蜂考速成课

《高数/微积分下》

习题答案

（微信扫一扫）

课时一　多元函数（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 重极限	★★	0～3	选择、填空
2. 偏导数，全微分，隐函数求偏导	必考	6～10	大题

一、重极限

题型 1. 有理化

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

题型 2. 重要极限公式

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{\underline{xy}}\underline{x}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}x=2$$

$$\lim_{xy\to 0}\frac{\sin xy}{xy}=1$$

题型 3. 无穷小替换

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\frac{1}{2}x^2y}{xy}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{1}{2}x=1$$

$$\sqrt{1+x^2y}-1\sim\frac{1}{2}x^2y$$

$$e^{xy}-1\sim xy$$

☆重要极限公式

1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　2） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

这里的 x 要当做是一个整体，比如若 $xy\to 0$，xy 作为一个整体也满足这些公式。

☆无穷小替换公式：当 $x\to 0$ 时

1) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

2) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$　　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

二、偏导数、全微分、隐函数求导（对某个变量求导的时候，其余变量均看作常数）

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$　　$(\sin x)'=\cos x$　　$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$(e^x)'=e^x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(a^x)'=a^x\ln a$　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

题型 1. $z=3x^2y^3+4x^2-2y+6$，求：①$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$　②在（1,1）点偏导

解：① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+8x$　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2$　② $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+8x\Big|_{(1,1)}=14$　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2\Big|_{(1,1)}=7$

题型 2： $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8yx^2$ 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\ ,\quad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2\ ,\quad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy}$$

注意：

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

题型 3. 设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，$(y>0)$，求 dz

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot(-\dfrac{x}{y^2})=-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

$$dz=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}dy$$

注意：千万不要忘了写成全微分形式

题型 4. $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $dz\big|_{(1,1)}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,1)}=-\dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$

$$dz=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$$

题型 5：$\sin x+3y-z^3-e^z=6$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：令 $F=\sin x+3y-z^3-e^z-6$

$F_x=\cos x$， $F_y=3$， $F_z=-3z^2-e^z$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos x}{3z^2+e^z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3}{3z^2+e^z}$$

隐函数解题方法：

1）构造函数 $F(x,y,z)$；

2）求 F_x　F_y　F_z

3）$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

别忘了负号

题型 6：设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $dz\big|_{(0,1)}$

解：将 $(0,1)$ 点带入方程得 $z=1$，得这个点 $(0,1,1)$

令 $F=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y$

$$F_x=\frac{1}{z}\bigg|_{(0,1,1)}=1，\quad F_y=\frac{1}{y}\bigg|_{(0,1,1)}=1，\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}\bigg|_{(0,1,1)}=-1$$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=1 \qquad dz=dx+dy$$

练习 1.1：$z=2x\sin 2y-e^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

练习 1.2：求 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $du\big|_{(1,-1,1)}$

练习 1.3：设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

练习 1.4：设 $z(x,y)$ 由方程 $\sin(xyz)-\frac{1}{z-xy}=1$ 所确定，求 $dz\big|_{(0,1)}$。

课时二　多元函数（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复合函数求偏导	必考	6～10	大题
2. 偏导，连续，可微关系	★★	0～3	选择、填空

一、复合函数求偏导（先画出关系链，同路相乘，不同相加）

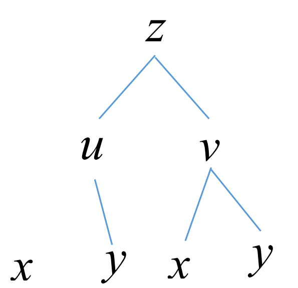
题型 1. $z=e^{u-2v}$，$u=x+y$，$v=xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^{u-2v}-2e^{u-2v}\cdot y$

$=e^{x+y-2xy}(1-2y)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^{u-2v}-2e^{u-2v}\cdot x$

$=e^{x+y-2xy}(1-2x)$

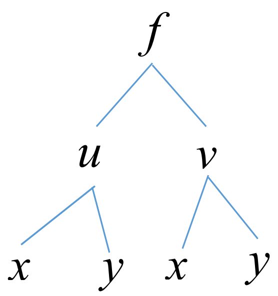


题型 2. $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$u=x^2-y^2,v=e^{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot ye^{xy}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot xe^{xy}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$



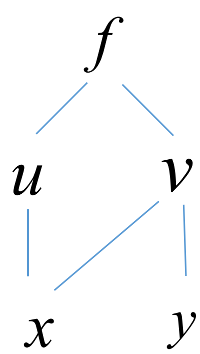
题型 3： 设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$u=x,v=\frac{x}{y}$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+(-\frac{1}{y^2})f_2'+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

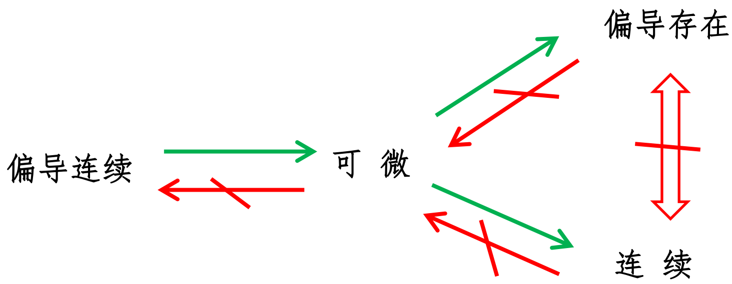
$=f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})+(-\frac{1}{y^2})\cdot f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})$

$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$



f、f_1'、f_2' 具有相同的关系链

二、偏导，连续，可微的关系（背诵）



练习 2.1：$z=u^2+v^2$，$u=2x+y^2$，$v=x^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

练习 2.2：设 $z=xf(2x,\frac{y^2}{x})$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

练习 2.3：考虑二元函数的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；　　(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分；　　(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（ ）

（A）$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　(B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

课时三　多元函数(三)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 梯度，方向导数	★★★	$0\sim3$	选择、填空、大题
2. 多元函数极值	必考	$6\sim10$	大题

一、梯度记作：$gradf(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$。　方向导数记作：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$

题 1：$u=xy^2+yz^3+3$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的梯度。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2\Big|_{(2,-1,1)}=1$　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=(2xy+z^3)\Big|_{(2,-1,1)}=-3$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=3yz^2\Big|_{(2,-1,1)}=-3$

$gradf(2,-1,1)=(1,-3,-3)$

梯度解题方法：

梯度　$gradf=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$

（注：梯度为各偏导组成的向量）

题 2：$z=xe^{2y}$ 在 $p(1,0)$ 到 $k(2,1)$ 的方向导数

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}\Big|_{(1,0)}=1$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}\Big|_{(1,0)}=2$　　$gradf=(1,2)$

$\overrightarrow{Pk}=(1,1)$　　$\overrightarrow{e_l}=\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,0)}=gradf\cdot\overrightarrow{e_l}=(1,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})=\frac{3\sqrt2}{2}$$

方向导数解题方法：
1. 求在 P 点梯度
2. 求 $\overrightarrow{pk}$ 的单位向量 $\overrightarrow{e_l}$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial l}=gradf\cdot\overrightarrow{e_l}$

（梯度点乘 $\vec l$ 的单位向量）

二、多元函数的极值

一般极值求解方法：

① 求驻点：$\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow(x_0,y_0)$

驻点：
满足 一阶偏导 同时 为 0 的点

② 求 $A=f_{xx}$　　$B=f_{xy}$　　$C=f_{yy}$

③ 对每一个驻点 (x_0,y_0) 判定 $AC-B^2$

$AC-B^2>0$，有极值，且 $A\begin{cases}>0,\text{有极小值}\\<0,\text{有极大值}\end{cases}$

$AC-B^2<0$，无极值

$AC-B^2=0$，不确定

题 1：$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值(一般极值)

解：$\begin{cases} f_x'=3x^2+6x-9=0 \\ f_y'=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ 得驻点：(1,0)，(1,2)，(-3,0)，(-3,2)

