蜂考速成课

《高数/微积分上》

习题答案

（微信扫一扫）

课时一　极限、连续、间断点

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 函数	★★	0～3	选择、填空
2. 极限	必 考	6～10	选择、填空、大题
3. 连续			
4. 间断点			

1. 函数

题 1. 求函数 $y=\ln\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$ 的定义域

解：$\begin{cases}\frac{x}{x-2}>0\\ \left|\frac{3x-1}{5}\right|\le 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{4}{3}\le x<0$ ，即函数的定义域为 $x\in\left[-\frac{4}{3},0\right)$

题 2. $f(2x+3)=x^2$　求 $f(x)$

解：令 $t=2x+3$，则 $x=\frac{t-3}{2}$

得 $f(t)=(\frac{t-3}{2})^2=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}$　　$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

---

2. 极限　记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$　右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

1) $x\to x_0$ 表示 $x\neq x_0$

2) $x\to x_0$ 表示 $x\to {x_0}^+, x\to {x_0}^-$

3) 极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$（左右极限存在且相等）

题 1： 设函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，当 $x\to 0$ 时求极限值

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$　　$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

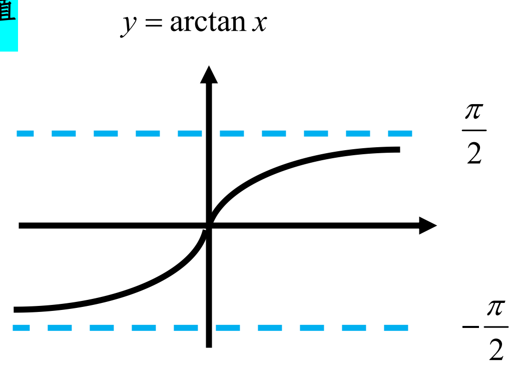
左右极限存在但是不相等，故无极限

题 2. 设函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时求极限值

解：$\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\arctan\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$

左右极限存在但是不相等，故无极限



题 3. 设函数 $f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}$，当 $x\to 2$ 时求极限值

解：$\lim\limits_{x\to2^-}e^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to2^-}e^{-\infty}=0$ 左极限存在，右极限不存在

$\lim\limits_{x\to2^+}e^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to2^+}e^{+\infty}=+\infty$ 所以极限不存在

---

3. 连续 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ （极限值=函数值）

题 1. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ 2-x & 1<x\end{cases}$ 是否连续

解：分界点在 $x=1$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$

右极限：$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$

函数值： $f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$ 函数连续

题 2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & x\ne 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 k 等于多少

解：极限值：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{6}$

函数值：$f(0)=k$ 根据极限值等于函数值，所以 $k=\dfrac{1}{6}$

题 3. 确定 a,b，使 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 1 \\ ax+b & 0\le x<1 \\ e^x & x<0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

解：在分界点为 $x=0$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b$

函数值：$f(0)=b$　　可得 $b=1$

在分界点为 $x=1$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$

函数值：$f(1)=1$　　可得 $a+b=1$

联立 $\begin{cases} b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=0\quad b=1$

3. 间断点

第一类间断点	可去间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\ne f(x_0)$
	跳跃间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
第二类间断点		$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ， $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

题 1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型

解：$f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$　在点 $x=1,x=2$ 处无定义，故 $x=1,x=2$ 为间断点

在 $x=1$ 处

极限值：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

左右极限存在且相等，故点 $x=1$ 为可去间断点

在 $x=2$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty$

右极限：$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty$

故为第二类间断点

题 2.求函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -0.5\le x<0 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型

解：在 $x=0$ 处

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}$

左右极限都存在，但是不相等，故 $x=0$ 为跳跃间断点

$x>0$ 时 $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x-1}}$ 定义域 $x\ne 1$ 故在 $x=1$ 处也是间断点

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

故 $x=1$ 为第二类间断点

课时一　　练习题

学完课时一和课时二，再做练习题

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^{2}}}+\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$ 求 $f(x)$ 的定义域；

2. 设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), x>\pi \\ ax, x<\pi\end{cases}$ 如果 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，那么 a 为何值。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ e & x=0 \\ \dfrac{\sin ax}{bx} & x<0\end{cases}$ ；$(a\neq0,\mathrm{b}\neq0)$ 问 a 和 b 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ x & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x<0\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin 2x & x<0 \\ k & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+2 & x>0\end{cases}$ 求常数 k 的值，使函数 $f(x)$ 在定义域内连续

7. 求函数间断点，并判断其类型

(1) $y=\begin{cases}x-1 & x\leq1 \\ 3-x & x>1\end{cases}$　　(2) $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq0$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, x\neq2$　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}, x\neq1$

