v$$

$$B. \frac{d|\vec{v}|}{dt} = a_t, \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = v$$

$$C. \frac{ds}{dt} = v, \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = a_t$$

$$D. \frac{d\vec{r}}{dt} = v, \frac{d|\vec{v}|}{dt} = a$$

4. 一质点在平面上运动, 已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$ (其中 a, b 为常量), 则该质点做 ()

$$A. \text{匀速直线运动}$$

$$B. \text{变速直线运动}$$

$$C. \text{抛物线运动}$$

$$D. \text{一般曲线运动}$$



5. 某质点作直线运动的运动方程为 $x = 3t - 5t^3 + 6(SI)$ ，则该质点作()

- A. 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向
- B. 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向
- C. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向
- D. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

6. 已知质点的运动方程为 $\vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j}$ ，质点 $t = 1s$ 到 $t = 2s$ 内质点的平均速度 $\bar{v} = \underline{\hspace{2cm}}$

m/s ，平均加速度 $\bar{a} = \underline{\hspace{2cm}} m/s^2$

7. 已知质点沿 x 轴作直线运动，运动方程 $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$ ， x 的单位为 m ， t 的单位为 s 。求：

- 1) 质点在运动开始后 $4.0s$ 内的位移的大小；
- 2) 质点在该时间内所通过的路程；
- 3) $t = 4s$ 时质点的速度和加速度。

8. 一物体做直线运动，运动方程为 $x = 6t^2 - 2t^3$ ，式中各量的单位均为 (SI) 制，求：

- (1) 第二秒内的平均速度；
- (2) 第三秒末的速度；
- (3) 第一秒末的加速度。

9. 已知一质点做直线运动，其加速度 $a = 2 + t$ ，其中 a 的单位 m/s ， t 的单位 s ，求质点的运动方程（已知 $v_0 = 0, x_0 = 0$ ， v_0 为初始速度， x_0 为初始位移）

10. 一艘正在沿直线行驶的快艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度大小平方成正比，即 $dv/dt = -kv^2$ ，式中 k 为常量，求发动机关闭后又行驶的距离与速度大小的关系（ v_0 为发动机关闭时速度， x 为行驶的距离）

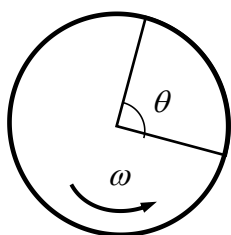
11. 雨滴以速率 v 落到静止的车窗玻璃时，方向竖直向下，问当车相对于地面以速率 v_0 向西行驶，车上的人观测的雨的速度。



课时二 质点运动学（二）

考点	重要程度	占 分	题型
1. 角位移/角速度/角加速度	基础知识	不单独出题	无
2. $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\beta}$ 型	★★★	3~10	选填为主 偶尔大题
3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型	★★★★		
4. 角量与线量关系	必 考		

1. 角位移、角速度、角加速度



角位移: θ 单位: rad (弧度) 转过的角度
角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 单位: rad/s , 单位时间内转过的角度
角加速度: $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 单位: rad/s^2 单位时间角速度的变化
周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 单位: s 转一周所用的时间

2. $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\beta}$ 型

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

题 1. 某质点的角位置和时间关系为 $\theta = 4t - 3t^2 + t^3 (SI)$, 则在 2 秒末的角速度大小 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$,
角加速度大小 $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。在 2 秒末到 4 秒末这段时间内, 平均角速度大小 $\bar{\omega} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2 \big|_{t=2} = 4 \text{ rad/s}$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -6 + 6t \big|_{t=2} = 6 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 2s \text{ 时 } \theta_2 = 4, \quad t = 4s \text{ 时 } \theta_4 = 32 \quad \Delta\theta = \theta_4 - \theta_2 = 32 - 4 = 28$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{28}{4-2} = 14 \text{ rad/s}$$

3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \beta dt$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt$$

题 1. 已知匀速圆周运动, 角加速度为 β , $t=0$ 时, 角速度为 ω_0 , 角位移为 θ_0 , 试用定义公式, 求角速度和角位移表达式。



解： $\beta = \frac{d\omega}{dt} \quad d\omega = \beta dt \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt$

解得： $\omega - \omega_0 = \beta t \quad \Rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \beta t)dt \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \beta t)dt$

解得： $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \quad \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$

题 2. 搅拌机叶片以恒定角加速度 1.50 rad/s^2 转动，求：

(1) 从静止启动后经过多少时间角速度将达到 36.0 rad/s ?

(2) 在此时间内共转过多少转？

解：(1) 由 $\omega = \omega_0 + \beta t$ 得

$$36 = 0 + 1.5t \quad \Rightarrow t = 24s$$

(2) 由 $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 24^2 = 432 \text{ rad}$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{432}{2 \times 3.14} = 68.8 \quad (\text{转})$$

匀变速圆周运动：

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$$

题 3. 绕定轴转动的飞轮，均匀减速， $t=0$ 时 $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ ， $t=20$ 时 $\omega = 0.8\omega_0$ 则飞轮的角加

速度 $\beta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad/s}^2$ ，转过的角度 $\theta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$ 。

解：依题意知 $t=0 \quad \omega_0 = 5$ ， $t=20 \quad \omega = 0.8\omega_0 = 4$

由 $\omega = \omega_0 + \beta t \quad \Rightarrow \quad 4 = 5 + \beta \times 20 \quad \text{解得：} \beta = -0.05 \text{ rad/s}^2$

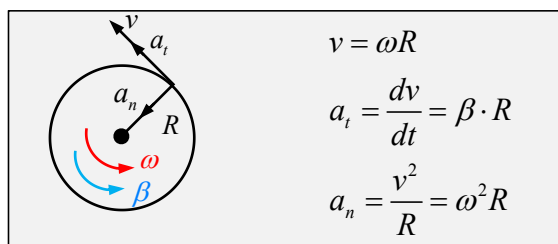
由 $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \beta \cdot \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \frac{4^2 - 5^2}{-2 \times 0.05} = 90 \text{ rad}$

4. 角量与线量关系

题 1. 质点在作半径为 R 的圆周运动，质点的线速度 v 与角速度 ω 的关系为 ，质点的切

向加速度 a_t 与角加速度 β 的关系为 ；质点的法向加速度 a_n 与角速度 ω 的关系为 。

解： $v = \omega R \quad a_t = \beta R \quad a_n = \omega^2 R$



题 2. 质点沿半径为 R 的圆周运动, 运动学方程为 $\theta = 3 + 2t^2 (SI)$, 则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$; 切向加速度 $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t$ $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 4$ $\Rightarrow a_n = \omega^2 R = (4t)^2 R = 16Rt^2$ $a_t = \beta \cdot R = 4R$

题 3. 一质点在半径为 $0.1m$ 的圆周上运动, 其角位置变化关系为 $\theta = 2 + 4t^3 (rad)$ 。问:

- (1) 在 $t = 2s$ 时, 质点的法向加速度和切向加速度大小各为多少?
- (2) 当切向加速度大小恰等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少?
- (3) 在什么时刻, 切向加速度和法向加速度恰好大小相等?

解: (1) $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$ $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 24t$

法向加速度: $a_n = \omega^2 R = (12t^2)^2 \times 0.1 = 14.4t^4 \Big|_{t=2} = 230.4 \text{ m/s}^2$

切向加速度: $a_t = \beta R = 24t \times 0.1 = 2.4t \Big|_{t=2} = 4.8 \text{ m/s}^2$

(2) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2}$

依题意: $a_t = \frac{1}{2}a \Rightarrow 2.4t = \frac{1}{2}\sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2} \Rightarrow t^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 3.15(rad)$

(3) 依题意 $a_t = a_n \Rightarrow 2.4t = 14.4t^4$ 解得 $t = 0.55s$

课时二 练习题

1. 某转盘的角位置和时间关系为 $\theta = 2t - t^2 + 2t^3 (SI)$, 则在 1 秒末的角速度大小 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$, 角加速度大小 $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若飞轮的运动方程为 $\theta = 2 + 4\pi t + 2\pi^2 t^2 (SI)$, 则其角加速度 β 为 ()

A. $\beta = 4\pi^2 t + 4\pi$

B. $\beta = 4\pi^2$

C. $\beta = 4\pi^2 t$

D. $\beta = 4\pi t$



3. 物体做匀速圆周运动的半径为 r ，线速度大小为 v ，角速度为 ω ，周期为 T ，向心加速度为 a ，关于这些物理量之间的关系，下列表示正确的是（ ）

A. $v = \frac{\omega}{r}$

B. $a = \frac{\omega^2}{r}$

C. $\omega = \frac{2\pi r}{T}$

D. $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

4. 一个转轮以恒定角加速度 2rad/s^2 转动，从静止启动经过 30s 角速度为_____，在此时间内共转过_____转。

5. 一质点沿半径 $R = 0.01\text{m}$ 的圆周运动，其运动方程 $\theta = 2 + 4t^3$ ， θ, t 分别以弧度和秒计，则当 $t = 2$ 秒时，其切向加速度量值 $a_t = 0.48\text{m/s}^2$ ，法向加速度量值 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，当 $a_t = \frac{a}{2}$ （ a 为总加速度量值）时， $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 质点沿半径为 r 的圆周运动，运动学方程为 $\theta = 2 + 3t^2 (\text{SI})$ ，则 $t = 2\text{s}$ 时质点的法向加速度 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，切向加速度 $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，其角位移 θ 与时间 t 的关系为： $\theta = 5 + 2t^3$ ，当 $t = 1\text{s}$ 时，它的加速度大小为（ ）

