

南京大学数学系试卷

姓名 _____ 学号 _____ 院系 _____

考试科目 复变函数 任课教师 张高飞 考试时间 2015.5.4

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					

一、填空题 (4×4=16 分)

1. $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$ 表示的点 z 的轨迹图形为 _____;
2. 设 $z = 1 + i\sqrt{3}$, 则 $|e^{z^2}| =$ _____, $\operatorname{Ln} z =$ _____;
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} z^n$ 的收敛半径 $R =$ _____;
4. 设 $z = x + iy$, Γ 为连接 0 到 $1+i$ 的直线段, 则 $\int_{\Gamma} (x - y + ix^2) dz =$ _____。

二、选择题 (4×4=16 分)

1. 函数 $f(z) = |z|^2$ 在复平面内 ()
A) 处处可导
B) 处处不可导
C) 只在 $z=0$ 处可导
D) 只在 $z=0$ 处不可导
2. $z=0$ 是函数 $\frac{\sin z - z}{z^3}$ 的 ()
A) 解析点
B) 极点
C) 可去奇点
D) 本性奇点
3. 级数 $\sum z^n/n$ 在单位圆周上 ()
A) 处处收敛
B) 除了 $z=1$ 处处收敛
C) 除了 $z=-1$ 处处收敛
D) 处处不收敛

4. 方程 $z^4 - 5z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 内 (根的个数计算重数) ()

A) 没有根

B) 有 1 个根

C) 有 3 个根

D) 有 4 个根

三、计算题 (6×3=18 分)

1. 已知调和函数 $u = 2(x-1)y$, $f(2) = -i$, 求函数 $f(z) = u + iv$ 。

2. 将函数 $\int_0^z e^{z^2} dz$ 展成 z 的幂级数, 并指出展式成立的范围。

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ 。

四、证明题 (10×5=50 分)

1. 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$, 证明:

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

并说明这些等式的几何意义。

2. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $\overline{f(z)}$ 也在 D 内解析, 证明 $f(z)$ 在 D 内必为常数。

3. 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上解析。如果存在 $a > 0$, 使当 $|z| = R$ 时 $|f(z)| > a$, 而且 $|f(0)| < a$, 证明: 在圆 $|z| < R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点。

4. 设 C 为复平面上的任意正向简单闭曲线, 记 $g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z-w)^3} dz$ 。

证明当 w 在 C 内时 $g(w) = 6\pi i w$; 而 w 在 C 外时 $g(w) = 0$ 。

5. 假设函数 f 在正向简单闭曲线 C 内和 C 上解析, 且在 C 上没有零点, 证明: 若 f 在 C 内有 n 个零点 $z_k (k=1, 2, \dots, n)$, 其中每一个 z_k 的

重数为 m_k , 则 $\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n m_k z_k$ 。

