# 线性代数提要

CONTENTS



## 引言

代数学是起源于方程求解的数学分支. 线性代数着重运用集合映射的语言理解多元一次方程组及相关现象. 虽然只研究一次方程组, 但线性代数中的许多构造和思路是后续的代数教学的出发点, 同时群论、环论、模论等理论中也有丰富的来自线性代数的例子.

本文旨在对线性代数中的部分构造做补充和延申. 通常的线性代数课程一般无法对多重线性代数、张量积等内容详加探讨, 而这些内容在后续课程如微分几何、数学物理、表示论中会自然出现, 因此本文也对这些内容作初步的介绍.

因篇幅限制, 本文叙述较为简略. 请根据需要斟酌使用.

## 1. 域上的线性空间和线性映射

本文中的域指的是形如$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\cdots$的交换域. 域$F$上的加法和乘法运算分别记作$+$和$\cdot$; $a,b\in F$的乘积通常记作$ab$.

域$F$上的线性空间是定义了加法和$F$-数乘的集合. 在$F$上的线性空间$V$中可以谈论$F$-线性相关和$F$-线性无关的概念.

以下固定域$F$, 并且只考虑$F$上的线性空间. 对于集合$A,B$, 记$\mathrm{Map}(A,B)$为$A$到$B$的映射全体构成的集合. 若$V$是$F$上线性空间, 则记$0_V$为其中的零向量.

**例 1.1** (有限维列向量空间)**.** 对于自然数$n\in\mathbb{N}$, 记$F^n$为$F$自身的$n$重直积:

$$F^n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_1,\cdots,x_n\in F\}.$$

$F^n$作为线性空间的结构是熟知的:

- 加法由坐标分量的对应相加给出;
- 对于$a\in F$和$v=(x_1,\cdots,x_n)\in F^n$, 用$a$对$v$做数乘给出

$$a(x_1,\cdots,x_n)=(ax_1,\cdots,ax_n).$$

注意$n=0$时, 约定$F^n$是0一个元素构成的平凡加法群, 其上数乘也是平凡的.

$n>0$时, $F^n$中有标准基底 $(e_1,\cdots,e_n)$: 这是$n$个向量构成的有序向量组, 其中 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 只在第$i$个位置为1, 其余位置为0. 每个$v=(x_1,\cdots,x_n)$都满足

$$v=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$$

亦即$v$可表为$(e_1,\cdots,e_n)$的线性组合,且表法由$v$和$(e_1,\cdots,e_n)$唯一决定.

为方便涉及矩阵演算的讨论, 我们约定$F^n$中的元素是1列$n$行的列向量, 形如$(x_1,\cdots,x_n)^{\mathbf{t}}$ ($^{\mathbf{t}}$表示转置). 记$\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$为$m$行$n$列的矩阵全体, 则由矩阵乘法得到映射

$$\mathrm{Mat}_{k\times m}(F)\times\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)\to\mathrm{Mat}_{k\times n}(F),\ \mathrm{Mat}_{m\times n}\times F^n\to F^m$$

等等, 详见线性代数的常用教材.

**定义 1.2** (线性映射)**.** 给定线性空间$U,V$, $U$到$V$的线性映射就是满足线性条件的映射, 也就是$f\in\mathrm{Map}(U,V)$满足

$$f(c_1u_1+c_2u_2)=c_1f(u_1)+c_2f(u_2),\ \forall u_1,u_2\in U,\ c_1,c_2\in F.$$

$U$到$V$的线性映射全体记作$\mathrm{Hom}(U,V)$ (亦记作$\mathrm{Hom}_F(U,V)$若需指明$F$-线性的条件). 注意这本身也是$F$上的线性空间: 对于$f_1,f_2\in\mathrm{Hom}(U,V)$和$c_1,c_2\in F$, 线性组合$c_1f_1+c_2f_2$是如下映射:

$$u\in U\mapsto c_1f_1(u)+c_2f_2(u)\in V.$$

特别, 常值为$0_V$的映射是$\mathrm{Hom}(U,V)$中的零元.

注意对于线性空间$U,V,W$, 线性映射的复合(作为映射)仍是线性的:

$$\mathrm{Hom}(U,V)\times\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathrm{Hom}(U,W),\ (f,g)\mapsto g\circ f.$$

若有线性映射$f: U \to V$和$g: V \to U$满足 $f \circ g = \mathrm{id}_V$ 及 $g \circ f = \mathrm{id}_U$, 则称$U$和$V$作为线性空间同构.

当$V = F$时, $\mathrm{Hom}(U, F)$就是$U$上取值于$F$的线性函数全体, 常称之为$U$的对偶空间, 记为$U^\vee$.

**注记 1.3.** 当$U = V$时, 记$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$, 其中的映射称为$V$自身的线性变换, 也叫做$V$上的(线性)自同态. 记$\mathrm{GL}(V)$为$\mathrm{End}(V)$中的线性双射全体, 称它们为$V$的线性自同构.

结合群论和环论的知识可以证明:

- $\mathrm{End}(V)$在自然的加法和映射复合两种运算下构成一个环, 称为$V$的线性自同态环;
- $\mathrm{GL}(V)$在映射复合下构成一个群, 称为$V$的线性自同构群, 又称为$V$的一般线性群.

**定义 1.4** (基底和坐标)**.** (1) 给定$F$上的线性空间$V$. $V$的一个极大线性无关子集是满足如下条件的$V$中子集$B$:

- $B$中任何有限子集都是$V$中的线性无关向量组;
- $V$中任何严格包含$B$的子集都是线性相关的; 这也等价于$V$中任一元素都可表为$B$中有限多个元素的线性组合, 并且表示方法是唯一的.

(2) 为方便后面的讨论, 我们将$V$的基底定义成一族$V$中的元素$B = (e_\alpha : \alpha \in A)$: 此处$A$是一个集合(指标集), 而$(e_\alpha : \alpha \in A)$是$B$中被$A$标记的一族元素, 也可等价地由映射

$$e : A \to V,\ \alpha \mapsto e_\alpha$$

决定; 作为基底, 我们要求$\{e_\alpha : \alpha \in A\}$是$V$中极大线性无关子集. 特别这个基底的势(元素个数)指的是$A$的势(元素个数).

引入了指标集$A$和$e: A \to V$, 我们可以谈论$V$中向量关于基底$B = (e_\alpha : \alpha \in A)$的坐标: 任给非零向量$v \in V$, 由基底的定义, 我们知道$v$可表为 $v = x_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} e_{\alpha_n}$:

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是$A$中的非空有限子集;
- $x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}$为$F$中非零元素.

且上述$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$和$(x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n})$由$v$和$B$唯一决定. 我们可以定义一族系数$(c_\alpha : \alpha \in A)$: 这等价于一个映射 $x : A \to F, \alpha \mapsto x_\alpha$, 使得

- $x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}$由上面的线性组合等式决定;
- $\beta \in A$异于$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$时, $x_\beta$为0.

这样的$(x_\alpha : \alpha \in A)$称为$v$关于基底$(e_\alpha : \alpha \in A)$的坐标, 而等式$v = \sum_\alpha x_\alpha e_\alpha$称为$v$关于基底$(e_\alpha : \alpha \in A)$的线性展开.

对于$0 \in V$, 我们规定其坐标由

$$x_\alpha = 0,\ \forall \alpha \in A$$

给出. 这样我们就可以通过基底$(e_\alpha : \alpha \in A)$建立$V$和$\mathrm{Map}_c(A, F)$之间的双射. 此处$\mathrm{Map}_c(A, F)$是映射集合$\mathrm{Map}(A, F)$中满足如下条件的映射构成的子集: $c : A \to F$ 为映射, 且$c(\alpha) \neq 0$对至多有

限多个$\alpha$成立. $\mathrm{Map}_c(A,F)$到$V$的自然映射

$$x\mapsto\sum_\alpha x_\alpha e_\alpha$$

是双射, 其逆映射就是将$v$对应于$v$关于基底$(e_\alpha:\alpha\in A)$的线性展开.

注意$\mathrm{Map}_c(A,F)$上有自然的线性空间结构: 对于$x,y\in\mathrm{Map}_c(A,F)$和$a,b\in F$,

$$ax+by:\alpha\mapsto ax_\alpha+by_\alpha$$

是对应的线性组合. 上面的映射$\mathrm{Map}_c(A,F)\to V$是线性空间的同构.

**定义-命题 1.5.** 给定线性空间$V$, 则$V$有极大线性无关向量组, 因而有基底. $V$的不同基底彼此等势(元素个数相等), 其公共的势称为$V$的维数, 记作$\dim V$.

特别, 若$V$的极大线性无关组由$n$个向量$(v_1,\cdots,v_n)$构成($n\in\mathbb{N}_{>0}$), 则有$\dim V=n$. 此时映射

$$F^n\to V,\ (x_1,\cdots,x_n)^{\mathbf{t}}\mapsto\sum_i x_iv_i$$

是线性空间的同构.

命题的证明依赖于Zorn引理. 请参考Zorn引理的叙述自行完成.

**例 1.6** (对偶基底)**.** 取定$n\in\mathbb{N}_{>0}$. 给定$n$维线性空间$V$及其基底$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 我们定义如下的函数

$$\alpha_j^\vee:V\to F,\ \sum_i x_i\alpha_i\mapsto x_j\in F$$

$(j=1,\cdots,n)$. 容易验证$\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee$都是$V^\vee=\mathrm{Hom}(V,F)$中的元素, 它们线性无关, 并且每个$f\in V^\vee$都可表为

$$f=\sum_i f(\alpha_i)\alpha_i^\vee.$$

因而它们构成$V^\vee$的一个基底, 满足$\alpha_i^\vee(\alpha_j)=\delta_{ij}$ (Kronecker $\delta$符号), 称为$\alpha$的对偶基底. 特别地, $\dim V^\vee=\dim V$.

**例 1.7** (有限维矩阵)**.** 取定自然数$m,n>0$. 对线性空间$U=F^n$, 1.1给出了标准基底$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 类似地, $V=F^m$有标准基底$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$. 给定线性映射$\phi:U\to V$, 唯一的线性展开等式

$$\phi(\alpha_j)=\sum_{i=1,\cdots,m}m_{ij}\beta_i$$

给出了$m\times n$矩阵$M=(m_{i,j})$ ($i=1,\cdots,m$为行标, $j=1,\cdots,n$为列标), 并且这给出了映射

$$\mathrm{Hom}(U,V)\to\mathrm{Mat}_{m\times n}(F),\ \phi\mapsto(m_{ij}).$$

可以验证这是线性空间的双射. 特别, $\mathrm{Hom}(U,V)$有基底

$$\epsilon_{ij}:(x_1,\cdots,x_n)^{\mathbf{t}}\mapsto x_j\beta_i$$

对应于矩阵$E_{ij}\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ (只在第$i$行第$j$列为1, 其余位置为0).