A. 3.6m/s^2

B. 3.8m/s^2

C. 1.2m/s^2

D. 2.4m/s^2

8. 一飞轮转速 $n = 1500$ 转每分钟 (r/min) 转动，受制动后均匀减速，经 50s 后静止，求：

(1) 对角加速度 β 和从制动到静止飞轮的转数 N ；

(2) 制动开发后 $t = 25\text{s}$ 时飞轮角速度 ω ；

(3) 设飞轮半径 $R = 1\text{m}$ ，求 $t = 25\text{s}$ 时飞轮边缘任一点的速度和加速度。



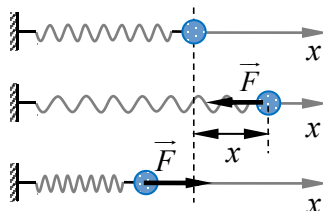
课时三 常见力和牛顿三定律

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 常见力	基础知识	5~10	选择、填空、大题
2. 牛顿三定律			

1. 常见力

1) 重力: $G = mg$ $g = 9.8 \text{ N/kg}$

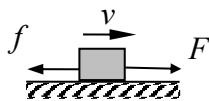
2) 弹力: $F = kx$ (k 为弹性系数)



3) 摩擦力:

① 滑动摩擦 $f = \mu_k N$

μ_k : 滑动摩擦系数 N 为支持力

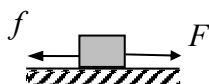


滑动摩擦

$$f = \mu_k mg$$

② 静摩擦力 $0 \leq f \leq \mu_s N$

μ_s 为最大静摩擦系数



静摩擦

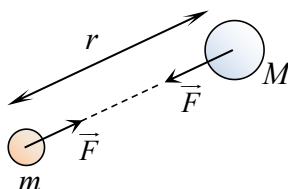
$$f = F \quad F \text{ 越大, } f \text{ 越大}$$

$$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$$

4) 万有引力

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$



2. 牛顿三定律

1) 不受力或合外力为 0, 质点保持静止或匀速直线运动

2) $F_{\text{合}} = ma$ (力是物体产生加速度的原因)

3) $F_{\text{作用}} = F_{\text{反作用}}$ (作用力等于反作用力)

题 1. 关于摩擦力的说法, 下列哪一种说法正确 ()

A. 摩擦力总是阻碍物体运动

B. 摩擦力的方向总是与物体运动方向相反

C. 摩擦力总是对物体做负功

D. 以上说法都不对

解: 答案: D (详解见视频课程)



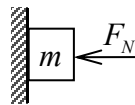
题 2. 用水平力 F_N 把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止, 当 F_N 逐渐增大时, 物体所受到的静摩擦力 F_f 的大小 ()

A. 不为零, 但保持不变

B. 随 F_N 成正比增大

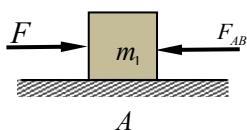
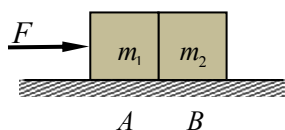
C. 开始随 F_N 增大, 达到某一最大值后就保持不变

D. 无法确定



答案: A (详解见视频课程)

题 3. 两物体 A 和 B, 质量分别是 m_1 和 m_2 , 互相接触放在光滑水平面上, 如图所示。对物体 A 施以水平推力 F , 则物体 A 对物体 B 的作用力等于_____。



(1) 选物体

(2) 分析受力

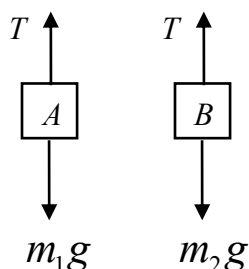
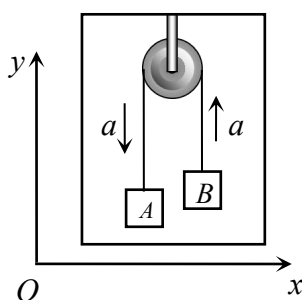
(3) 列方程

(4) 求解

解: ① $F = (m_1 + m_2)a$

$$\text{② } F - F_{AB} = m_1 a \quad \text{联立两式, 解得 } F_{AB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

题 4. 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮, 在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物 A 和 B, 已知 $m_1 > m_2$, 当电梯匀速上升, 求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度 a 。



解: 对 A 受力分析 $m_1 g - T = m_1 a$

对 B 受力分析 $T - m_2 g = m_2 a$

$$\text{解得 } a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



题 5. 一艘行驶的质量为 m 的快艇，在发动机关闭后，受到一阻力作用，且 $f = -kv^2$ ，式中 k 为正常数，求快艇在关闭发动机后速度与行驶距离的关系。（已知发动机关闭时快艇速度为 v_0 ）

解：根据牛顿第二定律：

$$f = -kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dx}$$

$$\text{分离变量：} \frac{1}{v} dv = -\frac{k}{m} dx$$

$$\text{两边同时积分：} \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^x -\frac{k}{m} dx$$

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{k}{m} x \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} x$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{k}{m} x} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m} x}$$

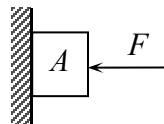
题 6：简述牛顿定律的适用范围

- (1) 只适用于低速运动的物体（与光速比速度较低）。
- (2) 只适用于宏观物体，不适用于微观原子。
- (3) 参照系应为惯性系。

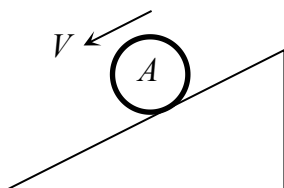


课时三 练习题

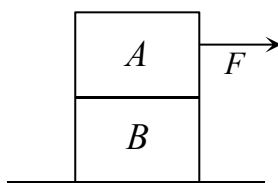
1. 沿水平方向的外力 F 将质量为 m 的物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，物体保持静止，设摩擦力为 f_0 ，若外力增至 $2F$ ，则此时物体所受静摩擦力大小为_____



2. 将下列各种情形下的物体 A 进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）



(1) 沿斜面下滚的小球



(2) A, B 同时同速度向右行驶

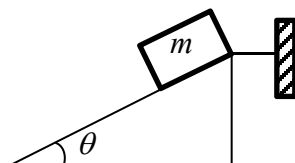
3. 如图所示，质量为 m 的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为 θ 的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为（ ）

A. $mg \cos \theta$

B. $mg \sin \theta$

C. $\frac{mg}{\cos \theta}$

D. $\frac{mg}{\sin \theta}$



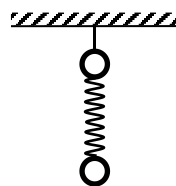
4. 两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（ ）

A. $a_1 = g, a_2 = g$

B. $a_1 = 0, a_2 = g$

C. $a_1 = g, a_2 = 0$

D. $a_1 = 2g, a_2 = 0$



5. 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f = -k/x^2$ ， k 是比例常数。设质点在 $x = A$ 时的速度为零，求质点在 $x = A/4$ 处的速度大小。



课时四 动量/冲量/动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 动量定理	必考	5~10	选/填 大题
2. 动量守恒			

1. 动量定理

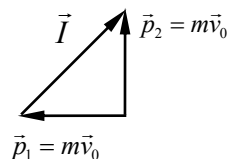
动量: $\vec{p} = m\vec{v}$ 单位: $kg \cdot m/s$ (矢量, 有大小, 有方向)

动量定理: $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 单位 $N \cdot s$

- ① 冲量为矢量, 等于动量的矢量差, 也等于冲力对时间的积分
- ② \vec{F} 为冲力, 为合外力
- ③ F 若为常力, $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t$

题 1. 一物体质量为 m , t_1 时刻速度大小为 v_0 , 方向沿 x 负方向, t_2 时刻速度大小仍为 v_0 , 方向沿 y 轴正方向, t_1 到 t_2 冲量大小为_____.

解: $I = \sqrt{(mv_0)^2 + (mv_0)^2} = \sqrt{2}mv_0$

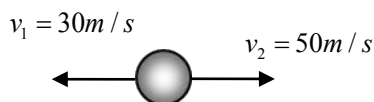


题 2. 一垒球的质量 $m = 0.20kg$, 如果其投出时的速度为 $30m/s$, 被棒击回的速度为 $50m/s$, 方向相反, 球的冲量大小为_____, 球与棒的接触时间为 $\Delta t = 0.0020s$, 则棒击打垒球的平均冲力 $F =$ _____.

解: $I = mv_2 - mv_1 = 0.2 \times 50 - 0.2 \times (-30) = 16 N \cdot s$

由 $I = F \cdot \Delta t \Rightarrow 16 = F \cdot 0.002$

解得: $F = 8000N$



题 3. 质量为 $3kg$ 的静止物体在水平力 $F = 3t^2 (N)$ 作用下, 在光滑水平面上作直线运动, 物体在 $0 \sim 3$ 秒内获得的冲量_____ $N \cdot s$, 第 3 秒末物体的速度值_____ m/s .

解: $I = \int_0^3 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^3 = 27 N \cdot s$ $I = mv_2 - mv_1 = mv_2 - 0 \Rightarrow v_2 = \frac{I}{m} = \frac{27}{3} = 9 m/s$



题 4. 一静止的质点，在合力为 $\vec{F} = 10t\vec{i} + 2(2-t)\vec{j}$ 作用下，在 2s 末的动量为_____.

