《信号与系统》课后作业参考答案

Chap 01

1. 解：

(1) $\cos 8t$ 的周期为 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}=T_1$

$\sin 12t$ 的周期为 $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}=T_2$

所以原信号的周期为两者的最小公倍数，

即：$\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{2}$ 为有理数，所以 $f(t)$ 为周期信号。

$T=\frac{\pi}{2}$

(2)

$x(n)$ 的周期为 $N=\frac{2\pi}{\omega}$，N 应为正整数，但由于 π 为无理数，N 不可能为正整数，所以 $f(k)$ 为非周期信号。

3. 解：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)dt$

$=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\cos\pi)\delta(t-1)dt=\int_{-\infty}^{\infty}0\cdot\delta(t-1)dt$

$=0$

(2) $\cos t\,\delta(t-\pi)=\cos\pi\,\delta(t-\pi)=-\delta(t-\pi)$

(3) $\int_{-\infty}^{t}e^{-t}\delta'(t)dt$

根据冲激偶的性质：$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

01页

得 $e^{-t}\delta'(t) = e^{-0}\delta'(t) - [e^{-t}]'|_{t=0}\delta(t)$

$= \delta'(t) + \delta(t)$

则：$\int_{-\infty}^{t} e^{-t}\delta'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} [\delta'(t) + \delta(t)]\,dt$

$= \delta(t) + \varepsilon(t)$

4.

(1) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5$. 设输入 $x_1(t)$、$x_2(t)$

$y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + 5 \qquad y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} + 5$

$y_1(t) + y_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + 5 + \frac{dx_2(t)}{dt} + 5$

$= \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} + 10 \neq \frac{d(x_1(t)+x_2(t))}{dt} + 5$

✓ 所以系统非线性.

输入为 $x(t-t_0)$，输出 $\frac{dx(t-t_0)}{dt} + 5$

✓ $y(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{dt} + 5$ —— 时不变

$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+5$，不受$x(t)$，$t\geq0$的影响，为因果系统

设$f(t)=\varepsilon(t)$，$y(t)=5+\delta(t)$，$t=0$处，$y(t)\to\infty$

系统不稳定

(2) $y(t)=x(t)\quad t\geq0$

$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ 线性系统

$y(t)=x(t)$，$t\geq0$ 因果系统

若$x(t)$有限，$y(t)$有限。 稳定系统

~~设$y_1(t)$=~~ 令$x_1(t)=x(t-t_0)$

$y_1(t)=x(t-t_0)=y(t-t_0)$ 时不变系统

(3) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$

设$q_t=f(t-t_d)$，$t\geq t_d$

$y_q(t)=\int_{-\infty}^{2t-t_d}x(\tau)d\tau$

又 $y_{zs}(t-t_d)=\int_{-\infty}^{2t-2t_d}x(\tau)d\tau$

显然 $y_q(t)\neq y_{zs}(t-t_d)$ 时变系统

03面

$c_1\int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau + c_2\int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$

$= \int_{-\infty}^{2t} [c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau)]\, d\tau$　线性系统

$\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$， $t_0>0$ 受影响．　非因果系统

设 $x(t)=\varepsilon(t)$，

$\int_{-\infty}^{2t} \varepsilon(\tau)d\tau = \int_{0}^{2t} \varepsilon(\tau)d\tau$

$= \tau\Big|_0^{2t} = 2t$， $t\geq 0$

随t无限增长．　不稳定

所以 $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$ 为

线性 时变 非因果 不稳定系统

chap02-03 参考解答.

1. 解：设冲激响应为 $h(t)$，阶跃响应为 $g(t)$

根据题意：
$$\begin{cases} y_1(t) = y_{zi}(t) + h(t) & \text{—— ①} \\ y_2(t) = y_{zi}(t) + g(t) & \text{—— ②} \end{cases}$$

根据LTI系统的微分特性，$h(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$

①－②，并代入 $y_1(t)$，$y_2(t)$，得

$$y_1(t) - y_2(t) = h(t) - g(t)$$ 即

$$[e^{-t} - (1-5e^{-t})] = \frac{dg(t)}{dt} - g(t)$$

即 $-1-4e^{-t} = g'(t) - g(t)$，$t>0$ —— ③

整理：$g'(t) - g(t) = 4e^{-t} - 1$ —— ④

④式右端无冲激，所以对④式两边积分得

$g(0_+) - g(0_-) = 0$，即 $g(0_+) = g(0_-) = 0$

④式为关于 $g(t)$ 的微分方程，其特征方程为

$\lambda - 1 = 0$，$\lambda = 1$，齐次解为 $g_h(t) = Ae^{t}$

由根据④式右边特解形式为

$g_p(t) = p_1 e^{-t} + p_0$ 代入④式，得

$$\begin{cases} -p_1e^{-t} - p_1e^{-t} - p_0 = 4e^{-t} - 1 \\ -2p_1 e^{-t} - p_0 = 4e^{-t} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = -2 \end{cases}$$