容易验证 $\dim\mathrm{Hom}(U,V)=\dim U\cdot\dim V$.

**例 1.8** (伴随与转置). 给定线性空间之间的线性映射$f : U \to V$, 则对偶空间之间的映射

$$V^\vee \to U^\vee,\ \phi \mapsto \phi \circ f$$

是线性的, 称为$f$的伴随映射, 又称为$f$的对偶映射, 简记为$f^\vee$.

考虑$U, V$均为有限维线性空间, 取基底及对偶基底

$$U : \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n);\ V : \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m);\ U^\vee : \alpha^\vee = (\alpha_1^\vee, \cdots, \alpha_n^\vee);\ V^\vee : \beta^\vee = (\beta_1^\vee, \cdots, \beta_m^\vee).$$

此时若$f : U \to V$在$\alpha$和$\beta$下的矩阵表示是$M = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, 则$f^\vee : V^\vee \to U^\vee$在$\beta^\vee$和$\alpha^\vee$下的矩阵表示恰为$M$的转置$M^{\mathbf{t}} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(F)$.

**例 1.9** (基底变换). 给定$U = F^n$及其标准基底$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 可以证明$U$的每个基底都由$n$个线性无关向量构成. 如果$\alpha' = (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n)$是$U$的另一基底, 则线性展开

$$\alpha'_j = \sum_i \theta_{ij}\alpha_i$$

给出方阵$\Theta = (\theta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$, 满足以下性质: 若向量$u \in U$在上述两基底下的展开分别为

$$\sum_i x_i\alpha_i = x = \sum_i x'_i\alpha'_i$$

则有 $\Theta \cdot (x'_1, \cdots, x'_n)^{\mathbf{t}} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathbf{t}}$成立. 注意到$x$的两组坐标$(x_1, \cdots, x_n)^{\mathbf{t}}$和$(x'_1, \cdots, x'_n)^{\mathbf{t}}$彼此唯一决定, 故$\Theta$诱导的映射 $F^n \to F^n, x' \mapsto \Theta x'$必为线性同构, $\Theta$作为方阵必可逆.

反之, 若$\Theta = (\theta_{ij})$为$\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$中可逆方阵, 则从基底$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$出发, 用$\alpha'_j = \sum_i \theta_{ij}\alpha_i$定义出的$\alpha' = (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n)$也是$U$的基底. 容易证明$U$的每一个基底都可由唯一的可逆方阵$\Theta$通过上述方式从$\alpha$产生.

特别在$n \geq 2$时, 我们注意到$\alpha' = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \cdots, \alpha_n)$和$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$不是同一个基底: 若向量$u$在$\alpha$下的坐标向量为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则$u$在$\alpha'$下的坐标向量为$(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n)$. 因此我们强调$V$的基底是被某一集合标记的$V$的子集: 对于$n$维向量空间$U$, 我们用$\{1, \cdots, n\}$作为标记基底的指标集. 容易看出上面两个基底对应于从$\{1, \cdots, n\}$到$U$的两个不同映射, 而两者在$U$中的象集是相同的子集$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. 对于$n$维线性空间$U$, 我们固定$\{1, \cdots, n\}$为基底的指标集, 常把$U$中的基底视作$U$中$n$个(线性无关)向量构成的序列.

## 2. 子空间, 商空间, 正合列

**定义 2.1** (子空间)**.** 取定线性空间$V$.

(1) $V$的线性子空间指的是$V$中对加法结构和数乘结构封闭的子集, 也就是对线性组合封闭的子集$U \subset V$:

- 任取$u_1, u_2 \in U$, $a_1, a_2 \in F$, 则$V$中的线性组合$a_1u_1 + a_2u_2$仍在$U$中.

特别, $U$自身是线性空间, 且$0_U = 0_V$.

(2) 容易验证: 若$(V_\lambda : \lambda \in \Lambda)$是$V$中一族线性子空间, 则其交集$\bigcup_\lambda V_\lambda$也是$V$中的线性子空间.

特别, 给定$V$的子集$G$, 记$V$中包含$G$的线性子空间全体为$(V_\lambda)$, 则$U := \bigcap_\lambda V_\lambda$是$V$中包含$G$的最小的线性子空间: $U \in \{V_\lambda\}$且$U \subset V_\lambda$, $\forall\lambda$. 我们称$U$为$V$中由$G$生成的线性子空间, 记为$\mathrm{Span}(U)$.

(3) $\{0_V\}$是$V$中最小的线性子空间, 后面也简记成$0_V$.

与此相对, $V$本身是$V$中最大的线性子空间.

**引理 2.2.** *(1) 若$G$是线性空间$V$的子集, 则有集合等式*

$$\mathrm{Span}(G) = \{\sum_{g\in G} a_g g : (g \mapsto a_g) \in \mathrm{Map}_c(G, F)\}$$

*成立; 此处$(g \mapsto a_g) \in \mathrm{Map}_c(G, F)$表示$\sum$涉及的求和式中至多只有有限多个非零项.*

*(2) 若$(V_\lambda : \lambda \in \Lambda)$是$V$中被指标集$\Lambda$标记的一族线性子空间, 则有集合等式*

$$\mathrm{Span}(\bigcup_\lambda V_\lambda) = \{\sum_\lambda v_\lambda : (\lambda \mapsto v_\lambda) \in \mathrm{Map}_c(\Lambda, V), v_\lambda \in V_\lambda, \forall\lambda\}$$

*成立. 此处$\mathrm{Map}_c(\Lambda, V)$是集合$\mathrm{Map}(\Lambda, V)$的子集, 由满足$\{\lambda \in \Lambda : v(\lambda) \neq 0_V\}$至多有限的$v : \Lambda \to V$构成; 进一步要求$v_\lambda = v(\lambda) \in V_\lambda$就给出等式右边的集合.*

证明留作练习(注意(2)的思路与(1)类似). (2)中得到的线性子空间$\mathrm{Span}(\bigcup_\lambda V_\lambda)$通常记成$\sum_\lambda V_\lambda$, 称为$(V_\lambda : \lambda \in \Lambda)$这一族线性子空间的和空间.

**定义-命题 2.3** (核与象)**.** 给定线性空间$U, V$及其间的线性映射$f : U \to V$.

(1) 若$V'$是$V$中线性子空间, 则其原象$f^{-1}(V')$是$U$中线性子空间.

特别, 对于$V$中最小的线性子空间$0_V$, 其原象$f^{-1}(0_V)$称为线性映射$f$的核空间, 常记作$\mathrm{Ker}(f)$.

容易验证: 线性映射$f$是单射当且仅当$\mathrm{Ker}(f) = 0_U$.

(2) 若$U'$是$U$中线性子空间, 则其象$f(U') = \{f(u) : u \in U'\}$是$V$中线性子空间.

特别, 对于$U$中最大的线性子空间, 其象$f(U)$称为$f$的象, 记作$\mathrm{Im}(f)$.

**定义-命题 2.4** (商与余核)**.** (1) 给定线性空间$V$及其子空间$U$, 在$V$上定义二元关系如下:

$$\forall v_1, v_2 \in V,\ v_1 \sim v_2 \ \Leftrightarrow\ v_1 - v_2 \in U.$$

这是一个等价关系, 其商集

$$V/U := \{[v] : [v] = v + U = \{w \in V : w - v \in U\}\}$$

具有自然的线性空间结构:

$$c_1[v_1] + c_2[v_2] = [c_1 v_1 + c_2 v_2],\ \forall [v_1], [v_2] \in V/U,\ \forall c_1, c_2 \in F.$$

我们称自然映射

$$\pi : V \to V/U,\ v \mapsto [v] = v + U$$

为$V$到商空间$V/U$的自然投影映射. 注意这是线性空间之间的满射.

(2) 给定线性空间之间的线性映射$f : U \to V$, $V$关于子空间$f(U) = \mathrm{Im}(f)$的商空间称为$f$的余核:

$$\mathrm{Coker}(f) := V/f(U).$$

容易验证: 线性映射$f$是满射当且仅当$\mathrm{Coker}(f) = 0$.

上面涉及的证明都较容易, 不再赘述.

**命题 2.5** (同态的基本性质)**.** 给定线性空间之间的线性映射$f : U \to V$, 其核记为$K = \mathrm{Ker}(f)$, 其象记为$f(U) = \mathrm{Im}(f)$.

*(1)* $f$*诱导线性空间之间的线性同构*$U/K \simeq f(U) = \mathrm{Im}(f)$*. 与此类似, 对*$U$*中一般的线性子空间* $U'$*, 有线性同构*

$$U'/(U' \cap K) \simeq f(U') \simeq (U' + K)/K.$$

*(2)* $V' \subset f(U) \mapsto f^{-1}(V') \subset U$ *建立了*$A = \{f(U)$*的线性子空间*$\}$*与*$B = \{U$*中包含*$\mathrm{Ker}(f)$*的线性子空间*$\}$*之间的一一对应, 其逆映射恰为*$U' \mapsto f(U')$*, 且这个对应与包含关系相容.*

证明. (1) 同构$U/K \simeq f(U)$作为练习.

对于子空间$U' \subset U$, 易见$f$诱导的映射$U' \to f(U')$是满射, 而其核空间为

$$\{u \in U' : f(u) = 0, \text{i.e. } u \in \mathrm{Ker}(f)\} = U' \cap K.$$

因而$U'/(U \cap K) \simeq f(U')$.

另一方面, $U' + K$是$U$的线性子空间, 包含$K$. 直接计算可得

$$f(U' + K) = \{f(u + k) : u \in U', k \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{f(u) : u \in U'\} = f(U').$$

故$f$诱导满射$U' + K \to f(U')$, 其核为$(U' + K) \cap K = K$, 由此得到$(U' + K)/K \simeq f(U')$.

(2) 若$V' \in A$是$f(U)$的子空间, 则$f^{-1}(V)$是$U$的子空间, 且$0_V \in V'$给出$f^{-1}(V') \supset f^{-1}(0_V) = \mathrm{Ker}(f)$, 即$f^{-1}(V') \in B$. 反之, 若$U' \in B$是$U$中含$\mathrm{Ker}(f)$的子空间, 则$f(U')$是$f(U)$的子空间, 即$f(U') \in A$.

