南京大学数学系复变函数期中试卷(2017-2018)

2017/2018 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 复变函数

院系________班级__________ 学号________________姓名__________

考试时间 2018.05　　任课教师 张高飞　　考试成绩____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一. (15分) 假设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，$\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ 是紧集，并且

$$u(x+iy) = u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{y}{(x-s)^2+y^2}ds,$$

$$v(x+iy) = v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}ds.$$

证明 $g(z) = u(z) + iv(z)$ 解析，其中 $z = x + iy$。

二. (15分) 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} \quad (0 \leq |p| < 1)$$

三. (10分) 假设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数，并且 $f(z)$ 无零点，证明 $u(x,y) = \ln|f(z)| = \ln|f(x+iy)|$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数。

四. (15分) 假设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续，在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上解析，证明 f 在 $\mathbb{C}$ 上解析。

五. (15分) 证明 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数一定无穷次可微。

六. (15分) 假设级数 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数，对任意 $z\in\mathbb{C}$，有 $\lim_{n\to\infty} f(nz)=0$，则对任何 θ，$\lim\limits_{r\to\infty} f(re^{i\theta})=0$。

七. (15分) 假设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n$ 在每一点 $z_0\in\mathbb{C}$ 都有一个正的收敛半径，并且 $a_n(z_0)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续函数，证明存在 $\mathbb{C}$ 中的某个小圆盘 B_0 和其上的解析函数 $f(z)$，使得 $f^{(n)}(z_0)=n!a_n(z_0)$ 任意 $z_0\in B_0$。