

南京大学数学系复变函数期末试卷(2018-19)

2018/2019 学年第一学期
 考试形式 闭卷
 课程名称 复变函数

院系
 班级
 学号
 姓名

考试时间 2018.6.30
 任课教师 张高飞
 考试成绩

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. (30分) 计算题。

1. (15分) 计算积分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta$$

2. (15分) 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^4 + a^4} dx$$

其中 $m > 0, a > 0$ 。

二. (15分) 判断下面函数的奇点及其类别（包括无穷远点）

$$\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$$

三. (15分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，并且满足条件 $|f(z)| < 1$ ，如果单位圆内存在一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = \xi, \quad f'(\xi) = 1$$

证明 $f(z) = z$, 对任意 z 属于单位圆。

四. (10分) 试证方程

$$z + e^{-z} = a \quad (a > 1)$$

在 $\Re z > 0$ 内只有一根，且为实根。

五. (15分) 让 $G = \{z : |z - 1| < 1, |z - i| < 1\}$ ，求一分式线性变换，把 G 映到上半平面并且把原点映到原点。

六. (10分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，并且满足条件 $|f(z)| < 1$ ，那么

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |z||f(0)|}$$

七. (5分) 已知 f, g 在单连通区域 Ω 内解析， C 是 Ω 内的一个简单闭曲线。如果在 C 上有

$$|f + g| < |f| + |g|$$

那么 f, g 在 C 内有相同的零点个数。