解： $F_x = 10t$ $F_y = 2(2-t)$

在 x 方向冲量： $mv_{x2} - 0 = \int_0^2 F_x dt = \int_0^2 10t dt = 5t^2 \Big|_0^2 = 20 \text{ N} \cdot s$ $\Rightarrow \vec{p}_2 = 20\vec{i} + 4\vec{j}$

在 y 方向冲量： $mv_{y2} - 0 = \int_0^2 F_y dt = \int_0^2 2(2-t) dt = (4t - t^2) \Big|_0^2 = 4 \text{ N} \cdot s$

2. 动量守恒

若 $F_{\text{合}} = 0$ ，则系统总动量守恒： $m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2$

(1) $F_{\text{合}} = 0$ ，指不受外力或所受合外力为零

(2) 内力不改变系统的总动量

(3) 内力远大于外力时，也可认为 $F_{\text{合}} = 0$

题 1. 粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度为 $3\vec{i}$ ，粒子 B 的速度为 $2\vec{i}$ ，

由于两者的相互作用，粒子 A 的速度变为 $7\vec{i}$ ，此时粒子 B 的速度为（ ）

A. \vec{i}

B. $2\vec{i}$

C. 0

D. $5\vec{i}$

答案：A. 水平方向不受外力，动量守恒

$$m \cdot 3 + 4m \cdot 2 = m \cdot 7 + 4m \cdot v \quad \Rightarrow v = 1$$

题 2. 一人站在长度为 4m 的船一端，船漂浮于静止水面上。船的质量为 600kg，人的质量为

80kg，若此人从船头走到船尾，则船相对于水面移动了多少米？（忽略水对船的阻力）

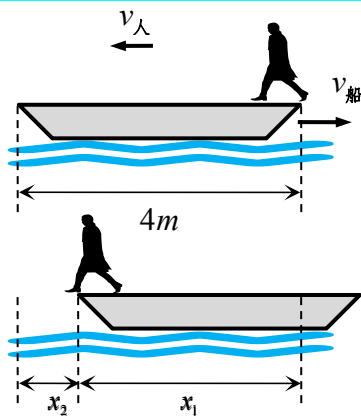
解：水平方向动量守恒： $mv_{\text{人}} = Mv_{\text{船}} \Rightarrow m \frac{dx_1}{dt} = M \frac{dx_2}{dt}$

整理得： $mdx_1 = Mdx_2$

两边同时积分： $\int_0^{x_1} m dx_1 = \int_0^{x_2} M dx_2 \Rightarrow mx_1 = Mx_2$

即： $80x_1 = 600x_2$ 又： $x_1 + x_2 = 4$

联立两式解得： $\begin{cases} x_1 = 3.53m \\ x_2 = 0.47m \end{cases}$ 故船移动了 0.47m



题 3. 下列几种说法正确的是 ()

- (1) 作用力的冲量与反作用力的冲量总是等值相反的
 (2) 系统的内力不能改变系统的总动量
 (3) 冲量的方向与物体动量的方向相同
 (4) 以恒力作用于物体，时间越长，物体的动量越大

A. 只有 (1) 是正确的

B. (1) (2) 是正确的

C. (1) (3) 是正确的

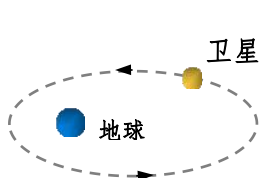
D. (2) (4) 是正确的

答案：B. (详细解答见视频课程)

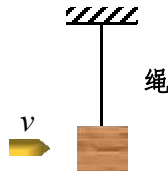
题 4. 判断下列运动是否动量守恒



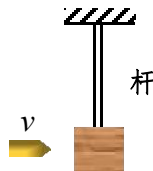
匀速圆周运动
 动量_____



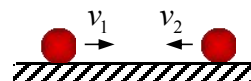
卫星绕地球
 卫星动量_____



子弹打击木块
 系统动量_____



子弹打击木块
 系统动量_____



弹性碰撞，系统动量_____

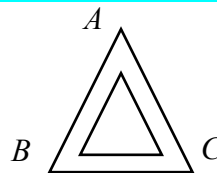
非弹性碰撞，系统动量_____

完全非弹性碰撞，系统动量_____

(详细解答见视频课程)

课时四 练习题

1. 质量为 m 的质点，以不变速率 V 沿图中正三角形 ABC 的水平光滑轨道运动，质点越过 A 角时，轨道作用于质点的冲量大小为 ()

A. mV B. $\sqrt{2}mV$ C. $\sqrt{3}mV$ D. $2mV$ 

2. 设作用于物体上的力 $F = 6t + 3(SI)$ 。如果物体在这力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小_____



3. 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其速度矢量为 $\vec{V} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$ ，则 $t=0$ 到 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量是_____

4. 一质量为 m 的小球，从 h_1 高度处由静止下落到水平桌面上，反弹高度 h_2 。设小球与桌面的接触时间为 τ ，则小球对桌面的平均冲力的大小为_____

5. 一人用恒力 \vec{F} 推地上的木箱，经历时间 Δt 未能推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受了力 \vec{F} 的冲量，为什么它的动量没有改变？

6. 一质量为 60kg 的人起初站在一条质量为 300kg ，且正以 2m/s 的速率向湖边驰近的小木船上，湖水是静止的，且阻力不计。现在人相对于船以一水平速率 V 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半， V 应为()

A. 2m/s B. 3m/s C. 5m/s D. 6m/s

7. 质量为 M 的木块静止在光滑的水平面桌面上，质量为 m ，速度为 v_0 的子弹水平射入木块，并陷在木块内与木块一起运动，求：

- (1) 子弹相对木块静止后，木块的速度和动量；
- (2) 子弹相对木块静止后，子弹的动量；
- (3) 在这个过程中，子弹施于木块的冲量；

8. 一小船质量为 100kg ，船头到船尾共长 3.6m 。现有一质量为 50kg 的人从船尾走到船头时，船头移动多少距离？假定水的阻力不计。



课时五 质点运动的功和能

考点	重要程度	占 分	题型
1. 做功	★★★★	0~3	填空
2. 动能定理	★★★★★	5~10	大题
3. 保守力、势能			填空
4. 机械能守恒			大题

1. 做功 (恒力: $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$ 变力: $W = \int dW = \int F ds$)

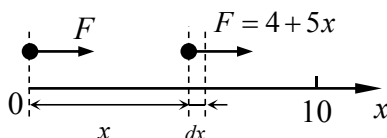
题 1. 某质点在力 $\vec{F} = (4+5x) \vec{i} (SI)$ 的作用力下沿 x 轴做直线运动, 在从 $x=0$ 移动到 $x=10m$ 的过程中, 力 \vec{F} 所做的功为 _____ J

解: 如图建立坐标

$$x \text{ 处: } F = (4+5x)$$

$$dW = F \cdot dx = (4+5x)dx$$

$$W = \int dW = \int_0^{10} (4+5x)dx = 290 \text{ J}$$



变力做功解题:

① 定坐标, 取微元 dx

② 定 F , 表元功 dW

③ 计算: $W = \int dW$

题 2. 一质点在恒力为 $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 1\vec{k} (SI)$ 的作用下产生位移为 $\Delta\vec{r} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} (SI)$ 则此力在该位移过程中所做的功为 _____

$$\text{解: } W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 4 \times 2 + (-5) \times (-4) + 1 \times (-3) = 25 \text{ J}$$

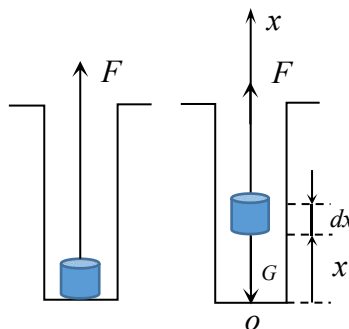
题 3. 一人从 $10m$ 深的井中提水, 起始桶中装有 $10.0Kg$ 的水, 由于水桶漏水, 每升高 $1.00m$ 要漏去 $0.20Kg$ 的水, 水桶被匀速地从井中提到井口, 求人所做的功。

解: 如图建立坐标

$$F = G = mg = (10 - 0.2x)g$$

$$dW = F \cdot dx = (10 - 0.2x)g dx$$

$$W = \int dW = \int_0^{10} (10 - 0.2x)g dx = 882 \text{ J}$$



2. 动能定理 (动能: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 单位: J 标量, 有大小, 没有方向)

动能定理: $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

(1) 质点: 合外力做功 = 动能变化

(2) 质点系: 合外力做功 + 非保守内力做功 = 动能变化 (例如爆炸)

题 1. 质量为 1.0Kg 的物体运动速率由 2.0m/s 增加到 4.0m/s 的过程中, 合外力对它所做的功为_____.

