# 南京大学数学系试卷（B）（答案）

姓名 ____________　　学号 ____________　　院系 ________________

考试科目 复变函数　　任课教师 张高飞　　考试时间 2015.7.2

| 题　号 | 一 | 二 | 总　分 |
|---|---|---|---|
| 得　分 | | | |

一、计算题（10×2=20 分）

1. 已知欧拉常数 $\gamma=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n\right)$.

解：记 $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n, T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\log n$,

由 $\gamma$ 的定义可知 $2\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\gamma$ ..........................(2 分)

$$\begin{aligned}S_n+T_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log n,\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log 2n+\log 2\end{aligned}$$

.........................(6 分)

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\gamma+\log 2$ .........................(8 分)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\gamma+\log 2-\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}+\log 2$ .........................(10 分)

2. 写出函数 $\cos\pi z$ 的 Hadamard 乘积.

解：　$\sigma(\cos\pi z)=1, z=\frac{2n+1}{2}(n\in Z)$为$\cos\pi z$ 的单重零点 ......................(2 分)

设　$$\cos\pi z=e^{Az+B}\prod_{n=0}^{\infty}E_1\left(\frac{z}{\frac{2n+1}{2}}\right)E_1\left(-\frac{z}{\frac{2n+1}{2}}\right)$$

$$=e^{Az+B}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$

...................(6 分)

令 $z=0$，得$e^B=1$，故$B=0$

..............(8 分)

而　$\cos\pi z$为偶函数，故$A=0$

.................(10 分)

故 $\cos\pi z=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2})$

## 二、证明题 （共 80 分）

1. （15 分）利用 Poisson 求和公式证明

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\tau+n)^2}=-4\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{2\pi in\tau}(\tau\text{固定},\mathrm{Im}(\tau)>0).$$

证：（1）

$\xi\le 0$， 对函数 $f(z)=\frac{1}{(\tau+x)^2}e^{-2\pi i\xi z}$沿半径为$R$的上半封闭圆周做积分，

则 $$\int_{\Gamma}f(z)dz=\int_{\theta:0\to\pi}f(z)dz+\int_{-R}^{R}f(x)dx=0$$ .............(2 分)

$$|\int_{\theta:0\to\pi}f(z)dz|\le\int_{\theta:0\to\pi}|f(z)||dz|\le\int_{\theta:0\to\pi}\frac{e^{2\pi\xi\,\mathrm{Im}z}}{(|z|-|\tau|)^2}|dz|\le\frac{\pi R}{R^2}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

............(4 分)

故 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau+x)^2}e^{-2\pi i\xi x}dx=0$$ ...........(5 分)

$\xi>0$， 对函数 $f(z)=\frac{1}{(\tau+x)^2}e^{-2\pi i\xi z}$沿半径为$R$的下半封闭圆周做积分

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=\int_{\theta:-\pi\to 0}f(z)dz+\int_{R}^{-R}f(x)dx=2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=-\tau}\,f(z)=4\pi^2\xi e^{2\pi i\xi\tau}$$

..............(7 分)

同理 $$|\int_{\theta:-\pi\to 0}f(z)dz|\xrightarrow{R\to\infty}0$$

故 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau+x)^2}e^{-2\pi i\xi x}dx=-4\pi^2\xi e^{2\pi i\xi\tau}$$ ..............(10 分)

（2）由 poisson 求和公式 $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\tau+n)^2}=-4\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{2\pi in\tau}$$ ..............(15 分)

2. （10 分）证明方程 $e^z-z=0$ 在复平面内有无穷多个根.

证：假设方程 $e^z-z=0$ 在复平面内只有有限多个根，则 $e^z-z=p(z)e^{Az+B}$，其中

$A\neq 0, p(z)$ 为多项式；...................(4 分)

则 $P(z)=\dfrac{e^{z}-z}{e^{Az+B}}=O(e^{(1-A)z})$，...................(6 分)

该式有意义当且仅当 $A=1$，..................(8 分)

则 $z=e^{z}-p(z)e^{z+B}$=$(1-p(z)e^{B})e^{z}$，这是不可能的。故有无穷多个根。..............(10 分)

3.（10 分）定义函数 $\mathrm{Li}(x)=\int_{2}^{x}\dfrac{dt}{\log t}$，证明 $\pi(x)\sim \mathrm{Li}(x), x\to\infty$ .

