## 南京大学数学系复变函数期中试卷(2017-2018)

2017/2018 学年第二学期 考试形式\_闭卷\_ 课程名称\_ 复变函数 院系 学号 姓名 班级 考试时间 2018.05 任课教师 张高飞 考试成绩 题号 三 兀 总分 八 五. 六 七 九 得分

一. (15分) 假设 f 是  $\mathbb{R}$  上的连续函数,  $\overline{\{x:f(x)\neq 0\}}$  是紧集,并且

$$u(x+iy) = u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} ds,$$

$$v(x+iy) = v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

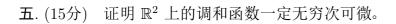
证明 g(z) = u(z) + iv(z) 解析, 其中 z = x + iy。

二. (15分) 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \quad (0 \le |p| < 1)$$

三. (10分) 假设 f(z) 是  $\mathbb{C}$  上的解析函数,并且 f(z) 无零点,证明  $u(x,y) = \ln |f(z)| = \ln |f(x+iy)|$  是  $\mathbb{R}^2$  上的调和函数。

四. (15分) 假设 f(z) 在  $\mathbb{C}$  上连续, 在  $\mathbb{C}\setminus\{0\}$  上解析, 证明 f 在  $\mathbb{C}$  上解析。



六. (15分) 假设级数 f(z) 是  $\mathbb C$  上的解析函数,对任意  $z\in\mathbb C$ ,有  $\lim_{n\to\infty}f(nz)=0$ ,则对任何  $\theta$ ,  $\lim_{r\to\infty}f(re^{i\theta})=0$ 。

七. (15分) 假设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n$  在每一点  $z_0 \in \mathbb{C}$  都有一个正的收敛半径,并且  $a_n(z_0)$  是  $\mathbb{C}$  上的连续函数,证明存在  $\mathbb{C}$  中的某个小圆盘  $B_0$  和其上的解析函数 f(z),使得  $f^{(n)}(z_0) = n! a_n(z_0)$  任意  $z_0 \in B_0$ 。

第四页(共四页)