$g_p(t) = 1-2e^{-t}$ $(t>0)$

全解为 $g_h(t) + g_p(t) = 1-2e^{-t} + Ae^{t}$，$t>0$ ⑤

把 $g(0_+)$ 初始条件代入⑤式得 $1-2+A=0$，

$A = 1 \Longrightarrow g(t) = 1-2e^{-t} + e^{t}$，$t>0$

把$g(t)$代入②式，得

$$y_{zi}(t) = y_z(t) - g(t)$$

$$= 1-5e^{-t} - (1-2e^{-t}+e^{t})$$

从而 $y_{zi}(t) = (-3e^{-t} - e^{t})\varepsilon(t)$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = (2e^{-t}+e^{t})\varepsilon(t) + (1-2e^{-t}+e^{t})\delta(t)$$

$$= (2e^{-t}+e^{t})\varepsilon(t) + (1-2+1)\delta(t)$$

$h(t) = (2e^{-t}+e^{t})\varepsilon(t)$

2、解：$\begin{cases} y(0+) = y_{zi}(0+) + y_{zs}(0+) = 3 & —① \\ y'(0+) = y'_{zi}(0+) + y'_{zs}(0+) = 4. & —② \end{cases}$

$y_{zs}(t)$ 为 $y_{zs}(0-) = y'_{zs}(0-) = 0$ 时方程的解.

代入 $f(t)$ 得

$$y''_{zs}(t) + 4y'_{zs}(t) + 4y_{zs}(t) = -2e^{-t}\varepsilon(t) + 2\delta(t) + 8e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$= 6e^{-t}\varepsilon(t) + 2\delta(t) \quad —③$$

显然 $y''_{zs}(t)$ 包含 $\delta(t)$

令 $y''_{zs}(t) = a\delta(t) + r_0(t)$

$y'_{zs}(t) = r_1(t)$，$y_{zs}(t) = r_2(t)$ 代入③式

可求得 $a = 2$，又 $\begin{cases} y'_{zs}(0+) - y'_{zs}(0-) = a = 2 \\ y_{zs}(0+) - y_{zs}(0-) = 0 \end{cases}$

而 $y_{zs}(0-) = y'_{zs}(0-) = 0$

所以 $y'_{zs}(0+) = 2$，$y_{zs}(0+) = 0$

当 $t > 0$ 时，由③式得到

$$y''_{zs}(t) + 4y'_{zs}(t) + 4y_{zs}(t) = 6e^{-t}\varepsilon(t) \quad —④$$

根据特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$，$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

齐次解为 $(C_{zs1} + C_{zs2}t)e^{-2t}$

特解为 pe^{-t} 代入④式，得 $pe^{-t} - 4pe^{-t} + 4pe^{-t} = 6e^{-t}$

$\Rightarrow p = 6$

$$y_{zs}(t) = (C_{zs1} + C_{zs2}t)e^{-2t} + 6e^{-t} \quad —⑤$$

$$y'_{zs}(t) = C_{zs2}e^{-2t} - 2(C_{zs1} + tC_{zs2})e^{-2t} - 6e^{-t} \quad —⑥$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0_+) = C_{zs1} + 6 = 0 \\ y'_{zs}(0_+) = C_{zs2} - 2C_{zs1} - 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{zs1} = -6 \\ C_{zs2} = -4 \end{cases}$$

$$y_{zs}(t) = (-6-4t)e^{-2t} + 6e^{-t}, \ t \geq 0 \quad \text{——} \ 7$$

又
$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = 3 - y_{zs}(0_+) = 3 \\ y'_{zi}(0_+) = 4 - y'_{zs}(0_+) = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

零输入响应为 $y_{zi}(t) = C_{zi1}e^{-2t} + C_{zi2}te^{-2t}$

$$y'_{zi}(t) = -2C_{zi1}e^{-2t} + C_{zi2}e^{-2t} - 2C_{zi2}te^{-2t}$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = C_{zi1} + C_{zi2} = 3 \\ y'_{zi}(0_+) = -2C_{zi1} + C_{zi2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{zi1} = -5 \\ C_{zi2} = 8 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = -5e^{-2t} + 8te^{-2t} \quad t > 0 \quad \text{——} \ 8$$

全响应为

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) =$$

$$-5e^{-2t} + 8te^{-2t} + 6e^{-t} - 6e^{-2t} - 4e^{-2t} \cdot t, \ t > 0$$

$$= -11e^{-2t} + 4te^{-2t} + 6e^{-t}, \quad t > 0$$

$$y(t) = -11e^{-2t} + 4te^{-2t} + 6e^{-t}, \ t > 0$$

3. 解：

(1) 令 $y(t) = \varepsilon(t) * e^{-at}\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)\,d\tau$

$= \left[\int_{0}^{t} e^{-a\tau}\,d\tau\right]\varepsilon(t) = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_{0}^{t}\varepsilon(t)$