$A=f_{xx}''=6x+6$ $B=f_{xy}''=0$ $C=f_{yy}''=-6y+6$

在（1,0）点，$AC-B^2=12\times6=72>0$，有极值，且 $A=12>0$，有极小值 $f(1,0)=-5$

在（1,2）点，$AC-B^2<0$，无极值

在（-3,0）点，$AC-B^2<0$，无极值

在（-3,2）点，$AC-B^2=72>0$，有极值，且 $A=-12<0$，有极大值 $f(-3,2)=31$

选择题中常考知识点：

1. 驻点一定是极值点（×） （若 $AC-B^2<0$，则无极值）
2. 极值点一定是驻点（×） （极值点存在：1. 驻点 2. 一阶导数不存在的点）
3. 可导函数的极值点一定是驻点（√） （去掉了一阶导数不存在的情况）

题 2.：将正数 a 分为三个非负数之和，使它们乘积最大。（条件极值）

解：设三个数分别为 x,y,z

目标函数：$f=xyz$

条件函数：$x+y+z=a$

注意把 a 移项

构造拉格朗日函数：

$$L=xyz+\lambda(x+y+z-a)$$

$$\begin{cases} L_x=yz+\lambda=0 \\ L_y=xz+\lambda=0 \\ L_z=xy+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-a=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{a}{3}$$

为唯一极值点

故所求乘积最大：$f(\mathrm{x,y,z})=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}$

条件极值求法：

① 确定目标函数 $f(x,y,z)$

② 确定条件函数 $g(x,y,z)$

③ 构造拉格朗日函数

$$L=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0,z_0)$$

即为所求极值点。

练习 3.1: $f(x,y,z)=x^2yz^3$,求在 (1 , 1 , 1 ,) 的梯度

练习 3.2： $u=z^4-3xz+x^2+y^2$ 在 $M(1,1,1)$ 沿 $(1,2,2)$ 的方向导数

练习 3.3：求函数 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 的极值

练习 3.4：求函数 $z=xy$ ，在附加条件 $x+y=1$ 下的最大值。

练习 3.5：周长为 2P 矩形，绕一边旋转一周得到圆柱，求圆柱体积最大。

练习 3.6： $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $D:x^2+y^2\le 16$ 上的最大值和最小值（提升）

课时四　空间几何向量

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量（点乘、叉乘）	★★★	0～3	选择、填空
2. 空间平面与直线	★★★★★	0～7	大题
3. 空间曲线的切线与法平面	★★★	0～6	选择、填空或大题
4. 空间曲面的切平面与法线	★★★	0～6	

一、向量（点乘、叉乘）

题型 1： $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$　　$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

求①$|\vec{a}|$　$|\vec{b}|$　②单位向量$\vec{e}_a$　③$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\cos\theta$

解：$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$$\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)=3-2+2=3$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

向量点乘公式：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

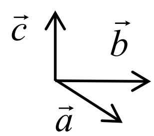
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}$

$$\vec{e}_a=\left(\frac{x_1}{|\vec{a}|},\frac{y_1}{|\vec{a}|},\frac{z_1}{|\vec{a}|}\right)$$

向量叉乘（向量积）（必考点）★

$$\vec{a}\times\vec{b}$$



$\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}$

（即垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$所在的平面）

注：经常用于求平面的法向量

题型 2： 计算$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$　$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求$\vec{a}\times\vec{b}$

注意第二项是负

解：
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\underline{\begin{vmatrix}-1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\vec{k}}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

熟练以后可省略

$$\vec{a}\times\vec{b}=(5,1,7)$$

注：叉乘是个向量

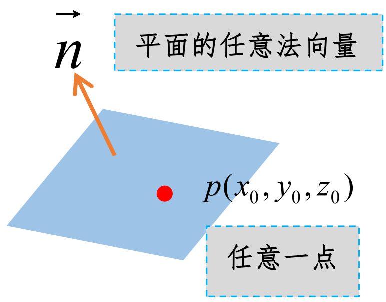
二、空间平面与直线

1)空间平面及其方程

点法式方程

$P(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{n} = (A, B, C)$ $\Rightarrow$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$



化简得 $Ax + By + Cz \underline{- Ax_0 - By_0 - Cz_0} = 0$

$Ax + By + Cz \underline{+D} = 0$ （一般式）

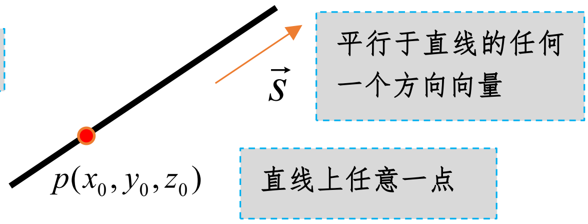
2）空间直线及其方程

1）对称式方程

对称式方程

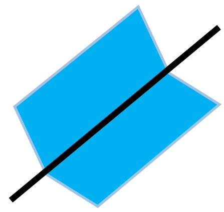
$P(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{s} = (A, B, C)$ $\Rightarrow \dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$



2）一般式：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

两个平面的交线



3）参数方程 $\begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \\ z = Ct + z_0 \end{cases}$

题型 1：求过 3 个点 $A(1,1,1)$ $B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程

解：$\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 1)$ $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$ 故 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一个法向量。

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 6)$$

所求平面方程为 $-(x-1) + 3(y-1) + 6(z-1) = 0$ $x - 3y - 6z + 8 = 0$

题型 2：已知平面 $x - y + z + 5 = 0$ 和 $5x - 8y + 4z + 36 = 0$ 求其交线对称式方程和参数方程

解 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \vec{n} = (1, -1, 1) \\ \vec{n} = (5, -8, 4) \end{cases}$ $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ 求出方向向量

令 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x+z+5=0 \\ 5x+4z+36=0 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} x=-16 \\ z=11 \end{cases} \Rightarrow (-16,0,11)$ 求出一点

则直线方程：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}$

令：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}=t$ 得参数方程为 $\begin{cases} x=4t-16 \\ y=t \\ z=-3t+11 \end{cases}$

题型 3：求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 与平面 $x+y+3z=0$ 的交点坐标。

解：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}=t$

得 $\begin{cases} x=t+2 \\ y=3t \\ z=-t-1 \end{cases}$ 带入平面方程 得 $t+2+3t+3(-t-1)=0$ 解得 $t=1$

故交点为 $(3,3,-2)$

题型 4：求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离

解：由距离公式知

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$

点到平面的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

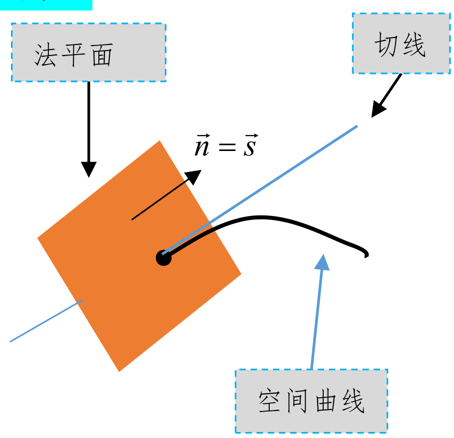
题型 5：求曲线 $x=t, y=2t^2, z=3t^2+t$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面

解：当 $t=1$ 时，得点 $P(1,2,4)$

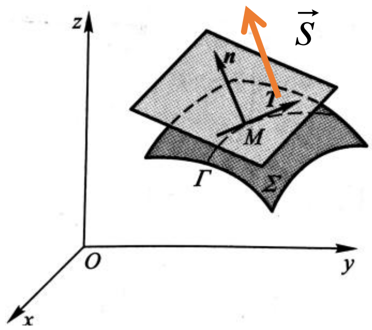
$\begin{cases} x'=1 \\ y'=4t=4 \\ z'=6t+1=7 \end{cases}$ 则 $\vec{s}=\vec{n}=(1,4,7)$

