数学分析讲义

1　实数

在有了整数概念之后人们引进分数（有理数）比较自然。由于用有理数并不能表示如 $\sqrt{2}$ 平方根之类的数，人们于是将有理数的概念扩张为实数。实数具有有理数所不具备的重要特征：完备性。这是分析学的基石。

1.1　实数的小数表示

笛卡尔 (René Descartes，1596-1650) 发明了现代数学的基础工具之一：坐标系，将几何和代数相结合，创立了解析几何学。我们现在利用数轴来理解实数。

为了将数轴上每一个点对应于一个实数，我们首先定义数 a 的绝对值 $|a|$。这是一个非负的数，当 $a \geq 0$ 时，$|a| = a$；而当 $a < 0$ 时，$|a| = -a$。如果规定数轴上某一点为原点，它对应于数 0，则点 a 到原点的距离就是该实数的绝对值 $|a|$（长度）。规定原点右侧的某一点对应于数 a，如果该点到原点的距离是 a，而左侧距离相同的点对应于 $-a$。显然，不同的点对应于不同的数，不同的数对应于不同的点。依据大小关系，数轴上所有的点存在序关系（可以排队）。给定任意三个不同的点 $\{a, b, c\}$，一定有序关系，例如 $a < b < c$。用十进制小数表示一个大于零，小于 1 的数，如果写成

$$a = 0.a_1 a_2 \cdots a_k \cdots ,$$

其中 a_i 是 0 到 9 的某一个整数。这些 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$ 构成一个整数列。利用数轴我们可以清楚地看出这个整数列是如何确定的。首先将 [0,1] 区间等分为 10 份，依次算成第 0、第 1、$\cdots$、第 9 个小区间，每个区间都是闭区间。例如 $[0, \frac{1}{10}]$，$[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$ 等等。如果该实数对应的点落在第 i_1 个区间，$(0 \leq i_1 \leq 9)$，则 $a_1 = i_1$。需要说明的是，如果该点在某个区间的端点，则该点一个点同时属于两个相邻的小区间。我们可以随意规定该点属于这两个相邻区间中的任意一个。下面我们将证明这种取法的随意性并不影响小数的确定。

为了得到第 2 位小数 a_2，我们将第 i_1 区间再划分为 10 等份，如果该实数对应的点落在第 i_2 个区间，$(0 \leq i_2 \leq 9)$，则 $a_2 = i_2$。依次类推。

在实数的小数表示构造过程中，当该数对应的点处于某一层的十等份小区间的端点时，我们的取法似乎随意。现在我们来证明这种随意性不影响实数的小数构造。

这涉及到如何判别两个实数相等这一看上去似乎平凡的问题。如果 $a = b$，则对于任意小的 $\epsilon > 0$，都有 $|a - b| < \epsilon$。反之亦然。根据此法则，我们就很容易理解 $0.5 = 0.499999\cdots$。实际上，对于任意给定的小 $\epsilon > 0$，都存在整数 $k > 0$，使得 $10^{-k} < \epsilon$。根据定义，$0.499999\cdots$ 一定落在区间 $(0.5 - 10^{-k}, 0.5 + 10^{-k})$ 的区间内，即二者的差小于 ϵ，因此两者相等。其它情况，如 $0.35 = 0.349999\cdots$ 等类推。前面在如何确定实数的小数表示时，如果把 $\frac{1}{2}$ 算在区间 $[0.4, 0.5]$ 时，我们就得到它的小数表示为 $0.49999\cdots$；而当算在 $[0.5, 0.6]$ 时，我们就得到 $0.5000\cdots$ 的小数表示。从观感上看 $0.5 = 0.5000\cdots$ 这个表示自然一些。

所以从现在起，我们可以规定表示小数的整数列取法。对于正数，当该实数在某一步 10 等分小区间时落在两个区间端点时，我们将该点算在右侧的区间内；对于负数，当该数在某一步 10 等分小区间时落在两个区间端点时，我们将该点算在左侧的区间内。

给定有理数 a，按照定义，它是两个整数的商，即存在两个整数 (p, q) 使得 $a = \frac{p}{q}$。去除公因子后，我们一般假设 p 和 q 之间的最大公因子是 1，这时称 p 与 q 互素，有时记为 $(p, q) = 1$。

定理：若用小数表示有理数，则一定是循环小数。即如果写成 $a = a_0.a_1 a_2 \cdots a_k \cdots ,$，则一定存在 $i_0, j \geq 1$ 使得

$$a_{i+kj} = a_i, \qquad \forall\ i \geq i_0,\ k = 1, 2, \cdots$$

证明. $a=\frac{p}{q}$ 的整数部分如果是 a_0，则 $p=a_0\times q+p_1$，这里有 $p_1<q$。根据十进制，我们有

$$10\times p_1=a_1\times q+p_2$$

其中 $a_1<10$ 和 $p_2<q$。依次类推，对于任意自然数 m，我们有

$$10\times p_m=a_m\times q+p_{m+1}.$$

这样，我们就得到一个整数无穷序列 $(p_1,p_2,\cdots,p_m\cdots)$，其中每一个整数都小于 q。无非有两种可能性

1. 存在某个 m_0，使得 $p_m=0$ 对于所有的 $m>m_0$ 成立，这就意味着这个有理数用小数表示就是有限位小数；
2. 在无穷个小于 q 的正整数 $(p_1,p_2,\cdots,p_m\cdots)$ 里，一定存在 $p_{m_1}=p_{m_2}(m_1<m_2)$。一旦第一次出现重复后，该数列片段 $(a_{m_1},\cdots,a_{m_2})$ 在给有理数的小数表示中会无限重复出现。

其实，第一种情况只是第二种情况的一个特例，$p_{m_1}=p_{m_1+1}=0$。 □

任一实数可以用小数表示,对应于一个由 0 到 9 构成的整数序列,如果写该数为 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$,

1. 存在 m_0 和 $j\geq 1$，使得 $a_m=a_{m+j}$，即该数在小数表示时出现无限循坏片段。此时，该实数为有理数；
2. 无限不循环小数表示的数称为无理数。

有理数的稠密性与无穷性：对于任意小的 $\epsilon>0$ 以及任意有理数 $\frac{p}{q}$，在区间 $(\frac{p}{q}-\epsilon,\frac{p}{q}+\epsilon)$ 中存在不同于 $\frac{p}{q}$ 的有理数。实际上，可以取充分大的正整数 k 使得 $\frac{1}{k}<\epsilon$。于是，我们有 $\frac{p}{q}-\epsilon<\frac{p}{q}-\frac{1}{k}<\frac{p}{q}+\frac{1}{k}<\frac{p}{q}+\epsilon$。显然，在任意小的区间内存在无穷多的有理数。

无理数的存在性与无穷性：许多教科书上都有这样的例子，$\sqrt{2}$ 是无理数。如若不然，存在互素的正整数 p 与 q 使得 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$。于是有 $2q^2=p^2$。由于 $2q^2$ 是偶数，所以 p 一定是偶数。由此可以推出 q^2 是偶数，即 q 也是偶数。这与 p 和 q 互素矛盾。因此，$\sqrt{2}$ 是无理数。

其实，由实数的小数表示可以看出有无穷多无理数。考虑自然数 $(0,1,2,\cdots,9)$ 的 k 次全排列，即由 k 个取自 $(0,1,2,\cdots,9)$ 构成的数的所有可能的排列。这样的排列有 10^k 个。我们构造一个无理数，它的小数点后面的前 10 位由 $(0,1,2,\cdots,9)$ 的 1 次全排列，紧接着的 100 位由 $(0,1,2,\cdots,9)$ 的 2 次全排列拼成，依次类推。这样构成的小数无限不循环。每一个 k 次全排列的摆放次序还可以不一样，因而由无穷多无理数。如果这样理解有点困难，我们可以从 0 到 9 中任意选出两个数，例如 0, 1。对于任意 $k\in\mathbb{N}$，我们取片段 $I_k=111\cdots1000\cdots0$，即 1 和 0 都分别重复 k 次。我们将 $\{I_k,k=1,2,\cdots\}$ 以任意的方式不重复排列在小数位置上，这样就构造无限不循环小数。

