

南京大学数学系 2016--2017 复变函数期末考试试题

考试科目: 复分析 年级: 2015 级 适用专业: 应用数学
时间: 120 分钟 考试方式: 闭卷 试卷类别: A 卷 试题满分: 100 分
注意: 答案全部写在答题纸上, 写清题号, 不必抄题.

一. 填空题 (每题 5 分).

- (1) $2^i = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (2) $z = \frac{1}{i} - \frac{3i}{1+i}$, 则 $|z| = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (3) $\int_C \frac{z}{(z)^2} dz = \underline{\hspace{1cm}}$, 其中 C 是 -1 到 1 的下半圆.
- (4) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2z} dz = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (5) $f(z) = \frac{1}{z-4i} e^{\frac{1}{z-3}}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展式的收敛半径是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
- (6) $z=0$ 是 $\frac{1}{\cos z - 1}$ 的 $\underline{\hspace{1cm}}$ 阶极点.
- (7) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z + 2 = 0$ 在 $|z| < 2$ 内有 $\underline{\hspace{1cm}}$ 个根.
- (8) $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 到 $|w| < 1$ 的保形映射是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

二. 计算题 (每题 10 分).

1. 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}$.

2. $f(z) = mx^3 - 3xy^2 + 2x + (lx^2y + ny^3 + 2y)i$ 是解析函数, 求 $l, m, n \in \mathbb{R}$.

3. 求把满足 $|z| > 1$ 且 $|z - \sqrt{3}i| < 2$ 所围区域映为上半平面的共形映射 $f(z)$, 且使得 $f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0$.

三. 证明题 (每题 15 分).

1. $f(z)$ 是单位圆到单位圆的解析映射, 证明 $\frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2} \leq 1$.
2. 对任一整函数 $f(z)$, 若存在 $q \geq 0$, 使得 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, f)}{r^q} = a < \infty$, 则 $f(z)$ 必为次数不大于 q 的多项式.