

南京大学数学系复变函数期末试卷 B 卷

2018/2019 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 复变函数
 院系_____班级_____学号姓名_____
 考试时间 2019.06 任课教师张高飞 考试成绩

题号	一	二	总分
得分			

一. 计算题（共 20 分，每题 10 分）

1. 计算 $\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^4}$ ，其中 $|a| \neq \rho$.
2. 计算积分 $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}} dz$.

二. 证明题（共 80 分，前五题每题 10 分，后两题每题 15 分）

1. 将函数 $\int_0^z e^{z^2} dz$ 展成 z 的幂级数，并指出展式成立的范围。
2. 已知 $u(x,y)=x^2-y^2$ ，求 $v(x,y)$ ，使得 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在复平面上解析。
3. 若 $f(z)$ 在整个复平面内解析，并设 $z \rightarrow \infty$ 时 $z^{-1} \operatorname{Re} f(z) \rightarrow 0$ ，则 $f(z)$ 是一个常数。
4. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明 $f(z)$ 在 D 内为常数的充要条件是 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。
5. 证明：当 $|a|>e$ 时，方程 $e^z-az^n=0$ 在单位圆内部有 n 个根。
6. 任给 $z,w \in \mathbf{D}$ ，定义 $\rho(z,w)=\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$ 。证明：若 $f:\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ 为一个全纯函数，则任给 $z,w \in \mathbf{D}$ ，

均成立 $\rho(f(z),f(w)) \leq \rho(z,w)$ ；进一步，若 f 是 \mathbf{D} 上的一个自同构，则任给 $z,w \in \mathbf{D}$ ，均成立 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$ 。

7. 设函数 f 及 φ 在区域 D 内解析，而且 φ 在 D 内有界无零点。如果正数 M 及 $\partial_\infty D=A \cup B$ 满足下列条件：

$$(1) \forall a \in A, \overline{\lim_{z \rightarrow a}} |f(z)| \leq M.$$

$$(2) \forall b \in B, \forall \eta > 0, \overline{\lim_{z \rightarrow b}} |f(z)| |\varphi(z)|^\eta \leq M.$$

那么 $\forall z \in D, |f(z)| \leq M$.