为了理解“无理数比有理数多得多”这句不太严格但挺形象的话（以后在实变函数课程内会讲到测度，长度（体积）概念的自然拓展），我们首先看到所有从 0 到 1 的实数拼成一个长度为 1 的区间。现在我们用小区间来覆盖所有有理数，然后把这些小区间的长度相加，估计其大小。给定有理数 $\frac{p}{q}$，我们用 $[\frac{p}{q}-\frac{\epsilon}{2^q q},\frac{p}{q}+\frac{\epsilon}{2^q q}]$ 加以覆盖。这个区间的长度就是 $\frac{2\epsilon}{2^q q}$。用 $n(q)$ 表示所有小于 q、大于 0 的与 q 互素的整数个数，显然有 $n(q)<q$。把这些区间的长度相加就是

$$\sum_{q=2}^{\infty}n(q)\frac{2\epsilon}{2^q q}<\sum_{q=2}^{\infty}\frac{2\epsilon}{2^q}.$$

由等比级数求和，对于 $S=a+ab+ab^2+\cdots+ab^m$，我们有 $S=\frac{a(1-b^{m+1})}{1-b}$。运用该关系到我们这个问题就有 $a=2\epsilon$ 和 $b=\frac{1}{2}$。虽然求和有无穷项，但是前 k 项的和

$$\sum_{q=2}^{k+1}\frac{2\epsilon}{2^q}=\sum_{q=1}^{k}\frac{\epsilon}{2^q}=\frac{\epsilon(1-2^{-(k+1)})}{1-2^{-1}}.$$

所以，我们可以看出这些区间总长度不超过 2ϵ。由于 ϵ 可以任意小，我们可以体会到所有有理数构成的集合的“长度”为零！尽管数学需要严格的语言定义，我们不妨用形象的语言来描述体积。长度可以想象为一维体积。

例如，有一堆沙子，如何精确测量这些沙子所占的体积？沙子之间有空隙，用计算圆锥体的方法得到的体积显然比真实体积大。我们不妨用带刻度的一个大水池，将沙子倒入装水的池子，看看刻度上涨多少。这个差应该就是这一堆沙子的体积。用这个方法来理解有理数与无理数的多少，我们就可以看出，将所有的有理数倒入一维的池子，刻度不会上涨，倒入 $[0,1]$ 区间的所有无理数，刻度就上涨 1!

用以后将要学到的概率论的语言来描述有理数与无理数的“多少”就是：在 $[0,1]$ 区间随机取一个数，取到无理数的机率是百分之百，取到有理数的机率是零。

体会有理数与无理数的“多少”还可以有另一个理解角度：我们可以给所有的有理数排队，而无法给所有的无理数排队。既然有理数具有分数形式，我们以下列方式将有理数排队。给定自然数 $k>1$，我们有 $\frac{1}{k}, \frac{2}{k-1}, \cdots, \frac{k-1}{2}, \frac{k}{1}$ 这样 k 个数。去除可以通分的有理数，我们就可以将所有的有理数逐一排队。在以后的实变函数课程中，我们能会证明无理数是如此之多，以至于我们无法将其排队。在此不再赘述。

实数的十进制表示只是实数的一种经常用的表示，还可以有 p 进制表示。例如 2 进制。一个小于 1，大于 0 的数可以写成

$$a = 0.a_1a_2\cdots a_k\cdots,$$

其中 a_i 在 $\{0,1\}$ 中取值。将 $[0,1]$ 等分为两份，$a_1=0$ 表示点若落在左边的一份，$a_1=1$ 表示点落在右边的一份。a_i 的定义依次类推。

1.2 实数集的完备性

我们考虑有界数集 S，于是存在 $K>0$ 使得 $|x|\le K$ 对于所有的 $x\in S$ 成立，记为 $\forall\, x\in S$。一个自然的问题是，什么是最小的上界（上确界），什么是最大的下界（下确界）？

定义（上确界与下确界）：数 u 称为数集的上确界，记为 $\sup(S)$，如果满足条件

1. $x\le u$ 对于所有 $x\in S$ 成立；
2. 对于任意小 $\epsilon>0$，存在 $x\in S$ 使得 $x>u-\epsilon$。

同理，数 v 称为数集的下确界，记为 $\inf(S)$，如果满足条件

1. $x\ge v$ 对于所有 $x\in S$ 成立；
2. 对于任意小 $\epsilon>0$，存在 $x\in S$ 使得 $x<v+\epsilon$。

上确界无非有两种可能性。第一种情况，数集 S 中存在最大元素，这时该最大元素就是上确界；第二种情况，集合 S 中没有最大元素。注意，当定义有界实数集的上（下）确界时，我们就已经默认了实数集的完备性。在有理数域内不一定存在上确界，例如由无限不循环小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造有理数列 $x_i=0.a_1a_2\cdots a_i$，这样的集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$ 是无穷有界数列，但是在有理数域内没有上确界！回顾实数十进制表示，我们可以看出，尽管有理数在数轴上稠密，但是它们所占的“长度”可以忽略不计，“空隙”全部由无理数填满。这就导致所谓实数集的戴德金分割（Dedekind principle），J. W. Richard Dedekind （1831-1916）德国数学家。

戴德金分割: 如果把实数集分成两类 A 和 A'，满足如下条件

1. 数集 A 和 A' 都不空，每个数不属于 A，便属于 A'；
2. A' 中的每个数都比 A 中的每个数大；

那么，或者在 A’ 里存在着一个数，使 A’ 中所有其余的数都比它大；或者在 A 里存在着一个数，A 的所有其余的数都比它小。这种分割决定了一个实数。用数轴表示，每一个点 x 决定了一个分割，或者是 $\mathbb{R}=(-\infty,x]\cup(x,\infty)$，或者是 $\mathbb{R}=(-\infty,x)\cup[x,\infty)$。

这种分割在有理数域无法一定做到，因为限制在有理数域还存在第三种分割，即第一类中没有最小的数，同时第二类中没有最大的数。显然，这个分割所确定的数是无理数。例如，在决定一个大于零，小于 1 的无理数时，对于任给充分小的 $\epsilon>0$，都存在自然数 $N=N(\epsilon)$，以及相应的取自集合 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 使得 $0.a_1a_2\cdots a_N\in A$，而 $0.a_1a_2\cdots(a_N+1)\in A'$。如果 $a_N+1=10$，则按顺序进位。令 $\epsilon>0$ 趋于零，我们便得到相应的无限不循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$（无理数）。按照分割的定义，这个数不比 A 中的任何元素小，也不比 A' 中的任何元素大。它不属于 A 便属于 A'。

我们把这种填充无理数的过程成为“完备化”，这个手段在泛函分析（Functional Analysis）课程中还会用到。在讲完极限概念后，我们再来回顾这种完备化过程。有了实数域的戴德金分割，我们就可以证明

定理：如果实数集合 S 上（下）有界，则它一定有上（下）确界。

证明. 如果集合 S 有最大数，则该数就是集合的上确界。现在假设集合 S 没有最大数。我们据此做实数域的戴德金分割，将大于所有集合 S 中元素的数放在集合 A' 中，其余的数放在集合 A 中。由 S 的上有界性以及非空性，A' 与 A 都非空。这样的分割显然是戴德金分割，它决定了一个数 u。根据分割的做法，所有 A 的元素都不能比它大。由于 A 包含了 S 的所有元素，而且 A 中没有最大元素，所以有 $x < u$ 对于所有的 $x \in S$ 成立。另一方面，根据定义，A' 中所有的元素都不比 u 小。这意味着 u 是最小上界。下确界的证明类似。 □