课时二 求极限值

考点		重要程度	分值	常见题型
求极限	1. 有理化、多项式	必 考	10～20	选择 填空 大题必考
	3. 重要极限公式			
	4. 无穷小公式			
	4. 洛必达法则			

1. 有理化、多项式

题 1： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+9}+3=6$

题 2： 求极限例：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{3}{7}$

2. 重要极限公式

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=0$ $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\lim\limits_{\Delta\to\infty}(1+\dfrac{1}{\Delta})^{\Delta}=e$

题 1： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$

题 2： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$

题 3： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(-x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(-x)\right]^{(-\frac{1}{x})\cdot(-1)}=e^{-1}$

题 4：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{n+1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}=e$

3. 无穷小

1) 定义：以 0 为极限的函数称作无穷小

例：$x\to 0$ 时，x，$2x^2$，$\tan x\to 0$ 称为 $x\to 0$ 时的无穷小

$x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{2}{3x^3+1}\to 0$ 称为 $x\to\infty$ 时的无穷小

2) 无穷小比较 α,β 为自变量某种趋向下的无穷小

① $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 为 α 的高阶无穷小

② $\lim\frac{\beta}{\alpha}=k(k\neq 0)$，称 β 为 α 的同阶无穷小

② $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，称 β 为 α 的等阶无穷小

3) 等价无穷小替换公式:

$x\to 0$ 时（① $x\to 0$ 才成立 ② x 作为整体看待，不仅仅指 x）

① $\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $\arctan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\ln(1+x)\sim x$ $e^x-1\sim x$

② $(1+x)^a-1\sim ax$ $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $1-\cos^a x\sim\frac{a}{2}x^2$

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos\sqrt{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=1$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}$

错解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x\cdot x^2}=0$ （×）

正解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

题 4：求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\ln(1+2x)}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{2x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x^2}-1)}{2x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

题 5：当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1$ 与 ax 是等价无穷小，求 a

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{ax}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=1$ 可求得 $a=\dfrac{1}{2}$

4. 洛必达法则

若满足 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

①必须满足 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型才可以使用，其他形式，不能直接使用

②若 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍满足 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，可以连续使用洛必达法则 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$

③洛必达法则不是万能的，求极限的时候，首选无穷小替换，再用洛必达法则

题 1：求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ （$\dfrac{0}{0}$ 型）可直接使用洛必达法则

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

题 2：求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{2x^2+x}$

（$\dfrac{\infty}{\infty}$型）可直接使用洛必达法则

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{2x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

题 3：求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$

（$\infty-\infty$型）方法：通分

解：$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}$（通分后变成$\dfrac{0}{0}$）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}$（先用一部无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{2x}$（使用洛必达法则，上下求导）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$（再使用一步无穷小替换）

题 4：求极限 $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\ln x$

（$0\cdot\infty$型）方法：取倒数

解：$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$（取倒数后变成$\dfrac{\infty}{\infty}$型）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{x^2}{x}=0$

题 5：求极限 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

（1^∞型）方法：取对数

解：令 $y=\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

两边取对数 $\ln y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x}\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{\ln x}$（$\dfrac{0}{0}$型）

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\frac{1}{2-x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}-\dfrac{x}{2-x}=-1$

$\ln y=-1$　　$y=e^{-1}$　　故 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$

$\ln B^A=A\ln B$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

题 6：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}$　　（0^0 型）方法：取对数

解：令 $y=\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}$

两边取对数 $\ln y=\lim\limits_{x\to 0} 2\sin x\ln x$ （$0\cdot\infty$ 型）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \text{（取对数后变成}\frac{\infty}{\infty}\text{型）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(-\frac{2\sin^2 x}{x\cos x})=\lim_{x\to 0}(-\frac{2x^2}{x\cos x})=\lim_{x\to 0}(-\frac{2x}{\cos x})=0$$

$\ln y=0$　　$y=1$　　故 $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}=1$

题 7：求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$　　（∞^0 型）方法：取对数

解：令 $y=\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

两边取对数 $\ln y=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$ （取对数后变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型）

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

$\ln y=0$　　$y=1$　　故 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=1$

课时二　练习题

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$　　2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$　　3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$　　4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ （m,n 为正整数且 $m\neq n$）　　6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$　　7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin x-\tan x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$　　9) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$　　10) $y=\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$

课时三　导数

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 求导定义公式		★★★★	0～8	选择、填空
2. 求导计算	1）复合函数求导	必 考	6～15	选择、填空、大题
	2）微分			
	3）隐函数求导			
	4）参数方程求导			
3. 可导，可微，连续之间的关系		★★★	0～3	选择、填空

