

南京大学数学系试卷 (B)

姓名 _____ 学号 _____ 院系 _____

考试科目 复变函数 任课教师 张高飞 考试时间 2017.7.8

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 总分 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得 分 | | | | | | | | | | |

1. (10 分) 已知欧拉常数 $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \log n \right)$.

2. (10 分) 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上解析, 如果存在 $a > 0$, 使当 $|z| = R$ 时 $|f(z)| > a$, 而且 $|f(0)| < a$, 证明: 在圆 $|z| < R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点。

3. (10 分) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ 。

4. (10 分) 将函数 $\int_0^z e^{z^2} dz$ 展成 z 的幂级数, 并指出展式成立的范围。

5. (10 分) 已知调和函数 $u = 2(x-1)y$, 求调和函数 v 和解析函数 $f(z) = u + iv$, 满足 $f(2) = -i$ 。

6. (10 分) 证明方程 $e^z - z = 0$ 在复平面内有无穷多个根。

7. (10 分) 假设 $F: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ 为一个全纯函数, 满足 $|F(z)| \leq 1$, 且 $|F(i)| = 0$. 证明

$$|F(z)| \leq \left| \frac{z-i}{z+i} \right|, \forall z \in \mathbf{H}.$$

8. (15 分) 证明从上半平面 \mathbf{H} 到单位圆盘 \mathbf{D} 的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta} \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}, \theta \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{H}.$$

9. (15 分) 任给 $z, w \in \mathbf{D}$, 定义 $\rho(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|$. 证明: 若 $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ 为一个全纯函数,

则任给 $z, w \in \mathbf{D}$, 均成立 $\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w)$; 进一步, 若 f 是 \mathbf{D} 上的一个自同构, 则任

给 $z, w \in \mathbf{D}$, 均成立 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$ 。