作为这一节的结束，我们来证明阿基米德原理，在把戴德金分割作为公理接受以后，这个显而易见的结论可以予以证明。

阿基米德原理：给定任意正数 h。则对于任何实数 x，存在唯一的整数 k，使得 $(k-1)h \le x < kh$。

证明. 首先，整数数集的任何非空上有界子集有最大元素。根据上面证明的上确界存在性定理，这个数集有上确界，记为 S。在该数集中可以求出满足条件 $S-1 < n \le S$ 的自然数，则该数 n 就是其最大元素，因为 $n+1 > S$。同理，整数数集的任何非空下有界子集有最小元素。其次，自然数集没有上界。如果不是，记最大数为 n。但是 $n+1 > n$ 也是自然数，矛盾。因为 $\mathbb{Z}$ 没有上界，所以对于给定正数 h 我们定义集合 $\{n \in \mathbb{Z} : \frac{x}{h} < n\}$ 是整数集的非空下有界子集。这个集合显然具有最小元素 k，这意味着 $(k-1) \le \frac{x}{h} < k$。因为 $h > 0$，这个不等式等价于上述阿基米德原理中的不等式。由于数集最小元素唯一（由实数集的序关系决定），满足这两个不等式的 k 唯一。 □

1.3 实数的运算

实数的加、减、乘、除四则运算在此不再赘述。在此，我们来定义具有任何实指数 α 的任何正实数 x 的乘幂。当 $\alpha = \frac{p}{q}$ 为有理数时，x^α 就是 x^p 开 q 次方。当 α 为无理数时，对于任意小的 $\epsilon > 0$，存在自然数 p, p', q, q' 满足条件

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| < \epsilon, \qquad \frac{p}{q} < \alpha < \frac{p'}{q'}. \tag{1.1}$$

由此我们可以定义

$$x^\alpha = \inf_{p',q'} x^{\frac{p'}{q'}} = \sup_{p,q} x^{\frac{p}{q}}$$

其中自然数 p, p', q, q' 满足条件(1.1)。要使得该定义有意义，我们需要证明一端的上确界等于另一端的下确界。为此我们只需要研究 $x > 1$ 的情况。对于 $0 < x < 1$ 的情况，我们可以考虑 $(\frac{1}{x})^{-\alpha}$。对于任意 $a < \alpha < a' \le a_0$ 使得 $a' - a < \frac{1}{n}$，如果有 $x^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n}(x-1)$，我们有

$$x^{a'} - x^a = x^a(x^{a'-a} - 1) < x^a(x^{\frac{1}{n}} - 1) < x^a \frac{1}{n}(x-1) < x^{a_0}\frac{1}{n}(x-1).$$

对于任意 $\epsilon > 0$，只需要取 $n > \epsilon^{-1} x^{a_0}(x-1)$，我们便有 $0 < x^{\frac{p'}{q'}} - x^{\frac{p}{q}} < \epsilon$。因此为了完成证明，我们只需要证明不等式 $x^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n}(x-1)$ 对于任意自然数 n 以及 $x > 1$ 成立。

对于 $y > 0$ 以及自然数 n，我们由牛顿二项式展开可得

$$(1+y)^n = 1 + ny + \cdots$$

其中未写出的 $(n-1)$ 项都是正数。因此，我们有

$$(1+y)^n > 1 + ny \quad \Rightarrow \quad z^n > 1 + n(z-1)$$

其中 $z > 1$。再令 $z = x^{\frac{1}{n}}$（$x > 1$），我们就得到需要的不等式。

利用具有任意实指数的乘幂的定义，我们就可以确定不等于 1 的正实数 k 为底的对数的存在。如果 $k^x = y$，则 $x = \log_k y$。

1.4 一些常用的不等式

三角不等式：对于所有 $a, b \in \mathbb{R}$，我们有

1. $|a+b| \le |a| + |b|$;
2. $||a| - |b|| \le |a-b|$;
3. $|a-b| \le |a| + |b|$.

证明. 根据绝对值的定义，我们有 $-|a| \le a \le |a|$ 和 $-|b| \le b \le |b|$。由此我们有

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

这意味着第一式成立。为了证明第二个不等式，我们注意到 $a = a - b + b$，再应用第一个不等式，从而得到 $|a| \le |a-b| + |b|$。即 $|a| - |b| \le |a-b|$。同理，我们有 $|b| - |a| \le |a-b|$，这就得到第二个不等式。在第一个不等式里用 $-b$ 取代 b，我们得到第三个不等式。 □

推论：对于任意个实数 $a_1, a_2, \cdots a_k$ 我们有

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|.$$

证明. 运用三角不等式和数学归纳法。 □

给定任意个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，它们的算术平均与几何平均分别定义为 $\frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ 与 $(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}}$。我们有不等式

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k). \tag{1.2}$$

证明. 在此我们只证明 $k = 2$ 的情况。这时有 $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0$，即 $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \ge 0$。一般情形的证明留待以后。 □

Bernoulli 不等式：对于 $x > -1$ 有

$$(1+x)^k \ge 1 + kx, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

证明. 用数学归纳法。由于 $k = 1$ 时显然成立，假设 $k = n$ 时成立，

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\ge (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\ge 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

其中第一个不等式用到了 $x > -1$ 这一性质。 □

Cauchy-Schwarz 不等式：(Augustin Louis Cauchy 1789-1857) 对于任意两组实数 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 有以下不等式成立

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\Big)$$

证明. 考虑关于 t 的二次多项式 $F(t) = (x_1 t + y_1)^2 + (x_2 t + y_2)^2 + \cdots + (x_k t + y_k)^2$，即

$$F(t) = t^2 \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i^2.$$

由于 $F(t)$ 保持非负，故而它的判别式非正，即

$$4\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\Big) \le 0$$

证明完毕。 □

Chebyshev 不等式：如果 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 和 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$，则下列不等式成立

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \le n \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

证明. 由条件显然有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0.$$

将其展开后稍加整理即得。 □

1.5 Dirichlet 逼近

关于无理数的 Dirichlet 逼近定理 (Peter G.L. Dirichlet 1805-1859)：给定无理数 $0 < \omega < 1$。对于任意的正整数 q，总存在互素的正整数 $N, p \le q$ 使得

$$|N\omega - p| < \frac{1}{q}.$$

而且存在正整数列 $q_i \to \infty$ 以及相应的整数 p_i 使得

$$\left|\omega - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

证明. 将 $[0, 1]$ 区间等分为 q 个子区间，考虑 $\omega, 2\omega, \cdots, (q+1)\omega$ 这 $q+1$ 个数的小数部分。根据鸽笼原理 (Pigeonhole principle)，这 $q+1$ 数中至少有两个数落在同一个子区间。如果这两个数是 $\ell_1\omega$ 与 $\ell_2\omega$ 的小数部分，这意味着 $N = |\ell_1 - \ell_2| \le q$，而 $p = [N\omega] < q$。这里用 $[N\omega]$ 表示 $N\omega$ 的整数部分。如若 N 与 p 有公因子，则可以除以该公因子。这样就证明了定理的第一部分。

从上面的证明过程可以看出，如果 ω 与 $(q+1)\omega$ 的小数部分都落入同一小区间，我们就得到了定理的第二部分。这样的逼近可以由辗转相除法得到。令

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left[\frac{1}{\omega}\right], & a_1 &= 1 - k_1\omega, \\
k_2 &= \left[\frac{\omega}{a_1}\right], & a_2 &= \omega - k_2 a_1, \\
k_3 &= \left[\frac{a_1}{a_2}\right], & a_3 &= a_1 - k_3 a_2, \\
&\cdots & &\cdots\cdots \\
k_\ell &= \left[\frac{a_{\ell-2}}{a_{\ell-1}}\right], & a_\ell &= a_{\ell-2} - k_\ell a_{\ell-1},
\end{aligned}$$

我们可以看出 $q_1 = k_1, q_2 = q_1 k_2 + 1, \cdots, q_\ell = q_{\ell-1} k_\ell + 1$ 正好是可以实现最佳逼近的整数数列 □

这个有理数逼近无理数的估计适用于所有的无理数。对于有些无理数 ω（称为 Liouville 数）可以被有理数更快地逼近：任给 $k \in \mathbb{N}$，存在 $q, p \in \mathbb{N}$ 使得 $|\omega - p/q| < |q|^{-k}$。不过这些 Liouville 数非常稀少，它们所占的 Lebsgue 测度（长度概念的推广）为零。