故切线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{7}$

法平面为 $(x-1)+4(y-2)+7(z-4)=0$



5. 空间曲面的切平面与法线



M 点求出的切平面的<u>法向量 $\vec{n}$</u>即是法线的<u>方向向量 $\vec{s}$</u>

题型 6：求 $2e^{z}-z+xy=4$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线

> 法向量和方向向量求法：
> ① 构造 F
> ② 求 F_x, F_y, F_z
> ③ $\vec{s}=\vec{n}=(F_x, F_y, F_z)$

解　设 $F=2e^{z}-z+xy-4$

则 $\begin{cases} F_x=y=1 \\ F_y=x=2 \\ F_z=2e^{z}-1=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{s}=\vec{n}=(1,2,1)$

即切平面为 $(x-2)+2(y-1)+z=0$　　　法线为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=z$

练习 4.1：已知 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$

练习 4.2：已知平面 $6x-\dfrac{1}{2}y-z-6=0$

① 平面的法向量
② 在平面上找一点
③ 求过点 $(3,0,-1)$ 且与已知平面平行的平面

练习 4.3：过点 $(1,-1,2)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ 的直线

练习 4.4：求通过两平行直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$ 和 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=z+1$ 的平面方程

练习 4.5：求出曲线 $x=t, y=t^{2}, z=t^{3}$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$

练习 4.6：求曲面 $z=2x^{2}+4y^{2}$ 在点 $(1,1,6)$ 处的切平面及法线方程

课时五　二重积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大　题
2. 极坐标下计算			

一、直角坐标系下的计算

记作：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$　　$f(x,y)$ 被积函数　$d\sigma=dxdy$ 面积元系　D 为积分区域

直角坐标下计算二重积分步骤：

1）画出区域 D 的图形

2）写出 x，y 的范围（重点）　　3）代入计算（注意：被积函数保留至第三步计算）

x 型

x：常数 → 常数（$x_{左}\to x_{右}$）

y：函数 → 函数（$y_{下}\to y_{上}$）

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{x_{左}}^{x_{右}}dx\int_{y_{下}=f(x)}^{y_{上}=f(x)}f(x,y)dy$$

y 型

y：常数 → 常数（$y_{下}\to y_{上}$）

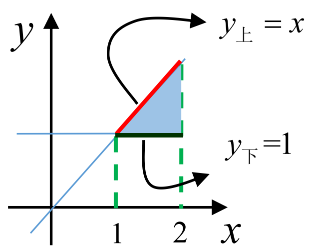
x：函数 → 函数（$x_{左}\to x_{右}$）

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{y_{下}}^{y_{上}}dy\int_{x_{左}=f(y)}^{x_{右}=f(y)}f(x,y)dx$$

题 1：计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 的 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 围成.

1. 画出区域 D 图形　　2. 写范围　　3. 代入计算

注：二重积分中，被积函数必须保留至第三步计算



x 型

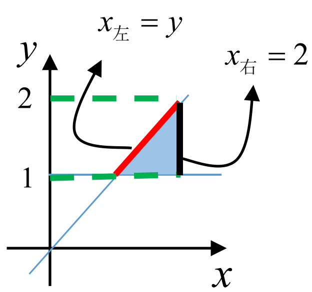
$x:1\to 2$

$y:1\to x$

$$\iint\limits_D xydxdy$$

$$=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\int_1^2\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_1^x dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{9}{8}$$



y 型

$y:1\to 2$

$x:y\to 2$

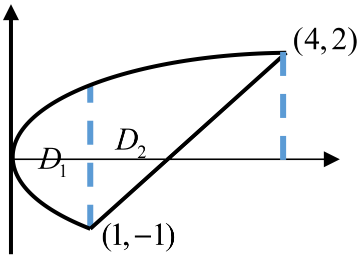
$$\iint\limits_D xydxdy$$

$$=\int_1^2 dy\int_y^2 xydx=\int_1^2\left[\frac{1}{2}yx^2\right]_y^2 dy$$

$$=\int_1^2\left(2y-\frac{1}{2}y^3\right)dy=\frac{9}{8}$$

题 2. 写区域范围专项练习：计算 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

(1) D 为 $y^2=x$，$y=x-2$ 围成

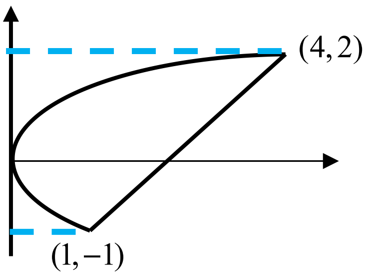


x 型：

$D_1:\begin{cases}x:0\to1\\ y:-\sqrt{x}\to\sqrt{x}\end{cases}$

$D_2:\begin{cases}x:1\to4\\ y:x-2\to\sqrt{x}\end{cases}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$
$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



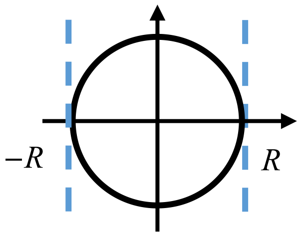
y 型：

$y:-1\to2$

$x:y^2\to y+2$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$$

(2) D 为 $x^2+y^2=R^2$ 围成

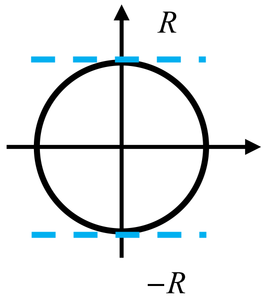


x 型：

$x:-R\to R$

$y:-\sqrt{R^2-x^2}\to\sqrt{R^2-x^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^R dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$



y 型：

$y:-R\to R$

$x:-\sqrt{R^2-y^2}\to\sqrt{R^2-y^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^R dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$$

题 3：计算 $\iint\limits_D (\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy$，其中 D 的 $x^2+y^2=1$ 围成.

解：$\iint\limits_D (\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy$

$$=\iint\limits_D \frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$$

$$=\iint\limits_D 2dxdy=2\iint\limits_D dxdy$$

$$=2\cdot\pi\cdot 1^2=2\pi$$

此处的 $\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 关于 x 为奇函数

积分区域 D 为圆，关于 y 轴对称

故 $\iint\limits_D \frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$

1）若被积函数<u>关于 x 为奇函数</u>，且积分区域 D <u>关于 y 轴对称</u>，则积分为 0

2）若被积函数<u>关于 y 为奇函数</u>，且积分区域 D <u>关于 x 轴对称</u>，则积分为 0

3）若被积函数 $f(x,y)=1$，则 $\iint\limits_D dxdy=A$（区域 D 的面积）

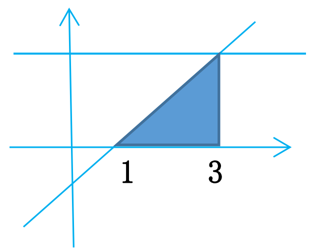
题 4：$\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$ 交换积分次序

1：根据范围，画出区域

$x:1\to 3$
$y:0\to x-1$ $\Rightarrow$ $x=1,x=3$
$y=0,y=x-1$

2：把范围写成 y 型

$y:0\to 2$
$x:y+1\to 3$



3：代入原式

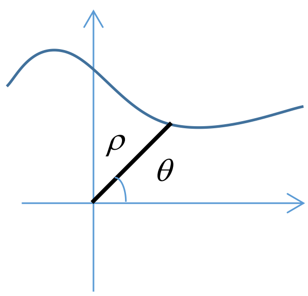
$$\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy=\int_0^2 dy\int_{y+1}^3 f(x,y)dx$$

