

南京大学数学系复变函数期末试卷 A 卷

2019/2020 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 复变函数
 院系 班级 学号 姓名
 考试时间 2020.06 任课教师 张高飞 考试成绩

题号	一	二	三	总分
得分				

一. 填空题（共 10 分，每题 2 分）

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^nz^n$ 的收敛半径 $R=$

2. 积分 $\int_{-2}^{-2+i}(z+2)^2dz=$

3. 将 $\infty, i, 0$ 分别变成 $0, i, \infty$ 的分式线性变换 $w=$

4. $z=0$ 是函数 $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ 的 奇点

5. $\operatorname{Res}_{z=1}\left(\frac{e^z}{z^2-1}\right)=$

二. 计算题（共 60 分，每题 15 分）

1. 利用柯西-黎曼条件讨论函数 $f(z)=\bar{z}$ 的解析性.

2. 计算实积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

3. 求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 共形映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换 $w=L(z)$ ，使符合条件 $L(i)=0, L'(i)>0$.

4. 已知 $u(x, y) = x^2 - y^2$, 求 $v(x, y)$, 使得 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在复平面上解析。

2. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq R$ 上解析, 且 $|f(z)| \leq M$, $f(0) \neq 0$, 则当 $|z| \leq \frac{R}{3}$ 时 $f(z)$ 的零点个数不超过 $\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$.

三. 证明题 (共 30 分, 每题 15 分)

1. 若 $f(z)$ 在整个复平面内解析, 并设 $z \rightarrow \infty$ 时 $z^{-1} \operatorname{Re} f(z) \rightarrow 0$, 则 $f(z)$ 是一个常数.