1. 求导定义公式　（导数记作形式：y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$）

求导定义公式：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（这个式子有极限值就说明在这点可导）

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

函数在某点可导的充分必要条件：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$（左导数等于右导数）

题 1：求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x) & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数

解：左导数

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x-\ln(1+0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln(1+0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=1$　所以在 $x=0$ 处导数 $f'(0)=1$

题 2：已知 $f'(2)=1$，求函数 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

解：$\frac{h-(-h)}{h}=2$　所以 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=2\cdot f'(2)=2$

若 $f'(x_0)=A$　$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)+f(x_0+bh)}{ch}=\frac{ah+bh}{ch}f'(x_0)=\frac{a+b}{c}\cdot A$

2. 求导计算

题 1. 设 $y=e^x\ln x$，求 y'

解：$y'=\left(e^x\right)'\ln x+e^x\left(\ln x\right)'=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}$

题 2. 设 $y=\ln\cos e^x$，求 dy

解：$y'=\dfrac{1}{\cos e^x}\cdot\left[-\sin e^x\right]\cdot e^x=-e^x\tan e^x$

$dy=-e^x\tan e^x dx$

题 3. 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，求 y'

解：$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left[f(x)g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

题 4. 设 $y=f\left(\sin x^2\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解：$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\sin x^2\right)\cdot\left(\sin x^2\right)'=f'\left(\sin x^2\right)\cdot\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2 f'\left(\sin x^2\right)$$

题 5. 设 $y=f(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 确定，求 $dy|_{x=0}$

解：两边同时对 x 求导，得

$y'-e^y-xe^y y'=0$ 　解得 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

把 $x=0$ 代入原方程可得 $y=1$

所以 $y'=\left.\dfrac{e^y}{1-xe^y}\right|_{(0,1)}=e\Rightarrow dy|_{x=0}=edx$

题 6. 求曲线 $e^y - xy = e$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

解：两边同时对 x 求导，得

$$e^y \cdot y' - y - x \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow y' = \frac{y}{e^y - x}$$

当 $x=0$ 时代入原方程 $y=1$　　则 $y' = \frac{1}{e}$

则切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-0)$　整理可得 $y=\frac{1}{e}x+1$

题 7. 设 $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$，求 y'

解：两边取对数得：　　$\ln y = \sin x \cdot \ln\left(1+x^2\right)$

两边同时对 x 求导得：$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x}{1+x^2}\sin x$

于是 $y' = y\cdot\left[\cos x \ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x}{1+x^2}\sin x\right] = \left(1+x^2\right)^{\sin x}\left[\cos x\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x}{1+x^2}\sin x\right]$

题 8. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t=\frac{2t}{1+t^2}$　　　$\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{dt}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\Big/\frac{2t}{1+t^2}=\frac{1+t^2}{4t}$$

参数方程求导方法：

① $\frac{dx}{dt}$　② $\frac{dy}{dt}$

③ $\frac{dy}{dx}=\frac{②}{①}$

④ $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}$

⑤ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{④}{①}$

3. 可导，可微，连续之间的关系

(可导和可微可以认为是一样的，可导就是可微，可微就是可导)

$$\boxed{\text{可导（可微）}} \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \boxed{\text{连续}}$$

课时三　练习题

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2x & ,x\le 0\\ \sin 2x & ,x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数。

2. 设 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-\frac{1}{2n})]n$ 。

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\le 1\\ ax+b & ,x>1\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a,b 应取什么值。

4. 设 $y=\sin x\cdot\cos x$，求 y' 。

5. 设 $y=\ln(1+x^2)$，求 dy 。

6. 设 $y=f(\ln x)$，求 $\frac{dy}{dx}$。

7. 设 $y=f(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 dy 。

8. 求曲线 $y=2+xe^y$ 在 $x=0$ 处得切线方程。

9. 设 $y=x^x$，求 y' 。

10. 设 $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

课时四　　单调性与凹凸性

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 单调性与极值点 2. 凹凸性与拐点	★★★★	3～8	选择、填空、大题