若有$U_1, U_2 \in B$, 且$f(U_1) = f(U_2)$, 则直接取元素验算可得$U_1 \subset U_2 + K = U_2$及$U_2 \subset U_1 + K = U_1$, 即$U_1 = U_2 \in B$, $B \to A$的自然映射是单射. 同时$A$中任何$V'$的原象都是$U$中包含$K = f^{-1}(0_V)$的子空间, 且$V' \subset f(U)$表明$f(f^{-1}(V')) = V'$, 故$B$到$A$的自然映射是满射. 可直接验证题设中的两个映射是互逆的. □

**命题 2.6** (映射分解性质). 取定线性空间之间的线性映射 $f : U \to V$. 记$K = \mathrm{Ker}(f)$到$V$的包含映射为$\iota$, $V$到$C = \mathrm{Coker}(f) = V/f(U)$的商空间投影映射为$\pi$.

*(1)* 任取线性空间$T$, 则$f : U \to V$诱导了如下同态空间之间的线性映射*:*

$$f_* : \mathrm{Hom}(T, U) \to \mathrm{Hom}(T, V), \phi \mapsto f \circ \phi.$$

若进一步有线性映射$g : V \to W$, 则$g_* : \mathrm{Hom}(T, V) \to \mathrm{Hom}(T, W)$满足$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

*(2)* $\iota : K \to V$诱导的映射

$$\iota_* : \mathrm{Hom}(T, K) \to \mathrm{Hom}(T, U), \phi \mapsto \iota \circ \phi$$

是单射, 其象等于$\mathrm{Ker}(f_*) \subset \mathrm{Hom}(T, U)$.

简言之*:*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(T, U) \stackrel{f_*}{\to} \mathrm{Hom}(T, V)) = \mathrm{Hom}(T, \mathrm{Ker}(U \stackrel{f}{\to} V))$$

即Ker与$\mathrm{Hom}(T, _)$交换.

*(3)* 任取线性空间$T$, 则$f : U \to V$诱导了如下同台空间之间的线性映射*:*

$$f^* : \mathrm{Hom}(V, T) \to \mathrm{Hom}(U, T),\ \psi \mapsto \psi \circ f.$$

若进一步有线性映射$h : W \to U$, 则$h^* : \mathrm{Hom}(U, T) \to \mathrm{Hom}(W, T)$ 满足$h^* \circ f^* = (f \circ h)^*$.

*(4)* $\pi : V \to C$诱导的映射

$$\pi^* : \mathrm{Hom}(C, T) \to \mathrm{Hom}(V, T),\ \psi \mapsto \psi \circ \pi$$

是单射, 其象等于$\mathrm{Ker}(f^*) \subset \mathrm{Hom}(V, T)$.

简言之*:*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(V, T) \stackrel{f^*}{\to} \mathrm{Hom}(U, T)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}(U \stackrel{f}{\to} V), T).$$

证明. (1) 和 (3) 的证明直接根据定义验证即可.

(2) 首先验证线性空间之间的线性映射$\iota_* : \mathrm{Hom}(T, K) \to \mathrm{Hom}(T, U)$是单射, 即由$\iota_*(\phi) = 0$能推出$\phi = 0$. 对于$\phi \in \mathrm{Hom}(T, U)$, 若$\iota_*(\phi) = \iota \circ \phi$是$T \to U$的零映射, 则有$\iota \circ \phi(t) = 0, \forall t \in T$. 因为$\iota$是单射, 故得出$\phi(t) = 0, \forall t \in T$. 这说明$\phi = 0 \in \mathrm{Hom}(T, K)$.

可直接验证$f \circ \iota = 0$, 故有$f_*(\iota_* \phi) = 0$对任意$\phi \in \mathrm{Hom}(T, K)$成立. 这说明$\iota_*$的象落在$\mathrm{Ker}(f_*)$中.

接着证明$\iota_*$映满$\mathrm{Ker}(f_* : \mathrm{Hom}(T, U) \to \mathrm{Hom}(T, V))$. 任取$\psi \in \mathrm{Ker}(f_*)$, 即有$\psi : T \to U$使得$f \circ \psi = 0$. 则任取$t \in T$, $f(\psi(t)) = 0$, 即$\psi(t) \in K$恒成立. 这说明$\psi$取值于$K \subset U$: 定义$\phi(t) = \psi(t)$可得$\phi : T \to K$满足$\iota_*(\phi) = \psi$.

(4) 首先验证$\pi^*: \mathrm{Hom}(C,T) \to \mathrm{Hom}(V,T)$是单射. 若有$\psi: C \to T$, 则$\pi^*(\psi)(v) = \psi(\pi(v)) = \psi([v])$ 对任意$v \in V$成立. 因而$\pi^*(\psi)$是零映射表明$\psi([v]) = 0_T$, $\forall [v] \in C$, 即$\psi = 0$.

可直接验证$f^*(\pi) = \pi \circ f = 0$, 故有$\psi \circ \pi \circ f = 0$, 即$f^*(\pi^*(\psi)) = 0$, 因而$\pi^*$的象落在$\mathrm{Ker}(f^*: \mathrm{Hom}(V,T) \to \mathrm{Hom}(U,T))$中.

接着证明$\pi^*$映满$\mathrm{Ker}(f^*)$. 任取$\psi \in \mathrm{Ker}(f^*)$, 即$\psi: V \to T$满足$\psi \circ f = 0$. 则任给$u \in U$, $\psi(f(u)) = 0_T$, 即$\psi(f(U)) = 0_T$. 因而对$[v] \in C = V/f(U)$, 规定$\phi([v]) = \psi(v)$, 则$\phi: C \to T$定义良好: $[v_1] = [v_2] \in V/f(U)$ 给出$v_1 - v_2 = f(u) \in f(U)$, 从而有$\psi(v_1) = \psi(v_2)$. 容易验证这样得到的$\phi: C \to T$是线性映射, 并且$\phi \circ \pi = \psi$, 即$\psi = \pi^*\phi$. □

为方便后面的叙述, 我们介绍短正和列的概念:

**定义 2.7** (短正合列)**.** 一个线性空间的短正合列是如下形式的映射图表

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

满足以下条件:

- $f, g$均为线性映射;
- $f$是单射, 即$\mathrm{Ker}(f) = 0_U$; $g$是满射, 即$\mathrm{Coker}(g) = 0$;
- $\mathrm{Im}(f)$与$\mathrm{Ker}(g)$作为$V$的子空间相等.

典型例子: 若$\phi: V \to V'$为线性映射, 则自然映射$\iota: \mathrm{Ker}(\phi) \to V$和$\pi: V \to \phi(V) = \mathrm{Im}(\phi)$给出短正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} \mathrm{Im}(\phi) \to 0.$$

补充介绍基底的如下性质:

**引理 2.8** (基底的扩张)**.** 给定线性空间$V$.

*(1)* 若$U$是$V$的线性子空间, 则$U$中任意一族线性无关元素$(u_\alpha: \alpha \in A)$可以扩充为$V$的一个基底$(u_\beta: \beta \in B)$; 此处$B$是某个包含$A$的集合. 与此类似, 若$f: U \to V$是线性空间的单射, 则$U$中一族线性无关元素在$f$下的象是$V$中线性无关元素, 可以进一步扩充成$V$的基底.

*(2)* 若$W$是$V$的商空间, $\pi: V \to W$为商空间的自然投影, 则$W$中任意一族线性无关元素$(w_\gamma: \gamma \in \Gamma)$可以提升为$V$中一族线性无关元素$(v_\gamma: \gamma \in \Gamma)$, 即满足$\pi(v_\gamma) = w_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma$. 这样的$(v_\gamma: \gamma \in \Gamma)$可以扩充为$V$的一个基底.

*(3)* 给定短正合列$0 \to U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} W \to 0$, $\iota: U \to V$为子空间的包含映射. 取$U$的一个基底$(v_\alpha: \alpha \in A)$, $W$的一个基底$(w_\gamma: \gamma \in \Gamma)$, 按照*(2)*提升为$V$中的一族线性无关元素$(v_\gamma: \gamma \in \Gamma)$满足$\pi(v_\gamma) = w_\gamma$, 则取$B = A \coprod \Gamma$, $(v_\beta: \beta \in B)$就是$V$的一个基底.

特别, $V$是有限维线性空间当且仅当$U$和$W$都是有限维的, 并且此时有等式

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

成立.

(1)和(2)都可以用Zorn引理证明. (3)可直接从(1)和(2)推出.

**推论 2.9.** 给定短正合列$0 \to U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} W \to 0$, 则对任意的线性空间, 有如下短正和列

$$0 \to \mathrm{Hom}(T, U) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{Hom}(T, V) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}(T, W) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(W, T) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(V, T) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}(U, T) \to 0.$$

证明. 由2.6, 只需证上述两个图表中的$\pi_*$和$\iota^*$都是满射.

取定$U$的基底$(v_\alpha : \alpha \in A)$, $W$的基底$(w_\gamma : \gamma \in \Gamma)$, 则提升$w_\gamma$至$v_\gamma$(即$\pi(v_\gamma) = w_\gamma$)可得$V$的基底$(v_\beta : \beta \in B)$, 其中$B = A \coprod \Gamma$.

若$f : T \to W$是任一线性映射, $t \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma(t) w_\gamma$是$f(t)$关于基底$(w_\gamma : \gamma \in \Gamma)$的展开式(有限求和), 则$c_\gamma : t \mapsto c_\gamma(t)$是$T \to F$的线性映射. 由此定义

$$\phi : T \to V,\ t \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma(t) v_\gamma.$$

则$\pi_*(\phi) = f$, 故$\pi_*$为满射.

若$g : U \to T$是任一线性映射, 定义$\psi : V \to T$如下:

$$\psi(v_\alpha) = g(v_\alpha), \forall \alpha \in A;\ \psi(v_\gamma) = 0_T, \forall \gamma \in \Gamma.$$

则$\psi \in \mathrm{Hom}(V, T)$满足$\iota^*(\psi) = g$, 因而$\iota^*$是满射. □

**注记 2.10.** (1) 形如$A \to B \to C$的线性映射图表在$B$处正合指的是$\mathrm{Ker}(B \to C) = \mathrm{Im}(A \to B)$成立.

形如$0 \to A \to B \to C$的图表正合指的是该图标在$A, B$处均正合, 也就是$\mathrm{Ker}(B \to C) = \mathrm{Im}(A \to B)$及$\mathrm{Ker}(A \to B)$与$\mathrm{Im}(0 \to A)$同时成立. 注意到$\mathrm{Im}(0 \to A)$是0, 因而$\mathrm{Ker}(A \to B) = 0$表示$A \to B$是单射, 而图表在$B$处正合进一步表明$A$同构于$\mathrm{Ker}(B \to C)$.

