南京大学数学系试卷（A）

姓名 ____________ 学号 ____________ 院系 ______________

考试科目 复变函数 任课教师 张高飞 考试时间 2015.7.2

题号	一	二	总分
得分			

一、计算题（10×2=20 分）

1. 已知欧拉常数 $\gamma=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n\right)$.

2. 写出函数 e^z-1 的 Hadamard 乘积.

二、证明题 （共 80 分）

1. （15 分）利用 Poisson 求和公式证明 $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi a|n|}(a>0)$.

2. （10 分）若 f 为有穷级整函数，且取不到值 a 和 b （$a,b\in\mathbf{C}, a\neq b$），则 f 为常数.

3. （20 分）当 $\operatorname{Re}(\alpha)>0, \operatorname{Re}(\beta)>0$ 时，定义 Beta 函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt$，证明

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

当 $x>0$ 时，定义 Bessel 函数 $J_\nu(x)=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(\nu>-1/2)$.证明

$$J_\nu(x)=(\frac{x}{2})^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(x^2/4\right)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

4. （10 分）定义函数 $\operatorname{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$，证明 $\pi(x)\sim\operatorname{Li}(x), x\to\infty$.

5. （10 分）假设 $F:\mathbf{H}\to\mathbf{C}$ 为一个全纯函数，满足 $|F(z)|\leq 1$，且 $|F(i)|=0$.证明

$$|F(z)|\leq\left|\frac{z-i}{z+i}\right|,\forall z\in\mathbf{H}.$$

6. （15 分）证明从上半平面 $\mathbf{H}$ 到单位圆盘 $\mathbf{D}$ 的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\theta\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{H}.$$