题 1：求函数 $y=x-\ln(1+x)$ 的单调性与极值。

驻点：一阶导数为 0 的点

解：定义域为 $x\in(-1,+\infty)$

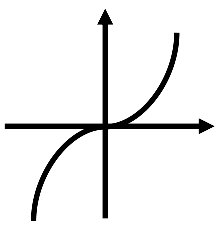
$$y'=1-\frac{1}{1+x}$$

由 $y'>0$ 可得单调增区间为 $x\in[0,+\infty)$

由 $y'<0$ 可得单调减区间为 $x\in(-1,0]$

所以 $x=0$ 为极小值点　　$f(0)=0$

1）驻点一定是极值点（×）　例 $y=x^3$，$y'=3x^2=0$　驻点为 $(0,0)$



$x=0$ 不是极值点，因为在 $x=0$ 的左右两边 y' 不是异号

2）极值点一定是驻点（×）　　极值点存在于两处：①驻点；②一阶导数不存在点

3）可导函数极值点一定是驻点（√）　去掉了导数不存在的情况。

题 2：求函数 $y=xe^{-x}$ 的凹凸区间及拐点。

解：定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$

$y'=e^{-x}(1-x)$　　$y''=e^{-x}(x-2)$

由 $y''>0$ 可得凹区间为 $x\in[2,+\infty)$

由 $y''<0$ 可得凸区间为 $x\in(-\infty,2]$

$y''=0$ 得 $x=2$，且左右异号；

故拐点为 $(2,2e^{-2})$

①$f''(x)=0$的点一定是拐点（×）　　要保证左右异号。

②拐点一定是$f''(x)=0$的点。（×）

（ 拐点存在于两处①$f''(x)=0$的点；②二阶导数不存在点）

③二阶导数存在的函数，拐点一定是$f''(x)=0$（√）　去掉了二阶导数不存在的情况。

题 3：证明：当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

证明：令$f(x)=x-\ln(1+x)$

$$f'=1-\frac{1}{1+x}>0$$

故$f(x)$在$[0,+\infty)$时单调增加，且$f(0)=0$

于是有$f(x)>0$，即$x-\ln(1+x)>0$　　得证$x>\ln(1+x)$，

令$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$$

故$g(x)$在$[0,+\infty)$单调增加，且$g(0)=0$

故$g(x)>0$，即$\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0$　　得证$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$

综合可得：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

课时四　　练习题

1. 求函数$f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$的单调性与极值

2. 求$y=x^3-5x^2+3x+5$的凹凸区间及拐点

3. 试证：当$x>0$时，$e^x-(1+x)>1-\cos x$

课时五　不定积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直接积分	★★★★	0～3	选择、填空
5. 凑微分	必　考	6～10	选择、填空、大题
3. 换元法			
4. 分部积分法			
5. 有理化积分	★★★		

不定积分公式表：

1. $\int k dx = kx + C$

2. （1）$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ （$a \neq -1$）　（2）$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. （1）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$　（2）$\int e^x dx = e^x + C$

4. （1）$\int \sin x dx = -\cos x + C$　（2）$\int \cos x dx = \sin x + C$

（3）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$　（4）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

（5）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$　（6）$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

（7）$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$　（8）$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

（9）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$　（10）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

5. （1）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$　（2）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C (a > 0)$

（3）$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$　（4）$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$

（5）$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$　（6）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

（7）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$　（8）$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + C$

1. 直接积分

题 1：$\int\sqrt{x}(x^2-5)dx$

解：原式$=\int(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

题 2：$\int\frac{3x^2}{1+x^2}dx$ （加项减项）

解：原式 $=\int\frac{3x^2+3-3}{1+x^2}dx=\int(3-\frac{3}{1+x^2})dx=3x-3\arctan x+C$

题 3：$\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

解：原式$=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

题 4：$\int 2^x e^x dx$

解：原式$=\int(2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C$

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x-1 \\
&= 1-2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

题 5：$\int\sin^2(\frac{x}{2})dx$

解：原式$=\int\frac{1}{2}(1-\cos x)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$

题 6：$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

解：原式

$$=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$$

2. 凑微分

题 1： $\int (1+2x)^2 dx$

解：原式$=\frac{1}{2}\int (1+2x)^2 d(1+2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1+2x)^3+C\ =\frac{1}{6}(1+2x)^3+C$

题 2： $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解：原式$=\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}+C$

题 3： $\int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

解：原式$=\int (5^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2})dx=-\int 5^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{\ln 5}5^{\frac{1}{x}}+C$

题 4： $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解：原式$=\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x})=2\arctan\sqrt{x}+C$

题 5： $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$

解：原式$=\int \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x dx=\int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=\ln(e^x+1)+C$

题 6： $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

解：原式$=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln(\ln x)+C$

题 7： $\int \tan x dx$

解：原式$=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|+C$

题 8： $\int \cos^3\theta d\theta$

解：原式$=\int \cos^2\theta\cdot\cos\theta d\theta=\int \cos^2\theta d\sin\theta\ =\int (1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+C$

题 9： $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解：原式 $=2\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