即把原来 x 型转化成 y 型，

或者把原来 y 型转化成 x 型。

二. 极坐标下的二重积分（大题中必考）

补充知识点：<u>极坐标</u>



2. 什么是极坐标

①用 θ 和 ρ 表示的函数

② ρ 是原点到函数上点的长度

③ θ 是和 x 轴夹角

1. 直角坐标转化极坐标

方法：令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

例 $x^2+y^2=4\to\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=4$

得 $\rho=2$（极坐标）

极坐标求二重积分方法：

①画出区域 D

②写出 θ 和 ρ 范围：

$\theta: \theta_1 \to \theta_2$（常数）

ρ： $\rho_1(\theta) \to \rho_2(\theta)$（函数）

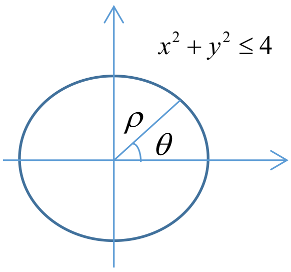
③代入公式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

题 1：求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ 其中 D 为 $x^2+y^2 \le 4$

解：①画出区域 D



②写出 θ 和 ρ 范围

$\theta: 0 \to 2\pi$

（覆盖整个圆区域）

$\rho: 0 \to 2$

（任意角度 θ，画出 ρ）

③利用公式带入计算

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

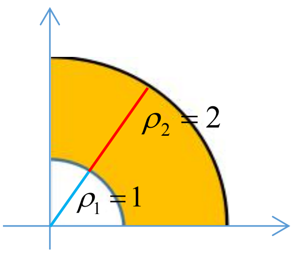
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 d\theta$$

$$=2\pi \times \frac{1}{3} \times 8 = \frac{16\pi}{3}$$

题 2. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ 　D 为 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 围成的第一象限的部分.

解：①画出区域 D



②写出 θ 和 ρ 范围

$$\begin{cases} \theta: & 0 \to \dfrac{\pi}{2} \\ \rho: & 1 \to 2 \end{cases}$$

③代入公式计算

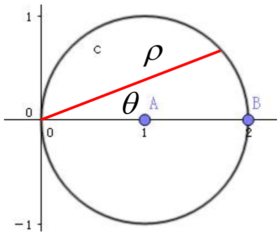
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7\pi}{6}$$

题 3. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ D 为 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的区域.

解：①画出区域 D ②写出 θ 和 ρ 范围 ③代入公式计算



$$\begin{cases} \theta: & -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \\ \rho: & 0 \to 2\cos\theta \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\rho^3\Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{9}$$

练习 5.1：计算二重积分 $\iint\limits_D (x-1)d\sigma$ 区域 D 由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成的第一象限部分.

练习 5.2： 交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$

练习 5.3：计算二重积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x}dx$

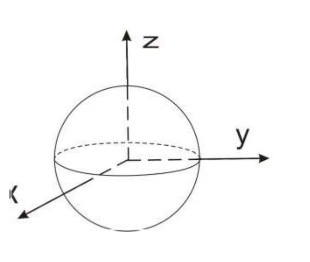
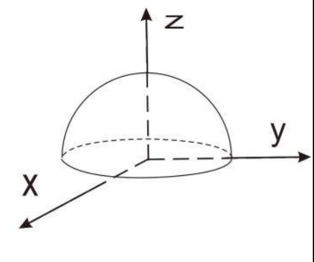
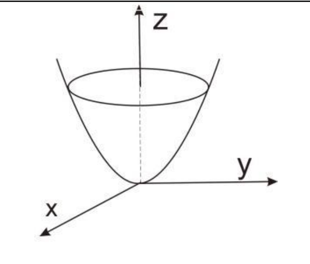
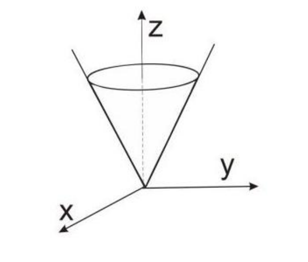
练习 5.4：求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ D 为 $x^2+y^2\le a^2$ 围成的区域。

练习 5.5：求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ D 为 $x^2+(y-1)^2=1$ 围成的区域。

课时六　三重积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大　题
2. 柱坐标下计算			

★常用函数图形（很常用，必须记住，而且要会画）

$x^2+y^2+z^2=R^2$	$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$z=x^2+y^2$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$
			

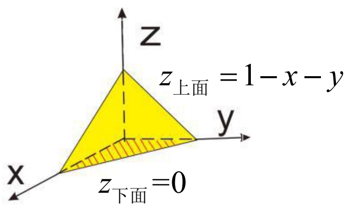
一、直角坐标下计算方法

记作：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，

$f(x,y,z)$ 是被积函数，Ω 为积分区域，$dv=dxdydz$

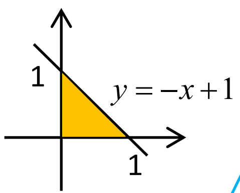
题型 1：计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv$，其中 Ω 为平面，$x=0, y=0, z=0$　$x+y+z=1$ 在第一象限部分。

1）　画出立体图，确定 z 的范围



$z:0\to 1-x-y$

2）投影到 xoy 面，确定 x 和 y 的范围



$$\begin{cases} x:0\to 1 \\ y:0\to 1-x \end{cases}$$

3）代入计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y)dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)z\right]\Big|_0^{1-x-y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x-x^2-2xy+y-y^2\right)dy=\frac{1}{12}$$

直角坐标下计算三重积分套路

口诀：面→面，点→点，线→线

1）　画立体图

确定 z 的范围（$z_{下面}\to z_{上面}$）

2）　投影图

确定区域 D 的范围（同二重积分）

3）　代入计算

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$$

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1=f(x)}^{y_2=f(x)}dy\int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)}f(x,y,z)dz$$

被积函数保留至第三步计算

二、柱面坐标系下计算三重积分（很重要，一定要学会）

柱坐标下计算三重积分套路：

1）画立体图

确定 z 的范围（$\underline{z_{下面} \to z_{上面}}$）

2）投影图确定区域 D

θ 和 ρ 的范围

3）代入计算

所有的 x 和 y 替换 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

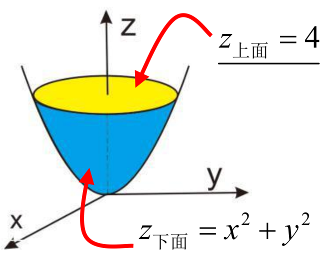
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv =$$

$$\underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho}_{} \int_{z_下(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_上(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$$

二重积分的极坐标

题型 1：计算 $\iiint_{\Omega} zdxdydz$. 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与曲面 $z = 4$ 围成.

1）画出立体图，确定 z 的范围

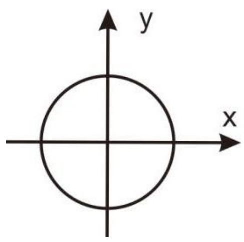


z 范围：

$x^2 + y^2 \to 4$

$\rho^2 \to 4$

2）投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta : 0 \to 2\pi$

$\rho : 0 \to 2$

求投影区域的方法：<u>消去 z</u>

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

3）代入公式求解

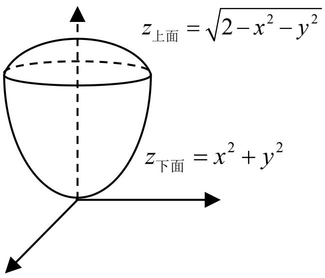
$$\iiint_{\Omega} zdxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 zdz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho [\frac{1}{2} z^2]_{\rho^2}^4 d\rho = \frac{64}{3}\pi$$

题型 2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$. 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 围成

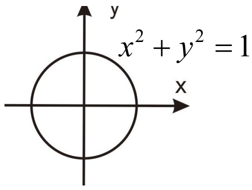
解：1）画出立体图，确定 z 的范围　　2）投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



z 的范围：

$x^2+y^2 \to \sqrt{2-x^2-y^2}$

$z:\rho^2 \to \sqrt{2-\rho^2}$



$\theta:0\to 2\pi$

$\rho:0\to 1$

3）代入公式

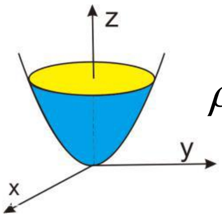
$$原式=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\rho\left(2-\rho^2-\rho^4\right)d\rho=\frac{7\pi}{12}$$