$= \frac{1}{a}(1-e^{-at})\varepsilon(t)$，由卷积延迟特性：

$x_1(t) * x_2(t) = \varepsilon(t-1) * e^{-at}\varepsilon(t) = y(t-1)$

$= \frac{1}{a}\left[1-e^{-a(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$

2) 令 $y(t) = (1+t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * \varepsilon(t)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t}(1+\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t}(1+\tau)\varepsilon(\tau-1)\,d\tau$

$= \left[\int_{0}^{t}(1+\tau)\,d\tau\right]\varepsilon(t) - \left[\int_{1}^{t}(1+\tau)\,d\tau\right]\varepsilon(t-1)$

$= \left(\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{0}^{t}\varepsilon(t) - \left(\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{1}^{t}\varepsilon(t-1)$

$= \left(t+\frac{t^2}{2}\right)\varepsilon(t) - \left(t+\frac{t^2}{2}-1-\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t-1)$

$= \left(t+\frac{t^2}{2}\right)\varepsilon(t) - \left(t+\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}\right)\varepsilon(t-1)$

所以 $x_1(t) * x_2(t) = y(t-1) - y(t-2) =$

$\left[(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}\right]\varepsilon(t-1) - \left[(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{3}{2}\right]\varepsilon(t-2) -$

$\left[(t-2)+\frac{(t-2)^2}{2}\right]\varepsilon(t-2) + \left[(t-2)+\frac{(t-2)^2}{2}-\frac{3}{2}\right]\varepsilon(t-3)$

$= \frac{t^2-1}{2}\varepsilon(t-1) - \frac{2t-5}{2}\varepsilon(t-2) + \frac{t^2-2t-3}{2}\varepsilon(t-3)$

(3) $x_2(t)=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\varepsilon(t)$ $\quad x_1(t)=e^{-at}\varepsilon(t)$

$$x_1(t)*x_2(t)=e^{-at}\varepsilon(t)*\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\varepsilon(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}}{2}\varepsilon(\tau)e^{-a(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega\tau}}{2}\varepsilon(\tau)e^{-a(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}}{2}\varepsilon(\tau)e^{-at}e^{a\tau}\varepsilon(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega\tau}}{2}\varepsilon(\tau)e^{-at}\cdot e^{a\tau}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{e^{-at}}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{(j\omega+a)\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-j\omega+a)\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-at}\left[e^{(j\omega+a)t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)+e^{(a-j\omega)t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-at}\left[\int_{-\infty}^{t}e^{(a+j\omega)\tau}\varepsilon(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{t}e^{(a-j\omega)\tau}\varepsilon(\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{e^{-at}}{2}\left[\int_{0}^{t}e^{(a+j\omega)\tau}d\tau+\int_{0}^{t}e^{(a-j\omega)\tau}d\tau\right]\varepsilon(t)$$

$$=\frac{e^{-at}}{2}\left[\frac{e^{(a+j\omega)\tau}}{a+j\omega}\bigg|_0^t+\frac{e^{(a-j\omega)\tau}}{a-j\omega}\bigg|_0^t\right]\varepsilon(t)$$

$$=\frac{e^{-at}}{2}\left[\frac{e^{(a+j\omega)t}-1}{a+j\omega}+\frac{e^{(a-j\omega)t}-1}{a-j\omega}\right]\varepsilon(t)$$

$$=\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-at}}{2(a+j\omega)}+\frac{e^{-j\omega t}-e^{-at}}{2(a-j\omega)}\right]\varepsilon(t)$$，整理后得

$$x_1(t)*x_2(t)=\frac{a\cos\omega t+\omega\sin\omega t-ae^{-at}}{a^2+\omega^2}\varepsilon(t)$$

10页

(4) 令 $y(t)=\sin\omega t*\delta(t)=\sin\omega t$

那么 $\sin\omega t*\delta(t+2)=y(t+2)=\sin[\omega(t+2)]$

4. 解：依题知复合系统的冲激响应 $h(t)$ 为

$h(t)=[h_1(t)-h_1(t)*h_2(t)]*h_3(t)$，代入参数得

$h(t)=[e^{-2t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)*[\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)]]*\delta'(t)$

~~令 $e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=f(t)$~~

~~那么 $h(t)=[e^{-2t}\varepsilon(t)-f(t-1)-f(t-2)]*\delta'(t)$~~

$h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)*\delta'(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)*\delta'(t)-$
$e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t-2)*\delta'(t)$

由卷积的微分积分性质：

$h(t)=[e^{-2t}\varepsilon(t)]'*\delta(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)*\delta(t-1)*\delta(t)-$
$e^{-2t}\varepsilon(t)*\delta(t)*\delta(t-2)$

$=[-2e^{-2t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\delta(t)]-e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)-$
$e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)$

即：$h(t)=-2e^{-2t}\varepsilon(t)+\delta(t)-e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)-e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)$

答：$h(t)=-2e^{-2t}\varepsilon(t)+\delta(t)-e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)-e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)$