2.6关于Ker的映射分解性质说明, 若$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$正合, 则

$$0 \to \mathrm{Hom}(T, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(T, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(T, C)$$

正合.

与此类似, 形如$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$的图表正合指的是$\mathrm{Im}(A \to B) = \mathrm{Ker}(B \to C)$以及$\mathrm{Im}(B \to C) = \mathrm{Ker}(C \to 0)$同时成立. 这也等价于$g$是满射且$C$同构于$\mathrm{Coker}(A \to B)$. 2.6关于Coker的映射分解性质说明, 此时如下的图表也是正合的:

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, T) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, T) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, T).$$

线性映射构成的图表

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

为短正合列等价于$0 \to A \to B \to C$和$A \to B \to C \to 0$都正合.

(2) 正合列是同调代数中的基本概念, 也是复型等结构的特例. 详言之, 一个由线性空间构成的复型是由线性空间和线性映射给出的如下形式的图表 $M_\bullet$:

$$\cdots \to M_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} M_n \overset{d_n}{\to} M_{n+1} \to \cdots$$

$(n \in \mathbb{Z})$满足$d_n \circ d_{n-1} = 0$对任意$n$成立, 亦即$\mathrm{Ker}(d_n) \supset \mathrm{Im}(d_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. 我们称

$$\mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n-1}) =: \mathscr{H}^n(M_\bullet)$$

为上述复型的$n$阶上同调空间. 上述复型在$n$处正合是指$\mathrm{Ker}(d_n) = \mathrm{Im}(d_{n-1})$, 也就是$\mathscr{H}^n(M_\bullet) = 0$.

短正合列$0 \to A \to B \to C \to 0$表明$B$是$C$和$A$之间的某种扩张. 结合后面关于直和的讨论, 不难证明此时存在线性空间同构$B \simeq A \bigoplus C$. 类似的扩张结构在群论、环论、模论中还会出现.

同调代数是伴随着代数拓扑发展起来的数学分支, 它可以帮助我们理解和整理很多代数和几何上的现象. 感兴趣的读者可以参考Raoul Bott等人编著的Differential forms in algebraic topology来学习同调代数的几何来源和拓扑应用.

## 3. 直积与直和

线性代数课程中已经介绍过有限多个线性空间的直和. 本节讨论无穷多个空间的直积与直和. 它们与集合论中的直积以及无交并构造有类似之处.

**定义-命题 3.1** (集合的直积与无交并). 给定一族集合$(S_\alpha : \alpha \in A)$ ($A$为指标集).

(1) $(S_\alpha : \alpha \in A)$的直积$\prod_{\alpha\in A} S_\alpha$是由满足$x_\alpha \in S_\alpha$的形如$(x_\alpha : \alpha \in A)$的序列全体构成的集合.

对任意的$\beta \in A$, 我们有自然的投影映射

$$p_\beta : \prod_\alpha S_\alpha \to S_\beta,\ (x_\alpha : \alpha \in A) \mapsto x_\beta.$$

若$T$是集合, 则一族映射$(T \xrightarrow{f_\alpha} S_\alpha : \alpha \in A)$给出唯一的映射

$$f : T \to \prod_\alpha S_\alpha,\ t \mapsto (f_\alpha(t) : \alpha \in A)$$

满足$p_\alpha \circ f = f_\alpha, \forall \alpha \in A$. 反之, 若有$f : T \to \prod_\alpha S_\alpha$, 则复合$f_\alpha := p_\alpha \circ f$给出一族映射$(f_\alpha : \alpha \in A)$, 也就是$\prod_\alpha \mathrm{Map}(T, S_\alpha)$中的一个元素. 上面的讨论表明我们有如下的双射

$$\mathrm{Map}(T, \prod_\alpha S_\alpha) \simeq \prod_\alpha \mathrm{Map}(T, S_\alpha),\ f \mapsto (p_\alpha \circ f : \alpha \in A)$$

对任意集合$T$成立.

特别地, 当 $S_\alpha = S$是一个固定的集合($\forall \alpha \in A$)时, $\prod_{\alpha\in A} S_\alpha$中的元素等价于$S$中一个被$A$标记的序列. 由此得到集合之间的双射

$$\prod_{\alpha\in A} S = \mathrm{Map}(A, S).$$

该集合也记作$S^A$.

(2) $(S_\alpha : \alpha \in A)$的无交并$\coprod_{\alpha\in A} S_\alpha$是所有形如$(\alpha, x_\alpha)$的序对构成的集合: 此处$(\alpha, x_\alpha)$中有$\alpha \in A$及$x_\alpha \in S_\alpha$成立.

对任意的$\beta \in A$, 我们有自然的嵌入映射

$$i_\beta : S_\beta \to \coprod_\alpha S_\alpha,\ y \mapsto (\beta, y).$$

若$T$是集合, 则一族映射$(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T : \alpha \in A)$给出唯一的映射

$$f : \coprod_\alpha S_\alpha \to T,\ (\alpha, x_\alpha) \mapsto f_\alpha(x_\alpha)$$

满足$f \circ i_\alpha = f_\alpha, \forall \alpha \in A$. 反之, 若有$f : \coprod_\alpha S_\alpha \to T$, 则复合$f_\alpha := f \circ i_\alpha$给出一族映射 $(f_\alpha : \alpha \in A)$, 也就是$\prod_\alpha \mathrm{Map}(S_\alpha, T)$中的一个元素. 上面的讨论表明我们有如下的双射

$$\mathrm{Map}(\coprod_\alpha S_\alpha, T) \simeq \prod_\alpha \mathrm{Map}(S_\alpha, T),\ f \mapsto (f \circ i_\alpha : \alpha \in A)$$

对任意集合$T$成立.

上述性质的证明作为练习.

与集合情形类似, 我们有如下构造:

**定义 3.2.** 给定一族线性空间$(V_\alpha : \alpha \in A)$ ($A$为指标集, 系数域仍为$F$).

(1) 在直积集合$\prod_\alpha V_\alpha$上我们可以定义如下的线性空间结构: 任取$\prod_\alpha V_\alpha$中的两个元素$x = (x_\alpha : \alpha \in A)$和$y = (y_\alpha : \alpha \in A)$, 任取常数$a, b \in F$, 则定义线性组合$ax + by$是由分量$(ax_\alpha + by_\alpha : \alpha \in A)$决定的$\prod_\alpha V_\alpha$中唯一元素. 特别, $\prod_\alpha V_\alpha$作为线性空间的零元就是所有分量都为0的元素.

对任意的$\beta \in A$, 自然投影

$$p_\beta : \prod_\alpha V_\alpha \to V_\beta,\ (x_\alpha : \alpha \in A) \mapsto x_\beta$$

是线性满射.

(2) 在直积集合$\prod_\alpha V_\alpha$中有如下子集

$$\{x = (x_\alpha : \alpha \in A) \in \prod_\alpha A : x_\alpha = 0,\ a.e.\alpha \in A\}$$

此处$x_\alpha = 0,\ a.e.\alpha \in A$指的是$\{\alpha : x_\alpha \neq 0\}$是有限集或空集(注意该集合依赖于$x$). 显然, 当$A$是无限集合且有无限多个$V_\alpha$不是零空间时, 上述集合是$\prod_\alpha V_\alpha$的一个真子集.

容易验证上述集合在线性空间$\prod_\alpha V_\alpha$中对线性组合封闭, 是$\prod_\alpha V_\alpha$的一个线性子空间. 我们称之为$(V_\alpha : \alpha \in A)$的直和, 记作$\bigoplus_\alpha V_\alpha$.

注意$\bigoplus_\alpha V_\alpha$中的每个元素都可以写成有限和

$$x_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus x_{\alpha_n} := \sum_{j=1,\cdots,n} i_{\alpha_j}(x_{\alpha_j})$$

作为$\prod_\alpha V_\alpha$中的元素, 这指的是$\alpha \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$时对应分量$x_\alpha = 0$, 而对于$\alpha_i$对应分量为$x_{\alpha_j}$ $(j = 1, \cdots, n)$给出的唯一元素.

对任意的$\beta \in A$, 自然映射

$$i_\beta : V_\beta \to \bigoplus_\alpha V_\alpha,\ x_\beta \mapsto (\delta_{\alpha,\beta} x_\beta : \alpha \in A)$$

是线性单射: 此处$\delta_{\alpha,\beta} x_\beta$在$\alpha \neq \beta$时取0, 亦即$i_\beta(x_\beta)$作为$\prod_\alpha V_\alpha$中的元素只在$\beta$位置取值为$x_\beta$, 在其他位置取值为0.

上述构造满足以下的映射分解性质:

**命题 3.3** (映射分解)**.** 给定一族线性空间$(V_\alpha : \alpha \in A)$ *($A$为指标集)*. 任取线性空间$T$.

*(1)* 一族线性映射$(T \xrightarrow{f_\alpha} V_\alpha : \alpha \in A)$给出唯一的线性映射

$$f : T \to \prod_\alpha V_\alpha,\ t \mapsto (f_\alpha(t) : \alpha \in A)$$

满足$p_\alpha \circ f = f_\alpha, \forall \alpha \in A$.

反之, 若有线性映射$f: T \to \prod_\alpha V_\alpha$, 则复合$f_\alpha = p_\alpha \circ f$ 给出直积线性空间$\prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, V_\alpha)$中的一个元素$(f_\alpha : \alpha \in A)$.

上面的构造给出如下线性空间的双射

$$\mathrm{Hom}(T, \prod_\alpha V_\alpha) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, V_\alpha),\ f \mapsto (p_\alpha \circ f : \alpha \in A).$$

*(2)* 一族线性映射$(V_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T : \alpha \in A)$给出唯一的线性映射

$$f : \bigoplus_\alpha V_\alpha \to T,\ x = (x_\alpha : \alpha \in A) \mapsto \sum_\alpha f_\alpha(x_\alpha).$$

满足$f \circ i_\alpha = f_\alpha,\ \forall \alpha \in A$. 注意上面表达式中$x = (x_\alpha : \alpha \in A) \in \bigoplus_\alpha V_\alpha$只有至多有限多个分量$x_\alpha$可能非零, 因而求和式$\sum_\alpha f_\alpha(x_\alpha)$是$T$中的有限求和.

