南京大学
复变函数期中考试

陈韵雯　　　　天影

2023 年 2 月 7 日

评语: 这份试卷是 2021-2022 学年春季学期, 张高飞老师班与廖良文老师班的复变函数期中考试题. 考试的范围是廖良文老师的教材《复分析基础》前四章. 试卷整体难度较低, 最后一题是唯一的难题. 经对比发现, 本试卷的部分题型与该教材上的例题和习题有惊人的相似度. 因此同学们复习时可以适当对复习重点进行调整.

这份试卷的答案是由高飞班助教上传至教学立方的期中试卷参考答案经过部分修改之后完成的. 在此对助教所做的工作表示感谢!

备注: 试卷里出现的 $\Re z$ 表示 z 的实部. $\Re z$ 和 $\operatorname{Re} z$ 都是数学上通用的记号, 但教材上并未出现前者, 故特此说明. 类似地, $\Im z$ 和 $\operatorname{Im} z$ 都可以表示 z 的虚部. 这两组记号中, 前者通常用于印刷, 而手写时更常用后者.

一、(12 分)

(1) 如果 w 满足 $z=\sin w$, 则称 w 为 z 的反正弦函数, 记为 $w=\operatorname{Arcsin} z$, 试求其表达式 (用对数函数表示).

(2) 解方程 $\sin z=\mathrm{i}$.

分析: 此题主要考察对欧拉公式以及三角函数的定义式, 第一问只需要求解一个二次方程, 而第二问是对第一问结论的直接应用. 此题难度很低, 属于送分题.

解: (1) 由 $z=\sin w=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}w}-e^{-\mathrm{i}w})$ 得 $e^{2\mathrm{i}w}-2\mathrm{i}z\,e^{\mathrm{i}w}-1=0$. 解二次方程得

$$w=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right).$$

(2) 代入 Arcsin 的表达式有 $z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(-1\pm\sqrt{2})$. 由对数函数的多值性得

$$z=\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1)+2k\pi,\quad \text{或 } z=-\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1)+(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

二、(18 分)

(1) 试叙述解析函数的柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 定理, 即 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件.

(2) 柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 定理中, 解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部满足的方程称为柯西-黎曼方程. 试证明极坐标下的柯西-黎曼方程为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\,\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(3) 证明若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析, 其中 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 是区域 D 内的二元实函数, 并且满足 $au+bv=c$, 其中 a,b,c 是不全为 0 的实常数, 则 $f(z)$ 在 D 内为常数.

分析: 此题主要考察柯西-黎曼方程的内容和推论, 第一问为定理默写, 属于送分题; 第二问使用极坐标公式和链式法则即可; 第三问也是对该方程的直接运用. 整体难度不大.

(1) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 解析的充分必要条件是 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在任意 $(x,y)\in D$ 处可微并且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.1}$$

(2) **证明:** 先写出极坐标系下的坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

从而由求导的链式法则可以得出

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

将 x, y 的表达式代入计算得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.2}$$

类似地, 可分别求出 v 对 r 和 θ 的偏导

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.3}$$

将柯西-黎曼方程 (2.1) 代入 (2.2) 中, 通过直接计算和对比即可得出结论. □

(3) **证明:** 对于任意 $(x,y)\in D$, 对 $au+bv=c$ 求偏导得

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

再将柯西-黎曼方程 (2.1) 代入上式可得

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad -a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

从而有 $(a^2+b^2)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$. 若 $a=b=0$, 则 $c=0$, 矛盾. 因此 $a^2+b^2\neq 0$, 故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\equiv 0$. 同理知

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0.$$

因此, $f(z)$ 在 D 内恒为常数. □

三、(10 分)

(1) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n = 1, 2, \ldots.$

(2) 证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}.$

分析: 此题是廖老师教材的第三章习题 13, 主要考察高阶导数公式的应用, 如果能联想到高阶导数公式, 那么第一问就是相当简单的, 而将第一问进行三角换元即可自然而然地得出第二问的形式. 此类题型在作业题中出现过, 难度并不大.

(1) **解:** 记 $f(z) = (z^2+1)^{2n}$, 由高阶导数公式有

$$\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = 2\pi\mathrm{i}\binom{2n}{n} = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

(2) **证明:** 作变量代换, 将上式中的 z 换为 $e^{\mathrm{i}\theta}$, 得

$$2\pi\mathrm{i}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \int_0^{2\pi} \left(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n} e^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2^n\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

将等式两端同时约掉 $2^n\mathrm{i}$ 即得. □

四、(10 分) 试求下列函数在指定区域的洛朗展开式.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z-2)}$ 在 $1 < |z| < 2$ 内.

(2) 多值函数 $g(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{z-1}$ 的各单值分支在 $0 < |z-1| < 1$ 内.

分析: 此类求函数在给定区域内的洛朗展开的题有较为固定的解法, 在作业题中也多次出现. 题目虽然在计算上有一定的复杂度, 但大家应当熟悉这类题目的运算过程, 以免出现处理式子时卡住或无从下手的情况.