5. 解：根据零状态响应与单位序列响应的关系

$y_{zs}(k)=h(k)*f(k)=h(k)*[\delta(k)+\delta(k-1)+2\delta(k-2)]$

$y_{zs}(k)=h(k)+h(k-1)+2h(k-2)$ ①

差分方程：$h(k)+h(k-1)+2h(k-2)=y_{zs}(k)$ ①

若设 $h_1(k)$ 为该方程的单位样值响应 $h_1(k)$

$h(k)=h_1(k)*y_{zs}(k)$

$=h_1(k)*[\delta(k)-\delta(k-1)+3\delta(k-2)-\delta(k-3)+6\delta(k-4)]$

$=h_1(k)-h_1(k-1)+3h_1(k-2)-h_1(k-3)+6h_1(k-4)$ ②

根据 $h_1(k)$ 的定义知，$h_1(k)$ 满足

$h_1(k)+h_1(k-1)+2h_1(k-2)=\delta(k)$

由②式知：

$$h(k)=\underbrace{h_1(k)+h_1(k-1)+2h_1(k-2)}_{\delta(k)}\underbrace{-2h_1(k-1)-2h_1(k-2)-4h_1(k-3)}_{-2\delta(k-1)}+\underbrace{3h_1(k-2)+3h_1(k-3)+6h_1(k-4)}_{3\delta(k-2)}$$

所以 $h(k)=\delta(k)-2\delta(k-1)+3\delta(k-2)$

答：$h(k)=\delta(k)-2\delta(k-1)+3\delta(k-2)$

6. 解：

$$y(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n)$$ ，代入

$$y(n) = [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-2)] * [\delta(n) - \delta(n-1)] * a^n \varepsilon(n-1)$$

$$= [\delta(n) + \delta(n-1)] * [\delta(n) - \delta(n-1)] * a^n \varepsilon(n-1)$$

$$y(n) = [\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-1) - \delta(n-2)] * a^n \varepsilon(n-1)$$

$$y(n) = [\delta(n) - \delta(n-2)] * a^n \varepsilon(n-1)$$

$$y(n) = [\delta(n) - \delta(n-2)] * a^{n-1} \varepsilon(n-1) \cdot a$$

$$= a[\delta(n) - \delta(n-2)] * a^{n-1} \varepsilon(n-1)$$

$$= a[a^{n-1}\varepsilon(n-1) - a^{n-3}\varepsilon(n-3)]$$

$$y(n) = a^n \varepsilon(n-1) - a^{n-2} \varepsilon(n-3)$$

13页

CHap 04.

1. 解：

(1) $f(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}=2Sa[2\pi(t-2)]$

已知宽度为τ，幅度为1的门函数$g_\tau(t)$的傅里叶变换为

$\dfrac{2\sin\frac{w\tau}{2}}{w}=\tau Sa(\frac{w\tau}{2})$，若宽度$\tau$为$4\pi$时

$g_{4\pi}(t)\longleftrightarrow 4\pi Sa(2\pi w)$，根据对称性。

$4\pi Sa(2\pi t)\longleftrightarrow 2\pi g_{4\pi}(-w)$，偶函数

所以 $4\pi Sa(2\pi t)\longleftrightarrow 2\pi g_{4\pi}(w)$

即 $2Sa(2\pi t)\longleftrightarrow g_{4\pi}(w)$

再根据傅里叶变换的时移特性：

$f(t)=2Sa[2\pi(t-2)]\longleftrightarrow g_{4\pi}(w)e^{-j2w}$

(2) 由于 $e^{-a|t|}\longleftrightarrow\dfrac{2a}{a^2+w^2}$

利用对称性：$f(t)$的傅里叶变换为

$f(t)=\dfrac{2a}{a^2+t^2}\longleftrightarrow 2\pi e^{-a|w|}$

(3) 根据定义 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}\varepsilon(-t)e^{-jwt}dt$

$\varepsilon(-t)=1$，$-t>0$，$t<0$．所以

上式等于 $\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-jw)t}dt$

$$= \frac{1}{a-jw}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-jw)t} d(a-jw)t$$

$$= \frac{1}{a-jw} e^{(a-jw)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-jw}$$

(4) $f(t) = \cos(w_0 t)\varepsilon(t) = \varepsilon(t)\frac{1}{2}(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t})$

$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$，根据频移特性.

$f(t) = \cos(w_0 t)\varepsilon(t)$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}\pi\delta(w-w_0) + \frac{1}{2j(w-w_0)} + \frac{1}{2}\pi\delta(w+w_0) + \frac{1}{2j(w+w_0)}$$

$$= \frac{1}{2}\pi[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)] - \frac{j}{w^2-w_0^2}$$

(5) $f(t) = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2 = Sa(2\pi t)Sa(2\pi t)$

$Sa(2\pi t)$的傅里叶变换为

$$Sa(2\pi t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}g_{4\pi}(w)$$

由频域卷积特性.