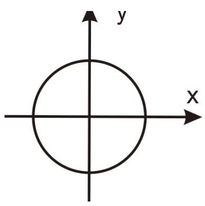
题型 3. 设 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体. 求 Ω 的体积

补充知识点：若被积函数 $f(x,y,z)=1$，则 $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=V$ （Ω 的体积）

解：



$$\rho^2\le z\le 1$$



$\theta:0\to 2\pi$

$\rho:0\to 1$

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 dz$$

$$=2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=2\pi\left(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

熟练之后

解题步骤的文字可以不用写

练习 6.1：计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中 Ω 为三个坐标面与 $x+y+\frac{z}{3}=2$ 围成。

练习 6.2：计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dV$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=2$ 围成

练习 6.3：计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y)dV$，其中 Ω 是由平面 $z=4$ 及曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域

课时七　第一类曲线积分

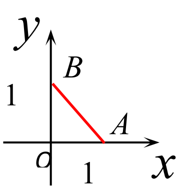
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★★	$3\sim8$	选择填空或大题
2. 第二类曲线积分	★★★★★	$6\sim10$	大题
3. 格林公式	★★★★★	$6\sim10$	

一、第一类曲线积记作 $\int_L f(x,y)ds$.

①画图. 确定 L 的函数 确定积分区间 (a,b)	②计算 ds	③代入公式，计算 $\int_L f(x,y)ds$.
$\begin{cases} L:\ y=f(x) \\ x:x_1\to x_2 \end{cases}$	$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$	$=\int_{x_1}^{x_2} f\left[x,f(x)\right]\sqrt{1+y'^2(x)}dx \quad (x_1<x_2)$
$\begin{cases} L:\ x=f(y) \\ y:y_1\to y_2 \end{cases}$	$ds=\sqrt{1+x'^2(y)}dy$	$=\int_{y_1}^{y_2} f\left[f(y),y\right]\sqrt{1+x'^2(y)}dy \quad (y_1<y_2)$
$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t:t_1\to t_2$	$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	$=\int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (t_1<t_2)$

题型 1. $\int_L (x+y)ds$　其中 L 为连接 $A(1,0)$ 与 $B(0,1)$ 两点的线段。

①画图，确定 L 和 (a,b)



$\begin{cases} L:y=-x+1 \\ x:0\to 1 \end{cases}$

②计算 ds

$y'=-1$

$ds=\sqrt{1^2+(-1)^2}dx$

$=\sqrt{2}dx$

注 2：
被积函数利用 L 的函数进行替换，把所有变量变成统一

区分：
1. 二、三重积分的被积函数不能动
2. 曲线积分的被积函数一定化成统一（因为曲线积分，所有点都在 L 的函数上，但是二、三重积分的点是在区域内）

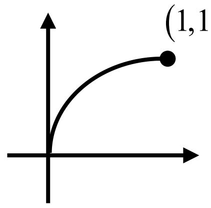
③代入公式计算

$$\int_L (x+y)ds=\int_0^1[x+(-x+1)]\sqrt{2}dx=\sqrt{2}$$

注 1：积分区间（下限小于上限），不论起点和终点

题型 2. $\int_L \sqrt{x}ds$ 其中 L 为抛物线 $x=y^2$ 所从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧

①画图，确定 L 和 (a,b)



$L: x=y^2$

$y: 0\to 1$

②计算 ds

$L: x'=2y$

$ds=\sqrt{1+(2y)^2}dy$

③代入公式计算

$$\int_L \sqrt{x}ds=\int_0^1 \sqrt{y^2}\sqrt{1+(2y)^2}dy$$

$$=\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy=\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

题型 3：设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长，则求 $\int_L (3x^2+4y^2)ds$

若被积函数 $f(x,y)=1$，$\int_L ds=L$ （积分弧段的长度）

解： $12\times(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3})=12\times 1\Rightarrow \underline{3x^2+4y^2=12}$

$$\int_L (3x^2+4y^2)ds=12\int_L ds=12L$$

题型 4：设 L 为 $x^2+y^2=1$ 的周长，则求 $\int_L (x+y)ds$

1. 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数，积分曲线 L 关于 y 轴对称，则 $\int_L f(x,y)ds=0$
2. 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数，积分曲线 L 关于 x 轴对称，则 $\int_L f(x,y)ds=0$

解： $\int_L (x+y)ds=\int_L xds+\int_L yds=0$

练习 7.1：计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$. 其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$. $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成边界

练习 7.2：设 L 为 $x^2+y^2=1$ 下半圆圆周，求 $\int_L (x^2+y^2)ds$

练习 7.3：设平面曲线 $L: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，则 $\oint_L (4x+3y)^2 ds=$ __________ （设曲线长为 a）

课时八　第二类曲线积分

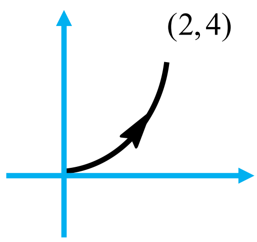
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★★	3～8	选择填空或大题
2. 第二类曲线积分	★★★★★	6～10	大题
3. 格林公式	★★★★★	6～10	

二、第二类曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

①画图 确定 L 的函数 确定起点和终点	②将所有变量化为统一，计算 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$
$\begin{cases} L: y=f(x) \\ x: x_{起}\to x_{终} \end{cases}$	将所有 y 换成 x（$y=f(x),\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ ） $=\int_{x_{起}}^{x_{终}}\{P[x,f(x)]+Q[x,f(x)]\cdot f'(x)\}dx$
$\begin{cases} L: x=f(y) \\ y: y_{起}\to y_{终} \end{cases}$	将所有 x 换成 y（$x=f(y),\mathrm{d}x=f'(y)\mathrm{d}y$） $=\int_{y_{起}}^{y_{终}}\{P[f(y),y]\cdot f'(y)+Q[f(y),y]\}dy$
$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ t: t_{起}\to t_{终} \end{cases}$	将所有 x,y 换成 t（$x=x(t),dx=x'(t)dt.....y=y(t),dy=y'(t)dt$ ） $=\int_{t_{起}}^{t_{终}}\{P[x(t),x(t)]\cdot x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$

题型 1：计算 $\int_L(x-y)dx+(x+y)dy$ 其中 L 从 $(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到 $(1,1)$

解：①画图，确定 L 和 (a,b)



$$\begin{cases} L: y=x^2 \\ x: 0\to 1 \end{cases}$$

注 1：只论起点和终点，不论大小

②统一变量，代入公式计算

$$\int_L(x-y)dx+(x+y)dy$$

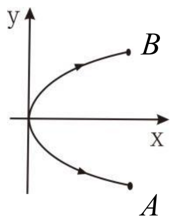
$$=\int_0^1\left[(x-x^2)+(x+x^2)2x\right]dx$$

注 2：变量代换 $y\leftrightarrow x^2$　　$dy=2xdx$

$$=\int_0^1(x+x^2+2x^3)dx=\frac{4}{3}$$

题型 2. 计算 $\int_L xydx$，其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 上的一段弧

解：①画图，确定 L 和 (a,b)



$$\begin{cases} L: x = y^2 \\ y: -1 \to 1 \end{cases}$$

②统一变量，代入公式计算

$$\int_L xy\underline{dx} = \int_{-1}^{1} y^2 \cdot y \cdot \underline{2ydy} = 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = \frac{4}{5}$$

注：没有 $Q(x,y)dy$ 项，默认为 0，不用管

练习 8.1：计算 $\int_L (x^2 - \sqrt{y})dy$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；

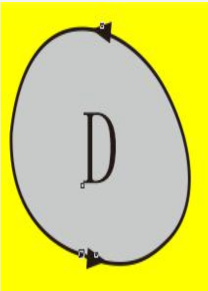
练习 8.2：计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$，其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点（1,1）到点（4,2）的一段弧。