解: (1) 化简得

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{z+2}{z^2-1}\right) = -\frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n} \\
&= -\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2z^{-2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4z^{-2n-2}\right).
\end{aligned}$$

(2) 下面将 $g(z)$ 中使 $\mathrm{Ln}\, z$ 取值为 $\ln z + 2k\pi\mathrm{i}$ 的单值分支记作 $g_k(z)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 则有

$$g_k(z) = \frac{1}{z}(2k\pi\mathrm{i} + \ln(1 + (z-1))) = \frac{2k\pi\mathrm{i}}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^{n-1}}{n}.$$

五、(10 分) 求出下列函数所有奇点 (不包含 ∞ 点), 并判别其类型.

(1) $\dfrac{z-1}{z^2(z^2+1)\sin(\pi z)}$.

(2) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-2}}}{e^z - 1}$.

分析: 与上题类似, 求函数的奇点及其类型也有非常固定的做法, 按照书上例题的套路按部就班处理, 同样没有任何难度. 只需用到下述结论: z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ 是非零复数, z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 在扩张复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中不存在. 另外为保险起见, 若时间充裕, 也可在解答中将下面用到的所有极限的值都计算出来.

解: (1) 设题目函数为 $f(z)$, 观察到 $f(z)$ 仅在 $z = \pm\mathrm{i}$ 或 $z \in \mathbb{Z}$ 处无定义. 容易验证

$$\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z), \quad \lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z), \quad \lim_{z\to 0} z^3 f(z), \quad \lim_{z\to 1} f(z), \quad \lim_{z\to k}(z-k)f(z)$$

均为非零复数, 其中 $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$, 因此 $f(z)$ 的奇点共有简单极点 $z = \pm\mathrm{i}$ 与 $z = k$ ($k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$), 可去奇点 $z = 1$, 以及三阶极点 $z = 0$.

(2) 设题目函数为 $g(z)$, 观察到 $g(z)$ 仅在 $z = 2k\pi\mathrm{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处和 $z = 2$ 处无定义. 易验证 $\lim\limits_{z\to 2k\pi\mathrm{i}}(z-2k\pi\mathrm{i})\,g(z)$ 是非零复数 ($k \in \mathbb{Z}$), $\lim\limits_{x\to 0^+} g(2+x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(2+x) = +\infty$, 因此 $g(z)$ 的奇点共有简单极点 $z = 2k\pi\mathrm{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 与本性奇点 $z = 2$.

六、(15 分)

(1) 利用高阶导数公式证明柯西不等式, 即如果 $f(z)$ 在闭圆盘 $\overline{\Delta(z_0, r)}$ 上解析, 那么

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\, M(r)}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中 $M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

(2) 证明 Liouville 定理: 有界整函数必为常数.

(3) 设 $f(z)$, $g(z)$ 为整函数, 并且存在一个实数 k 使得对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都有 $\Re f(z) \le k \Re g(z)$, 证明: 存在常数 a, b 使得 $f(z) = a g(z) + b$.

分析: 此题考察对书上定理的掌握和证明过程的理解. 柯西不等式与刘维尔 (Liouville) 定理的证明是课程里的重要内容, 应当熟练掌握; 第三问借助 $z \mapsto e^z$ 这一变换可将左半平面 ($\Re z \le 0$) 变换为有界的单位圆盘, 从而得以应用 Liouville 定理.

题目的三问较为连贯, 后面的小问需要用到前面小问的结论. 因而可以猜测, 出卷老师在出题时是将一道题拆分成了三小问, 以起到提示解题思路的效果, 降低了试卷的难度.

(1) **证明:** 由高阶导数公式有

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z-z_0|=R}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,\mathrm{d}s \le \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M(R)}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!\,M(R)}{R^n}.\end{aligned}$$ □

(2) **证明:** 由于 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内解析, 且存在 $M>0$ 使得 $|f(z)|\le M$ 在 $\mathbb{C}$ 内恒成立. 对 $z_0\in\mathbb{C}$ 及 $|z-z_0|\le R$ 应用 Cauchy 不等式得

$$|f'(z_0)| \le \frac{M(R)}{R} \le \frac{M}{R} \to 0, \quad R\to\infty$$

所以 $f'(z_0)=0$. 由 z_0 的任意性得 $f'(z)\equiv 0,\ z\in\mathbb{C}$, 故 $f(z)$ 为常数. □

(3) **证明:** 令 $F(z)=e^{f(z)-kg(z)}$, 则 $F(z)$ 是整函数. 由 $\Re(f(z)-kg(z))<0$ 有 $|F(z)|\le e^{\Re f(z)-k\Re g(z)}\le 1$. 由 Liouville 定理得 $F(z)$ 是常数, $f(z)-kg(z)$ 也是常数. 命题证毕. □

注记: 本题第三问中对区域进行变换的思想会在后半学期的课程中发挥更大的作用. 我们将发现一个重要事实, 如果 D 是扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的单连通区域, 且 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus D$ 至少有两个点, 则我们可以通过适当进行 "解析的" 变换将 D 变为单位圆盘.