$$f(t) = Sa(2\pi t)Sa(2\pi t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}g_{4\pi}(w)\right] * \left[\frac{1}{2}g_{4\pi}(w)\right]$$

$$F(jw) = \frac{1}{8\pi} g_{4\pi}(w) * g_{4\pi}(w)$$

(b) $f(t)=(3+\cos w_1 t)\cos w_0 t$

由于 $3+\cos w_1 t = 3+\frac{1}{2}e^{jw_1 t}+\frac{1}{2}e^{-jw_1 t}$

所以 $3+\cos w_1 t$ 的傅里叶变换为

$$6\pi\delta(w)+\pi\delta(w-w_1)+\pi\delta(w+w_1)$$

所以 $f(t)=(3+\cos w_1 t)\cos w_0 t$ 的傅里叶变换为

根据频移特性：

$$\frac{1}{2}\left(6\pi\delta(w-w_0)+\pi\delta(w-w_1-w_0)+\pi\delta(w+w_1-w_0)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(6\pi\delta(w+w_0)+\pi\delta(w-w_1+w_0)+\pi\delta(w+w_1+w_0)\right)$$

$$=3\pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]+\frac{\pi}{2}[\delta(w-w_1-w_0)+\delta(w+w_1-w_0)+\delta(w-w_1+w_0)+\delta(w+w_1+w_0)]$$

17页

2. 解： $f_1(t) = f(-2t)e^{j2t}$

$$f(-2t) \longleftrightarrow \frac{1}{|-2|}F(j\frac{w}{-2}) = \frac{1}{2}F(-\frac{jw}{2})$$

$$f_1(t) = f(-2t)e^{j2t} \longleftrightarrow \frac{1}{2}F[-\frac{j}{2}(w-2)] = F_1(jw)$$

4. 解：

(1) $x(t) \longrightarrow X(jw)$

所以 $Y(jw) = X(jw)e^{-jwt_0}$

得 $H(jw) = \dfrac{Y(jw)}{X(jw)} = e^{-jwt_0}$

冲激响应为 $h(t) = \delta(t-t_0)$

(2) 对微分方程作傅里叶变换

$$(jw)^2 Y(jw) + 4jwY(jw) + 3Y(jw) = jwX(jw) + 2X(jw)$$

整理后 $H(jw) = \dfrac{Y(jw)}{X(jw)} = \dfrac{2+jw}{(jw)^2+4jw+3}$

$$H(jw) = \frac{k_1}{jw+1} + \frac{k_2}{jw+3}$$

$$k_1 = \left.\frac{jw+2}{jw+3}\right|_{jw=-1} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = \left.\frac{jw+2}{jw+1}\right|_{jw=-3} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2}.$$

所以 $H(jw) = \dfrac{\frac{1}{2}}{jw+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{jw+3}$

得冲激响应为 $h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$

19页

3. 解：乘法器的输出信号 $x_1(t)=x(t)\cos 3t$

根据图3(b)：$X(j\omega)=g_4(\omega)$

乘法器的输出的频谱函数为 $X_1(j\omega)=$

(根据频移特性). $\frac{1}{2}[g_4(\omega+3)+g_4(\omega-3)]$

由题：系统的频率响应函数 $H(j\omega)=g_6(\omega)$

得系统响应 $y(t)$ 的频谱函数为

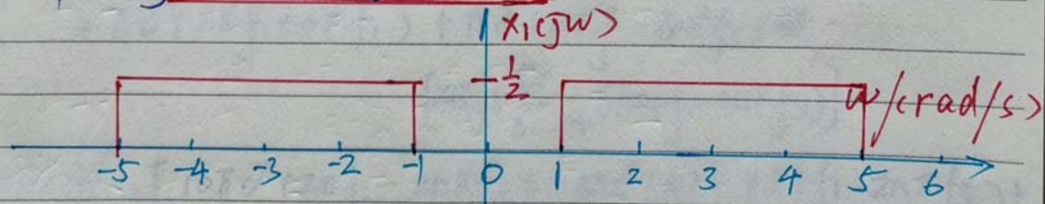
$$Y(j\omega)=H(j\omega)X_1(j\omega)=g_6(\omega)\times\frac{1}{2}[g_4(\omega+3)+g_4(\omega-3)]$$

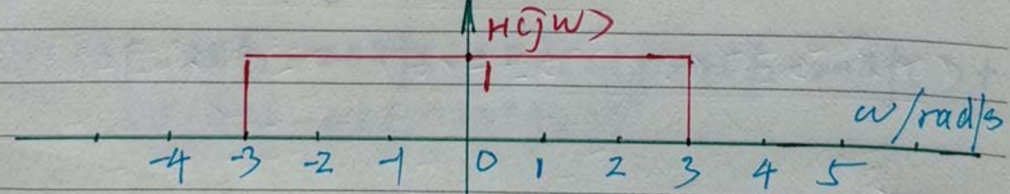
$$=\frac{1}{2}[g_2(\omega+2)+g_2(\omega-2)]$$

$$=\frac{1}{2}g_2(\omega)*[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\pi g_2(\omega)}_{\frac{\sin t}{t}\ 原函数}*\underbrace{\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]}_{\cos 2t\ 原函数}$$