课时九　格林公式

✧ 格林公式（可以看做第二类曲线积分的简便算法）

若积分弧段 L 为 <u>*封闭*</u> 的曲线

$$\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



1) D 是 L 围成的区域
2) 格林公式是把第二类曲线积分转化成了二重积分计算其结果
3) 注意 P 和 Q 对应的位置

注：如图，人沿 L 方向走，D 左手边，为正，反之则为负

$$\int_L Pdx+Qdy$$

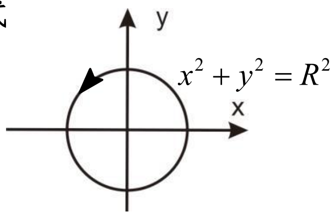
$$=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

★为负的情况一般不考

题型 1：常规型

例：计算曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=R^2$. L 为逆时针

解：　L 为封闭圆周曲线，故运用格林公式



$p=2xy-2y$　　$Q=x^2-4x$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2$　　$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4$

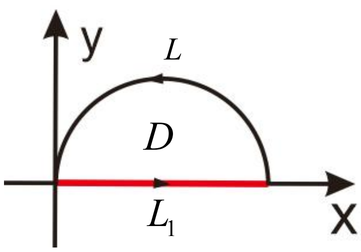
$$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy==\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D[(2x-4)-(2x-2)]dxdy=-2\iint_D dxdy=-2A=-2\pi R^2$$

题型 2：缺线补线型

例：计算 $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$. 其中 L 为逆时针上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$. $y\geq 0$.

解：半圆周不是封闭曲线，补齐有向线段 L_1 ，构成封闭曲线。



$P=e^x\sin y-2y$　　$Q=e^x\cos y-2,$

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2$　　$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$

由格林公式得

$$\int_{L+L_1}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D 2dxdy=2\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=\pi a^2$$

然后计算在 L_1 上的计算积分值

代入 $y=0$，被积函数为 0

$$\begin{cases}L_1: y=0\\ x:0\to 2a\end{cases}\text{代入}\int_{L_1}\underline{\left(e^x\sin y-2y\right)}dx+\underline{\left(e^x\cos y-2\right)dy}=0$$

$$\therefore\int_L=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}=\pi a^2-0=\pi a^2$$

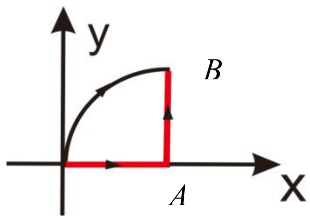
代入 $y=0$ 为常数，故 $dy=0$，含 dy 的项为 0

题型 3：积分与路径无关型：（若 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_L Pdx+Qdy$ 与积分路径无关，只与起点和终点有关）

例：设 L 为圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从（0,0）到（2,2）的一段弧，求 $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy$，

（解析：若按照第二类曲线积分公式计算，由于被积函数和积分弧段函数复杂，太麻烦）

解：



$$p=x^2-y\qquad Q=-(x+\sin y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=-1$$

故积分与路径无关

取 $O\to A\to B$ 路径

在 OA 上积分 $OA:\begin{cases}y=0\\x:0\to 2\end{cases}\Rightarrow\int_{OA}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$

在 AB 上积分 $AB:\begin{cases}x=2\\y:0\to 2\end{cases}\Rightarrow\int_{AB}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2-(2+\sin y)dy=\cos 2-5$

则 $\int_{AB}=\int_{OA}+\int_{AB}=\frac{8}{3}+\cos 2-5=\cos 2-\frac{7}{3}$

练习 9.1：计算 $\oint_L(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 L 由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成逆时针方向

练习 9.2：计算 $\int_L(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 沿 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 由 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的弧段

练习 9.3：计算 $\int_L(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线

课时十　第一类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★	3～8	选择填空或大题
2. 第二类曲面积分	★★★	6～15	大题
3. 高斯公式	★★★★★		

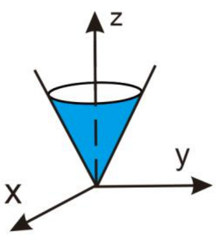
1. 第一类曲面积分，记作：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds$

题型 1. $\iint\limits_{\Sigma} zds$. 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上对应 $0\le z\le 1$ 的部分

解：

1) 积分面函数

Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}$



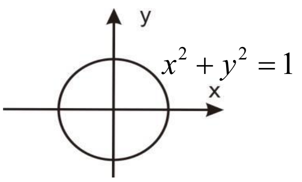
2) 计算 ds

$z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　$z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

3) 画出投影图



投影区域 D_{xy}：$\begin{cases}\theta:0\to 2\pi\\ \rho:0\to 1\end{cases}$

4) 将 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $ds=\sqrt{2}dxdy$ 代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zds=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

第一类曲面积分解题步骤：

1) 确定积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$

2) 计算 $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

3) 将 Σ 投影，确定区域 D_{xy}

4) 代入 $\begin{cases}z=z(x,y)\\ ds=\sqrt{1+z_x+z_y}dxdy\end{cases}$，

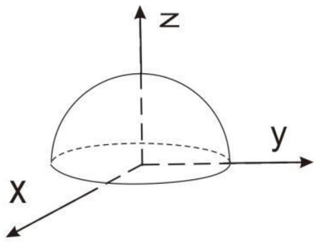
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

题型 2.设Σ： $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$则求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds$

若被积函数$f(x,y,z)=1$，则$\iint\limits_{\Sigma}ds=A$（积分曲面Σ的面积）

解：



$\because x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$

$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=\iint\limits_{\Sigma}a^2ds$

$=a^2\cdot A=a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi a^2=2\pi a^4$

练习 10.1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于 z=0 和 z=1 的部分

练习 10.2. 计算$\iint\limits_{\Sigma}x^2ds$　其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$

课时十一　第二类曲面积分

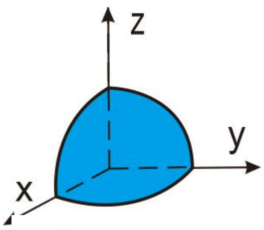
第二类曲面积分（一般不会单独考，在高斯公式中涉及）

记作：$\iint\limits_{\Sigma} \underline{P(x,y,z)dydz} + \underline{Q(x,y,z)dzdx} + \underline{R(x,y,z)dxdy}$

要在积分曲面上对以上三部分分别计算，三部分解题思路和步骤是一样的，因为过程太过麻烦，所以基本不考，即使考到，也考其中一部分，

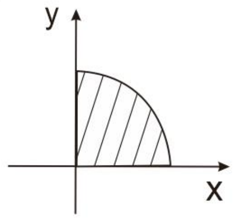
题 1：计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上侧在 $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 部分

解：



1) 积分曲面

Σ：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



2) 投影，确定 D_{xy}

$$\begin{cases} \theta : 0 \to \dfrac{\pi}{2} \\ \rho : 0 \to 1 \end{cases}$$

3) 代入计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6}$$

解题思路

口诀：计算哪部分，投影到哪个面

例：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$（最常考的一部分）

1）确认积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$

2）投影，将 $\Sigma \to xoy$ 面，确定 D_{xy}

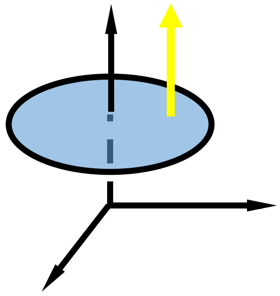
3）代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

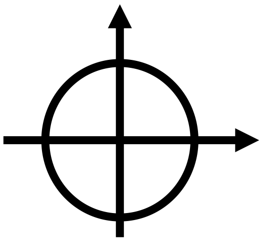
$$= \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

（若沿 Σ 的上、前、右方积分，为正反之则要加一个负号）

题 2：计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是沿曲面 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=4 \end{cases}$ 上侧



1）积分曲面 Σ：$z=4$



2）将曲面 Σ 投影到 xoy 面，确定 D_{xy}

3）代入计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=\iint\limits_{D} 4dxdy=4\cdot\pi\cdot1^2=4\pi$$