解: $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 6\text{J}$

题 2. 用铁锤把钉子敲入墙面木板, 设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比, 即 $F = kx$ 。若第一次打击时, 能把钉子打入木板 1cm , 第二次打击时, 保持第一次打击的速度, 第二次能把钉子打入的深度为_____。

解: 第一次打击: $\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^1 kx dx = \frac{1}{2}k$

第二次打击: $\frac{1}{2}mv^2 = \int_1^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k$

解得 $x = \sqrt{2}\text{cm}$ 故第二次打击深度为 $(\sqrt{2}-1)(\text{cm})$

题 3. 质量均匀分布的刚性链条, 总长为 L , 伸出光滑桌面的长度为 a , 若由静止释放求: 链条全部脱离光滑桌面时速率。

解: 线密度: $\lambda = \frac{m}{L}$

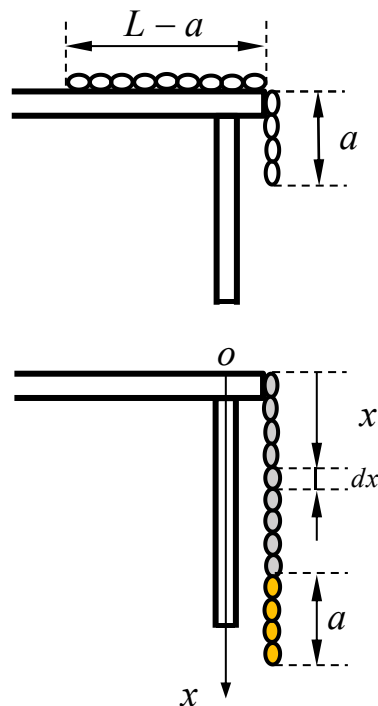
a 段: $W_1 = \frac{m}{L}a \cdot g \cdot (L-a) = \frac{mga(L-a)}{L}$

$L-a$ 段: $dW_2 = dm \cdot g \cdot x = \frac{m}{L}dx \cdot g \cdot x = \frac{mgx}{L}dx$

$W_2 = \int dW = \int_0^{L-a} \frac{mgx}{L} dx = \frac{mg(L-a)^2}{2L}$

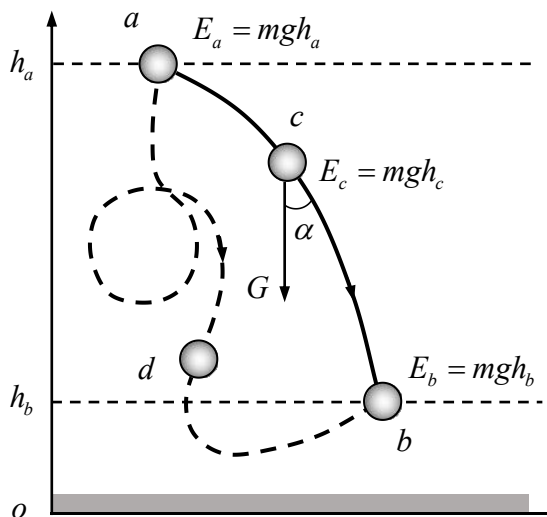
$W = W_1 + W_2 = \frac{mga(L-a)}{L} + \frac{mg(L-a)^2}{2L} = \frac{mg(L^2 - a^2)}{2L}$

动能定理: $W = \frac{1}{2}mv^2 - 0$ 解得 $v = \sqrt{\frac{g(L^2 - a^2)}{L}}$



3. 保守力、势能

	重力	弹力	万有引力	静电力
保守力	$G = mg$	$F = kx$	$F = G \frac{Mm}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$
势能	$E_p = mgh$	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_p = -G \frac{Mm}{r}$	$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$
常用零势能点	地面	平衡位置	无穷远处	无穷远处



- 1) 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关
- 2) 保守力沿一闭合路径运动一周，做功为零
- 3) 势能的引入是以保守力做功为前提
- 4) 不同的势能零点，对应的势能值不一样
- 5) 势能大小=保守力把物体移至势能零点所做的功
- 6) 保守力做正功，对应势能减小
- 7) 功能计算时，保守力做功和势能只能计算一个

4. 机械能守恒

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

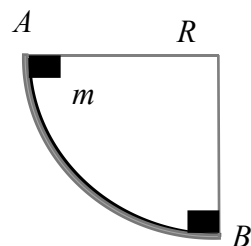
- 1) 机械能只包含动能和势能
- 2) 系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 如图所示，质量 $m = 2\text{Kg}$ 的物体从静止开始，沿 $1/4$ 圆弧从 A 滑到 B ，在 B 处的大小为 $v = 6\text{m/s}$ ，已知圆的半径 $R = 4\text{m}$ ，则物体从 A 到 B 的过程中摩擦力对它所做的功 $W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：A 点机械能： $E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgR = mgR$

B 点机械能： $E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$W_f = E_A - E_B = mgR - \frac{1}{2}mv_B^2 = 2 \times 9.8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 = 42.4 \text{ J}$$



题 2. 质量为 m 的子弹，穿过如图所示的摆锤后，速率由 v 变为 $v/2$ 。已知摆锤的质量为 M ，摆线的长度为 L ，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度最小值应为多大？

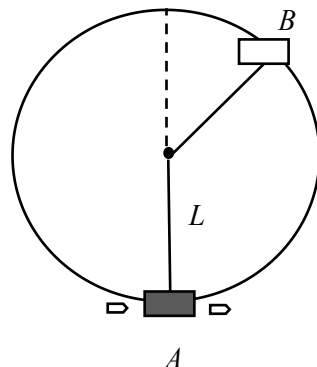
解：穿过的瞬间，动量守恒： $mv = m \cdot \frac{v}{2} + M \cdot V_A \Rightarrow V_A = \frac{mv}{2M}$

摆锤可以完成圆周运动，则在最高点满足

$$Mg = M \frac{V_B^2}{L} \Rightarrow V_B^2 = gL$$

摆锤开始上扬，满足机械能守恒： $\frac{1}{2}MV_A^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg \cdot 2L$

$$\text{代入数据: } \frac{1}{2}M \cdot \left(\frac{mv}{2M}\right)^2 = \frac{1}{2}M \cdot gL + 2MgL \Rightarrow v = \frac{2M\sqrt{5gL}}{m}$$



题 3. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内，由弹簧压缩的距离求出子弹的速度，已知子弹质量是 0.02kg ，木块质量是 8.98kg 。弹簧的劲度系数是 100N/m ，子弹射入木块后，弹簧被压缩 10cm 。设木块与平面间的动摩擦因数为 0.2 ，求子弹的速度。

解：射入瞬间，动量守恒

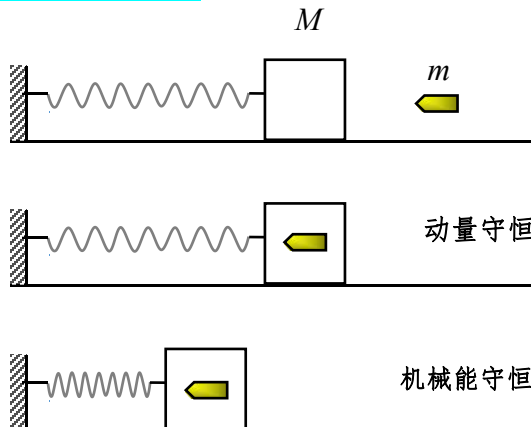
$$mv = (m + M)v' \Rightarrow v' = \frac{mv}{m + M} = \frac{0.02}{0.02 + 8.98}v = \frac{1}{450}v$$

弹簧开始压缩, 满足机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \mu(m+M)g \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\frac{1}{2} \times 9 \times \left(\frac{v}{450} \right)^2 - 0.2 \times 9 \times 9.8 \times 0.1 = \frac{1}{2} \times 100 \times 0.1^2$$

解得 $v = 319.2 \text{ m/s}$



题 4. 对于一个物体来说, 在下列的哪种情况下系统的机械能守恒()

- (A). 合外力为 0
- (B). 合外力不做功
- (C). 外力和非保守力都不做功
- (D). 外力和保守内力都不做功

解：机械能守恒条件：外力和非保守力都不做功，故选C



题 5. 对功的概念有以下几种说法

- (1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；
 (2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；
 (3) 作用力与反作用力大小相等，方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。

以上说法正确的是()

- A. (1)(2) B. (2)(3) C. 只有 (2) D. 只有 (3)

答案：C (详细解答见视频课程)

课时五 练习题

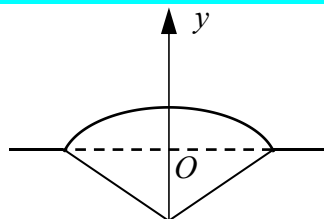
1. 用水平力 F 将置于水平面上的木箱向前拉动距离 S ，力 F 对木箱所做的功为 W_1 ；第二次用相同的水平力 F 将置于粗糙水平面上的同一木箱向前拉动相同距离 S ，力 F 对木箱所做的功为 W_2 ，则()

- A. $W_1 = W_2$ B. $W_1 > W_2$ C. $W_1 < W_2$ D. 无法判断

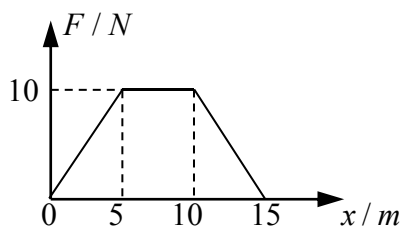
2. 某质点在力 $\vec{F} = (2+6x)\vec{i} \text{ (SI)}$ 的作用下，沿 x 轴从原点移动到 3m 处的过程中，则力 \vec{F} 所做的功为：_____ J

3. 一个在 xOy 平面内运动的质点，在力 $\vec{F} = (5\vec{i} + 2\vec{j})\text{N}$ 的作用下移动一段位移 $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$ ，则此过程中该恒力所做的功为_____