所以 $y(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin t}{t}\cos(2t)$





20页

5. 解：(1) 对信号 $f(t)$ 与 $s(t) = \delta_{T_S}(t)$ 取傅里叶变换，得：

$$F(j\omega) = F(j2\pi f) = 10\pi\delta(2\pi f) + 2\pi[\delta(2\pi f + 2\pi f_1) + \delta(2\pi f - 2\pi f_1)] + \pi[\delta(2\pi f + 4\pi f_1) + \delta(2\pi f - 4\pi f_1)]$$

其在 (-10kHz, 10kHz) 频谱如下图所示。

$s(t)$ 的傅里叶变换为（见课本 P183. 式 (4-9-3)）

$$\delta_{T_S}(t) \longrightarrow 2\pi f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f - 2n\pi f_S) = S(j2\pi f)$$

根据频域卷积定理：

$$F_S(j2\pi f) = \frac{1}{2\pi} F(j2\pi f) * S(j2\pi f)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[10\pi\delta(2\pi f) + 2\pi\delta(2\pi f + 2\pi f_1) + 2\pi\delta(2\pi f - 2\pi f_1) + \pi\delta(2\pi f + 4\pi f_1) + \pi\delta(2\pi f - 4\pi f_1) * [2\pi f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f - 2n\pi f_S)]$$

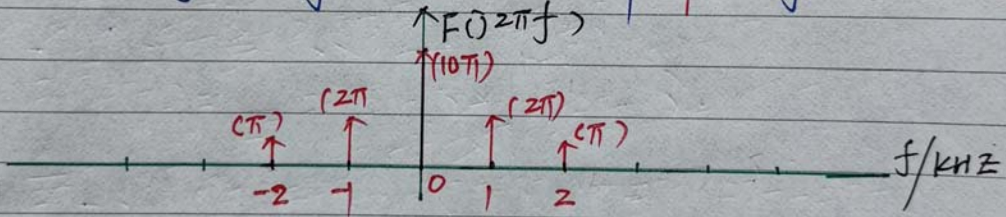
$$= f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty}[10\pi\delta(2\pi f - 2n\pi f_S) + 2\pi\delta(2\pi f + 2\pi f_1 - 2n\pi f_S) + 2\pi\delta(2\pi f - 2\pi f_1 - 2n\pi f_S) + \pi\delta(2\pi f + 4\pi f_1 - 2n\pi f_S) + \pi\delta(2\pi f - 4\pi f_1 - 2n\pi f_S)]$$

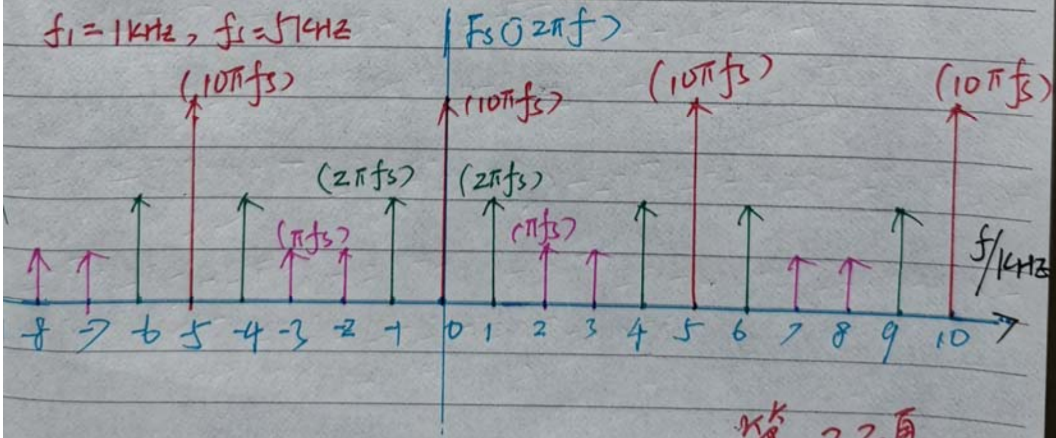
21页

根据题意，$f_1=1kHz$，$f_s=5kHz$，$f(t)$的最高频率为 $f_m=2f_1=2kHz$、所以 $f_s>2f_m$ 时，取样信号的 $f_s(t)$ 的频谱不发生混叠。其在 $(-10kHz, 10kHz)$ 频谱如下图所示。

2) 若由取样信号 $f_s(t)$ 恢复信号，理想低通滤波器的截止频率为 f_c 必须满足

$f_m < f_c < f_s - f_m$ 即 $2kHz < f_c < 3kHz$.





第22页

chap 05.