课时十二　高斯公式

✧ 高斯公式（可以看做第二类曲面积分的简单算法，非常常考）

若积分曲面Σ为 封闭曲面 的 外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

1) Ω是封闭曲面Σ围成的空间区域

2) 高斯公式是把第二类曲面积分转化成了三重积分计算其结果

3) 注意P、Q、R对应的位置

4) 沿曲面外侧为正，内侧为负（一般都是外侧）

题型一：常规性

例：计算$\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧

解：积分曲面Σ为封闭的，故可以使用用高斯公式

$P=x \qquad Q=y \qquad R=z$

$\frac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=1$

一定注意P、Q和R的位置，以及分别对哪个变量求偏导

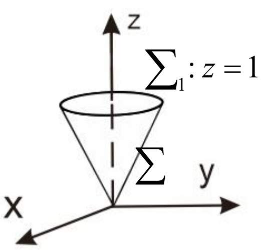
则$\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(1+1+1)dxdydz$

$=3\iiint_{\Omega} dxdydz=3V=3\times\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3$

球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

题型二：缺面补面型

例：设$\sum$ 是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=0$和$z=1$所截得部分的下侧，利用高斯公式计算曲面积分$\iint_{\Sigma} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$



解：补齐Σ_1面，则对闭曲面利用高斯公式

$P=x \qquad Q=y \qquad R=z^2-2z$

$\frac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=2z-2$

利用高斯公式，先求在整个曲面$\sum+\sum_1$上积分结果

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+\left(z^2-2z\right)dxdy=\iiint_{\Omega}(1+1+2z-2)dxdydz=\iiint_{\Omega}2zdxdydz$$

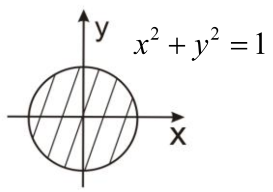
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 2zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho z^2\Big|_\rho^1 d\rho=\frac{\pi}{2}$$

求在$\sum_1$上的积分结果

对于Σ_1：$z=1$代入原式（$dz=0$，下式中带有 dz 的项全为 0）

$$\iint_{\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+\left(z^2-2z\right)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(1-2)dxdy=-\iint_{\Sigma_1}dxdy$$

将Σ_1投影到xoy面上



根据第二类曲面积分公式计算：

$$-\iint_{\Sigma_1}dxdy=-\iint_{D_{xy}}dxdy=-\pi$$

用$(\sum+\sum_1)-\sum_1$

$$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

练习 12.1：计算曲面积分$\iint_{\Sigma}x^3dydz+2xz^2dzdx+3y^2zdxdy$．其中$\Sigma$为$z=x^2+y^2\left(0\le z\le 1\right)$取下侧.

练习 12.2：计算$\iint_{\Sigma}\left(y^2-x\right)dydz+\left(z^2-y\right)dzdx+\left(x^2-z\right)dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$位于$z\ge 0$部分的上侧。

课时十三 常数项级数

知识点	重要程度	分值	题型
1. 概念	★	略	不单独出题
2. 审敛法	★★★★★	基础（必考）	基础知识
3. 交错级数	★★★	$0\sim3$	选择、填空、大题
4. 绝对条件收敛	★★★	0-6	

1.1 认识级数

记作：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$　　　展开式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots-$

令 $s(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.　　若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 有极限，则级数收敛。反之，级数发散

例 1：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}S(n)=\lim_{n\to\infty}1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$$

有极限，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛

例 2：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$

$$S(n)=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1\ldots\ldots+1=n$$

$$\lim_{n\to\infty}S(n)=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

无极限，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散

1.2 无穷级数的性质

1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}kU_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$

3）性质（常在选择题中考）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$
收	收	收
收	发	发
发	发	不确定

1.3. 两个常用的参照级数

1) 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ （也就是等比数列）$\begin{cases} 若|q|<1，则级数\sum^{\infty} aq^n 收敛 \\ 若|q|\geq 1，则级数\sum^{\infty} aq^n 发散 \end{cases}$

2) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散。扩展：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p>1, 则级数收敛 \\ p\leq 1，则级数发散 \end{cases}$

以上两种参照级数，经常用到，可以作为结论，直接使用

2. 审敛法（判别级数收敛与否的方法）

题型 1. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$ 敛散性

解：$u_n=\frac{2n^2}{n^2+n}$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2\neq 0$$ 故级数发散

必要条件：

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 若收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$；

若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 则级数发散

题型 2. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ 的敛散性

解：$u_n=\frac{3^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n}=\lim_{n\to\infty}3\frac{n^2}{(n+1)^2}=3>1$$

所以级数发散

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & 收敛\\ \rho>1 & 发散\\ \rho=1 & 不确定\end{cases}$$

题型 3. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ 的敛散性

解：$u_n=(\frac{n}{2n+1})^n$　　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)}=\frac{1}{2}<1$

故级数收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & 收敛\\ \rho>1 & 发散\\ \rho=1 & 不确定\end{cases}$$

题型 4..判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性

如果可以用等价无穷小替换
则他们有相同的敛散性

解：$n\to\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$（等价无穷小）

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散　　故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 也是发散的

3．交错级数

记作：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n=u_0-u_1+u_2+\cdots\cdots+(-1)^n u_n\cdots\cdots$（正负项交错）

例：判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 敛散性

解：$u_n=\frac{1}{n}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　且 $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}=u_n$

故交错级数是收敛的

交错级数判定方法：

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}u_n=0\\ u_{n+1}\le u_n\end{array}\right\}\Rightarrow \text{收敛}$$

注意：一般项 u_n 不包括（-1）项

4．绝对收敛和条件收敛

1）若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛　　绝对收敛

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　条件收敛

例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数。满足 $\left\{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}\end{array}\right.\Rightarrow$ 收敛，故级数为条件收敛

练习 13.1：判断下列正项级数敛散性

1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$　　2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$　　3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

练习 13.2：判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$敛散性

课时十四 幂级数

知识点	重要程度	分值	题型
1. 收敛半径、收敛域	★★★★★	6～10	基础知识
2. 和函数	★★★★★		选择 填空 大题
3. 幂级数展开	★★★★★	0～8	

记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 展开式 $= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$（含 x 项. 且敛散性随 x 的取值不同而不同）

1. 收敛半径，收敛区间，收敛域

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$

收敛半径	收敛区间	收敛域
收敛半径 R= $\frac{1}{\rho}$ $\rho \neq 0$	$x \in (-R, R)$	验证： $x = \pm R$
$+\infty$ $\rho = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$	$x \in (-\infty, +\infty)$
0 $\rho = +\infty$	$x = 0$	$x = 0$

题型 1：求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域

解： $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 则 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

则收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$ 收敛区间： $x \in (-1, 1)$

当 $x = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为交错级数，满足 $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases}$，故收敛。

当 $x = -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散的，则收敛域 $x \in (-1, 1]$

题型 2：求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛域

注意：把 $(x-2)$ 当作整体

解：$a_n=\frac{1}{2^n}$ $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$

则收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$，收敛区间 $\underline{x-2}\in(-2,2)\Rightarrow x\in(0,4)$

当 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 是发散的

当 $x=4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 是发散的，则收敛域为 $x\in(0,4)$

题型 3：求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛半径 R

解：$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$ $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}=\frac{1}{2}$

则收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}=\sqrt{2}$，收敛区间 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

x^{kn+l} 型

这种类型下，忽略 l，

收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt[k]{\rho}}$

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2n-1$ 是发散的

当 $x=\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2n-1$ 是发散的，则收敛域为 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

练习 14.1：求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n}x^n$ 收敛域

练习 14.2：$\sum_{n=1}^{\infty}n2^{n+1}x^{2n-1}$

2. 和函数，记作：$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$（对幂级数求和）

性质 1：可导并逐项可导 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}$

性质 2：可积并逐项可积 $\int S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_nx^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