2 欧几里得空间中点列的极限

按照笛卡尔的思想，用坐标系可以表示空间的点。在上一章，我们用数轴表示所有的实数。换句话说，我们用数表示了直线上的点。同理，我们可以用二元坐标系来表示平面上的每一个点。引进 (x, y)-直角坐标系后，平面上每一个点就对应于两个实数 (x, y)，一个是它的 x-坐标，另一个是它的 y-坐标。对于平面上任意两个点 $p = (x, y)$ 和 $p_2 = (x', y')$，它们之间的（欧几里得）距离可以利用勾股定理得到。如果用 $\|p - p'\|$ 表示这种距离的话，我们就有 $\|p - p'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$。与此类似，我们可以用 n 元直角坐标系来表示 n 维 (欧几里得) 空间 $\mathbb{R}^n$ 中每一个点。当 $n = 3$ 时，就可以想象成为我们平时所在的物理空间。给定空间中两个点 $p = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $p' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$，二者之间的欧几里得距离定义为

$$\|p - p'\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x'_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

而我们默认 $\|p\| = \|p - (0, \cdots, 0)\|$，它描述了点 p 到原点的距离。

给定一个无穷点列 $\{p_1, p_2, \cdots, \}$，经常会出现一种现象，即它们会向某处聚集；也可能会走向无穷远处。这时我们需要引进概念“极限”，以便用精确的数学语言来描述这些现象。我们先研究数列，即一维点列。

2.1 数列的极限

首先让我们考虑数列，即一维空间中的点列。对象因而就是实数集，每一个元素是实数。通常我们用 $\mathbb{N}$ 表示包含所有自然数的数集，$\mathbb{Q}$ 表示包含所有有理数的数集，$\mathbb{R}$ 表示包含所有实数的数集。

我们考虑无穷数列 $\{a_i, i = 1, 2, \cdots\}$。数列里的元素不一定都不同，可以相同。例如 $S = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$，其中当 i 为奇数时，$a_i = i^{-2}$，当 i 为偶数时，$a_i = 0$。如果存在实数 $N > 0$ 使得 $|a_k| \leq N$ 对所有的 $k = 1, 2, \cdots$ 成立，我们称该数列为有界数列。否则称之为无界数列。

定义（数列的极限）：数 $a^* \in \mathbb{R}$ 称为数列 $\{a_i\}$ 的极限，如果对于任意小的 $\epsilon > 0$，都存在正整数 $N > 0$ 使得对于所有的 $i \geq N$ 都有

$$|a_i - a^*| < \epsilon.$$

如果该数列的极限存在，我们称该数列收敛。

1. 极限值不一定属于该序列构成的数集。例如对于数列 $a_i = \frac{1}{i}$ 而言，极限值为 0，不属于该数集；
2. 一般而言，N 的选取依赖于 $\epsilon > 0$ 的选取。ϵ 越小，N 越大。对上述数列而言，$\epsilon > 0$ 越小，ϵ^{-1} 就越大。记 $[\epsilon^{-1}]$ 为 ϵ^{-1} 的整数部分，可以看出我们可以取 $N = [\epsilon^{-1}] + 1$;
3. 收敛数列可以出现以下情况，有无限多的数 $a_i = a^*$，或者所有的数 $a_i = a^*$。

也许由于历史的原因，我们有“无穷小”这个提法。一般而言，我们谈论一个数时是指给定的数。而无穷小则不是一个确定的数，而是一个变量，其绝对值可以取得任意小。与之相对应，我们也有“无穷大”，它可以取到任意大的数。

数列 $\{a_i\}$ 也可以把正负无穷大作为极限。即对于任意大 $K > 0$，存在自然数 $N(K)$ 使得 $a_i > K$ 对于所有 $i > N(K)$ 成立，或者 $a_i < -K$ 对于所有 $i > N(K)$ 成立。前者称为以无穷大为极限，后者称为以负无穷大为极限。我们用 $N(\epsilon)$ 和 $N(K)$ 表示这些自然数 N 分别依赖于 ϵ 与 K。

判定一数列是否收敛有时不是一件容易的事，有时需要比较高的计算技巧。但也有些数列的收敛性比较容易判断，例如单调有界数列。数列 $\{a_i\}$ 称为单调增，如果对于任意的下标 i 都有 $a_i \leq a_{i+1}$ 成立。如果关系 $a_i < a_{i+1}$ 对所有下标成立，我们称之为严格单调增。单调减（严格单调减）可以类似地加以定义。

定理: 单调增上有界数列必定收敛，单调减下有界数列亦然。

证明. 单调增上有界数列必有其上确界，设其为 a^*。因为是上确界，对于任意小的 $\epsilon > 0$，必定存在数列中的某个数，不妨记为 a_N 使得 $a^* - \epsilon < a_N \leq a^*$。由单调增性质，对于所有 $i \geq N$，必然有 $a^* - \epsilon < a_i \leq a^*$，即 $|a_i - a^*| < \epsilon$。 □

如果存在 $K > 0$，使得 $|a_i| < K$ 对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立，我们称该数列为有界数列。有界数列不收敛时会是什么情况？这些内容涉及到紧性这一有限维空间固有的性质，我们在下面会研究这个问题。

2.2 级数

考虑一个无穷数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$。令 $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$，我们得到一个数列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k \cdots\}$。如果数列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k \cdots\}$ 存在有限的极限 A_∞，我们则称级数 $\sum_{i=1}^\infty a_i$ 收敛于数 A_∞，记为

$$\sum_{i=1}^\infty a_i = A_\infty.$$

例如，由于等比数列的和 $\sum_{i=0}^k q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$，因而在 $|q| < 1$ 的情况下，以下级数收敛

$$\sum_{i=0}^\infty q^i = \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

如果级数 $\sum_{i=1}^\infty |a_i|$ 收敛，则级数 $\sum_{i=1}^\infty a_i$ 称为绝对收敛。对于等比数列而言，我们可以看出，该级数收敛当且仅当比率 q 的绝对值小于 1 时。如何判别一个级数是否绝对收敛并不一定总是容易的事，我们有

定理: 对于级数 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ 而言，如果存在常数 $c, \delta > 0$ 使得 $|a_k| \le c|k|^{-(1+\delta)}$ 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$ 成立，则该级数收敛。

证明. 如果下标 k 满足条件 $2^\ell < k \le 2^{\ell+1}$,我们根据条件可得估计 $|a_k| \le c2^{-\ell(1+\delta)}$。注意到 $2^{\ell+1} - 2^\ell = 2^\ell$，我们得到

$$\sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} |a_k| \le \frac{c2^\ell}{2^{\ell(1+\delta)}} = \frac{c}{2^{\ell\delta}}$$

右边是等比级数的第 ℓ 项，比率 $2^{-\delta} < 1$。因为 $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{\ell=1}^\infty \sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} a_k$，所以收敛性得证。 □

显然存在级数收敛而不绝对收敛。例如，应用上述定理我们容易证明数列

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)}$$

收敛。注意到 $\sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} > 2^\ell \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2}$，我们立即得到 $\sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} > 1 + \frac{\ell}{2}$。因而该级数没有绝对收敛性。

对于无穷数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$，其有限乘积 $A_k = \prod_{i=1}^k a_i$ 也构成一数列。如果数列 A_k 收敛于 A_∞，我们记为 $\prod_{i=1}^\infty a_i = A_\infty$。后面我们还将较详细地研究级数，此处不再赘述。

自然对数的底定义为 $e = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$，其中记 $0! = 1$。容易看出，这个级数以很快的速度收敛。后续学习中读者会发现，$e = 2.718\cdots$ 是和圆周率 π 一样频繁出现的基本常数。实际上，我们还有表达式

$$e = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n. \tag{2.1}$$

首先我们证明上述的极限存在。记 $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$，我们首先证明该数列单调递增。事实上，

$$\begin{aligned}\frac{e_{n-1}}{e_n} =& \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{n^{2n-1}}{(n-1)^{n-1}(n+1)^n} = \frac{n^{2n-1}(n-1)}{(n^2-1)^n} \\ =& \frac{1}{(1-\frac{1}{n^2})^n} \frac{n-1}{n} \le \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \frac{n-1}{n} = 1\end{aligned}$$