3. 换元法

题 1： $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

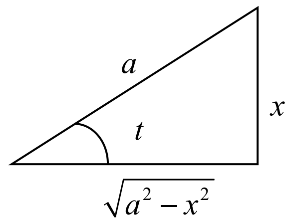
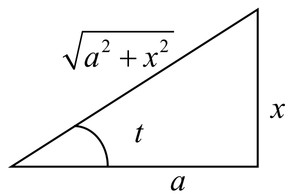
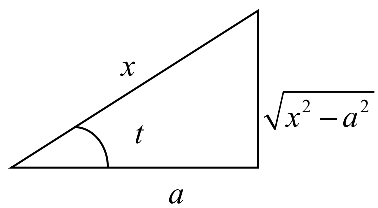
解：令 $1+\sqrt{2x}=t$，$x=\frac{1}{2}(t-1)^2$，$dx=(t-1)dt$

原式 $=\int \frac{1}{t}\cdot(t-1)dt=\int(1-\frac{1}{t})dt=t-\ln t+C=1+\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$

题 2： $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：令 $x=a\sin t$，$dx=a\cos tdt$

原式 $=\int \frac{1}{a^3\cos^3 t}\cdot a\cos tdt=\frac{1}{a^2}\int \sec^2 tdt=\frac{1}{a^2}\tan t+C=\frac{1}{a^2}\tan t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

根式形式	依据公式	所作替换	对应三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sin^2 t+\cos^2 t=1$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\tan^2 t=\sec^2 t-1$	$x=a\sec t$	

4. 分部积分法 $\int u\cdot v'dx=\int udv=uv-\int v\cdot du=uv-\int v\cdot u'dx$

题 1： $\int x\ln xdx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int \ln xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2d\ln x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

题 2： $\int x\arctan xdx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int \arctan xdx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2d\arctan x=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$

题 3： $\int \ln xdx$

解：原式 $=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int 1\cdot dx=x\ln x-x+C$

题 4： $\int e^{\sqrt{x}}dx$　令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$dx=2tdt$

解：原式 $=\int e^t\cdot 2tdt=2\int tde^t=2t\cdot e^t-2\int e^tdt=2te^t-2e^t+c=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

5. 有理化积分

题： $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-2)(x-3)}$$

$$(A+B)x-2A-3B=x+1\quad\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A+3B=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}A=4\\B=-3\end{cases}$$

故 $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int(\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-2})dx=4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$

课时五　　练习题

1）$\int (x^2+1)^2 dx$　　2）$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$　　3）$\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx$　　4）$\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

5）$\int \frac{x}{\sqrt{\left(2-3x^2\right)}} dx$　　6）$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$　　7）$\int \tan^3 x \sec x dx$　　8）$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

9）$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$　　10）$\int x^n \ln x dx$　　11）$\int \arcsin x dx$　　12）$\int \ln^2 x dx$

13）$\int x \tan^2 x dx$　　14）$\int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} dx$

课时六　定积分

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 定积分计算	1） 凑微分，分部积分类型 2） 换元换限类型 3） 反常积分	必 考	6-8 分	大题
2. 定积分的性质		★★★★★	0-6 分	选择、填空
3. 积分的导数		★★★★	0-6 分	大题

1、定积分的计算

题 1：计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$（凑微分）

解：原式 $=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}d\left(\frac{x}{2}\right) = \arcsin\frac{x}{2}\bigg|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2}-0=\frac{\pi}{6}$

题 2：计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} 2x\arctan x dx$（分部积分）

解：原式 $=\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x d\left(x^2\right)=x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x^2 d\arctan x$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \quad =\pi-\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

题 3：计算定积分 $\int_0^{2\pi}\left|\sin x\right|dx$（分段积分）

解：原式 $=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$

题 4：计算 $\int_0^2 f\left(x\right)dx$，其中 $f\left(x\right)=\begin{cases} x+1 & x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x>1 \end{cases}$（分段积分）

解：$\int_0^2 f\left(x\right)dx=\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_1^2 f\left(x\right)dx = \int_0^1\left(x+1\right)dx+\int_1^2\frac{1}{2}x^2dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^3\Big|_1^2=\frac{8}{3}$

题 5：计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$（换元换限）

解：$\sqrt{e^x-1}=t$，$x=\ln\left(1+t^2\right)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$

$x=0$ 时 $t=0$，$x=\ln 2$ 时 t=1

故 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

题 6：$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$（换元换限）

解：$x=a\sin t$　　$dx=a\cos t dt$

$x=0$ 时 $t=0$，$x=a$ 时 $t=\dfrac{\pi}{2}$

故 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2t}{2}dt=\dfrac{a^2}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi a^2}{4}$

题 7：$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+2}dx$（反常积分—积分区间无界）

解：原式 $=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+(x+1)^2}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