1. 解: $x_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow X_1(s)=\frac{1}{s+1}$

$x_2(t)=e^{-2t}\varepsilon(t+1)=e^2\cdot e^{-2(t+1)}\varepsilon(t+1)$

由于 $e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2}$，所以 $x_2(t)$的拉氏变换为 $e^2 e^s \frac{1}{s+2}$（根据时延特性）

$x(t)=x_1(t)*x_2(t) \Longrightarrow X(s)=X_1(s)X_2(s)$

$X(s)=\frac{1}{s+1}e^2e^s\frac{1}{s+2}=e^2e^s\frac{1}{(s+1)(s+2)}=e^2e^s(\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1})$

$=e^2e^s(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})$（根据时延特性）

所以 $x(t)=e^2[e^{-(t+1)}-e^{-2(t+1)}]\varepsilon(t+1)$

2. 解:

(1) $\frac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}=\frac{s^3+6s^2+8s-2s}{s^2+6s+8}=s-\frac{2s}{s^2+6s+8}$

$=s+\frac{2}{s+2}-\frac{4}{s+4}$ 逆变换为：

$\delta'(t)+(2e^{-2t}-4e^{-4t})\varepsilon(t)$

(2) $\frac{s+2}{s^2+2s+5}$ 象函数 $F(s)$ 的分母多项式

$A(s)=s^2+2s+5=(s+1+2j)(s+1-2j)$

$A(s)=0$ 有一对共轭复根 $s_{1,2}=-1\pm 2j$

第23页

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+5}=\frac{K_1}{s+1-2j}+\frac{K_2}{s+1+2j} \quad (K_1=K_2^*)$$

$$K_1=\frac{B(s)}{A'(s_1)}=\frac{s+2}{2s+2}\bigg|_{s=-1+2j}=\frac{1+2j}{-2+4j+2}$$

$$K_1=\frac{1+2j}{4j}=\frac{2-j}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\theta}$$

$$K_2=\frac{\sqrt{5}}{4}e^{-j\theta}$$ （K_1与K_2共轭）

$$F(s)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\theta}}{s+1-2j}+\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}e^{-j\theta}}{s+1+2j}$$ 取逆变换，得.

$$f(t)=\left[\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\theta}e^{(-1+2j)t}+\frac{\sqrt{5}}{4}e^{-j\theta}e^{(-1-2j)t}\right]\varepsilon(t)$$

- - - - - -

(3) $$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s-1)^2}+\frac{K_3}{s-1}$$

$$K_1=\frac{1}{(s-1)^2}\bigg|_{s=0}=1 \qquad K_2=\frac{1}{s}\bigg|_{s=1}=1$$

$$K_3=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)\bigg|_{s=1}=-1$$ 所以有

$$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}$$

取逆变换得到：$f(t)=(1+(t-1)e^{t})\varepsilon(t)$

即 $f(t)=(1+(t-1)e^{t})\varepsilon(t)$

24页

3. 解：冲激响应、阶跃响应均为零状态响应

所以S域电路与时域相同。

题中 $\frac{F(s)}{I(s)} = sL_1 + \frac{R_1(R_2+sL_2)}{R_1+R_2+sL_2}$ 代入参数

$$\frac{F(s)}{I(s)} = s + \frac{2(3+s)}{2+3+s} = s + \frac{6+2s}{s+5}$$

$$= \frac{s^2+7s+6}{s+5}$$

所以 $H(s) = \frac{I(s)}{F(s)} = \frac{s+5}{s^2+7s+6} =$

① 冲激响应、输入 $\delta(t)$，象函数为 1.

$$Y(s) = H(s)\cdot 1 = H(s) = \frac{s+5}{s^2+7s+6} = \frac{\frac{4}{5}}{s+1} + \frac{\frac{1}{5}}{s+6}$$

$$h(t) = \left(\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-6t}\right)\varepsilon(t)$$

② 阶跃响应：$f(t) = \varepsilon(t)$　$F(s) = \frac{1}{s}$

$$G(s) = H(s)F(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{s+5}{s^2+7s+6}$$

$$G(s) = \frac{\frac{5}{6}}{s} + \frac{-\frac{4}{5}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{30}}{s+6}$$ 取逆变换得

阶跃响应. $g(t) = \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{1}{30}e^{-6t}\right)\varepsilon(t)$

25页

4. 解：(1) 根据图5、

$$[F(s)+Y(s)]\frac{s}{s^2+4s+4}\cdot K = Y(s)$$

整理：$\dfrac{Y(s)}{F(s)} = \dfrac{Ks}{s^2+(4-K)s+4} = H(s)$ 系统函数

(2) 根点为 $p_{1,2} = \dfrac{(K-4)\pm\sqrt{(K-4)^2-16}}{2}$

若系统稳定，根点位于左半开平面、分以下两种情况

1) $\begin{cases}(K-4)^2-16>0\\ K-4+\sqrt{(K-4)^2-16}<0\end{cases}$ 得 $K<0$

(2) $\begin{cases}(K-4)^2-16\le 0\\ K-4<0\end{cases}$ 得 $0\le K<4$.

综上 $K<4$.