其中不等号我们应用了 Bernoulli 不等式。所以 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 是一个单调递增上有界数列。作为第二步，根据牛顿二项式展开公式我们有

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n =& 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ =& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-1}{n}\Big) \\ <& 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n < 3.\end{aligned}$$

因此，e_n 是一个单调递增上有界数列，因而收敛。我们通过计算验证(2.1)的极限确实就是上面的级数表示。事实上，从上面的展开式可以看出，对于所有 $n = 1, 2, \cdot$，我们都有 $e_n < s_n$。另一方面，从上述展开式也可以看出，对于任意固定的 k，当 $n \geq k$ 时，舍去上述展开式的后 $n-k$ 项，每一项都是非负数，我们有

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < e_n,$$

而当 $n \to \infty$ 时，上述不等式左端趋于 s_k，而右端趋于 e。于是有关系 $e_n < s_n \leq e$，证明完毕。

2.3 区间套性质

给定实数 $-\infty < a < b < \infty$，我们用 $[a, b]$ 由所有不大于 b、不小于 a 的实数构成的集合。在数轴上表现为一个闭区间。我们将在极限理论讲完以后来定义开集，闭集等概念。给定两个有界数列 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$，满足以下条件：

1. 数列 $\{a_i\}$ 单调增而数列 $\{b_i\}$ 单调减，即对所有下标 i 都有 $a_{i+1} \geq a_i$ 而 $b_{i+1} < b_i$ 成立；
2. 关系 $a_i < b_j$ 对所有的 $i, j \in \mathbb{N}$ 成立。

由这样的两个数列，我们就得到一些列闭区间 $I_i = [a_i, b_i]$。它们逐层嵌套，就如俄罗斯套娃那样。用数学符号 $I_{i+1} \subseteq I_i$ 或者 $I_i \supseteq I_{i+1}$ 表示，意思是集合 I_{i+1} 中任何一个元素都在集合 I_i 中，反之未必。

定理：对于区间套 $I_1 = [a_1, b_1] \supseteq I_2 = [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq I_k = [a_k, b_k] \supseteq \cdots$，如果区间长度趋于零，则在数轴上存在唯一、且属于所有闭区间的点。

证明. 这一系列的区间 $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ 定义了两个数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 和 $\{b_1, b_2, \cdots\}$。由区间套的定义可知，$\{a_1, a_2, \cdots\}$ 是单调增的上有界数列，而 $\{b_1, b_2, \cdots\}$ 是单调减的下有界数列。所以存在极限 $a_i \uparrow a^*$ 与 $b_i \downarrow b^*$。容易证明，$a^* \leq b^*$。因为 $a^* > b^*$ 意味着 $a_k > b_\ell$ 对于足够大的 k, ℓ 成立，这与区间套性质矛盾。而 $a^* < b^*$ 则意味着区间长度不收敛为零。所以我们有 $a^* = b^*$。由于 $a_i \leq a^* = b^* \leq b_i$, 所以 a^* 属于所有的区间。 □

如果去除闭区间这个条件，情况会怎么样？例如 $I_k = (a_k, b_k)$，即区间不包括两个端点，这对应着开区间套。如果 $\{a_i\}$ 是严格单调增数列，$\{b_i\}$ 是严格单调减数列，这时仍然有一点属于所有的区间；而如果 a_i 从某个下标开始不再增加，或者 b_i 从某个下标开始不再减小，则不存在任何点属于所有的区间！

2.4 Cauchy 数列

数列 $\{a_i\}$ 如果收敛到一个有限的实数 a^*，则对于任意小的 $\epsilon > 0$ 存在自然数 $N = N(\epsilon)$，使得

$$|a_i - a_j| < \epsilon, \qquad \forall\, i, j > N. \tag{2.2}$$

满足这一条件的数列称为 **Cauchy 序列**。事实上，由收敛性我们知道对于任意 $\epsilon > 0$，存在自然数 N_1，只要 $i, j > N_1$ 成立，我们就有 $|a_i - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$ 和 $|a_j - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$。于是由三角不等式可得

$$|a_i - a_j| \leq |a_i - a^*| + |a_j - a^*| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

反过来，如果一个数列是 Cauchy 序列，人们自然会问这个 Cauchy 序列收敛到一个实数吗？在有理数域，这个问题的答案是否定的。例如，我们取

$$a_1 = \frac{1}{1+1}, \quad a_2 = \frac{1}{1+a_1}, \quad \cdots, \quad a_{k+1} = \frac{1}{1+a_k},$$

这显然是 Cauchy 序列，每一个数都是有理数。如果极限存在，记为 a，则有

$$a = \frac{1}{1+a}.$$

于是我们得到方程 $a^2 + a - 1 = 0$。由求根公式，再利用 $a > 0$ 的性质，我们得到 $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$，所谓黄金分割数，这是无理数。因而在有理数范围内不存在极限。

定理：实数域的 Cauchy 数列 $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ 一定存在极限。

证明. 取正数 $\epsilon_0 > 0$。由定义，存在下标 $N = N(\epsilon_0)$ 使得 $|a_N - a_k| < \epsilon_0$ 对于所有的 $k > N$ 成立。由于 N 是有限数，存在 $d > \epsilon_0$，使得 $|a_N - a_i| < d$ 对于所有的 $i \in \mathbb{N}$ 成立。令 $I_1 = [a_N - d, a_N + d]$，以上事实说明数列 $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ 全部落在区间 I_1 之内。

我们考虑数列 $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ 包含无穷多不同的数这一情况，否则收敛性显然。将 I_1 等分为两个子区间。由数列的无穷性，至少其中一个子区间含有该数列中的无穷多元素，记为 I_2。（有可能两个子区间内都存在无穷多点，为什么？）将 I_2 再等分为两个子区间，同理，至少有一个子区间含有该数列中的无穷多元素，记为 I_3。如此反复操作，我们就得到一个闭区间套 $\{I_k\}$，区间 I_k 的长度 $|I_k| \le 2^{-k}d \to 0$。

应用闭区间套定理，我们可知存在唯一的数，记为 a^*，属于所有取得的逐次嵌套的闭区间。这个数 a^* 就是该 Cauchy 数列的极限。事实上，对于 $\epsilon > 0$，我们取 $N = \max\{\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{\epsilon}, N(\epsilon)\}$，其中 $N(\epsilon)$ 是(2.2)式确定的数。于是在区间 I_N 中存在点 a_i 满足两个条件，第一，$|a_i - a^*| < \frac{1}{2}\epsilon$，第二，其下标 $i > N(\epsilon)$。于是对于任何下标 $j > N(\epsilon)$ 的数 a_j，我们有

$$|a_j - a^*| \le |a_i - a^*| + |a_j - a_i| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

这里用到了上一章证明的三角不等式。 □

相比于极限定义本身，利用 Cauchy 判别准则证明极限存在的优势在于不需要事先知道极限的值。例如考虑级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

用 Cauchy 收敛准则就可以判定其收敛性，而不必事先知道极限是多少。若记前 m 项的和为 S_m，则对任意 $n < m$ 我们有

$$S_m - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

如果 n 是偶数，则有

$$S_m - S_n = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

如果 m 是奇数，上式中有 $(m-n-1)/2$ 个括号里的数，每一项都为正。如果 m 也是偶数，最后一项 $\frac{1}{n+1}$ 也为负。由此可得 $S_m - S_n < \frac{1}{n+1}$。同时我们又可以把两个部分和之差写成

$$S_m - S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

这时我们可以看出后面括号里的数都为正，如果最后剩余一项是 $\frac{(-1)^{m+1}}{m}$，则 m 必为偶数，因而也为正。所以无论 m 怎样取值，我们总有

$$\frac{1}{n(n+1)} < |S_m - S_n| < \frac{1}{n}.$$

对于 n 是奇数的情况可以类似地估计。所以，对于任意 $\epsilon > 0$，我们只需取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，就验证了 Cauchy 收敛准则，于是证明了这个级数的收敛性。