证：$\int_{2}^{x}\dfrac{dt}{\log t}$=$\dfrac{x}{\log x}-\dfrac{2}{\log 2}-\int_{2}^{x}td(\dfrac{1}{\log t})=\dfrac{x}{\log x}-\dfrac{2}{\log 2}+\int_{2}^{x}\dfrac{1}{\log^{2}t}dt$ ..............(4 分)

$\int_{2}^{x}\dfrac{dt}{\log^{2}t}$=$(\int_{2}^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^{x})\dfrac{dt}{\log^{2}t}\leq C_{1}\sqrt{x}+C_{2}(x-\sqrt{x})\dfrac{1}{\log^{2}\sqrt{x}}\leq C\dfrac{x}{\log^{2}x}$ ...........(8 分)

故 $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x}\sim \mathrm{Li}(x), x\to\infty$ ...........(10 分)

4. （15 分）证明从上半平面 $\mathbf{H}$ 到单位圆盘 $\mathbf{D}$ 的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \theta\in\mathbf{R}, \beta\in\mathbf{H}.$$

证： 令 $G(z)=i\dfrac{1-z}{1+z}$,则$T:\mathbf{D}\to\mathbf{H}$，令 $f:\mathbf{H}\to\mathbf{D}$ ...........(4 分)

则 $f\circ G:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$，即 $f\circ G$=$\lambda\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}, a\in\mathbf{D}, |\lambda|=1$ ...........(8 分)

$$f(z)=\lambda\frac{G^{-1}(z)-a}{1-\overline{a}G^{-1}(z)}=\lambda\frac{\frac{i-z}{i+z}-a}{1-\overline{a}\frac{i-z}{i+z}}$$ ...........(12 分)

$$=\lambda\frac{1+a}{1+\overline{a}}\cdot\frac{z-\frac{1-a}{1+a}i}{z-\overline{\frac{1-a}{1+a}}i}$$，其中 $\dfrac{1-a}{1+a}i\in\mathbf{H}$ .........(15 分)

5. （10 分）假设 $f:D(0,R)\to\mathbf{C}$ 为一个全纯函数，且存在 $M>0$ 使得 $|f(z)|\le M$ .证明

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{M^2-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le\frac{|z|}{MR}.$$

证：不妨假设 $|f(0)|<M$ ，否则由全纯函数的最大模原理可知 $f$ 为常数，结论成立.

令 $g(z)=\dfrac{f(Rz)}{M}$，其中 $z\in\mathbf{D}$ ，则 $|g(0)|<1$ ...........(2 分)

令 $T:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ 为 $T(z)=\dfrac{z-g(0)}{1-\overline{g(0)}z}$， ...........(4 分)

构造复合函数 $T\circ g:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ ，则 $Tg(0)=\dfrac{g(0)-g(0)}{1-\overline{g(0)}g(0)}=0$

由施瓦茨引理，$|T(g(z))|\le|z|$ ...........(8 分)

而 $Tg(z)=\dfrac{g(z)-g(0)}{1-\overline{g(0)}g(z)}=\dfrac{\dfrac{f(Rz)}{M}-\dfrac{f(0)}{M}}{1-\dfrac{\overline{f(0)}}{M}\dfrac{f(Rz)}{M}}=\dfrac{M\left(f(Rz)-f(0)\right)}{M^2-\overline{f(0)}f(Rz)}$

故 $\left|\dfrac{\left(f(Rz)-f(0)\right)}{M^2-\overline{f(0)}f(Rz)}\right|\le\dfrac{|z|}{M}$， 即 $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{M^2-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le\dfrac{|z|}{MR}$ .......(10 分)

6. （20 分）当 $\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0$ 时，定义 Beta 函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt$，证明

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

当 $x>0$ 时，定义 Bessel 函数 $J_\nu(x)=\dfrac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(\nu>-1/2)$ .证明

$$J_\nu(x)=(\frac{x}{2})^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(x^2/4\right)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

证：（1）$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-t-s}dtds$ ..................(2 分)

令 $s=ur,t=u(1-r),\quad r\in(0,1),u\in(0,\infty)$， 则 $\left|\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(u,r)}\right|=u$ . ................(6 分)

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int_0^\infty\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}drdu$$

$$=\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}du$$ ................(10 分)

$$=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

(2) $$J_\nu(x)=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt$$

$$=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1\sum_{n=0}^\infty\frac{(ixt)^n}{n!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt$$ ..................(2 分)

$$=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty\int_{-1}^1\frac{(ixt)^n}{n!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt$$

$$=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\int_{-1}^1\frac{(ixt)^{2m}}{(2m)!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(n\text{为奇数积分为}0)$$

$$=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty 2\int_0^1\frac{(-1)^m x^{2m}t^{2m}}{(2m)!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt$$

..................(4 分)

$$\overset{u=t^2}{=}\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 u^{m-1/2}(1-u)^{\nu-(1/2)}du$$

.................(6 分)

$$=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}B(\nu+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})$$

$$=(x/2)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{\sqrt{\pi}(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(v+m+1)}$$

$$=(x/2)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{\sqrt{\pi}(2m)!}\frac{\Gamma(1/2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdot(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(v+m+1)}$$

................(8 分)

$$\overset{\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}}{=}(x/2)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\frac{(2m-1)!!}{2^m\Gamma(v+m+1)}$$

$$=(x/2)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^m\frac{1}{\Gamma(v+m+1)}$$

................(10 分)