南京大学数学系试卷（A）（答案）

姓名 ____________　　学号 ____________　　院系 ________________

考试科目 复变函数　　任课教师 张高飞　　考试时间 2015.7.2

题　号	一	二	总　分
得　分			

一、计算题（10×2=20 分）

1. 已知欧拉常数 $\gamma=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n\right)$.

解：记 $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n, T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\log n$，

由 γ 的定义可知 $2\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\gamma$ ....(2 分)

$$\begin{aligned}S_n+T_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log n,\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\log 2n+\log 2\end{aligned}$$ ....(6 分)

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\gamma+\log 2$ ....(8 分)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\gamma+\log 2-\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}+\log 2$ ....(10 分)

2. 写出函数 e^z-1 的 Hadamard 乘积.

解：　$\sigma(e^z-1)=1, z=i2n\pi(n\in Z)$ 为 e^z-1 的单重零点 ....(2 分)

设　$$\begin{aligned}e^z-1&=ze^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}E_1\left(\frac{z}{i2n\pi}\right)E_1\left(-\frac{z}{i2n\pi}\right)\\&=ze^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$ ....(6 分)

则　$\lim\limits_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to0}e^{Az+B}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)=e^B=1$，故 $B=0$ ....(8 分)

而　$e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}=ze^{\left(A-\frac{1}{2}\right)z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$ 为奇函数，故 $A=\frac{1}{2}$ ....(10 分)

故 $e^z-1=ze^{\frac{1}{2}z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2})$

二、证明题 （共 80 分）

1. （15 分）利用 Poisson 求和公式证明 $\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi a|n|}(a>0)$.

证：（1）证明 $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}e^{-2\pi i\xi x}dx=e^{-2\pi a|\xi|}$

ξ=0， $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty}=1$ ....(2 分)

$\xi>0$， 对函数 $f(z)=\frac{a}{a^2+z^2}e^{-2\pi i\xi z}$沿半径为$R$的下半封闭圆周做积分

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=\int_{\theta:-\pi\to 0}f(z)dz+\int_{R}^{-R}f(x)dx=2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=-ai}f(z)=-\pi e^{-2\pi\xi a}$$

..............(5 分)

$$|\int_{\theta:-\pi\to 0}f(z)dz|\le\int_0^{\pi}\frac{aR}{R^2-a^2}e^{-2\pi\xi R\sin\theta}d\theta\xrightarrow{R\to\infty}0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}e^{-2\pi i\xi x}dx=\pi e^{-2\pi\xi a}$$ ....(8 分)

同理对上半封闭圆周做积分可得 $\xi<0$ 时的等式。 ....(10 分)

（2）由 poisson 求和公式 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi a|n|}(a>0)$$ ....(15 分)

2. （10 分）若 f 为有穷级整函数，且取不到值 a 和 b （$a,b\in\mathbf{C}$, $a\ne b$），则 f 为常数.

证：设 f 为有穷级整函数，且取不到值 a 和 b，则 $f-a=e^{P(z)}$，其中 $P(z)$ 为次数大于等于 1 的多项式，否则 f 为常数； ....(4 分)

则 $f-b=a+e^{P(z)}-b=e^{P(z)}+a-b$， ....(8 分)

取 $P(z_0)=\log(b-a)$, 则 $f(z_0)-b=0$, 与 f 取不到值 b 矛盾，故 f 为常数。

..................(10 分)

3.（20 分）当 $\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0$ 时，定义 Beta 函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt$，证明

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

当 $x>0$ 时，定义 Bessel 函数 $J_\nu(x)=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(\nu>-1/2)$.证明

$$J_\nu(x)=(\frac{x}{2})^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(x^2/4\right)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

证：（1）$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-t-s}dtds$ ....(2 分)

令 $s=ur,t=u(1-r),\quad r\in(0,1),u\in(0,\infty),$ 则 $\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,r)}\right|=u$. ....(6 分)

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^\infty\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}drdu\\&=\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}du\\&=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

.................(10 分)

(2)
$$\begin{aligned}J_\nu(x)&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt\\&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1\sum_{n=0}^\infty\frac{(ixt)^n}{n!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt\end{aligned}$$

...................(2 分)

$$\begin{aligned}&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty\int_{-1}^1\frac{(ixt)^n}{n!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt\\&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\int_{-1}^1\frac{(ixt)^{2m}}{(2m)!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(n\text{为奇数积分为}0)\\&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty 2\int_0^1\frac{(-1)^m x^{2m}t^{2m}}{(2m)!}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt\end{aligned}$$

..................(4 分)

$$\begin{aligned}&\overset{u=t^2}{=}\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 u^{m-1/2}(1-u)^{\nu-(1/2)}du\\&=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}B(\nu+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})\end{aligned}$$

.................(6 分)

$$=(x/2)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{\sqrt{\pi}(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$=(x/2)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{\sqrt{\pi}(2m)!}\frac{\Gamma(1/2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

................(8 分)

$$\overset{\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}}{=}(x/2)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\frac{(2m-1)!!}{2^m\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$=(x/2)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^m\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

................(10 分)

4. （10 分）定义函数 $\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$，证明 $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x), x\to\infty$.

证：$\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}-\int_2^x td(\frac{1}{\log t})=\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^x\frac{1}{\log^2 t}dt$ ....(4 分)

$$\int_2^x\frac{dt}{\log^2 t}=(\int_2^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^x)\frac{dt}{\log^2 t}\le C_1\sqrt{x}+C_2(x-\sqrt{x})\frac{1}{\log^2\sqrt{x}}\le C\frac{x}{\log^2 x}$$ ....(8 分)

故 $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\sim\mathrm{Li}(x), x\to\infty$ ....(10 分)

5. （10 分）假设 $F:\mathbf{H}\to\mathbf{C}$ 为一个全纯函数，满足 $|F(z)|\le 1$，且 $|F(i)|=0$.证明

$$|F(z)|\le\left|\frac{z-i}{z+i}\right|,\forall z\in\mathbf{H}.$$

证：令 $T(z)=i\frac{1+z}{1-z}$,则 $T:\mathbf{D}\to\mathbf{H}$ ....(2 分)

故 $F\circ T:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ ....(4 分)

$F(T(0))=F(i)=0$，由施瓦茨引理，$|F(T(z))|\le|z|,\forall z\in\mathbf{D}$ ....(8 分)

故 $|F(z)|\le|F\circ T\circ T^{-1}(z)|\le|T^{-1}(z)|=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ ....(10 分)

6. （15 分）证明从上半平面 $\mathbf{H}$ 到单位圆盘 $\mathbf{D}$ 的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\theta\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{H}.$$

证： 令$G(z)=i\dfrac{1-z}{1+z}$,则$T:\mathbf{D}\to\mathbf{H}$，令$f:\mathbf{H}\to\mathbf{D}$ ....(4 分)

则 $f\circ G:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$，即 $f\circ G=\lambda\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z},a\in\mathbf{D},|\lambda|=1$ ....(8 分)

$$f(z)=\lambda\frac{G^{-1}(z)-a}{1-\overline{a}G^{-1}(z)}=\lambda\frac{\dfrac{i-z}{i+z}-a}{1-\overline{a}\dfrac{i-z}{i+z}}$$ ....(12 分)

$$=\lambda\frac{1+a}{1+\overline{a}}\cdot\frac{z-\dfrac{1-a}{1+a}i}{z-\overline{\dfrac{1-a}{1+a}}i}$$，其中$\dfrac{1-a}{1+a}i\in\mathbf{H}$ ....(15 分)