Cauchy 序列一定具有极限这一现象反映了我们研究空间的完备性。这种完备性是分析理论成立的基石之一。例如，当我们研究（微分）方程某一种解的存在性时，往往通过取极限形式来达到目的，这样做的基础就是这种空间必须完备。当然，这种空间远不是我们数学分析课程里遇到的有限维空间。我们在这里指出这件事是想说明，这些性质是有限维空间特有的基本性质。不可在任何情况下想当然都存在。

2.5 上极限、下极限与聚点

我们知道上有界数列 $\{a_k\}$ 具有上确界。在证明存在性时，我们发现有两种情况。一是数列 $\{a_k\}$ 中不存在最大元素，二是数列 $\{a_k\}$ 中存在最大元素。在第一种情况下，存在子列 $\{a_{k_i}\}$ 使得 $\lim_{k_i \to \infty} = \sup_k a_k$。第二种情况还可以再分为两种情况，即最大元素被取到有限次，或是无限次。

于是人们自然会问，是否可以通过去除数列有限项而使得上确界降低？或者换句话说，数列的本性上确界是什么？这就有了上极限的概念。

定义：上有界数列 $\{a_k\}$ 的上极限，记为 $\limsup_{k\to\infty} a_k$，是满足以下条件的一个数，

1. 任给 $\epsilon > 0$，数列 $\{a_k\}$ 中只存在有限多元素大于 $\limsup_{k\to\infty} a_k + \epsilon$；
2. 任给 $\epsilon > 0$，数列 $\{a_k\}$ 中具有无穷多元素大于 $\limsup_{k\to\infty} a_k - \epsilon$。

可以类似地定义下有界数列 $\{a_k\}$ 的下极限，记为 $\liminf_{k\to\infty} a_k$。

我们以另一个方式考虑数列 $\{a_k\}$ 的本性上、下界。令 $\alpha_m = \inf_{k\geq m} a_k$ 和 $\beta_m = \sup_{k\geq m} a_k$，这样我们得到两个数列 $\{\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_m\}$，前者单调增上有界而后者单调减下有界，于是这两个数列都收敛。记 $\alpha^* = \lim_{m\to\infty} \alpha_m$，$\beta^* = \lim_{m\to\infty} \beta_m$，于是我们有 $\alpha^* = \liminf_{k\to\infty} a_k$ 和 $\beta^* = \limsup_{k\to\infty} b_k$。

显然，数列收敛到有限数当且仅当该数列的上、下极限相同。当上、下极限不相同时，该数列中存在至少两个收敛的子数列，分别以原数列的上、下极限为其极限。实际上，有时数列中还可以有其它子序列以介于上、下极限之间的某个值为其极限。这就导致聚点的概念。

定义：有限数 c 称为数列 $\{a_k\}$ 的聚点 (Cluster point)，如果对于任意小的 $\epsilon > 0$，区间 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 中含有该数列中无穷多项。

例子：设数列 $\{a_i\}$ 对所有下标 $i \in \mathbb{N}$ 都满足条件 $0 \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j$，则数列 $\{a_i/i\}$ 收敛。

证明. 任意固定 $0 \neq k \in \mathbb{N}$，则所有不小于 k 的下标 i 都可以表示成

$$i = mk + \ell, \qquad \ell = 0, 1, \cdots, k-1.$$

所以，由条件可得

$$\begin{aligned}\frac{a_i}{i} &\leq \frac{a_{mk} + a_\ell}{i} \leq \frac{ma_k + a_\ell}{i} \\ &= \frac{ma_k}{i} + \frac{a_\ell}{i} = \frac{a_k}{k + \ell/m} + \frac{a_\ell}{i}.\end{aligned}$$

因为 k 固定，所以当 $i \to \infty$ 时有 $m \to \infty$。因此有

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{a_i}{i} \leq \frac{a_k}{k}.$$

既然上式对于任意 k 成立，我们就有

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{a_i}{i} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}.$$

容易看出 $0 \leq \frac{a_i}{i} \leq a_1$，即 $\liminf_i \frac{a_i}{i}$ 存在。 □

作为上下极限概念的应用，我们来证明以下结论：设 $\{b_k\}$ 是严格递增且趋于无穷大的数列。在条件

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} = A$$

(A 可以是有限数，也可以是 $\pm\infty$) 下，我们有 $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A$（Stolz 定理）。

证明. 我们先证明一个显而易见的不等式。设分数 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 的分母都大于零，则分数 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 介于这些分数的最大值与最小值之间。这可以用数学归纳法证明。为此我们只需要验证 $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ 介于两个分数 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ 之间，这通过直接计算他们的差即可。

我们先完成在 A 为有限数这一条件下的证明。由条件可知，对于任意的 $\epsilon > 0$ 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有的 $k \geq k_0$ 都有

$$A - \epsilon < \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} < A + \epsilon.$$

换句话说，这些数 $\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}}$ 都落在了小区间 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 之内。应用我们刚刚证明的不等式就有

$$A - \epsilon < \frac{a_k - a_{k_0-1}}{b_k - b_{k_0-1}} < A + \epsilon,$$

于是可得

$$(A-\epsilon)\Big(1 - \frac{b_{k_0-1}}{b_k}\Big) + \frac{a_{k_0-1}}{b_k} < \frac{a_k}{b_k} < (A+\epsilon)\Big(1 - \frac{b_{k_0-1}}{b_k}\Big) + \frac{a_{k_0-1}}{b_k}.$$

由于 $b_k \to \infty$，我们有

$$A-\epsilon \le \liminf_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} \le \limsup_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} \le A+\epsilon.$$

由于 $\epsilon>0$ 可以任意小，因此有 $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=A$。

如果 $A=\infty$，就有 $a_k-a_{k-1}>b_k-b_{k-1}>0$。因此，从适当大的下标开始，$a_k$ 也是严格单调增的数列，并且有

$$\frac{b_k-b_{k-1}}{a_k-a_{k-1}} \to 0.$$

应用上面刚证明的结论，立即可得 $\frac{b_k}{a_k}\to 0$，即 $\frac{a_k}{b_k}\to\infty$。如果 $A=-\infty$，令 $c_k=-a_k$ 即可。 □

作为应用例子，Stolz 定理可以方便地证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

为此，我们令 $a_n=\sum_{i=1}^n i^k$ 和 $b_n=n^{k+1}$。于是有 $b_n-b_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

没有统一有效的判别数列是否收敛的方法。我们现再证明一种常见的极限收敛判别方式，基本思想就是控制收敛。

命题：如果有三个数列 $\{a_n\}$、$\{x_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件：

1. 对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有关系 $a_n\le x_n\le b_n$，
2. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$，

那么数列 $\{x_n\}$ 收敛，并且满足关系 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}b_n$。

证明. 因为 $x_n\le b_n$ 对于所有 n 成立，于是有 $\limsup_{n\to\infty}x_n\le\limsup_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_n$。同理，因为 $a_n\le x_n$ 对于所有 n 成立，于是有 $\lim_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n\le\liminf_{n\to\infty}x_n$。这两个不等式意味着 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并且等于 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$。 □

推论：设 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 与 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 均为正项级数。如果 $a_n\le b_n$ 对于所有 n 成立，级数 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 也收敛，其极限不大于级数 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 的极限。再有，如果级数 $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 也收敛。