(3) $K=4$ 时，系统处于临界条件。

$$H(s)=\frac{4s}{s^2+4}$$

此时冲激响应为 $\dfrac{4s}{s^2+4}$，取逆变换

得 $h(t)=4\cos 2t\,\varepsilon(t)$

答：冲激响应为 $h(t)=4\cos 2t\,\varepsilon(t)$

26页

chap 06.

1. 解：

(1) 先求 $n^2\varepsilon(n)$ 的 z 变换，再根据時移特性.

$\varepsilon(n) \longrightarrow \frac{z}{z-1}$

$n\varepsilon(n) \longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{-1}{(z-1)^2}$

$= \frac{z}{(z-1)^2}$

$n^2\varepsilon(n) \longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

移位 $= (n-1)^2\varepsilon(n-1) \longrightarrow z^{-1}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

$= \frac{z+1}{(z-1)^3} \quad |z|>1$

(2) 由于 $a^k\varepsilon(k) \longrightarrow \frac{z}{z-a}$.

由z域积分特性：

$\frac{a^k}{k+1}\varepsilon(k) \longrightarrow z\int_z^{\infty}\frac{x}{x-a}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

$= z\int_z^{\infty}\frac{1}{(x-a)x}dx = \frac{z}{a}\ln\left(\frac{z}{z-a}\right)$

(3). 由于 $(-1)^k\varepsilon(k) \longrightarrow \frac{z}{z+1}$

根据部分和特性：

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\varepsilon(i) \longrightarrow \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z+1} = \frac{z^2}{z^2-1}$

27页.

(4) $(n+1)[\varepsilon(n)-\varepsilon(n-3)] * [\varepsilon(n)-\varepsilon(n-4)]$

$(n+1)[\varepsilon(n)-\varepsilon(n-3)] = n\varepsilon(n)+\varepsilon(n)-n\varepsilon(n-3)-\varepsilon(n-3)$

$= n\varepsilon(n)+\varepsilon(n)-(n-3)\varepsilon(n-3)-4\varepsilon(n-3)$ ①

①式z变换为: $\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}-z^{-3}\frac{z}{(z-1)^2}-4z^{-3}\frac{z}{z-1}$

$=\frac{z+z^2-z-z^{-2}-4z^{-2}(z-1)}{(z-1)^2}$

$\frac{z^2-z^{-2}-4z^{-1}+4z^{-2}}{(z-1)^2}$

$=\frac{z^2+3z^{-2}-4z^{-1}}{(z-1)^2}$ ③

$\varepsilon(n)-\varepsilon(n-1)$ ② z变换为: $(1-z^{-4})\frac{z}{z-1}$ ④

所以原式z变换为: ③×④

$=\frac{(z^2+3z^{-2}-4z^{-1})}{(z-1)^2}(1-z^{-4})\frac{z}{z-1}$

$=\frac{(z^2+3z^{-2}-4z^{-1})(z-z^{-3})}{(z-1)^3}$

$=\frac{z^3+2z^{-1}-3z^{-5}+4z^{-2}-4}{(z-1)^3}$

28页

2. 解：$X(z) = \ln(1-2z)$ $|z|<\frac{1}{2}$

$$X'(z) = \frac{-2}{1-2z}$$

$$-zX'(z) = \frac{2z}{1-2z} = \frac{-2z}{2z-1} = \frac{-z}{z-\frac{1}{2}}$$

由于 $kx(k) \longleftrightarrow -zX'(z)$

其逆变换为 $\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(-k-1)$

即 $kx(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(-k-1)$

所以 $x(k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(-k-1)}{k}$ $|z|<\frac{1}{2}$

3. 解：$X(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{3}z}{z^2+z-2}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-\frac{1}{3}}{z^2+z-2} = \frac{\frac{7}{9}}{z+2} + \frac{\frac{2}{9}}{z-1}$$

取逆变换得 $x(k) = \frac{7}{9}(-2)^k \varepsilon(k) + \frac{2}{9}\varepsilon(k)$

29页

4. 解：根据系统的差分方程，取z变换

$$Y_{zs}(z) + z^{-1}Y_{zs}(z) - \frac{3}{4}z^{-2}Y_{zs}(z) = 2X(z) - az^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{2 - az^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}$$

由 $H(z)|_{z=1} = 1$，得 $H(1) = \frac{2-a}{1+1-\frac{3}{4}} = 1$

得 $a = \frac{3}{4}$.

2) $$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{2z^2 - \frac{3}{4}z}{z^2 + z - \frac{3}{4}}$$

$$H(z) = \frac{8z^2 - 3z}{4z^2 + 4z - 3} \qquad \frac{H(z)}{z} = \frac{8z-3}{4z^2+4z-3}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{8z-3}{(2z-1)(2z+3)} = \frac{\frac{1}{4}}{2z-1} + \frac{\frac{15}{4}}{2z+3}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{2z-1} + \frac{\frac{15}{4}z}{2z+3}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{8}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{15}{8}z}{z+\frac{3}{2}}$$

$$h(k) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k) - \frac{15}{8}\left(-\frac{3}{2}\right)^k \varepsilon(-k-1)$$

第30页