南京大学数学系 2016--2017 学年第二学期期末试题答案

考试科目：复变函数　　年级: 2015 级　　适用专业: 应用数学

时间: 120 分钟　　考试方式: 闭卷　试卷类别: A 卷　试题满分: 100 分

注意：答案全部写在答题纸上，写清题号，不必抄题.

一. 填空题（每题 5 分）.

（1）$\cos\ln 2+i\sin\ln 2$

（2）$\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

（3）0

（4）πi

（5）3

（6）2

（7）9

（8）$k\dfrac{z^3-i}{z^3+i},k=e^{i\beta}(\beta\text{为实数})$

二. 计算题（每题 10 分）.

1.解：考虑辅助函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$，其中 $\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}=F(z)$ 是多值函数，只以 $z=0$ 及 $z=1$ 为支点，∞ 不是支点，作割线 $[0,1]$，$F(z)$ 在其外部能分出 5 个单值解析分支，选取在 $z=2$ 取负值的那一支，从而对应的单值解析函数 $f(z)$ 在 $[0,1]$ 外部只以 $z=2$ 为一阶极点，$z=\infty$ 为可去奇点.以原点 O 为圆心，画 2 个圆，大圆 C_1 的半径大于 2，小圆 C_2 的半径在 1 与 2 之间. r_0 与 r_1 以 0 与 0 为圆心，半径可无限小.因 $\int_{C_1} f(z)dz=-2\pi \underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z)$，

$f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域内的洛朗展式从 $\dfrac{1}{z^2}$ 项开始，无 $\dfrac{1}{z}$.故 $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z)=0$

$\therefore \int_{C_1} f(z)=0$.

(5 分)

又　$\int_{C_2}-f(z)dz=2\pi i\left[\underset{z=2}{\mathrm{Res}} f(z)+\mathrm{Res} f(z)\right]=\underset{z=2}{2\pi i}\,\mathrm{Res} f(z)$　但　$\underset{z=2}{\mathrm{Res}} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{-4}}$，

$\therefore \int_{C_2} f(z)=-2\pi i\left(-\dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}\right)=\sqrt[5]{8}\pi i$，又由于 $\lim\limits_{r\to 0}\left(\int_{C_2} f(z)dz+\int_{AB} f(z)dz+\int_{B'A'} f(z)dz\right)=0$，

且 $f(z)$ 沿 2 个小圆周的积分为 0.于是 $\lim\limits_{r\to 0}\left(\int_{AB} f(z)dz+\int_{B`A`} f(z)dz\right)=-\int_{C_2} f(z)dz=-\sqrt[5]{8}\pi i$

当小圆的半径 $r\to 0$ 时，

$$-\sqrt[5]{8}\pi i=\int_0^1\frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}e^{i(\pi+\frac{3\pi}{5})}}+\int_1^0\frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}e^{i(\pi-\frac{3\pi}{5})}}=\int_0^1\frac{e^{-\frac{8\pi i}{5}}-e^{-\frac{2\pi i}{5}}}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}dx$$

$=\int_0^1\frac{e^{\frac{2\pi i}{5}}-e^{-\frac{2\pi i}{5}}}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}dx$. 故原式结果为 $\dfrac{-\sqrt[5]{8}\pi}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$. (10 分)

2. 令 $u(x,y)=mx^3-3xy^2+2x, v(x,y)=lx^2y+ny^3+2y$. 显然 u_x,u_y,v_x,v_y 连续，且

$u_x=3mx^2-3y^2+2, u_y=-6xy, v_x=2lxy, v_y=lx^2+3ny^2+2$. (5 分)

由于 f 是解析函数,则满足 $u_x=v_y$， $v_x=-u_y$, 带入得 $l=3,m=1,n=-1$. (10 分)

3. 函数 $w_1=f_1(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$, 将 L_1 上的点 $-1,i,1$ 分别映为 ∞，$i,0$, 由此可知 L_1 的像 $C_1=f_1(L_1)$ 是由 $w_1=0$ 出发经 $w_1=i$ 的射线, 即上半虚轴. L_2 的像 $C_2=f_1(L_2)$ 显然也是由 $w_1=0$ 出发的射线. 由于在 $z=1$ 处 L_1 到 L_2 的转角为 $-\dfrac{\pi}{3}$, 因而由 $w_1=f_1(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 的保角性可知由 $C_1=f_1(L_1)$ 绕 $w_1=0$ 转动 $-\dfrac{\pi}{3}$ 即得 $C_2=f_1(L_2)$. (5 分)

转动时所扫过的角形区域即为 D 的像 G_1 , 此时 $f_1(\sqrt{3}i)=\dfrac{\sqrt{3}i-1}{\sqrt{3}i+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\in G_1$. 再作 $w_2=f_2(w_1)=(e^{-\frac{\pi}{6}}w_1)^3=-iw_1^{\,3}$ ，它把 G_1 共形变换成上半平面 G_2: $\operatorname{Im}w_2>0$, 且 $f_2(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})=i\in G_2$. (10 分)

三.证明题（每题 15 分）.

1.不妨设 $f(0)=a,(a\neq 0)$, 作 $\varphi(z)=\dfrac{z-a}{1-z\overline{a}}$ ， $\varphi(z)$ 映单位圆到单位圆，且 $\varphi(a)=0$ (5 分)

则 $\varphi\circ f$ 映单位圆到单位圆且 $\varphi\circ f(0)=0$. (10 分)

由 $Schwarz$ 引理知 $\left|(\varphi\circ f)'(0)\right|\le 1$.即 $\frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2}\le 1$.　　　　　　　　　（15 分）

2.若 $\varliminf_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^q}=a<\infty$，则存在 $r_i\to\infty$，使得 $\frac{M(r,f)}{r^q}=a+1<\infty$.　　　　（5 分）

由于 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的系数的表达式 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$，立即可得柯西不等式

$|a_n|\le\frac{M(r,f)}{r^n}$，于是有 $|a_n|\le(a+1)r_i^{q-n}$.令 $r_i\to\infty$ 得当 $n>q$ 时有 $a_n=0$.　　　　（15 分）