2.6 有限维 (欧几里得) 空间中点列的极限

将数和直线（一维欧氏空间）的点视为一回事，我们自然地就会将向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 视为 n-维欧氏空间中的一个点。这正是笛卡尔的观点。以我们通常的习惯可以定义两个点（向量）之间的距离，即欧几里得距离。如果两个点 p,p' 具有坐标表示 $p=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $p'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$，二者之间的欧几里得距离定义为

$$d(p,p')=\|p-p'\|=\Big(\sum_{i=1}^n(x_i-x'_i)^2\Big)^{\frac12}. \tag{2.3}$$

而我们默认 $\|p\|=\|p-(0,\cdots,0)\|$，它描述了点 p 到原点的距离，实际上运用了勾股定理。这里我们用了符号 $d(p,p')$ 来表示距离，而 $\|p\|$ 也称为向量的模。容易验证，(2.3)定义的距离满足下面将要给出的一般性距离定义。对称性和非退化性显而易见，我们只需要验证三角不等式。

$$\begin{aligned}\sum(x_i-x'_i)^2 &=\sum(x_i-x''_i+x''_i-x'_i)^2\\ &=\sum(x_i-x''_i)^2+\sum(x''_i-x'_i)^2+2\sum(x_i-x''_i)(x''_i-x'_i)\\ &\le\sum(x_i-x''_i)^2+\sum(x''_i-x'_i)^2+2\Big(\sum(x_i-x''_i)^2\sum(x''_i-x'_i)^2\Big)^{\frac12}\\ &=\Big(\Big(\sum(x_i-x''_i)^2\Big)^{\frac12}+\Big(\sum(x''_i-x'_i)^2\Big)^{\frac12}\Big)^2\end{aligned}$$

其中的不等式是运用了 Cauchy-Schwarz 不等式，由此得证三角不等式。

定义：$d(\cdot,\cdot)$ 称为空间 $\mathbb{R}^n$ 上的距离，如果它满足以下条件：

1. 三角不等式，两边长之和不小于第三边长：$d(p,p') \le d(p,p'') + d(p'',p')$;
2. 对称性：$d(p,p') = d(p',p)$;
3. 非退化性：$d(p,p') \ge 0$，等号成立条件是当且仅当 $p = p'$。

如果仅仅要求满足以上三个条件，在欧氏空间中可以定义许多种距离，它们彼此等价。我们称两个距离 d, d' 等价，如果存在常数 $K, K' > 0$ 使得

$$Kd(p,p') \le d'(p,p') \le K'd(p,p'), \qquad \forall\, p,p' \in \mathbb{R}^n.$$

习题：定义 $d'(p,p') = \max\{|x_i - x_i'| : i = 1,2,\cdots,n\}$，如果 $p = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $p' = (x_1',x_2',\cdots,x_n')$。证明 d' 是 n-维欧几里得空间上的距离。

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的无穷点列 $\{p_i, i = 1,2,\cdots\}$，每个点的坐标表示为 $p_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,n})$。点列里的元素不一定都不同，可以相同。如果存在实数 $N > 0$ 使得 $\|p_k\| \le N$ 对所有的 $k = 1,2,\cdots$ 成立，我们称该点列为有界点列。否则称之为无界点列。

定义（点列的极限）：向量 $p^* \in \mathbb{R}^n$ 称为点列 $\{p_k\}$ 的极限，如果对于任意小的 $\epsilon > 0$，都存在正整数 $K > 0$ 使得对于所有的 $k \ge K$ 都有

$$\|p_k - p^*\| < \epsilon.$$

如果该点列的极限存在，我们称该点列收敛，记 $p^* = \lim_{k\to\infty} p_k$。

点列 $\{p_i\}$ 如果收敛到一个点 $p^* \in \mathbb{R}^n$，则对于任意小的 $\epsilon > 0$ 存在自然数 $K = K(\epsilon)$，使得

$$\|p_i - p_j\| < \epsilon, \qquad \forall\, i,j > K. \tag{2.4}$$

我们称满足这一条件的点列为 **Cauchy 序列**。与数列情况类似，$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列一定收敛于空间中的某一点。

2.7 $\mathbb{R}^n$ 中的开集与闭集

在此，我们不打算按照点集拓扑学的方式来给出不依赖于度量的关于开集、闭集的定义，这些在后续课程中将会出现。我们以由(2.3)确定的距离（度量）来定义 $\mathbb{R}^n$ 中的开集与闭集。我们用

$$B_\delta(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \delta\}$$

表示以点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 为球心，$\delta > 0$ 为半径的 n-维（开）球，不含球面 $S_\delta(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| = \delta\}$。

定义：集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 称为开集，如果对于任意点 $x \in U$ 都存在 $\delta = \delta(p) > 0$ 使得 $B_\delta(x) \subset U$。集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ 称为闭集，如果对于 V 中的任意一收敛点列 $\{x_i \in V\}$，都有 $\lim_{i\to\infty} x_i \in V$。

现在介绍集合的一些运算。给定两个集合 S_1, S_2，我们用 $S_1 \cup S_2$ 表示两个集合的并：$x \in S_1 \cup S_2$ 当且仅当 x 属于 S_1 和 S_2 中的至少一个集合。用 $S_1 \cap S_2$ 表示两个集合的交：$x \in S_1 \cap S_2$ 当且仅当 x 同时属于 S_1 和 S_2。对于任意多个集合 $S_1, S_2, \cdots$，定义可以类似地给出：

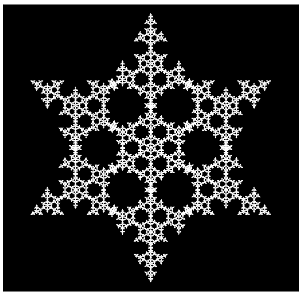
1. $\bigcup_i S_i$ 表示这些集合的并：$x \in \cup_i S_i$ 当且仅当 x 属于 $S_1, S_2, \cdots$ 中的至少一个集合；
2. $\bigcap_i S_i$ 表示这些集合的并：$x \in \cap_i S_i$ 当且仅当 x 同时属于所有这些集合。

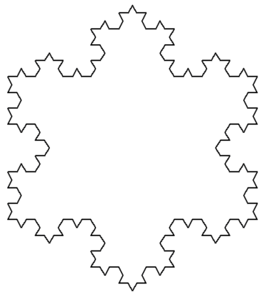
定理：任意多开集的并仍然是开集，任意多闭集的交仍然是闭集。

证明. 如果一个点 x 属于这些开集的并，则它至少属于其中某一个开集。根据定义，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $B_\epsilon(x)$ 也属于该开集，即 $B_\epsilon(x)$ 属于这些开集的并。为证明闭集的交仍然是闭集，我们考虑其交集中任意收敛的点列。根据交集的定义，这个点列中的每一个点都属于所以这些闭集。这意味着，这个点列属于每一个闭集。根据闭集的定义，这个点列的极限点属于该闭集，即属于所有的闭集。换句话说，交集中任意收敛点列一定收敛到交集中的点。 □

在一维直线上，开集是一些互不相交的开区间的并。闭集就是直线挖去互不相交的开区间。如果这些互不相交的开区间有无穷多，该闭集具有复杂的结构。例如 Cantor 三分集。在 $[0,1]$ 闭区间中首先挖去开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，然后在闭区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 分别挖去 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ 两个开区间，这个过程可以无限继续下去，每次在其中一个闭区间中挖去长度为其三分之一且居中的开区间。可以计算出这些挖去的区间总长度是 $\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}2^{k-1}=1$。换句话说，这个 Cantor 三分集的"总长度"为零。但这不能说明该集合的元素"很少"，例如像有理数一样"少"。如果用三进制表示 $[0,1]$ 区间中的点 $x=0.a_1,a_2,\cdots$，每个 a_i 的取值可能性是 $0,1,2$。Cantor 三分集中的点在三进制表示下，只是不能出现符号 1 而已。

在多维空间，集合的形状更是可以非常复杂。这里我们举一个分形的例子，雪花分形。具有所谓的自相似性，即把局部放大后，又得到原先的图像。物理学家的描述就是这种图像没有特征尺度。人的特征尺度是一米这个量级，把人的一厘米局部放大到一米后，得到截然不同的图像。分形几何的奠基人 Benoit B. Mandelbrot (1924-2010)