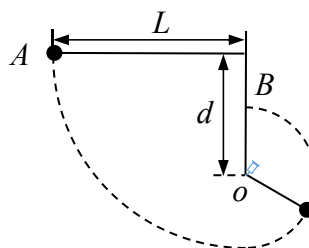
4. 如图，射箭运动员用力 $f = 490\text{N}$ 使弓弦中点产生 0.6m 的位移，然后把质量 0.06kg 的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比（准弹性力 $f = -k\Delta x$ ），试求箭获得的最大动能。



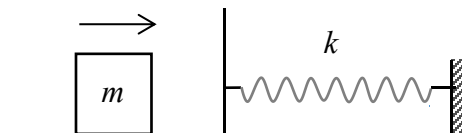
5. 质量为 2kg 的物体，在沿 x 方向的变力作用下，在 $x=0$ 处由静止开始运动，设变力与 x 的关系如图所示，试由动能定理求物体在 $x=5, 10, 15\text{m}$ 处的速率。



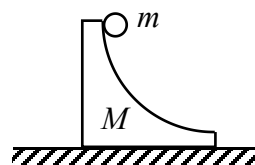
6. 如图所示，长度为 L 的轻绳一端固定，另一端有一个质量为 m 的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为 d 处的 O 点有一钉子，小球从水平位置无初速释放，欲使球在以钉子 O 为中心的圆周上绕一圈，求最小的 d 为多少。



7. 如图所示，质量 m 为 0.1kg 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数 k 为 20N/m 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 $x=0.4\text{m}$ 。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 μ_k 为 0.25 ，问在将要发生碰撞时木块的速率 V 为多少？



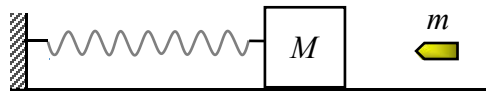
8. 质量为 M 的大木块具有半径为 R 的四分之一弧形槽，如图所示。质量为 m 的小球从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小球脱离大木块时的速度。



9. 一弹簧振子置于光滑的水平面上，弹簧的劲度系数 $k = 900 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，振子质量 $M = 0.99 \text{ kg}$ ，

一质量 $m = 0.01 \text{ kg}$ 的子弹水平射入振子内而不穿出，并一起向右压缩弹簧，已知弹簧的最大

压缩量 $x_m = 0.10 \text{ m}$ ，求子弹射入 M 前的速度 V_0 。



10. 对质点系下列说法正确的是()

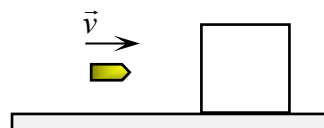
- A. 质点系总动量的改变和内力无关 B. 质点系总动能的改变和内力无关
C. 质点系机械能的改变与保守内力有关 D. 质点系内可选一点代表其转动规律

11. 质点系的内力可以改变()

- A. 系统的总质量 B. 系统的总动量
C. 系统的总动能 D. 系统的总角动量

12. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出，以地面为参考系，下列说法中正确的是()

- A. 子弹减少的动能转变为木块的动能
B. 子弹—木块系统的机械能守恒
C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功
D. 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量



13. 在光滑的水平面内有两个物体 A 和 B ，已知 $m_A = 2m_B$ ，物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全弹性碰撞，则碰撞后两物体的总动能为_____

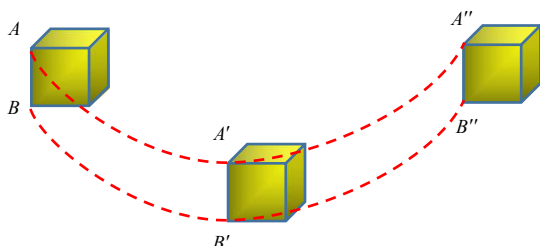
14. 物体的动量发生变化，它的动能是否一定发生变化？为什么？



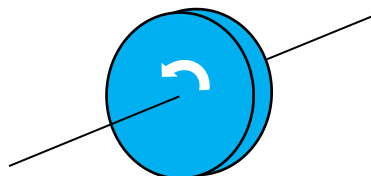
课时六 刚体转动惯量

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识刚体	基础知识	不单独考	无
2. 转动惯量	★★★★★	0~3	填空、大题
3. 平行轴定理	★★	0~3	填空

1. 认识刚体



(a) 刚体的平动



(b) 刚体的转动

- ① 刚体具有一定形状和大小，并且在外力作用下，形变并不显著。
- ② 刚体分为平动和转动，若可以忽略形状和大小，刚体平动即质点运动，1~5课时所讲
- ③ 6~9课时，只研究刚体转动

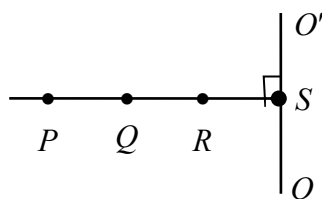
2. 转动惯量 (离散型: $J = \sum r_i^2 \cdot m_i$ 连续型: $dJ = r^2 dm$ $J = \int dJ$ 单位: $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

题 1. 如图所示, P 、 Q 、 R 和 S 是附于刚性轻质细杆上的质量分别为 $4m, 3m, 2m$ 和 m 的四个质点, $PQ = QR = RS = d$, 则系统对 OO' 轴的转动惯量为_____。

解: $J = \sum r_i^2 m_i$

$$= 4m \cdot (3d)^2 + 3m \cdot (2d)^2 + 2m \cdot d^2 + m \cdot 0^2$$

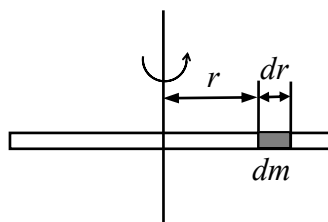
$$= 50md^2$$



题 2. 一根均质细棒长度为 l , 质量为 m , 绕着与棒垂直且通过中心的转轴转动, 则其转动惯量为_____。

解: $dm = \lambda \cdot dr = \frac{m}{l} \cdot dr$ $dJ = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \frac{m}{l} dr$

$$J = \int r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \cdot \frac{m}{l} dr = \frac{1}{12} ml^2$$



题 4. 一均质圆盘，质量为 m ，半径为 R ，绕着通过圆盘中心且与盘面垂直的转轴转动，则其转动惯量_____。

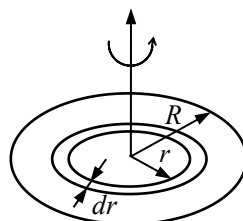
解：面密度 $\lambda = \frac{m}{\pi R^2}$

取宽度为 dr 的圆环

$$dm = \lambda \cdot dS = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2m}{R^2} \cdot r dr$$

$$dJ = r^2 \cdot dm = \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 dr$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$



题 3. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

- A. 刚体的总质量大小 B. 刚体的转轴的位置
C. 刚体所受合外力矩的大小 D. 刚体质量的分布情况

解：由定义 $J = \sum m_i r_i^2$ 知：

决定转动惯量大小的因素：

- 1) 刚体的总质量
- 2) 质量的分布
- 3) 给定转轴的位置

故本题答案：C

3. 平行轴定理 $J = J_C + mh^2$

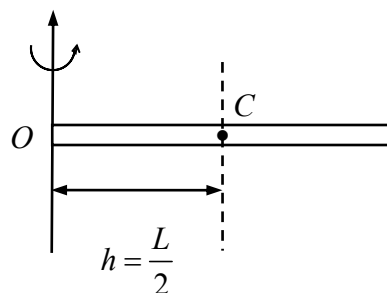
题 1. 一质量为 m 的均质杆长为 L ，绕通过其一端且垂直于杆的轴转动，其转动惯量为_____。

解：已知绕 C 点轴： $J_C = \frac{1}{12} mL^2$

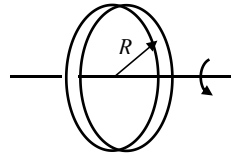
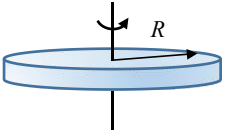
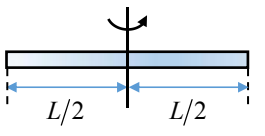
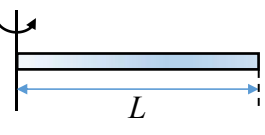
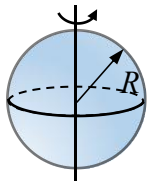
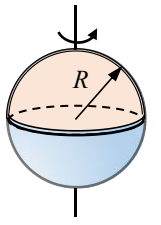
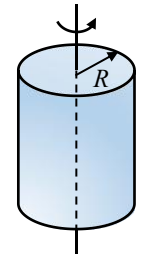
将转轴从 C 点移动到 O 点

根据平行轴定理：

$$J = J_C + mh^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$



常用刚体的转动惯量

刚体	转轴	转动惯量	图
均质圆环 (质量为 M , 半径为 R)	通过圆环中心与环面垂直	MR^2	
均质圆盘 (质量为 M , 半径为 R)	通过圆盘中心与盘面垂直	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆 (质量为 M , 长为 L)	通过中心与杆垂直	$\frac{1}{12}ML^2$	
均质细杆 (质量为 M , 长为 L)	沿细棒一端与棒垂直	$\frac{1}{3}ML^2$	
均质球体 (质量为 M , 半径为 R)	沿直径	$\frac{2}{5}MR^2$	
均质球壳 (质量为 M , 半径为 R)	沿直径	$\frac{2}{3}MR^2$	
均质柱体 (质量为 M , 半径为 R)	沿几何轴	$\frac{1}{2}MR^2$	