反之, 若有线性映射$f : \bigoplus_\alpha V_\alpha \to T$, 则复合$f_\alpha = f \circ i_\alpha$给出直积线性空间$\prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T)$中的一个元素$(f_\alpha : \alpha \in A)$.

上面的构造给出如下线性空间的双射

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T),\ f \mapsto (f \circ i_\alpha : \alpha \in A).$$

证明. 我们只给出(2)的概要. (1)的情形类似.

首先注意对任意的$\beta \in A$, $\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T) \to \mathrm{Hom}(V_\beta, T),\ f \mapsto f \circ i_\beta$是集合间的映射, 因而由集合直积的性质, 得到映射

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T).$$

对于线性映射$f \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T)$, $f_\beta = f \circ i_\beta$也是线性映射. 若另取$g \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T)$及$g_\beta = g \circ i_\beta$以及$a, b \in F$, 则

$$(af + bg) \circ i_\beta = af_\beta + bg_\beta$$

表明$f \mapsto f_\beta$是线性映射, 因而可直接验证

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T),\ f \mapsto (f \circ i_\alpha : \alpha \in A)$$

是线性空间之间的线性映射.

若$f \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha V_\alpha, T)$给出的$(f \circ i_\alpha : \alpha \in A)$是$\prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T)$中的零元, 则$f \circ i_\alpha : V_\alpha \to T$是零映射, 即$f(i_\alpha(x_\alpha)) = 0$对任意$x_\alpha \in V_\alpha$成立. 注意到$\bigoplus_\alpha V_\alpha$中的每个元素都可写成有限求和$x = \sum_j i_{\alpha_j}(x_{\alpha_j})$, 我们得到$f(x)$恒等于0. 这说明$f = 0$, 即上面构造的映射$f \mapsto (f \circ i_\alpha : \alpha \in A)$是单射.

若给定$(f_\alpha : \alpha \in A) \in \prod_\alpha \mathrm{Hom}(V_\alpha, T)$, 则定义

$$f : \bigoplus_\alpha V_\alpha \to T,\ x_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus x_{\alpha_n} \mapsto \sum_{j=1,\cdots,n} f_{\alpha_j}(x_{\alpha_j}).$$

容易验证这样得到的$f$定义良好, 是线性映射, 且满足$f \circ i_\alpha = f_\alpha, \forall \alpha \in A$.

因此

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{\alpha} V_\alpha, T) \to \prod_{\alpha} \mathrm{Hom}(V_\alpha, T),\ f \mapsto (f \circ i_\alpha : \alpha \in A)$$

是线性空间之间的双射同构. $\square$

**注记 3.4.** (1) 注意当指标集$A$有限时, 包含映射$\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$是同构. 因此有限直积与有限直和常不加区别, 记作$\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha$.

类似地, 若一族线性空间$(V_\alpha : \alpha \in A)$中至多只有有限多个空间非零时, 包含映射$\bigoplus_\alpha V_\alpha \to \prod_\alpha V_\alpha$也是同构.

当指标集$A$为空集时, 约定$\bigoplus_\alpha V_\alpha = 0 = \prod_\alpha V_\alpha$.

(2) 注意有限多个线性空间的直和可以看成一种加法, 并且具有结合律: 给定线性空间$V_1, V_2, V_3$, 容易证明存在如下的自然同构

$$(V_1 \bigoplus V_2) \bigoplus V3 \simeq V_1 \bigoplus (V_2 \bigoplus V_3), (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 \mapsto v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3)$$

$$V_1 \bigoplus V_2 \simeq V_2 \bigoplus V_1,\ v_1 \oplus v_2 \mapsto v_2 \oplus v_1.$$

特别对于有限多个线性空间$V_1, \cdots, V_n$, 我们有

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i \simeq (\cdots (V_1 \bigoplus V_2) \bigoplus \cdots) \bigoplus V_n.$$

**例 3.5.** 考虑一族线性空间$(V_\alpha : \alpha \in A)$, 其中$V_\alpha = U$对所有指标$\alpha \in A$成立, $U$是固定的线性空间(不依赖于$\alpha \in A$).

(1) 此时直积$\prod_\alpha V_\alpha$作为集合与$A$上的$U$-值函数集合$\mathrm{Map}(A, U)$等同(参见3.1). $\mathrm{Map}(A, U)$上的线性空间结构来自函数的逐点线性组合: 任取 $a, b \in F$ 以及映射 $f, g : A \to U$

$$af + bg : A \to F,\ \alpha \mapsto af(\alpha) + bg(\alpha).$$

此时$\bigoplus_\alpha V_\alpha = \bigoplus_\alpha U$等同于$\mathrm{Map}_c(A, U)$, 也就是$\mathrm{Map}(A, U)$中至多只在$A$中有限多个点上可以取非零值的函数. 容易验证$\mathrm{Map}_c(A, U)$是$\mathrm{Map}(A, U)$的线性子空间.

我们经常记$U^A = \mathrm{Map}(A, U)$, $U^{\oplus A} = \mathrm{Map}_c(A, U)$.

(2) 当$U = F$时, 我们注意到$F^{\oplus A} = \mathrm{Map}_c(A, F)$中有元素

$$e_\beta : A \to F,\ \alpha \mapsto \delta_{\alpha,\beta}$$

即在$\beta$处取值为1, 其余的$\alpha(\neq \beta)$处取值为0. 易见每个$f \in \mathrm{Map}_c(A, F)$可唯一表为$f = \sum_\alpha f(\alpha) e_\alpha$(注意这是有限求和), 而$(e_\alpha : \alpha \in A)$构成$F^{\oplus A} = \mathrm{Map}_c(A, F)$的一个基底. 我们有时也用$F^{\oplus A} = \bigoplus_{\alpha\in A} F e_\alpha$来表示$(e_\alpha : \alpha \in A)$是$F^{\oplus A}$的自然基底.

与此类似, 对于一般的$U$, 我们可以从$U$的一个基底出发构造$U^{\oplus A}$的一个基底.

**练习 3.6** (直和与基底)**.** *(1)* 若线性空间$V$有基底$(e_\alpha : \alpha \in A)$, 取无交并分解$A = \coprod_{j\in J} A_j$, 则$V_j := \mathrm{Span}(e_{\alpha_j} : \alpha_j \in A_j)$给出直和分解$V = \bigoplus_{j\in J} V_j$.

反之, 若有直和分解$V=\bigoplus_{j\in J}V_j$, 每个$V_j$有基底$(e_{\alpha_j}:\alpha_j\in A_j)$, 则取$A=\coprod_{j\in J}A_j$可得$V$的基底$(e_\alpha:\alpha\in A)$. (此处通过自然嵌入$\iota_j:V_j\to V$将$e_{\alpha_j}$等同于$\iota_j(e_{\alpha_j})\in V$.)

(2) 考虑有限维线性空间的直和分解及自然的嵌入和投影映射

$$U=U_1\bigoplus U_2:\ \iota_j:U_j\to U,\ \pi_j:U\to U_j,\ j=1,2;$$

$$V=V_1\bigoplus V_2:\ i_j:V_j\to V,\ p_j:V\to V_j,\ j=1,2;$$

满足

$$\iota_1\circ\pi_1+\iota_2\circ\pi_2=\mathrm{id}_U,\ \pi_j\circ\iota_j=\mathrm{id}_{U_j},(j=1,2),\ \pi_1\circ\iota_2=0,\pi_2\circ\iota_1=0$$

$$i_1\circ p_1+i_2\circ p_2=\mathrm{id}_V,\ p_j\circ i_j=\mathrm{id}_{V_j},(j=1,2),\ p_1\circ i_2=0,p_2\circ i_1=0$$

并取基底

$$U_1:(\alpha_a:1\le a\le m);\ U_2:(\beta_b:1\le b\le n)$$

$$V_1:(\gamma_c:1\le c\le k);\ V_2:(\delta_d:1\le d\le \ell).$$

对线性映射$\Phi:U\to V$, 通过直和分解中的限制和投影得到

$$\Phi_{\mu\nu}=p_\mu\circ\Phi\circ\iota_\nu:U_\nu\to V_\mu,\ \mu,\nu\in\{1,2\}.$$

在上述基底下得到$\Phi_{\mu\nu}$的矩阵$M_{\mu\nu}$, 则$\Phi:U\to V$在$U$的基底$(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)$和$V$的基底$(c_1,\cdots,c_k,d_1,\cdots,d_\ell)$下的矩阵可表为分块形式

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}.$$

与此类似, 分块矩阵的乘法也可通过直和分解来理解.

3.3有以下推论:

**推论 3.7.** 任给线性空间$U$和集合$A$, 有如下的线性空间同构

$$\mathrm{Hom}(F^{\oplus A},U)\simeq\mathrm{Map}(A,U)$$

将线性映射$f:F^{\oplus A}\to U$对应于集合映射$\phi:\alpha\in A\mapsto f(e_\alpha)\in U$.

证明. 由3.3可得同构

$$\mathrm{Hom}(F^{\oplus A},U)=\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha Fe_\alpha,U)\to\prod_\alpha\mathrm{Hom}(Fe_\alpha,U),$$

该同构将$f:F^{\oplus A}=\bigoplus_{\alpha\in A}Fe_\alpha\to U$映为一族映射$(Fe_\alpha\overset{f_\alpha}{\to}U:\alpha\in A)$, 满足$f_\alpha(ce_\alpha)=cf(e_\alpha),\forall c\in F$. 这样的$f_\alpha$由取值$f(e_\alpha)\in U$唯一决定, 因此$(f_\alpha:\alpha\in A)$等价于$U$中的一族元素$(f(e_\alpha):\alpha\in A)$, 也就是$\mathrm{Map}(A,U)$中的一个元素. □

作为上面讨论的延申, 我们介绍如下构造:

**定义-命题 3.8** (生成元–关系正合列)**.** 给定线性空间$V$. 若$V$中子集$G$生成$V$, 即$\mathrm{Span}(G) = V$, 则有线性空间之间的满射

$$\epsilon : F^{\oplus G} \to V,\ \oplus_{g\in G} a_g e_g \mapsto \sum_g a_g g$$

(上面的求和均为有限求和).

我们称上述映射的核空间为生成元集合$G$在$V$中的线性关系构成的集合, 记为$R_G$:

$$R_G = \{(c_g : g \in G) \in F^{\oplus G} : \sum_g c_g g = 0_V\}.$$

由此得到生成元–关系正合列

$$0 \to R_G \to F^{\oplus G} \xrightarrow{\epsilon} \mathrm{Span}(G) \to 0.$$

*证明.* 注意$\mathrm{Span}(G)$中的元素就是形如$\sum_g a_g g$的有限求和($a_g \in F$至多只有有限多个非零), 因此$F^{\oplus G} = \bigoplus_{g\in G} \to V$定义良好, 且由$\mathrm{Span}(G) = V$知$F^{\oplus G} \to V$是满射.