2.8 紧性

下面我们来考虑紧性，这也是有限维空间特有的基本性质，在无穷维空间中往往不存在。这也使得我们在无穷维空间种分析问题时需要一些具体的条件以便得到特殊但有用的情况下的紧性。为方便理解起见，我们首先考虑一维空间中的点列，即数列。

Bolzano-Weierstrass 定理：(Karl T.W. Weierstrass 1815-1897) 有界数列一定存在收敛子数列。

证明. 对于有界数列 $\{a_k\}$，我们只需要考虑数列取无穷多不同的值这一情况。如果该数列只取有限多个值，则必然至少有一个数被重复取无穷次。反复取此值的数列元素构成一子列，显然收敛。

设 $A<B$ 分别是该数列的下、上确界。记 $C=\frac{1}{2}(B-A)$，将区间 $[A,B]$ 等分为两部分 $[A,C]$ 和 $[C,B]$。两个闭区间中必至少有一个含有数列的无穷多点，不妨设 $[A,C]$ 中含有无穷多点。由于 B 是上确界，$[C,B]$ 中含有数列的点，任取一 a_{k_1}。我们考虑 $[A,C]$ 中所有下标大于 k_1 的 $\{a_k\}$ 的数，显然具有无穷多。记它们的上确界为 B_1，显然有 $B_1\leq C$。

对于区间 $[A,B_1]$，我们再将其等分为两部分 $=[A,C_1]$ 和 $[C_1,B_1]$，其中 $C_1=\frac{1}{2}(B_1-A)$。两个闭区间中必至少有一个含有数列的无穷多点，不妨设 $[C_1,B_1]$ 中含有无穷多点。由于 A 是下确界，$[A,C_1]$ 中含有数列的下标大于 k_1 的点，任取一 a_{k_2}。我们考虑 $[C_1,B_1]$ 中所有下标大于 k_2 的 $\{a_k\}$ 的数，显然具有无穷多。记它们的下确界为 A_1，显然有 $A_1\geq A$。

这样的过程可以无限次继续下去，得到一个闭区间套 $I_1=[A,B]\supsetneq I_2=[A,B_1]\supsetneq I_3\supsetneq\cdots$。在每一个区间 I_i 中都存在数列的一个点 a_{k_i}，不属于 I_{i+1}，下标满足 $k_i<k_{i+1}$。由闭区间套定理，存在唯一的点，记为 a^*，属于所有的闭区间。显然，它就是选出的子列的极限 $\lim_{k_i\to\infty}a_{k_i}=a^*$。 □

实际上，Bolzano-Weierstrass 定理对于任意有限维空间也成立，可以改述为：有界点列一定存在收敛子点列。

证明. 如果我们考虑该点列的第一个坐标分量，就得到一有界数列。应用 Bolzano-Weierstrass 定理可得，该点列一定存在一子列，其第一坐标分量收敛。接着，我们再考虑该子列的第二坐标分量，再次应用 Bolzano-Weierstrass 定理可得，我们又得到一子列。如此过程重复 n 次，我们就得到一子列，按照所有的坐标分量算，相应的数列都收敛。这意味着该子列收敛。 □

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 B。所谓有界是指存在 $K>0$ 使得该集合中任意一点的所有坐标分量的绝对值都不超过 K。再考虑一开集构成的集合 $\mathscr{U}=\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，其中 Λ 是一个指标集，可以有无穷

多元素。我们称开集的集合 $\mathscr{U}$ 覆盖闭闭集 B，是指对于任意 $x \in B$，至少存在一个开集 $U_\lambda \in \mathscr{U}$ 使得 $x \in U_\lambda$。

Heine-Borel 定理（有限开覆盖）：如果有界闭集为开集的集合 $\mathscr{U}$ 所覆盖，则该闭集一定 $\mathscr{U}$ 中有限个开集所覆盖。

证明. 简单起见，我们这里只对一维空间情况加以证明。对于任意有限维空间，情况类似。

我们用反证法。如果做不到有限覆盖，则存在无穷多开区间，记为 $\{U_i : i = 1, 2, \cdots\}$ 具有如下性质：对于每一个 U_i，都有 $x_i \in I \cap U_i$ 使得 $x_i \notin U_j$ 对于 $j \neq i$ 成立。事实上，如果任意 $x \in I \cap U_i$ 都位于某一个 U_j，则去除该开区间对于覆盖没有影响。这样我们就得到一个有界数列 $\{x_i\}$。根据 Bolzano-Weierstrass 定理，该数列存在收敛子列。由于该子列位于闭区间之内，所以极限点属于该闭区间，因而处于某个开区间 U_λ。由此可以看出，当下标 i 足够大时，$x_i \in U_\lambda$。这就与这些点分属于不同的覆盖开集矛盾。 □

到这里，我们已经证明了有界数列的上、下确界存在性定理、单调增上有界（单调减下有界）数列收敛性定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理以及 Heine-Borel 有限开覆盖定理。回顾其证明，我们可以看出这些定理都依赖于一条公理，即实数连续性公理，即实数集的戴德金分割（Dedekind principle）。

尽管 Heine-Borel 有限开覆盖定理对于任意有限维空间（有限维流形）成立，但是随着维数的增高，需要覆盖的开集个数亦随之增长。例如，令 $\mathscr{U}$ 由边长为 $1+\epsilon$ 的 n 维立方体构成，不包括边界。用这些立方体覆盖边长为 2 的 n 维立方体（包含边界）。容易计算，我们至少需要 2^n 这样的开集来覆盖。当 n 趋于无穷时，覆盖所需要的开集的个数亦趋于无穷。因此，我们有理由相信，这种紧性是有限维空间的特有性质。在无穷维空间中不一定存在。

Lebesgue 数：设 $K \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集，$\mathscr{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 K 的开覆盖。于是存在 $\delta > 0$(通常称为开覆盖 $\mathscr{U}$ 的 Lebesgue 数)，使得对任意 $x, y \in K$ 满足条件 $|x-y| < \delta$，都存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $[x, y] \cap K \subset U_\lambda$。

证明. 也用反证法。如若不然，对每一个 $\delta_k = \frac{1}{k}$，都存在 $x_k < y_k \in K$ 满足条件 $y_k - x_x \leq \frac{1}{k}$，但对于任意 $\lambda \in \Lambda$，U_λ 都不能完整覆盖 $[x_k, y_k] \cap K$。由于 K 有界，数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 都有界。通过选取子列，我们可以假设 $x_k \to x$ 和 $y_k \to y$。由 x_k, y_k 的选取有 $\lim k \to \infty |y_k - x_k| = 0$，这意味着 $x = y \in K$。

由于 $\mathscr{U}$ 是 K 的开覆盖，所以存在 $U_\lambda \in \mathscr{U}$。由于它是开集，存在开区间 $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U_\lambda$。因此，对于足够大的 K，一定有 $[x_K, y_K] \subset U_\lambda$，所以有 $[x_K, y_K] \cap K \subset U_\lambda$。矛盾。 □

给由 $\epsilon > 0$ 确定了有限开覆盖以后，Lebesgue 数是容易看出来的。记开覆盖是 $\mathscr{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$，其中 U_i 是开区间。如果 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$，则一定存在 $d_{i,j} > 0$ 使得 $U_i \cap U_j$ 包含长度为 $d_{i,j}$ 的开区间。考虑所有相交的开区间对 $U_i \cap U_j$，我们就得到不超过 $k(k-1)/2$ 个正数 $\{d_{i,j}, i, j \leq k\}$。实际上，如果我们取最少数量的开覆盖，就可以做到 $U_i \cap U_{i\pm 1}$ 非空，而当 $|i-j| \geq 2$ 时 $U_i \cap U_j$ 是空集。此时我们一共有 $d_{1,2}, d_{2,3}, \cdots, d_{k-1,k}$ 等 k 个正数。令 $d = \min\{d_{1,2}, d_{2,3}, \cdots, d_{k-1,k}\}$，这时的 Lebsgue 数不小于 $d/2$。读者可以自行验证。

容易看出，对于任意有限维空间 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的开覆盖，也有相应的 Lebesgue 数 $\delta > 0$。