题 8：$\int_0^1\dfrac{dx}{(1-x)^2}$（反常积分—被积函数无界）

解：原式 $=-\int_0^1\dfrac{1}{(1-x)^2}d(1-x)=\dfrac{1}{1-x}\Big|_0^1=\infty-1=\infty$（无值）

2. 定积分的性质

题 1：$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^3\cos x+1\right)dx=$____________

①若被积函数 $f(x)$ 为奇函数，积分区间对称 $[-a,a]$，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

②若 $f(x)=1$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a$

解：$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^3\cos x+1\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cos x dx+\int_{-\pi}^{\pi}dx$

$x^3\cos x$ 为奇函数，积分区域 $[-\pi,\pi]$ 对称，故 $\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cos x dx=0$

故原式 $=\int_{-\pi}^{\pi}dx=\pi-(-\pi)=2\pi$

题 2：$I_1=\int_0^1 xdx$，$I_2=\int_0^1 x^2dx$，$I_3=\int_0^1 x^3dx$，比较 I_1，I_2，I_3 大小

设 $x\in[a,b]$，$f(x)\le g(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

解：在 $[0,1]$ 上，$x>x^2>x^3$　　故 $I_1>I_2>I_3$

题 3： $f(x)=\cos x+\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)$

解：令 $\int_0^2 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\cos x+A$

两边积分 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(\cos x+A)dx=(\sin x+Ax)\big|_0^2=\sin 2+2A$

即 $A=\sin 2+2A \quad \Rightarrow A=-\sin 2 \quad f(x)=\cos x-\sin 2$

3. 积分的导数

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right]'=\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

题 1： $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

解：原式 $=\sqrt{1+(x^2)^2}\cdot 2x-\sqrt{1+0^2}\cdot(0)'=2x\sqrt{1+x^4}$

题 2： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}e^{-1}$

课时六 练习题

1. $\int_1^5\frac{1}{3x+1}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx$

3. $\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx$

4. $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x & 0\le x\le 1\\ -x^3+2x+1 & 1<x\le 2\end{cases}$

5. $\int_1^8\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$

6. $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$

7. $\int_{-a}^{a}\left(\frac{\sin x}{1+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

8. $I_1=\int_0^1 x\,dx$，$I_2=\int_0^1\ln x\,dx$，$I_3=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$ 比较 I_1,I_2,I_3 大小

9. 求极限 $\frac{d\int_0^{\sin x}\sqrt{1+3t}\,dt}{dx}$

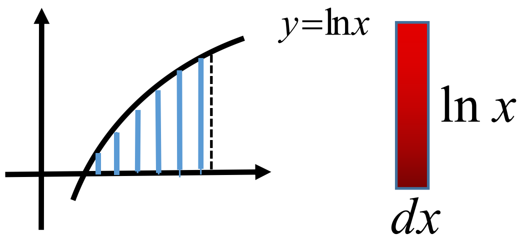
10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}$

课时七　定积分的应用

考点	重要程度	分值	常见题型
4) 利用定积分求面积	必考	3-12 分	选择、填空、大题
5) 利用定积分求体积			

1、用定积分求面积

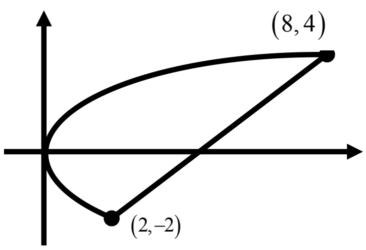
题 1：计算 $y=\ln x$，x 轴，以及 $x=e$ 围成的图形面积

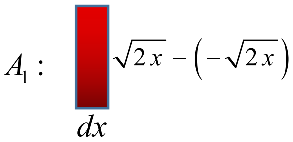


解：$dA=\ln x dx$

$$A=\int_1^e dA=\int_1^e \ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=1$$

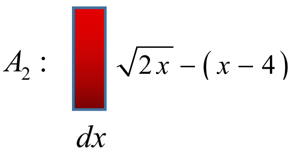
题 2：计算抛物线 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成的图形面积





解：$dA_1=\left[\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right]dx=2\sqrt{2x}dx$

$$A_1=\int_0^2 dA_1=\int_0^2 2\sqrt{2x}dx=\frac{16}{3}$$

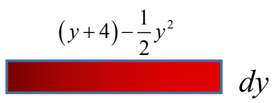


$$dA_2=\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx=\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx$$

$$A_2=\int_2^8 dA_2=\int_2^8\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx=\frac{38}{3}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}=18$$