按照定义直接验证可得

$$\mathrm{Ker}(F^{\oplus G} \to V) = \{(c_g : g \in G) \in F^{\oplus G} | \sum_{g\in G} c_g g = 0_V\}$$

也就是描述$G$中元素在$V$中线性相关等式用到的系数序列所构成的集合. 易见这也是$F^{\oplus G}$中的线性子空间. $\square$

上式表明每个线性空间$V$都可以通过生成元的选取实现成形如$F^{\oplus G}$的直和空间的商.

**推论 3.9.** 取$U$为线性空间, 则$U$作为$U$中子集本身能生成线性空间$U$, 因此有正合列

$$0 \to R_U \xrightarrow{\iota} F^{\oplus U} \xrightarrow{\epsilon} U \to 0.$$

$R_U = \{(c_u : u \in U) | \sum_u c_u u = 0\}$是$U$中所有线性关系(线性相关等式的系数)构成的集合.

另取线性空间$T$, 则有如下正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(U, T) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Map}(U, T) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}(R_U, T) \to 0$$

其中$\mathrm{Map}(U, T) \simeq \mathrm{Hom}(F^{\oplus U}, T)$是全体集合映射$U \to T$构成的集合, 其上的线性空间结构来自映射的逐点线性组合.

证明归结为2.9.

**注记 3.10** (线性关系)**.** 注意对任意的线性空间$T$和集合$S$, 映射集合$\mathrm{Map}(S, T)$上都有通过逐点线性组合得到的自然的线性空间结构:

$$(af + bg)(s) := af(s) + bg(s),\ \forall a, b \in F,\ f, g \in \mathrm{Map}(S, T),\ s \in S.$$

当$S = U$本身也是线性空间时, 上面给出的

$$\epsilon^* : \mathrm{Hom}(U, T) \to \mathrm{Map}(U, T)$$

是单射, 将$U$到$T$的线性映射全体构成的线性空间$\mathrm{Hom}(U,T)$实现成$U$上$T$-值函数构成的线性空间$\mathrm{Map}(U,T)$的线性子空间. 而$\iota^*:\mathrm{Map}(U,T)\simeq\mathrm{Hom}(F^{\oplus U},T)\to\mathrm{Hom}(R_U,T)$将集合映射$h:U\to T$对应到线性空间之间的映射

$$f=\iota^*h:\oplus_{u\in U}c_ue_u\in R_U\mapsto\sum_{u\in U}c_uh(u)\in T.$$

$\mathrm{Ker}(\iota^*)$中的元素就是集合映射$h:U\to T$满足

$$\sum_u c_uu=0\in U\ \Leftrightarrow\sum_u c_uh(u)=0\in T.$$

因而$\mathrm{Ker}(\iota^*)$就是集合映射$U\to T$中满足线性关系的映射, 也就是$U\to T$的线性映射全体.

## 4. 多重线性映射和张量积

在一些数学问题中自然出现了多重线性映射. 我们首先考虑双线性的情形:

**定义 4.1** (双线性映射)**.** 给定线性空间$U, V, T$. 双线性映射$U \times V \to T$是满足以下双线性条件的集合映射$f : U \times V \to T$

- $f(c_1u_1 + c_2u_2, v) = c_1f(u_1, v) + c_2f(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in U, c_1, c_2 \in F, v \in V$ ;
- $f(u, c_1v_1 + c_2v_2) = c_1f(u, v_1) + c_2f(u, v_2), \forall v_1, v_2 \in V, c_1, c_2 \in F, u \in U.$

即$f$关于两个分量分别线性.

记$\mathrm{Mult}(U, V; T)$为全体双线性映射$U \times V \to T$构成的集合. 注意这是$\mathrm{Map}(U \times V, T)$的子集.

类似于3.10中的讨论, 我们有如下命题:

**定义-命题 4.2.** 任取线性空间$U, V, T$.

(1) $\mathrm{Mult}(U, V; T)$是线性空间$\mathrm{Map}(U \times V, T)$的线性子空间.

(2) 记$R_{U,V}$为$F^{\oplus U\times V}$中由

$$e_{(c_1u_1+c_2u_2,v)} - c_1e_{(u_1,v)} - c_2e_{(u_2,v)},\ e_{(u,c_1v_1+c_2v_2)} - c_1e_{(u,v_1)} - c_2e_{(u,v_2)}$$

(任取 $c_1, c_2 \in F,\ u_1, u_2, u \in U,\ v_1, v_2, v \in V$)生成的线性子空间. 则包含映射$\iota : R_{U,V} \to F^{\oplus U\times V}$给出正合列

$$0 \to \mathrm{Mult}(U, V; T) \to \mathrm{Map}(U \times V, T) \to \mathrm{Hom}(R_{U,V}, T) \to 0.$$

(3) 取商空间$Q = F^{\oplus U\times V}/R_{U,V}$, 则正合列$0 \to R_{U,V} \xrightarrow{\iota} F^{\oplus U\times V} \xrightarrow{\pi} Q \to 0$给出正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(Q, T) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Map}(U \times V, T) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}(R_{U,V}, T) \to 0.$$

这表明对于任意的$T$, $\mathrm{Hom}(Q, T) \simeq \mathrm{Mult}(U, V; T)$作为线性空间同构.

我们称上面构造的线性空间$Q = F^{\oplus U\times V}/R_{U,V}$为$U$和$V$作为线性空间的张量积, 记作$U \bigotimes_F V$. 因为本文中$F$是固定的, 以下也简记成$U \bigotimes V$.

$F^{\oplus U\times V}$中的元素$e_{(u,v)}$在$U \bigotimes V$中的象记为$u \otimes v$. 容易验证:

$$(c_1u_1 + c_2u_2) \otimes v = c_1(u_1 \otimes v) + c_2(u_2 \otimes v),\ u \otimes (c_1v_1 + c_2v_2) = c_1(u \otimes v_1) + c_2(u \otimes v_2)$$

对任意的$c_1, c_2 \in F,\ u_1, u_2, u \in U,\ v_1, v_2, v \in V$成立.

*证明.* (1) $\mathrm{Map}(U \times V, T)$上的线性空间结构来自函数的逐点线性组合. 若有$f, g \in \mathrm{Mult}(U, V; T)$, $a, b \in F$, 则

$$(af+bg)(c_1u_1+c_2u_2, v) = af(c_1u_1+c_2u_2, v)+bg(c_1u_1+c_2u_2, v) = c_1(af+bg)(u_1, v)+c_2(af+bg)(u_2, v)$$

对任意的$c_1, c_2 \in F,\ u_1, u_2 \in U,\ v \in V$成立, 即$af + bg$关于第一个变量线性; 同理$af + bg$关于第二个变量线性. 因而$af + bg \in \mathrm{Mult}(U, V; T)$, $\mathrm{Mult}(U, V; T)$是$\mathrm{Map}(U \times V, T)$的线性子空间.

(2) 集合映射$\phi : U \times V \to T$可以视为线性映射

$$f : F^{\oplus U\times V} \to T, \sum_{i=1,\cdots,n} c_i e_{(u_i,v_i)} \mapsto \sum_i c_i \phi(u_i, v_i).$$

$\iota^* f$是$f$(作为线性映射)在$R_{U,V}$上的限制. $\iota^* f = 0$蕴含对任意的$c_1, c_2 \in F,\ u_1, u_2 \in U,\ v \in V$, 有

$$f(e_{(c_1u_1+c_2u_2,v)} - c_1 e_{(u_1,v)} - c_2 e_{(u_2,v)}) = 0$$

即$\phi(c_1u_1 + c_2u_2, v) - c_1\phi(u_1, v) - c_2\phi(u_2, v) = 0$, 即$\phi$关于第一个变量线性; 同理可证$\phi$对于第二个变量线性. 因而$\phi \in \mathrm{Mult}(U, V; T)$. 容易验证$\mathrm{Mult}(U, V; T) \subset \mathrm{Ker}\iota^*$, 因而得到所求的正合列.

(3) 由核空间的唯一性和张量积的多线性可得. 注意该构造说明$U \bigotimes V$中的每个元素都可表为有限求和$\sum_{i=1,\cdots,n} u_i \otimes v_i, u_1, \cdots , u_n \in U, v_1, \cdots , v_n \in V$. □

容易构造张量积空间的基底:

**引理 4.3.** 若线性空间$U$有基底$(u_\alpha : \alpha \in A)$, 线性空间$V$有基底$(v_\beta : \beta \in B)$, 则$(u_\alpha \otimes v_\beta : (\alpha, \beta) \in A \times B)$是$U \times V$的一个基底.

特别, 当$U, V$均为有限维线性空间时, 有$\dim(U \bigotimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$成立.

*证明.* 首先注意$U \bigotimes V$中的每个元素都可表为有限求和

$$\sum_{i=1,\cdots,n} u_i \otimes v_i$$

其中$u_1, \cdots , u_n \in U,\ v_1, \cdots , v_n \in V$. 注意每个$u_i$可表为$(u_\alpha : \alpha \in A)$的线性组合, 每个$v_i$可表为$(v_\beta : \beta \in B)$的线性组合. 利用张量积关于分量的线性展开性质, 可知$U \bigotimes V$中的每个元素都可表为$(u_\alpha \otimes v_\beta)$的线性组合.

若有限求和$t = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} c_{\alpha,\beta} u_\alpha \otimes v_\beta$在$U \bigotimes V$中等于0, 则任取线性函数$f : U \bigotimes V \to F$, 应有$f(t) = 0$. 注意对任意的$\alpha_0 \in A, \beta_0 \in B$, 定义

$$\phi(\sum_\alpha a_\alpha u_\alpha, \sum_\beta b_\beta v_\beta) = a_{\alpha_0} b_{\beta_0} \in F.$$

容易验证$\phi : U \times V \to F$是双线性函数, 对应于唯一的$f \in (U \bigotimes V)^\vee$, 满足$f(u_\alpha \otimes v_\beta) = \delta_{(\alpha_0,\beta_0),(\alpha,\beta)}$ (Kronecker delta). 因为$0 = \sum c_{\alpha,\beta} u_\alpha \otimes v_\beta$, 故有

$$0 = f(\sum c_{\alpha,\beta} u_\alpha \otimes v_\beta) = c_{\alpha_0,\beta_0}.$$

注意到$(\alpha_0, \beta_0) \in A \times B$是任意的, 因此$(u_\alpha \otimes v_\beta : (\alpha, \beta) \in A \times B)$在$U \bigotimes V$中线性无关, 是一个基底. □

对于集合$A, B, C$, 容易验证存在映射集合之间的双射

$$\mathrm{Map}(A \times B, C) \to \mathrm{Map}(A, \mathrm{Map}(B, C)),\ f \mapsto (a \mapsto (b \mapsto f(a, b))).$$

在线性空间的情形我们有以下类比:

**命题 4.4.** 给定线性空间$U,V,W$, 则如下映射是线性空间的同构:

$$\mathrm{Hom}(U\otimes V,W)\to\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W)),\ f\mapsto(u\mapsto(v\mapsto f(u\otimes v))).$$

亦即$\mathrm{Mult}(U,V;W)\simeq\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$.

