

南京大学数学系复变函数期末补考试卷

2017/2018 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 复变函数
院系 班级 学号 姓名
考试时间 2018.9 任课教师 张高飞 考试成绩

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. (30分) 计算题。

1. (15分) 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta$$

2. (15分) 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1 + x^2} dx$$

其中 $m > 0$ 。

二. (15分) 将下面函数在指定圆环内展为洛朗级数。

$$\frac{z + 1}{z^2(z - 1)}, \quad 0 < |z| < 1.$$

三. (15分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，并且满足条件 $|f(z)| < 1$ ，如果单位圆内存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 ，使得

$$f(\xi_1) = \xi_1, \quad f(\xi_2) = \xi_2.$$

证明 $f(z) = z$, 对任意 z 属于单位圆。

四. (15分) 试证方程

$$\sin z = 2z^4 - 7z + 1$$

在单位圆 $|z| < 1$ 内恰有一根。

五. (15分) 让 $G = \{z : |z| < 1, |z - 1| < 1\}$, 求一变换, 把 G 映到上半平面并且把原点映到原点。

六. (10分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 并且满足条件 $|f(z)| < 1$, 如果 ζ 属于单位圆, 那么

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{1 - \overline{f(\zeta)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta}z} \right|$$