这一事实以及与题目第三问类似的思路, 可以启发我们认识到解析函数所具有的很多强大性质. 例如本性奇点的 Picard 定理, 以及下述结论: 对于整函数 $f(z)$, 若 $\mathbb{C}$ 上有两个 (不同的) 点不属于 f 的值域, 则 f 一定是常值函数.

七、(15 分)

(1) 设 $f(z),\ g(z)$ 在区域 D 内解析, 并且在区域 D 内 $f(z)g(z)\equiv 0$, 证明在区域 D 内或者有 $f(z)\equiv 0$, 或者有 $g(z)\equiv 0$.

(2) 找出所有在单位圆 $\Delta(0,1)$ 内解析并满足方程

$$f''\left(\frac{1}{n}\right)^2 - f\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0, \quad n=2,3,\dots$$

的函数 $f(z)$, 并说明理由.

分析: 此题第一问是廖老师教材的例 4.3.8. 主要考察的是解析函数零点的孤立性定理, 以及解析函数的唯一性定理. 题目的难度并不大, 只需要将 "非常值的解析函数不能在 '太多' 地方取值为 0" 这一思想牢记于心, 这两小问的证明就是几分钟就能完成的事了.

(1) **证明:** 若 $g(z)$ 不恒为 0, 则存在 $z_0\in D$ 使得 $g(z_0)\neq 0$. 由连续性知存在 $\Delta(z_0,\delta)\subset D$ 使得 $g(z)\neq 0, \forall z\in\Delta(z_0,\delta)$. 由题设知 $f(z)\equiv 0,\ z\in\Delta(z_0,\delta)$. 而在圆盘上恒为 0 的解析函数一定在整个区域中恒为 0, 所以 $f(z)\equiv 0,\ z\in D$. □

(2) **解:** 设 $F(z)=f''(z)^2-f(z)^2$, 则 $F(z)$ 在单位圆内解析, 且 $F\left(\frac{1}{n}\right)=0,\ \forall n\in\{2,3,\dots\}$. 由解析函数零点的孤立性和解析函数的唯一性知 $F(z)\equiv 0$, 由上一问结论知

$F(z)\equiv 0 \Longleftrightarrow f''(z)+f(z)\equiv 0$ 或 $f''(z)-f(z)\equiv 0$. 由常微分方程有关理论知 $f(z)$ 满足题目关系式当且仅当 $f(z)=C_1e^{z}+C_2e^{-z}$ 或 $f(z)=C_3e^{\mathrm{i}z}+C_4e^{-\mathrm{i}z}$, 其中 $C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{C}$.

注记: 虽然在常微分方程课上, 求解方程时所考虑的函数都是实函数, 但求解高阶微分方程的一般方法完全可以照搬到复变函数中. 求解此微分方程的步骤不再赘述.

八、(10 分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $\Delta(0,1):=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 内解析, 并且 $f(0)=1$,

$$\int_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta\le 2,\quad 0\le r<1.$$

证明 $\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\le 3$.

分析: 此题难度偏大 (可以说是整份试卷中唯一一道难题), 且颇有 "分析" 的意味. 解决本题的最主要想法有两个: 一是考虑将 $f(z)$ 作幂级数展开, 并且利用对展开式系数的估计以得出结论; 二是利用绕原点一圈的积分以 "筛选" 出幂级数展开式的第 n 项系数.

上面第二个想法的核心在于下式: $\displaystyle\int_{|z|=r}z^n\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\delta_{n,-1}$, 其中 $\delta_{x,y}$ 是 Kronecker 符号, $n\in\mathbb{Z}$. 这个式子表明, 如果对一系列不同指数幂的式子做一次绕原点的积分, 只有 -1 次方项才能得以保留, 而其他次项都会变成 0. 事实上, 这也就是洛朗展开实现的原理. 洛朗展开是通过积分的值算出系数, 而在此题中, 我们同样是通过题目条件对积分值的约束, 来对幂级数展开的第 n 项系数进行估计的.

证明: 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 则 $f'(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$, 因此 $\dfrac{f'(z)}{z^k}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-k-1}$, 即得

$$k|a_k|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{z^k}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f'(re^{i\theta})|}{r^{k-1}}\,\mathrm{d}\theta\le 2r^{1-k},\quad\forall k\in\mathbb{N}^+.$$

令 $r\to1^-$ 得 $k|a_k|\le 2$, 即 $|a_k|\le\dfrac{2}{k}$, $\forall k\in\mathbb{N}^+$. 从而有

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|x^k\,\mathrm{d}x\le 1+2\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\,\mathrm{d}x=1-2\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=3.\quad\square$$