证明. 作为集合有自然双射$\mathrm{Map}(U\times V,W)\simeq\mathrm{Map}(U,\mathrm{Map}(V,W))$. 注意$W$的线性结构给出了$\mathrm{Map}(V,W)$上的线性结构, 进而给出了$\mathrm{Map}(U,\mathrm{Map}(V,W))$上的线性结构; 可以直接验证

$$\mathrm{Map}(U\times V,W)\to\mathrm{Map}(U,\mathrm{Map}(V,W)),\ f\mapsto(u\mapsto(v\mapsto f(u,v)))$$

是线性同构.

取$\phi\in\mathrm{Mult}(U,V;T)$, 对应于$\mathrm{Map}(U,\mathrm{Map}(V,W))$中的元素$\Phi$: $\Phi(u)(v)=\phi(u,v)$, $\forall u\in U,v\in V$. 因为$\phi$关于第二个变量线性, 故对任意固定的$u\in U$, $\Phi(u)\in\mathrm{Map}(V,W)$是$V$上的线性映射, 即$\Phi$落在线性子空间$\mathrm{Map}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$中. 同理, 因为$\phi$关于第一个变量线性, 故$\Phi$落在线性子空间$\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$中. 由此得到自然映射$\mathrm{Mult}(U,V;W)\to\mathrm{Map}(U,\mathrm{Map}(V,W))$的象落在$\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$中.

任取$\Phi\in\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$, 定义$\phi(u,v)=\Phi(u)(v)$. 可以直接验证$\phi\in\mathrm{Mult}(U,V;W)$, 并且在上面构造的映射$\mathrm{Mult}(U,V;W)\to\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$下, $\phi$被映回$\Phi$. 因此得到自然同构$\mathrm{Mult}(U,V;W)\to\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$. □

对于有限维空间, 张量积和对偶相容:

**命题 4.5.** *(1)* 若$U$是有限维线性空间, 则对任意的线性空间$T$, 存在同构

$$\lambda:U^\vee\bigotimes T\to\mathrm{Hom}(U,T),\phi\otimes t\mapsto(u\mapsto\phi(u)t).$$

*(2)* 若$U$和$V$是有限维向量空间, $U^\vee$及$V^\vee$是它们各自的对偶空间, 则有自然同构

$$U^\vee\otimes V^\vee\to(U\bigotimes V)^\vee=\mathrm{Hom}(U\bigotimes V,F).$$

若$U$有基底$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $V$有基底$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $U^\vee$和$V^\vee$中对应的对偶基分别为$(\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_m^\vee)$和$(\beta_1^\vee,\cdots,\beta_n^\vee)$, 则$(U\bigotimes V)^\vee$有基底$(\alpha_j^\vee\otimes\beta_i^\vee:1\le i\le n,1\le j\le m)$对偶于$(\alpha_j\otimes\beta_i:i,j)$.

证明. (1) 题设中的映射$\lambda:U^\vee\bigotimes T\to\mathrm{Hom}(U,T)$定义良好, 并易见是线性映射.

取$U$的基底$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 及$U^\vee$的对偶基底$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$. 则$U^\vee=\bigoplus_i F\beta_i=\bigoplus_i(F\alpha_i)^\vee$. 因而

$$U^\vee\bigotimes T=(\bigoplus_i(F\alpha_i)^\vee)\bigotimes T=\bigoplus_i((F\alpha_i)^\vee\bigotimes T).$$

可直接验证$\lambda$与直和相容, 于是所求同构归结至$\dim(U)=1$的情形, 而这一情形是显然的.

(2) 利用同构

$$\mathrm{Hom}(U\bigotimes V,F)\simeq\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,F))=\mathrm{Hom}(U,V^\vee)\simeq U^\vee\bigotimes V^\vee$$

即可. 基底的构造是显然的. □

**注记 4.6.** 注意上面的结论(1)在$U$是无限维线性空间时不成立.

多个线性空间的张量积与上面的情形类似:

**定义-命题 4.7.** 给定线性空间$V_1,\cdots,V_n$和$T(n\in\mathbb{N}_{>0})$.

(1) 多线性映射$V_1\times\cdots\times V_n\to T$是满足以下条件的集合映射$f:V_1\times\cdots\times V_N\to T$:

- 任意固定$i\in\{1,\cdots,n\}$, $a,b\in F$, $v_i,v_i'\in V_i$, 以及$v_j\in V_j$, $j\neq i$, 恒有

$$f(v_1,\cdots,v_{i-1},cv_i+c'v_i',v_{i+1},\cdots,v_n)=cf(v_1,\cdots,v_n)+c'f(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_n).$$

记$\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_n;T)$为这样的映射构成的$\mathrm{Map}(V_1\times\cdots\times V_n,T)$的子集, 则在$T$-值映射的逐点线性组合下, $\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_n;T)$是$\mathrm{Map}(V_1\times\cdots\times V_n,T)$的线性子空间.

(2) 记$R_{V_1,\cdots,V_n}$为$F^{\oplus V_1\times\cdots\times V_n}$中由以下元素生成的线性子空间

$$e_{(v_1,\cdots,v_{i-1},cv_i+c'v_i',v_{i+1},\cdots,v_n)}-ce_{(v_1,\cdots,v_n)}-c'e_{(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_n)}$$

$(i\in\{1,\cdots,n\},c,c'\in F,v_i,v_i'\in V_i,v_j\in V_j(j\neq i))$, 并定义

$$Q_{V_1,\cdots,V_n}=F^{\oplus V_1\times\cdots\times V_n}/R_{V_1,\cdots,V_n}.$$

则正合列

$$0\to R_{V_1,\cdots,V_n}\xrightarrow{\iota}F^{\oplus V_1\times\cdots\times V_n}\xrightarrow{\pi}Q_{V_1,\cdots,V_n}\to 0$$

诱导线性空间的同构

$$\mathrm{Hom}(Q_{V_1,\cdots,V_n},T)\simeq\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_n;T)=\mathrm{Ker}(\iota^*:\mathrm{Map}(V_1\times\cdots\times V_n,T)\to\mathrm{Hom}(R_{V_1,\cdots,V_n},T).$$

我们称$Q_{V_1,\cdots,V_n}$是$V_1,\cdots,V_n$作为($F$上)线性空间的张量积, 记作$V_1\bigotimes_F\cdots\bigotimes_F V_n$; 因本文中$F$固定, 也简记成$V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n$.

$F^{\oplus V_1\times\cdots\times V_n}$中的元素$e_{(v_1,\cdots,v_n)}$在$V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n$中的象记为$v_1\otimes\cdots\otimes v_n$. $V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n$中的每个元素都可以写成这样的张量积元素的线性组合.

若$V_i$有基底$(u_{\alpha_i}^{(i)}:\alpha_i\in A_i)$, 则$V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n$有基底

$$(u_{\alpha_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\alpha_n}^{(n)}:(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times\cdots\times A_n).$$

特别, $V_1,\cdots,V_n$都是有限维线性空间时, 我们有

$$\dim(V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n)=\prod_{i=1,\cdots,n}\dim(V_i).$$

**命题 4.8.** 给定线性空间$V_1,\cdots,V_n$.

*(1)* 若$T$是线性空间, 则有线性空间同构

$$\mathrm{Hom}(V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_n,T)\to\mathrm{Hom}(V_1\bigotimes\cdots\bigotimes V_{n-1},\mathrm{Hom}(V_n,T)),\ f\mapsto(v_1\otimes\cdots\otimes v_{n-1}\mapsto(v_n\mapsto f(v_1\otimes\cdots\otimes v_n$$

亦即$\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_n;T)\simeq\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_{n-1};\mathrm{Hom}(V_n,T))$. 与此类似, 对任意的$m\in\{1,\cdots,n\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_n;T)&\simeq\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_m;\mathrm{Hom}(V_{m+1}\bigotimes\cdots\bigotimes V_n,T))\\&\simeq\mathrm{Mult}(V_1,\cdots,V_m;\mathrm{Mult}(V_{m+1},\cdots,V_n;T)).\end{aligned}$$

*(2)* 若对于$i \in \{1, \cdots, n\}$, $V_i$是有限维线性空间, 有基底$(\alpha_j^{(i)} : 1 \leq j \leq n_i)$, 其对偶空间$V_i^\vee$有对偶基底$(\beta_j^{(i)} : 1 \leq j \leq n_i)$, 则有同构

$$(V_1 \bigotimes \cdots \bigotimes V_n)^\vee \simeq V_1^\vee \bigotimes \cdots \bigotimes V_n^\vee$$

以$(\beta_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \beta_{k_n}^{(n)} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k_j \leq n_j)$为关于$(\alpha_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{k_n}^{(n)})$的对偶基底.

上述命题的证明与双线性的情形类似, 不再赘述.

我们还注意到张量积本身类似于乘积的性质(证明留作练习):

**引理 4.9.** *(1)* 给定线性空间$V_1, V_2, V_3$, 则有同构

$$(V_1 \bigotimes V_2) \bigotimes V_3 \simeq V_1 \bigotimes (V_2 \bigotimes V_3).$$

特别, 多个线性空间的张量积可以约化为一系列二重张量积:

$$V_1 \bigotimes \cdots \bigotimes V_n = (\cdots (V_1 \bigotimes V_2) \bigotimes \cdots) \bigotimes V_n.$$

*(2)* 给定线性空间$U, V$, 则有张量积空间的同构

$$\sigma_{U,V} : U \bigotimes V \to V \bigotimes U,\ u \otimes v \mapsto v \otimes u$$

满足$\sigma_{V,U} \circ \sigma_{U,V} = \mathrm{id}_{U \bigotimes V}$.