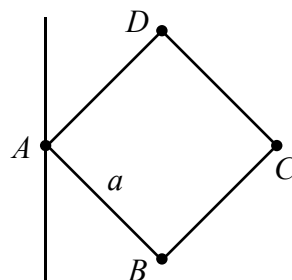


课时六 练习题

1. 刚体作定轴转动时，刚体上各点具有相同的_____（填“速度”，“加速度”，“角速度”，“角加速度”）

2. 如图所示，在边长为 a 的正方形的顶点上，分别有质量为 m 的 4 个质点，质点之间用轻质杆连接，求此系统绕下列转轴的转动惯量：

- (1) 通过其中一个质点 A ，并平行于对角线 BD 的转轴；
- (2) 通过质点 A 并垂直于质点所在平面的转轴。



3. 半径为 R ，质量为 M 的圆轮（当作均匀圆盘）可绕通过其中心的水平光滑固定轴自由旋转。一质量为 m 的杂技演员（当作质点）抓住圆轮水平半径的末端，与圆轮一起从静止开始自由旋转。杂技演员和圆轮整体对固定轴的转动惯量 $J =$ _____

4. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B ， A 环的质量分布均匀， B 环的质量分布不均匀。它们与通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B ，则 J_A 和 J_B 的大小关系为

5. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是（ ）

- A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关
- B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关
- C. 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置
- D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和空间分布无关

6. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

- A. 刚体的总质量大小
- B. 刚体的转轴的位置
- C. 刚体所含外力矩的大小
- D. 刚体质量的分布情况



课时七 力矩 转动定理

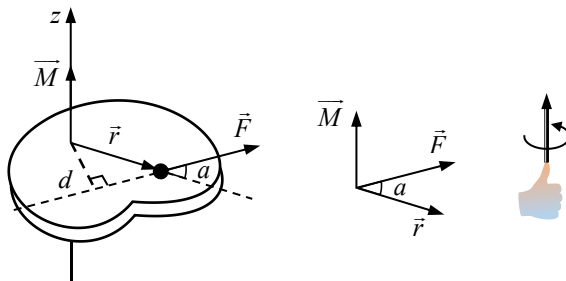
考点	重要程度	占分	题型
1. 力矩	★★	0~3	选择填空
2. 转动定理	必考	5~10	大题

1. 力矩

矢量： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小： $M = F \cdot r \sin \alpha = F \cdot d$

单位： $N \cdot m$



2. 转动定理

转动定理： $M = J \cdot \beta$ （力矩等于转动惯量乘角加速度）

对比： $F = ma$ 牛二定律：合外力 使物体运动

$M = J \cdot \beta$ 转动定理：合外力矩 使刚体转动

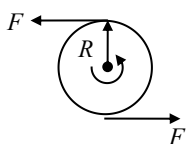
题 1. 几个力同时作用在一个具有光滑固定轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此物体（ ）

(A) 必然不会转动

(B) 转速必然不变

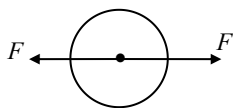
(C) 转速必然改变

(D) 转速可能不变，也可能改变



$F_{\text{合}} = 0$ ，但不在一条直线上。

合外力矩： $M = F \cdot R + F \cdot R = 2FR \Rightarrow \beta \neq 0$ 转速改变



$F_{\text{合}} = 0$ ，合外力矩： $M = 0 \Rightarrow \beta = 0$ 转速不变

题 2. 电动机带动一个转动惯量为 $50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的系统作定轴转动，在 0.5 s 内由静止开始最后达到

120 r/min 的转速，假定转速是均匀增加的，则该转动系统在上述过程中的角加速度为_____，

电动机对转动系统施加的力矩为_____。

解：角速度： $\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{120 \times 2\pi}{60} = 4\pi \text{ rad/s}$

由 $\omega = \beta \cdot t \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{0.5} = 8\pi \text{ rad/s}^2$

$M = J \cdot \beta = 50 \times 8\pi = 1256 \text{ N} \cdot \text{m}$

匀变速转动

$\omega = \omega_0 + \beta t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$

$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$



题 3. 定滑轮质量 $M = 4.0\text{kg}$ ，可看成均质圆盘，一条不可伸长的轻绳绕过定滑轮，绳的两端分别悬挂两物块， $m_1 = 10\text{kg}$, $m_2 = 8.0\text{kg}$ ，忽略滑轮与轴间的摩擦， g 取 10m/s^2 ，求：

- (1) 两物块的加速度。
- (2) 滑轮两边绳中张力。

解： $m_1g - T_1 = m_1a$

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

$$T_1R - T_2R = J \cdot \beta$$

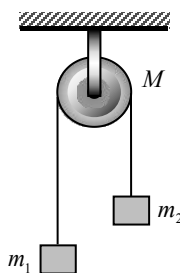
角量和线量关系： $a = \beta \cdot R$

联立方程可得

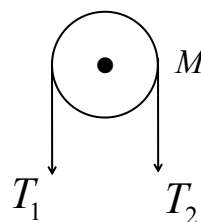
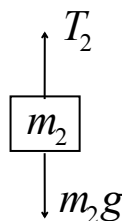
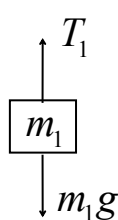
$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{(10 - 8) \times 10}{10 + 8 + \frac{1}{2} \times 4} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = m_1g - m_1a = 10 \times 10 - 10 \times 1 = 90 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2g + m_2a = 8 \times 10 + 8 \times 1 = 88 \text{ N}$$



- (1) 选物体
- (2) 分析受力
- (3) 列方程
- (4) 求解



题 4. 如图，有一半半径为 R ，质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘心 O 垂直盘面的水平轴无摩擦转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$ ，圆盘上绕轻绳，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为 m 的物体，物体从静止开始下落，试求物块下落速度随时间的变化关系。

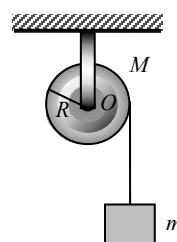
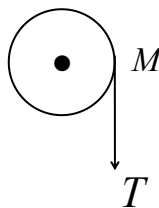
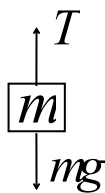
解： $mg - T = ma$

$$T \cdot R = J \cdot \beta = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \beta$$

$$a = \beta \cdot R$$

联立解得 $a = \frac{2mg}{2m + M}$

$$v = v_0 + at = 0 + at = \frac{2mg}{2m + M} \cdot t$$

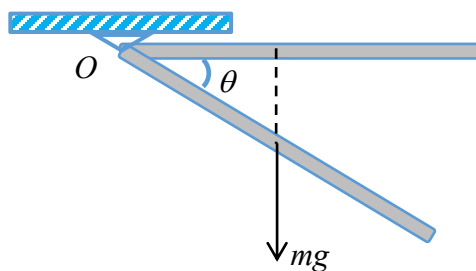


题 5. 一均匀细棒可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动, 已知棒长为 L , 质量为 m , 转动惯量为 $J = \frac{1}{3}mL^2$, 令棒由水平位置自由摆下, 求棒与水平方向的夹角为 θ 时的角加速度。

解: 绕 O 点力矩: $M = mg \cdot \frac{1}{2}L \cdot \cos \theta$

由 $M = J \cdot \beta$ 得

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgL \cos \theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g \cos \theta}{2L}$$



课时七 练习题

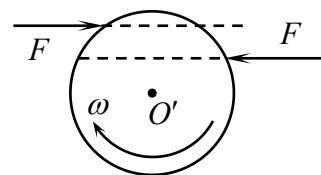
1. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴 O' 以角速度 ω 按图示方向转动, 如图所示, 若将两个大小相等, 方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上, 则圆盘的角速度 ω ()

A. 必然增大

B. 必然减少

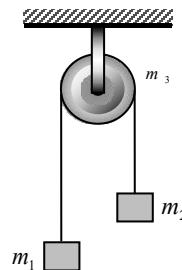
C. 不会改变

D. 如何变化, 不能确定



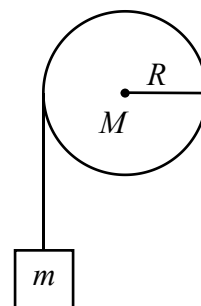
2. 一定轴转动的飞轮转动惯量 $J = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 其转速在 5 秒内由 900 rev/min (转/分) 均匀减至 600 rev/min , 则飞轮所受的外力矩 $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Nm}$, 这 5 秒内飞轮的角位移 $\Delta \theta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$

3. 一轻绳跨过定滑轮 C , 滑轮视为均匀质圆盘, 绳的两端分别悬挂有质量为 m_1 和 m_2 的物体 A 和物体 B , 其中 $m_1 < m_2$, 如图所示。设滑轮的质量为 m_3 , 半径为 R , 其转动惯量为 $\frac{1}{2}m_3R^2$, 滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。绳与滑轮之间无相对滑动, 试求物体的加速度和绳中的张力。



4. 如图所示，一个质量为 m 的物体与绕在定滑轮上的绳子相连，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为 M ，半径为 R ，其转动惯量为 $MR^2/2$ ，滑轮轴光滑，试求：求两滑块系统的加速度大小