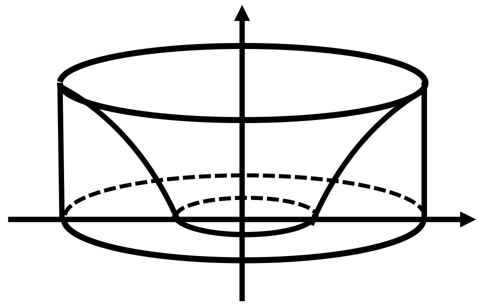
解法二：



解：$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$　$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]\Big|_{-2}^4=18$

2、用定积分求体积

题 3：计算 $y=\ln x$，x 轴以及 $x=e$ 围成的图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周的体积分别是多少

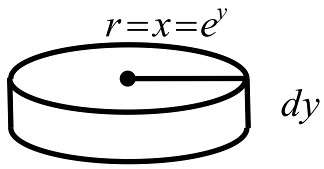


解：绕 x 轴

$dV_x=\pi r^2dx=\pi\cdot\left(\ln x\right)^2dx$

$V_x=\int_1^e dV_x=\int_1^e\pi\left(\ln x\right)^2dx=\pi(e-2)$

绕 y 轴 $V_y=V_{外}-V_{内}$



$V_{外}=\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi e^2$

$dV_{内}=\pi\cdot\left(e^y\right)^2\cdot dy=\pi\cdot e^{2y}dy$

$V_{内}=\int_0^1 dV_{内}=\int_0^1\pi e^{2y}dy=\frac{1}{2}\pi(e^2-1)$

则 $V_y=V_{外}-V_{内}=\pi e^2-\frac{1}{2}\pi(e^2-1)=\frac{1}{2}\pi\left(e^2+1\right)$

课时七　　练习题

1. 计算平面图形由抛物线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=x$ 围成的面积

2. 求曲线 $y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right)$ 与 $y=0$ 所围成的平面图形面积以及绕 x 轴旋转所得的体积

3. 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=e^x$ 以及 x 轴围成的平面图形记为 D

①求 D 的面积 A

②求 D 绕 x 轴所围成的旋转体体积 V

课时八　微分方程

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 可分离变量	★★★	0～3	选择、填空
6. 齐次微分方程	★★★	0～3	
3. 一阶线性微分方程	必 考	6～10	大题
4. 二阶常系数齐次			
5. 二阶常系数非齐次			

1、可分离变量　形式：$g(y)dy=f(x)dx$　方法：两边同时积分

题 1. $\frac{dy}{dx}=2xy$

解：分离变量 $\frac{dy}{y}=2xdx$　两边同时积分 $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$

得：$\ln|y|=x^2+C \Rightarrow |y|=e^{x^2+C}=e^{x^2}\cdot e^C \Rightarrow y=\pm e^C\cdot e^x=C_1e^x(C_1=\pm e^C)$

题 2. $xy'-y\ln y=0$

解：$x\frac{dy}{dx}-y\ln y=0$　分离变量 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x}$　两边积分 $\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{x}$

得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+C_1=\ln|x|+\ln e^{C_1}=\ln e^{C_1}|x|$

$|\ln y|=e^{C_1}|x| \Rightarrow \ln y=\pm e^{C_1}x=Cx \quad (\mathrm{C}=\pm e^{C_1})$

2、齐次微分方程　形式：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

题 1. $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$

解：$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2xy}{xy}=-\frac{1+2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$　令 $\frac{y}{x}=u \quad y=xu \quad y'=u+x\frac{du}{dx}$

替换上式得：$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}$　整理得：$x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u}{u}-u=-\frac{(u+1)^2}{u}$

分离变量 $\frac{u}{(u+1)^2}du=-\frac{1}{x}dx$

两边积分得 $\int \frac{u}{(u+1)^2}du=-\int \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=-\ln|x|+C$ 将 $u=\frac{y}{x}$ 代回 $\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=-\ln|x|+C$

化简整理：$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\ln|x|+\frac{x}{x+y}=C$ $\Rightarrow \ln|y+x|+\frac{x}{x+y}=C$

3、一阶线性微分方程 形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

题 1. $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

解：$P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$

通解公式：$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

$\int P(x)dx=\int 1dx=x$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}=\int e^{-x}\cdot e^{x}dx=x$

所以方程通解：$y=e^{-x}(x+C)$

题 2. 已知 $f(x)$ 为可导函数，且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$

解：两边求导 $xf(x)=2x+f'(x)$ 整理得 $y'-xy=-2x$

$P(x)=-x$ $Q(x)=-2x$

$\int P(x)dx=\int -xdx=-\frac{1}{2}x^2$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx=2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

故方程通解：$f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(2e^{-\frac{1}{2}x^2}+C\right)=2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

