南京大学数学系试卷（B）----答案

考试科目 复变函数　　任课教师 张高飞　　考试时间 2017.7.8

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得　分										

1. (10 分) 已知欧拉常数 $\gamma=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n\right)$.

解：记 $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n, T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\log n$

则 $\gamma=2\lim_{n\to\infty}T_n$ .... (2 分)

$$S_n+T_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log n$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log 2n+\log 2$$
.... (6 分)

则 $\lim_{n\to\infty}\left(S_n+T_n\right)=\gamma+\log 2$ .... (8 分)

故 $\lim_{n\to\infty}S_n=\gamma+\log 2-\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}+\log 2$ .... (10 分)

2. (10 分) 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\le R$ 上解析，如果存在 $a>0$，使当 $|z|=R$ 时 $|f(z)|>a$，而且 $|f(0)|<a$，证明：在圆 $|z|<R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点。

证明：假设没有零点，则 $g(z)=1/f(z)$ 在闭圆上解析 .... (2 分)

当 $|z|=R$ 时 $|g(z)|<\frac{1}{a}$，而 $|g(0)|>\frac{1}{a}$， .... (6 分)

与最大模定理矛盾，故至少有一个零点。 .... (10 分)

3. (10 分) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ 。

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx$ .... (2 分)

记 Γ 为半径为 R 的上半圆周 C 和 x 轴上的线段 $[-R,R]$ 所围成的闭合曲线，方向逆时针，

则 $\int_\Gamma \frac{ze^{iz}}{1+z^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left(f(z)\right) = \frac{\pi i}{e}$ .... (4 分)

而 $\int_\Gamma \frac{ze^{iz}}{1+z^2}dz = \int_C \frac{ze^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx$ .... (6 分)

$\left|\int_C \frac{ze^{iz}}{1+z^2}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}e^{i(Re^{i\theta})}}{1+(Re^{i\theta})^2}Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{R^2e^{-R\sin\theta}}{R^2-1}d\theta \to 0, R\to\infty$ .... (8 分)

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$ .... (10 分)

4. (10 分) 将函数 $\int_0^z e^{z^2}dz$ 展成 z 的幂级数，并指出展式成立的范围。

解：已知 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在复平面内成立， .... (2 分)

故 $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$ .... (4 分)

由于上面的级数绝对收敛，故 $\int_0^z e^{z^2}dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z \frac{z^{2n}}{n!}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

.... (8 分)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)n!}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = 0$ 故 $R=\infty$，所以展式在复平面内均成立。 .... (10 分)

5. (10 分) 已知调和函数 $u = 2(x-1)y$，求调和函数 v 和解析函数 $f(z) = u + iv$，满足 $f(2) = -i$。

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x-1)$ .... (2 分)

故 u，v 满足柯西黎曼方程，即 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-1), \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y,$ .... (6 分)

则 $v = -(x-1)^2 + y^2 + c$ .... (8 分)

代入 $f(2) = -i$ 得 $c = 0,$ 故 $f(z) = 2(x-1)y + i\left(-(x-1)^2 + y^2\right)$ .... (10 分)

6. (10 分) 证明方程 $e^z - z = 0$ 在复平面内有无穷多个根。

证明：假设方程$e^z-z=0$在复平面内只有有限多个根，则$e^z-z=p(z)e^{Az+B}$，其中

$A\neq 0, p(z)$为次数大于等于1的多项式 .... (4分)

则 $p(z)=\dfrac{e^z-z}{e^{Az+B}}=O(e^{(1-A)z})$ ....（6分）

该式有意义当且仅当A=1 ....（8分）

则$e^z-z=e^z-p(z)e^{Az+B}=e^z\left(1-p(z)e^B\right)$,这是不可能的，故有无穷多个根。

..............（10分）

7. （10分）假设$F:\mathbf{H}\to\mathbf{C}$为一个全纯函数，满足$\left|F(z)\right|\leq 1$，且$\left|F(i)\right|=0$.证明

$$\left|F(z)\right|\leq\left|\frac{z-i}{z+i}\right|,\forall z\in\mathbf{H}.$$

证明：令$T(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$, 则$T:\mathbf{D}\to\mathbf{H}$ .... (2分)

则$F\circ T:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ .... (4分)

$F\left(T(0)\right)=F(i)=0$, 由施瓦茨引理，$\left|F\left(T(z)\right)\right|\leq|z|,\forall z\in\mathbf{D}$ .... (8分)

故$\left|F(z)\right|\leq\left|F\circ T\circ T^{-1}(z)\right|\leq|T^{-1}(z)|=|\dfrac{z-i}{z+i}|$ ....（10分）

8. （15分）证明从上半平面$\mathbf{H}$到单位圆盘$\mathbf{D}$的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\theta\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{H}.$$

证明：令$G(z)=i\dfrac{1-z}{1+z}$, 则$G:\mathbf{D}\to\mathbf{H}$。令$f:\mathbf{H}\to\mathbf{D}$ .... (4分)

则$f\circ G:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$，即$f\circ G=\lambda\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z},a\in\mathbf{D},|\lambda|=1$ .... (8分)

$$f(z)=\lambda\frac{G^{-1}(z)-a}{1-\overline{a}G^{-1}(z)}=\lambda\frac{\frac{i-z}{i+z}-a}{1-\overline{a}\frac{i-z}{i+z}}$$ .... (12分)

$$=\lambda\frac{1+a}{1+\overline{a}}\cdot\frac{z-\frac{1-a}{1+a}i}{z-\overline{\frac{1-a}{1+a}i}},\text{其中}\frac{1-a}{1+a}i\in\mathbf{H}$$ .... (15分)

9. （15分）任给$z,w\in\mathbf{D}$，定义$\rho(z,w)=\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$。证明：若$f:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$为一个全纯函数，

则任给 $z,w\in\mathbf{D}$，均成立 $\rho(f(z),f(w))\le\rho(z,w)$；进一步，若 f 是 $\mathbf{D}$ 上的一个自同构，则任给 $z,w\in\mathbf{D}$，均成立 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$。

证明：任给 $z,w\in\mathbf{D}$，令 $z'=\psi_w(z)=\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}$，则 $z=\psi_w^{-1}(z')$ ……………… (2 分)

考虑函数 $g(z')=\psi_{f(w)}\circ f\circ\psi_w^{-1}(z')$， ……………… (4 分)

则 $g:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ 是一个全纯映射， 且 $g(0)=\psi_{f(w)}\circ f(w)=0$

由施瓦茨引理得 $|g(z')|\le|z'|$ ……………… (8 分)

故 $\left|\psi_{f(w)}\circ f(z)\right|=\left|\dfrac{f(w)-f(z)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right|\le\left|\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|$，即 $\rho(f(z),f(w))\le\rho(z,w)$ ………… (10 分)

若 f 是 $\mathbf{D}$ 上的一个自同构，则 f^{-1} 也是 $\mathbf{D}$ 上的一个自同构，故

$$\rho(f^{-1}(f(z)),f^{-1}(f(w)))\le\rho(f(z),f(w))\text{，即 }\rho(z,w)\le\rho(f(z),f(w))$$

故 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$ ………… (15 分)