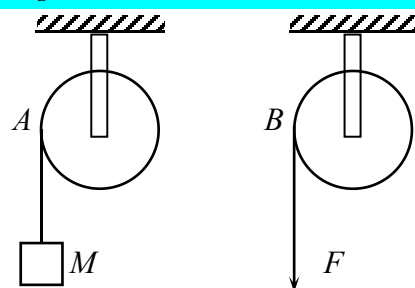
- (1) 该物体由静止开始下落的过程中，物体的加速度和滑轮的角加速度；
(2) 绳子的张力。



5. 一匀质圆盘对某轴的转动惯量 $J = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，若它受到对于该轴的合外力矩 $M = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，则圆盘的角加速度 $\beta =$ rad/s^2

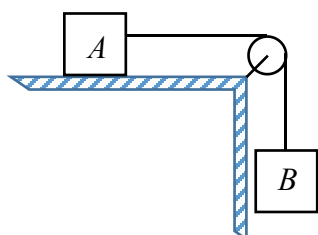
6. 如图所示， A, B 两个相同的绕着轻绳的定滑轮， A 滑轮挂一质量为 M 物体， B 滑轮受拉力 F ，而且 $F = Mg$ 。设 A, B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B ，不计滑轮轴的摩擦，则有 ()

- A. $\beta_A = \beta_B$ B. $\beta_A > \beta_B$
C. $\beta_A < \beta_B$ D. 开始时 $\beta_A = \beta_B$ ，以后 $\beta_A < \beta_B$



7. 质量分别为 m_A 和 m_B 的 A, B 两滑块，通过一理想的细线相连接。细线穿过一不计摩擦的滑轮，其中滑块 A 放在光滑的水平桌面上，如图所示。

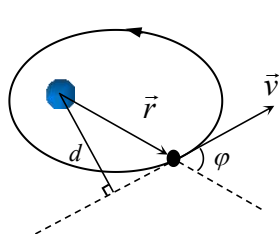
- (1) 不计滑轮的质量，计算两滑块的加速度和绳子张力的大小；
(2) 假若滑轮为一质量为 m ，半径为 R 的圆盘(圆盘的转动惯量为 $J = mR^2/2$)



课时八 角动量、角动量守恒

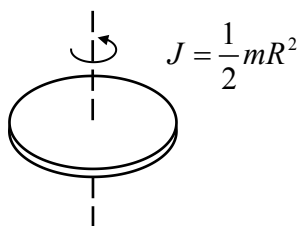
考点	重要程度	占分	题型
1. 认识角动量	基础知识	不单独出题	无
2. 角动量守恒	必考	5~10	选择、填空、大题

1. 认识角动量



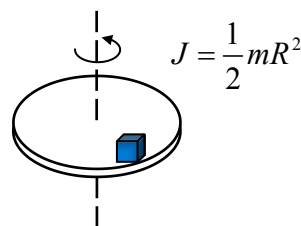
质点角动量

$$L = mv \cdot d$$



刚体角动量

$$L = J \cdot \omega$$



混合角动量

$$L = L_1 + L_2 = mv \cdot R + J \cdot \omega$$

2. 角动量守恒 (若合外力矩: $M = F \cdot d = 0$, 则角动量守恒: $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$)

题 1. 花样滑冰运动员绕自身的竖直轴转动, 开始时两臂伸开, 转动惯量为 J_0 , 角速度为 ω_0 ,

然后她将两臂收回, 使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$, 此时它转动的角速度变为 ()

A. $3\omega_0$

B. $4\omega_0$

C. $\frac{\omega_0}{3}$

D. $\frac{\omega_0}{4}$

答案: A. 力矩 $M = 0$, 角动量守恒: $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$ 即: $J_0 \omega_0 = \frac{1}{3} J_0 \cdot \omega \Rightarrow \omega = 3\omega_0$

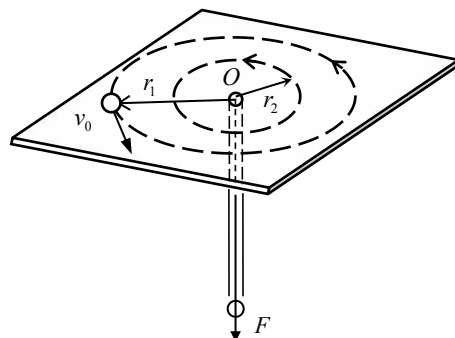
题 2. 质量为 0.05kg 的小块物体, 置于一光滑水平面上, 有一绳一端连接此物, 另一端穿过桌面中心的小孔 (如图所示)。该物体原以 3rad/s 的角速度在距孔 0.2m 的圆周上转动, 今将绳从小孔缓慢往下拉, 使该物体的转动半径减为 0.1m , 则该物体的角速度 $\omega =$ _____

解: 物块受力沿绳子通过转轴中心, 故 $M = 0$, 角动量守恒

$$r_1 = 0.2 \text{ 时}, L_1 = mv_1 \cdot r_1 = m\omega_1 r_1 \cdot r_1 = 0.05 \times 3 \times 0.2^2 = 6 \times 10^{-3}$$

$$r_2 = 0.1 \text{ 时}, L_2 = mv_2 \cdot r_2 = m\omega_2 r_2 \cdot r_2 = 0.05 \times 0.1^2 \omega_2 = 0.5 \times 10^{-3} \omega_2$$

角动量守恒: $L_1 = L_2$ 解得: $\omega_2 = 12\text{rad/s}$



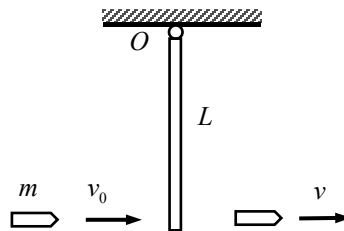
题 3. 如图，杆的长度为 L ，它的上端悬挂在水平轴 O 上，杆对 O 的转动惯量为 J ，起初杆处于静止状态，现有一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 击中杆的端点并以速度 v 穿出，则动量_____

(守恒, 不守恒), 角动量_____ (守恒, 不守恒), 此杆的角速度为_____

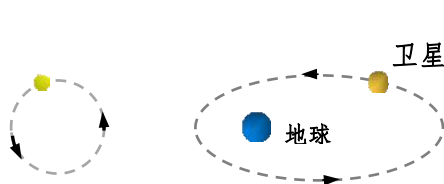
解：动量不守恒，角动量守恒

$$mv_0 \cdot L = mv \cdot L + J \cdot \omega$$

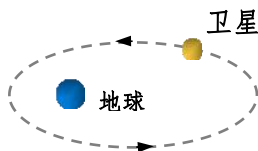
$$\text{解得 } \omega = \frac{mv_0 L - mvL}{J}$$



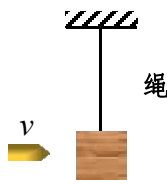
题 4. 判断下列运动角动量是否守恒



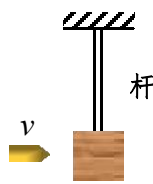
匀速圆周运动
角动量_____



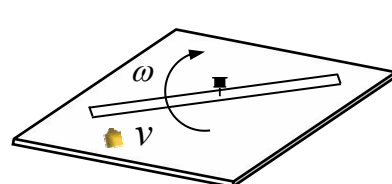
卫星绕地球
卫星角动量_____



子弹打击木块
系统角动量_____



子弹打击木块
系统角动量_____



水平面内物块打击杆
系统角动量_____

解：守恒；守恒；守恒；守恒；守恒（详细解答见视频课程）

课时八 练习题

1. 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J ，开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为()

A. $\frac{J}{J+mR^2} \omega_0$

B. $\frac{J}{(J+m)R^2} \omega_0$

C. $\frac{J}{mR^2} \omega_0$

D. ω_0

2. 一人站在无摩擦的转动平台上，双臂水平地举着二哑铃，当他把二哑铃水平地收缩到胸前的过程中，人与哑铃组成的系统应满足()

A. 机械能守恒，角动量守恒

B. 机械能守恒，角动量不守恒

C. 机械能不守恒，角动量守恒

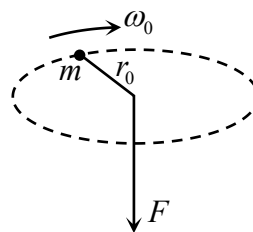
D. 机械能不守恒，角动量不守恒



3. 一质点的角动量守恒的条件是外力对 O 点的_____为零

4. 如图所示，一质量为 $m = 0.5\text{kg}$ 的小球由一绳索系着，以角速度 $\omega_0 = 5\text{rad/s}$ 在无摩擦的水平面上，作半径为 $r_0 = 0.4\text{m}$ 的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力，使小球作半径 $r = 0.2\text{m}$ 的圆周运动。则小球新的角速度 $\omega =$ _____ rad/s ；拉力所作的功为

$W =$ _____ J



5. 人造卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的()

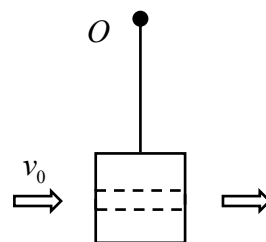
- A. 动量不守恒，动能守恒
- B. 动量守恒，动能不守恒
- C. 角动量守恒，动能不守恒
- D. 角动量不守恒，动能守恒

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统()

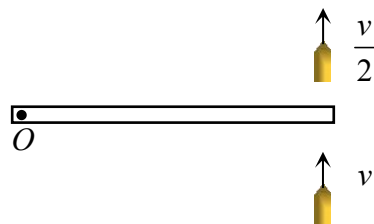
- A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变
- B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变
- C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化
- D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 一个子弹以 v_0 射入一冲击摆(如图)，假若子弹非常迅速地穿过该摆，该过程中子弹和冲击摆所构成的系统()