✧ 麦克劳林公式，最常考 $\frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+......+x^n$	$(-1<x<1)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1-x+x^2+......+(-1)^n x^n$	$(-1<x<1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+......+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1<x\le 1)$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+......+\frac{x^n}{n!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}......+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2}+......+(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$

题型 1：求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

1）求收敛域：

$$a_n = n, \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$，收敛区间为 $(-1,1)$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散，

$x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

2）本题先积后导：

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \underline{\sum_{n=1}^{\infty}x^n = x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1}{1-x}-1}$$

$$S(x) = \left[\int_0^x S(x)dx\right]' = \left[\frac{1}{1-x}-1\right]' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+......+x^n}$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 和函数 $s(x)$ 求法

1) 求出收敛域

2) 先积后导或者先导后积

3) 利用麦克劳林公式

一定注意要先求出收敛域

题型 2：求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}$ 的和函数

解：1）求收敛域

$$a_n=\frac{1}{2n}\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+2}=1$$

$\therefore R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$，

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n}$ 发散，

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，则收敛域为 $(-1,1)$

2）令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$，两边同除以 x

注：为方便求导或者积分，进行相应调整

得 $\frac{s(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$，先导后积

$$\left[\frac{s(x)}{x}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2\right)^{n-1}$$

要把 x^2 看做整体，对应麦克劳林公式

$$=x(1+x^2+x^4+\cdots(x^2)^n+\cdots)=\frac{x}{1-x^2}(|x|<1)$$

积分得 $\frac{s(x)}{x}=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

可得 $s(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x^2)$，$(-1<x<1)$

练习 14.3：求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 和函数

练习 14.4：求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$ 和函数

练习 14.5：求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ 的和

（提示：$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n\Rightarrow s(\frac{1}{2})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$）

3. 幂级数的展开（将函数变成级数）

例：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

解：

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{3+(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\underline{\frac{(x-1)}{2}}}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+\underline{\frac{(x-1)}{3}}}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+\cdots(-1)^n x^n+\cdots}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$\frac{(x-1)}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-1,3)$$

$$\frac{(x-1)}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-2,4)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\frac{1}{3^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n \qquad x\in(-1,3)$$

练习 14.6：将 $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$，展开成 $x-2$ 的幂级数

课时十五　微分方程(选学)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 可分离变量	★★★	0～3	选择、填空
2. 齐次微分方程	★★★	0～3	
3. 一阶线性微分方程	必 考	6～10	大题
4. 二阶常系数齐次			
5. 二阶常系数非齐次			

1、可分离变量　形式：$g(y)dy=f(x)dx$　方法：两边同时积分

题 1. $\frac{dy}{dx}=2xy$

解：分离变量 $\frac{dy}{y}=2xdx$　　两边同时积分 $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$

得：$\ln|y|=x^2+C$　$\Rightarrow$　$|y|=e^{x^2+C}=e^{x^2}\cdot e^C$　$\Rightarrow$　$y=\pm e^C\cdot e^x=C_1e^x(C_1=\pm e^C)$

题 2. $xy'-y\ln y=0$

解：$x\frac{dy}{dx}-y\ln y=0$　　分离变量 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x}$　　两边积分 $\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{x}$

得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+C_1=\ln|x|+\ln e^{C_1}=\ln e^{C_1}|x|$

$|\ln y|=e^{C_1}|x|$　　$\Rightarrow\ln y=\pm e^{C_1}x=Cx$　　$(\mathrm{C}=\pm e^{C_1})$

2、齐次微分方程　形式：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

题 1. $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$

解：$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2xy}{xy}=-\frac{1+2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$　　令 $\frac{y}{x}=u$　$y=xu$　$y'=u+x\frac{du}{dx}$

替换上式得：$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}$　　整理得：$x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}-u=-\frac{(u+1)^2}{u}$

分离变量 $\frac{u}{(u+1)^2}du=-\frac{1}{x}dx$

两边积分得 $\int \frac{u}{(u+1)^2}du = -\int \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$　　将 $u=\frac{y}{x}$ 代回 $\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C$

化简整理：$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \ln|x| + \frac{x}{x+y} = C$　　$\Rightarrow \ln|y+x| + \frac{x}{x+y} = C$

3、一阶线性微分方程 形式：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

题 1. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

解：$P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$

$\int P(x)dx = \int 1dx = x$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} = \int e^{-x}\cdot e^{x}dx = x$

通解公式：$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

所以方程通解：$y = e^{-x}(x+C)$

题 2. 已知 $f(x)$ 为可导函数，且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$，求 $f(x)$

解：两边求导　$xf(x) = 2x + f'(x)$　　整理得　$y' - xy = -2x$

$P(x) = -x \quad Q(x) = -2x$

$\int P(x)dx = \int -xdx = -\frac{1}{2}x^2$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

故方程通解：$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C\right) = 2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

$x=0$ 时　代入原方程 $\int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$

$\Rightarrow 0 = 0 + f(0) \quad \Rightarrow f(0) = 0$

代入 $(0,0)$ 点，即　$0 = 2 + C \quad \Rightarrow C = -2$

故 $f(x) = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$

4、二阶常系数齐次线性微分方程　　形式：$y''+Py'+Qy=0$

特征根 r_1，r_2	通解
$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$	$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$
$r_1=r_2=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

题 1. 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解：特征方程　$r^2-2r-3=0$

特征根：　$r_1=-1\quad r_2=3$

则　　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

题 2. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的解，满足初始条件满足初始条件 $y|_{x=0}=4\qquad y'|_{x=0}=-2$

原方程：$y''+2y'+y=0$

特征方程：　$r^2+2r+1=0$

特征根：$r_1=r_2=-1$

通解为：$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$　　代入 $y|_{x=0}=4$　　得　$C_1=4$　　　则　$y=\left(4+C_2x\right)e^{-x}$

$y'=C_2e^{-x}-\left(4+C_2x\right)e^{-x}$　　代入 $y'|_{x=0}=-2$　　得 $-2=C_2-4$　　$C_2=2$

所以方程的解：$y=\left(4+2x\right)e^{-x}$

5、二阶常系数非齐次线性方程　　形式：$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m\left(x\right)$

解的结构：$y=Y+y^*$（齐通+非特）

$$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m\left(x\right)\qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\neq\lambda_1,\lambda_2\\ 1 & \lambda=\lambda_1\text{或}\lambda=\lambda_2\\ 2 & \lambda=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$P_m\left(x\right)$	$Q_m\left(x\right)$
x	$ax+b$
x^2+1	ax^2+bx+c
x^3+x^2+1	ax^3+bx^2+cx+d

题 1. $y''-5y'+6y=xe^{2x}$

特征方程：　$r^2-5r+6=0$

特征根：　$r_1=2,r_2=3$

通解：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

从原方程可知：　$\lambda=2$，　$P_m\left(x\right)=x$

设方程特解为：　$y^*=xe^{2x}\left(ax+b\right)$

$\left(y^*\right)'=e^{2x}\left(2ax^2+2bx+2ax+b\right)$

$\left(y^*\right)''=e^{2x}\left(4ax^2+4bx+8ax+4b+2a\right)$

将 y^*，$\left(y^*\right)'\left(y^*\right)''$ 代入原方程　　化简后得：$-2ax+2a-b=x$

对应系数相等 $\begin{cases}-2a=1\\ 2a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}\qquad\Rightarrow y^*=x\left(-\dfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$

则方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{2x}$

练习题

1. $xy' - y\ln y = 0$

2. $3x^2 + 5x - 5y' = 0$

3. $\left(x^3 + y^3\right)dx - 3xy^2dy = 0$

4. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$

5. $(x-2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$

6. $y'' + y' - 2y = 0$

7. $y'' - 4y' + 3y = 0$　　$y\big|_{x=0} = 6$　　$y'\big|_{x=0} = 10$

8. $y'' + 6y' + 9y = 0$

9. $y'' - 4y' + 5y = 0$

10. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$