$x=0$ 时 代入原方程 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$

$\Rightarrow 0=0+f(0)$ $\Rightarrow f(0)=0$

代入 $(0,0)$ 点，即 $0=2+C$ $\Rightarrow C=-2$

故 $f(x)=2-2e^{\frac{1}{2}x^2}$

4、二阶常系数齐次线性微分方程　　形式：$y''+Py'+Qy=0$

题 1. 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

特征根 r_1，r_2	通解
$r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$r_1=r_2=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

解：特征方程 $r^2-2r-3=0$

特征根：$r_1=-1$　$r_2=3$

则 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

题 2. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的解，满足初始条件满足初始条件 $y|_{x=0}=4$　$y'|_{x=0}=-2$

原方程：$y''+2y'+y=0$

特征方程：$r^2+2r+1=0$

特征根：$r_1=r_2=-1$

通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$　代入 $y|_{x=0}=4$　得 $C_1=4$　则 $y=(4+C_2x)e^{-x}$

$y'=C_2e^{-x}-(4+C_2x)e^{-x}$　代入 $y'|_{x=0}=-2$　得 $-2=C_2-4$　$C_2=2$

所以方程的解：$y=(4+2x)e^{-x}$

5、二阶常系数非齐次线性方程　　形式：$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$

题 1. $y''-5y'+6y=xe^{2x}$

解的结构：$y=Y+y^*$（齐通+非特）

$$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)\qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\neq\lambda_1,\lambda_2\\ 1 & \lambda=\lambda_1\text{或}\lambda=\lambda_2\\ 2 & \lambda=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$P_m(x)$	$Q_m(x)$
x	$ax+b$
x^2+1	ax^2+bx+c
x^3+x^2+1	ax^3+bx^2+cx+d

特征方程：$r^2-5r+6=0$

特征根：$r_1=2,r_2=3$

通解：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

从原方程可知：$\lambda=2$，$P_m(x)=x$

设方程特解为：$y^*=xe^{2x}(ax+b)$

$(y^*)'=e^{2x}(2ax^2+2bx+2ax+b)$

$(y^*)''=e^{2x}(4ax^2+4bx+8ax+4b+2a)$

将 y^*，$(y^*)'$ $(y^*)''$ 代入原方程　化简后得：$-2ax+2a-b=x$

对应系数相等 $\begin{cases}-2a=1\\2a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-1\end{cases}\qquad\Rightarrow y^*=x\left(-\dfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$

则方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{2x}$

课时八　练习题

1．$xy' - y\ln y = 0$

2．$3x^2 + 5x - 5y' = 0$

3．$\left(x^3 + y^3\right)dx - 3xy^2dy = 0$

4．$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$

5．$\left(x-2\right)\dfrac{dy}{dx} = y + 2\left(x-2\right)^3$

6．$y'' + y' - 2y = 0$

7．$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad y\big|_{x=0} = 6 \qquad y'\big|_{x=0} = 10$

8．$y'' + 6y' + 9y = 0$

9．$y'' - 4y' + 5y = 0$

10．$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$

课时九 中值定理

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 罗尔中值定理 2. 拉格朗日中值定理	★★★★★	0～5	大题

1、罗尔定理

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）$f(a)=f(b)$；

那么在(a,b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$，使得$f'(\xi)=0$。

题：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)-2f(\xi)=0$

解：令$\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$

$f(a)=f(b)=0 \quad \Rightarrow \varphi(a)=\varphi(b)=0$

由罗尔定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$

又$\varphi'(\xi)=e^{-2\xi}[f'(\xi)-2f(\xi)]$，且$e^{-2\xi}\neq 0$

$\Rightarrow f'(\xi)-2f(\xi)=0$

2、拉格朗日中值定理

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立

题：设$a>b>0$，证明不等式：$\frac{(a-b)}{a}<\ln a-\ln b<\frac{(a-b)}{b}$

证明：令$f(x)=\ln(x)$

由拉格朗日中值定理知：存在$\xi\in(b,a)$使得$f'(\xi)=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}$

$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=\frac{1}{x^2}<0$，$f'(x)$在(b,a)上单调递减

$\frac{1}{a}<f'(x)<\frac{1}{b}$，即$\frac{1}{a}<f'(\xi)<\frac{1}{b}$，$\frac{1}{a}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$

又$a-b>0$，$\therefore\frac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{b}$，原不等式得证

课时九　练习题

1) 已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=1,f(1)=0$求证：存在$c\in[0,1]$，使得$f'(c)+\frac{f(c)}{c}=0$

2) 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

3) 证明：当$b>a>0$，$n>1$时有不等式$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$

4) 证明：对任何实数a,b成立$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$