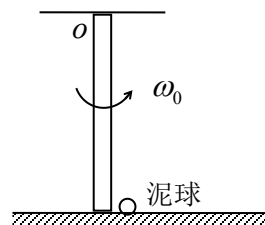
- A. 动量守恒；关于 O 点的角动量守恒
- B. 动量不守恒；关于 O 点的角动量守恒
- C. 动量守恒；关于 O 点的角动量不守恒
- D. 动量不守恒；关于 O 点的角动量不守恒



8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L ，质量为 M ，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $ML^2/3$ 。一质量为 m ，速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿过棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $v/2$ ，则此时棒的角速度应为



9. 一根长度为 $L = 0.60m$ 的均匀棒，绕其端点 O 转动时的转动惯量为 $J = 0.12kg \cdot m^2$ 。当棒摆到竖直位置时，其角速度为 $\omega = 2.4rad \cdot s^{-1}$ 。此时棒的下端和一质量为 $m = 0.20kg$ 的泥球相碰并粘在一起，问棒粘有泥球后的角速度是多少？



课时九 刚体转动的功和能

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 力矩做功	★	0~3	选择、填空
2. 刚体动能定理	必考	10~15	大 题
3. 刚体机械能守恒			

1. 力矩做功 $W = M\theta$

题 1. 一个滑轮半径为 $0.5m$ ，质量为 $5kg$ ，边缘绕有绳子，用恒力 $T = 20N$ 拉绳子一端，一段时间后滑轮转过的角度为 $15.7rad$ 求：拉力所做的功。

解：力矩： $M = TR = 20 \times 0.5 = 10$

力矩做功： $W = M\theta = 10 \times 15.7 = 157(J)$

2. 动能定理

题 1. 某冲床上飞轮的转动惯量为 $4.00 \times 10^3 kg \cdot m^2$ ，当它的转速到 $30 r/min$ 时，它的转动动能是多少？冲击一次，其转速降到 $10 r/min$ 。求每冲击一次飞轮对外所作的功。

解：(1) $n_1 = 30 r/min \Rightarrow \omega_1 = \frac{30 \times 2\pi}{60} = \pi rad/s$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \pi^2 = 1.97 \times 10^4 J$$

(2) $n_2 = 10 r/min \Rightarrow \omega_2 = \frac{10 \times 2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} rad/s$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 2.19 \times 10^3 J$$

由转动动能定理，得外力矩对飞轮做功为： $A = E_{k2} - E_{k1} = -1.75 \times 10^4 J$

飞轮对外所作的功为： $A' = -A = 1.75 \times 10^4 J$

刚体动能：

$$E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

刚体动能定理：

$$A = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

3. 刚体机械能守恒：

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

①刚体机械能只包含刚体动能和刚体势能

②系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功



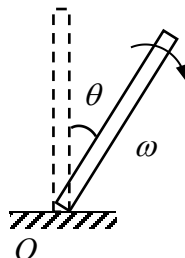
题 1. 长为 L 、质量为 m 的匀质细棒，如图所示，可绕水平轴 O 在竖直面内旋转，若轴光滑，今使棒从竖直位置自由下摆（设转轴位于棒的一端时，棒的转动惯量为 $J = \frac{1}{3}mL^2$ ），求：棒转过 θ 角时的角速度。

解：由机械能守恒得

$$0 + mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2 + mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\text{又 } J = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\text{解得 } \omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{L}}$$



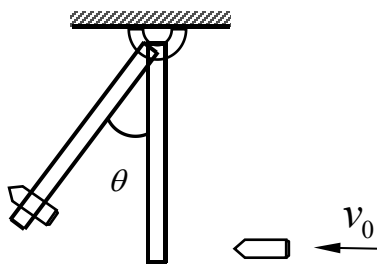
题 2. 一长为 L 的均质细杆如图悬挂， O 为水平光滑固定转轴，平衡时杆铅直下垂，一速度为 v_0 的子弹水平射入杆的最下端并与杆一起摆动，设杆和子弹的质量均为 m ，求：

- (1) 杆开始摆动时角速度的大小；
- (2) 杆和子弹一起摆动时的最大摆角 θ

解：(1) 系统角动量守恒

$$mv_0 L = mvL + J\omega = m\omega L \cdot L + \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$\text{解得： } \omega = \frac{3v_0}{4L}$$



(2) 机械能守恒 $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$

$$\frac{1}{2}m(\omega L)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg \frac{L}{2} = mg(L - L \cos \theta) + mg(L - \frac{L}{2} \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 L^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgL = 2mgL - \frac{3}{2}mgL \cos \theta$$

$$\frac{2}{3}\omega^2 L - \frac{3}{2}g = -\frac{3}{2}g \cos \theta$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3v_0}{4L}\right)^2 L - \frac{3}{2}g = -\frac{3}{2}g \cos \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{v_0^2}{4gL} \Rightarrow \theta = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{4gL}\right)$$



刚体的平动和定轴转动中的一些重要公式

质点的直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度： $v = \frac{ds}{dt}$	角速度： $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度： $a = \frac{dv}{dt}$	角加速度： $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动： $s = vt$	匀角速转动： $\theta = \omega t$
匀变速直线运动 $v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 - v_0^2 = 2as$	匀变速转动 $\omega = \omega_0 + at$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$
力 F ，质量 m 牛顿第二定律： $F = ma$	力矩 M ，转动惯量 J 转动定律： $M = J\alpha$
动量 mv ，冲量 Ft （常力） 动量定理： $Ft = mv - mv_0$	角动量 $J\omega$ ，冲量 Mt （常力矩） 角动量定理： $Mt = J\omega - J_0\omega_0$ （常力矩）
动量守恒定律： $\sum mv = \text{常量}$	角动量守恒定律： $\sum J\omega = \text{常量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A = Fs$ 动能定理（常力）： $Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A = M\theta$ 动能定理： $M\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$ （常力矩）

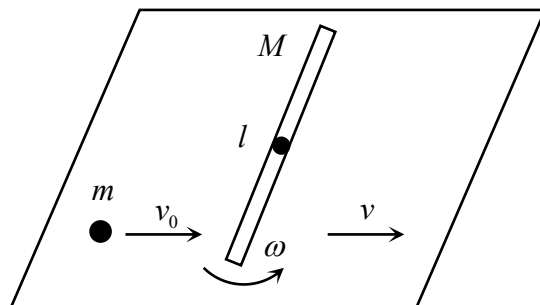


课时九 练习题

1. 在光滑水平桌面上放置一个静止的质量为 m' ，长为 $2l$ ，可绕过与杆垂直的光滑轴中心转动的细杆，有一质量为 m 的小球以沿水平方向与杆垂直的速度 \vec{v}_0 与杆的一端发生完全弹性碰撞，求小球的反弹速度 \vec{v} 及杆的转动角速度 ω 。

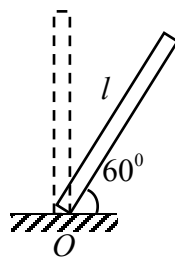
2. 长为 l ，质量为 M 的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴，质量为 m 的小球以水平速度 \vec{v}_0 垂直于棒冲击其一端而粘上。已知棒绕 O 点的转动惯量 $J = \frac{Ml^2}{12}$ ， $M = 3m$ ，求：

- (1) 碰撞后棒的角速度 ω 和球的速率 V ；
- (2) 由此而损失的机械能 ΔE

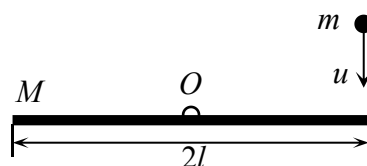


3. 一长为 $l = 1\text{m}$ 的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成 60° ，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为 $\frac{ml^2}{3}$ ，其中 m 和 l 分别为棒的质量和长度。 $(g = 10\text{m/s}^2)$ 求：

- (1) 放手时棒的角加速度；
- (2) 棒转到水平位置时的角速度

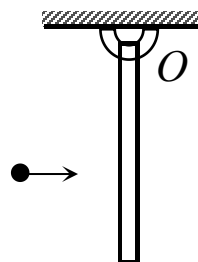


4. 如题图所示，一根长为 $2l$ ，质量为 M 的匀质细棒，可绕棒中点的水平轴 O 在竖直面内转动，开始时棒静止在水平位置，质量为 m 的小球以速度 u 垂直下落在棒的端点，设小球与棒作弹性碰撞，问碰撞后小球的反弹速度 v 及棒转动的角速度 ω 各为多少？



5. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 旋转，初始状态为静止悬挂，现有一个小球自左方打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统()

- A. 只有机械能守恒
B. 只有动量守恒
C. 只有对转轴 O 的角动量守恒
D. 机械能，动量和角动量均守恒



6. 一均质细杆，长 $L=1m$ ，可绕通过一端的水平光滑轴 O 在铅垂面内自由转动，如题图所示。开始时杆处于铅垂位置，今有一子弹沿水平方向以 $v=10m \cdot s^{-1}$ 的速度射入细杆。设入射点离 O 点的距离为 $\frac{3}{4}L$ ，子弹的质量是杆质量的 $\frac{1}{9}$ ，试求：

- (1) 子弹和杆开始共同运动的角速度；
(2) 子弹和杆共同摆动能达到的最大角度

