南京大学数学系复变函数期末试卷 A 卷

2018/2019 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 复变函数

院系____________班级______________学号姓名________________________

考试时间 2019.06 任课教师张高飞考试成绩

题号	一	二	总分
得分			

一. 计算题（共 20 分，每题 10 分）

1. 计算 $\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^4}$，其中 $|a|\neq\rho$.

2. 求分式线性变换 $\omega=f(z)$,它将 $|z|<1$ 映为 $|\omega|<1$,且使得 $f(1/2)=\frac{i}{2}, f'(1/2)>0.$

二. 证明题（共 80 分，前五题每题 10 分，后两题每题 15 分）

1. 将函数 $\int_0^z e^{z^2}dz$ 展成 z 的幂级数，并指出展式成立的范围。.

2. 已知 $u(x,y)=x^2-y^2$，求 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在复平面上解析。

3. 若 $f(z)$ 在整个复平面内解析，并设 $z\to\infty$ 时 $z^{-1}\operatorname{Re}f(z)\to 0$，则 $f(z)$ 是一个常数。

4. 任给 $z,w\in\mathbf{D}$，定义 $\rho(z,w)=\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$。证明：若 $f:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ 为一个全纯函数，则任给 $z,w\in\mathbf{D}$，均成立 $\rho(f(z),f(w))\le\rho(z,w)$；进一步，若 f 是 $\mathbf{D}$ 上的一个自同构，则任给 $z,w\in\mathbf{D}$，均成立 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$。

5. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明 $f(z)$ 在 D 内为常数的充要条件是 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

6. 设 $f:\mathbf{D}\to C$ 是解析函数，$f(0)=0$，并且 $\forall z\in\mathbf{D},\operatorname{Re}f(z)\le A.$，其中 $\mathbf{D}=\{z\,||z|<1\}$，A 是一个正的常数，那么 $\forall r\in(0,1), M(r)\le\frac{2Ar}{1-r}$，其中 $M(r)=\max_{|z=r|}\{|f(z)|\}$。

7. 设函数 f 及 φ 在区域 D 内解析，而且 φ 在 D 内有界无零点。如果正数 M 及 $\partial_\infty D=A\bigcup B$ 满足下列条件：

(1) $\forall a\in A,\overline{\lim_{z\to a}}|f(z)|\le M.$

(2) $\forall b\in B,\forall\eta>0,\overline{\lim_{z\to b}}|f(z)||\varphi(z)|^\eta\le M.$

那么 $\forall z\in D,|f(z)|\le M.$