*(3)* 给定线性空间$U_1, U_2, U, V_1, V_2, V$, 则有张量积关于直和的分配律

$$(U_1 \bigoplus U_2) \bigotimes V \simeq (U_1 \bigotimes V) \bigoplus (U_2 \bigotimes V),\ U \bigotimes (V_1 \bigoplus V_2) \simeq (U \bigotimes V_1) \bigoplus (U \bigotimes V_2).$$

*(4)* $F$作为*1*维线性空间是张量运算的恒等元:

$$F \bigotimes V \simeq V \simeq V \bigotimes F$$

对任取的线性空间$V$成立. *(*与此相对, 零空间0是直和运算的恒等元.*)*

除了线性空间的张量积, 我们还可以考虑映射的张量积:

**命题 4.10.** 给定线性空间$U_1, U_2, V_1, V_2$, 存在线性空间之间的自然映射

$$\mathrm{Hom}(U_1, V_1) \bigotimes \mathrm{Hom}(U_2, V_2) \to \mathrm{Hom}(U_1 \bigotimes U_2, V_1 \bigotimes V_2),\ f_1 \otimes f_2 \mapsto (u_1 \otimes u_2 \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)).$$

当$U_1, U_2, V_1, V_2$都是有限维线性空间时, 该映射是线性空间之间的同构.

证明. 对于$f_j \in \mathrm{Hom}(U_j, V_j)$, 可以直接验证

$$U_1 \times U_2 \to V_1 \bigotimes V_2, (u_1, u_2) \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$$

是双线性映射, 因而

$$\eta : \mathrm{Hom}(U_1, V_1) \times \mathrm{Hom}(U_2, V_2) \to \mathrm{Hom}(U_1 \bigotimes U_2, V_1 \bigotimes V_2),\ (f_1, f_2) \mapsto (u_1 \otimes u_2 \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(v_2))$$

是定义良好的双线性映射, 并诱导命题中的线性映射.

取基底如下

$$U_1:(\alpha_1,\cdots,\alpha_m);\ U_2:(\beta_1,\cdots,\beta_n);\ V_1:(\gamma_1,\cdots,\gamma_k);\ V_2:(\delta_1,\cdots,\delta_\ell);$$

并取对偶基底

$$U_1^\vee:(\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_m^\vee);\ U_2^\vee:(\beta_1^\vee,\cdots,\beta_n^\vee).$$

则有同构$\mathrm{Hom}(U_j,V_j)\simeq U_j^\vee\bigotimes V_j$, $j=1,2$, 并将$\eta$转化为

$$\xi:(U_1^\vee\bigotimes V_1)\bigotimes(U_2^\vee\bigotimes V_2)\to(U_1\bigotimes U_2)^\vee\bigotimes(V_1\bigotimes V_2),\ (f_1^\vee\otimes v_1)\otimes(f_2^\vee\otimes v_2)\mapsto(f_1^\vee\otimes f_2^\vee)\otimes(v_1\otimes v_2).$$

容易验证$\xi$将基底$(\alpha_i^\vee\otimes\gamma_\mu)\otimes(\beta_j^\vee\otimes\delta_\nu)$映成基底$(\alpha_i^\vee\otimes\beta_j^\vee)\otimes(\gamma_\mu\otimes\delta_\nu)$, 因而是同构. □

# 5. 外积和对称积

在许多数学分支中自然出现了反对称张量积和对称张量积结构. 本节结合多重线性函数的性质简要讨论这方面的内容. 为简化叙述, 以下主要考虑有限维线性空间, 且假设域$F$包含有理数域$\mathbb{Q}$.

首先考虑双线性函数的情形:

**定义-命题 5.1.** 取定有限维线性空间$V$和线性空间$T$.

(1) 对于$V$上的$T$-值双线性映射$f: V\times V\to T$, 若$f$满足$f(v_1,v_2)=f(v_2,v_1),\forall v_1,v_2\in V$, 则称$f$是对称的. 记$\mathrm{Sym}^2(V;T)$为$V$上$T$-值对称双线性映射全体构成的集合.

(2) $\mathrm{Sym}^2(V;T)\subset \mathrm{Map}(V\times V,T)$在$T$-值映射的逐点线性运算下构成线性空间, 并且是$\mathrm{Mult}(V,V;T)$的线性子空间.

(3) 记$RS^2_V$为$F^{\oplus V\times V}$中由$R_{V,V}$和如下向量生成的线性子空间

$$e_{(v_1,v_2)}-e_{(v_2,v_1)},\ \forall v_1,v_2\in V.$$

取$\iota: RS^2_V\to F^{\oplus V\times V}$为包含映射, $QS^2=\mathrm{Coker}(\iota)$为对应的商空间, 即有正合列

$$0\to RS^2_V\xrightarrow{\iota}F^{\oplus V\times V}\xrightarrow{\pi}QS^2\to 0.$$

则应用$\mathrm{Hom}(_,T)$得到如下正合列

$$0\to \mathrm{Hom}(QS^2,T)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Map}(V\times V,T)\to \mathrm{Hom}(RS^2_V,T)\to 0.$$

由此得到线性空间的同构$\mathrm{Hom}(QS^2,T)\simeq\mathrm{Sym}^2(V;T)$.

我们称$QS^2$为$V$(在$F$上的)二重对称张量积, 记作$\mathrm{Sym}^2V$.

(4) 注意到$RS^2_V$是$F^{\oplus V\times V}$中包含$R_{V,V}$的线性子空间, 因而$QS^2$可实现为$Q=V\bigotimes V=F^{\oplus V\times V}/R_{V,V}$的商空间. 事实上$QS^2$在$V\bigotimes V$中的象是由

$$\{v_1\otimes v_2-v_2\bigotimes v_1: v_1,v_2\in V\}$$

生成的线性子空间, 因而:

$$\mathrm{Sym}^2V=V\bigotimes V/\mathrm{Span}(v_1\otimes v_2-v_2\otimes v_1: v_1,v_2\in V).$$

记$v_1v_2=v_2v_1$为$v_1\otimes v_2\in V\bigotimes V$在$\mathrm{Sym}^2V$中的象, 则$\mathrm{Sym}^2V$中每个元素都是形如$v_1v_2$的线性组合. 特别, 若$V$有基底$(e_1,\cdots,e_n)$, 则$(e_ie_j: 1\le i\le j\le n)$是$\mathrm{Sym}^2V$的基底, $\dim(\mathrm{Sym}^2V)=\binom{n+1}{2}$.

**定义-命题 5.2.** 取定有限维线性空间$V$和$T$.

(1) 对于$V$上的$T$-值双线性映射$f: V\times V\to T$, 若$f$满足$f(v_1,v_2)=-f(v_2,v_1),\forall v_1,v_2\in V$, 则称$f$是反对称的. 记$\mathrm{Alt}^2(V;T)$为$V$上$T$-值反对称双线性映射全体构成的集合.

(2) $\mathrm{Alt}^2(V;T)\subset\mathrm{Map}(V\times V,T)$在$T$-值映射的逐点线性运算下构成线性空间, 并且是$\mathrm{Mult}(V,V;T)$的线性子空间.

(3) 记$RA_V^2$为$F^{\oplus V\times V}$中由$R_{V,V}$和如下向量生成的线性子空间

$$e_{(v_1,v_2)}+e_{(v_2,v_1)},\ \forall v_1,v_2\in V.$$

取$\iota: RA_V^2\to F^{\oplus V\times V}$为包含映射, $QA^2=\mathrm{Coker}(\iota)$为对应的商空间, 即有正合列

$$0\to RA_V^2\xrightarrow{\iota}F^{\oplus V\times V}\xrightarrow{\pi}QA^2\to 0.$$

则应用$\mathrm{Hom}(_,T)$得到如下正合列

$$0\to \mathrm{Hom}(QA^2,T)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Map}(V\times V,T)\to \mathrm{Hom}(RA_V^2,T)\to 0.$$

由此得到线性空间的同构$\mathrm{Hom}(QA^2,T)\simeq\mathrm{Alt}^2(V;T)$.

我们称$QA^2$为$V$(在$F$上的)二重反对称张量积, 记作$\mathrm{Alt}^2(V)$, 也记作$V\bigwedge V$.

(4) 注意到$RA_V^2$是$F^{\oplus V\times V}$中包含$R_{V,V}$的线性子空间, 因而$QA^2$可实现为$Q=V\bigotimes V=F^{\oplus V\times V}/R_{V,V}$的商空间. 事实上$QA^2$在$V\bigotimes V$中的象是由

$$\{v_1\otimes v_2+v_2\bigotimes v_1: v_1,v_2\in V\}$$

生成的线性子空间, 因而:

$$\mathrm{Alt}^2V=V\bigotimes V/\mathrm{Span}(v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1: v_1,v_2\in V).$$

记$v_1\wedge v_2=-v_2\wedge v_1$为$v_1\otimes v_2\in V\bigotimes V$在$\mathrm{Alt}^2V$中的象, 则$\mathrm{Alt}^2V$中每个元素都是形如$v_1\wedge v_2$的线性组合. 特别, 若$V$有基底$(e_1,\cdots,e_n)$, 则$(e_i\wedge e_j: 1\le i<j\le n)$是$\mathrm{Alt}^2V$的基底, $\dim(\mathrm{Alt}^2V)=\binom{n}{2}$.

与此类似, 我们可以构造多重的对称/反对称张量积:

**定义-命题 5.3.** 取定有限维线性空间$V$及正整数$m$. 记$S_m$为$\{1,\cdots,m\}$到自身的双射全体, 即$m$个文字的置换群.

(1) $V$自身的$m$重张量积$V^{\otimes m}=V\bigotimes\cdots\bigotimes V$中有线性子空间素

$$RS_m=\{v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m-v_{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma_m}:\ v_1,\cdots,v_m\in V,\ \sigma=(i\mapsto\sigma_i)\in S_m\}.$$

对应的商空间$V^{\otimes m}/RS_m$称为$V$的$m$重对称张量积空间, 记作$\mathrm{Sym}^mV$. 我们有正合列

$$0\to RS_m\xrightarrow{\iota}V^{\otimes m}\xrightarrow{\pi}\mathrm{Sym}^mV\to 0.$$

(2) 对任意线性空间$T$, 线性空间$\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^mV,T)$自然同构于$V^m$上取值于$T$中的对称$m$重线性映射全体构成的线性空间, 也就是

$$\mathrm{Sym}^(V;T):=\{f\in\mathrm{Mult}(V,\cdots,V;T): f(v_1,\cdots,v_m)=f(v_{\sigma_1},\cdots,v_{\sigma_m}),\forall v_1,\cdots,v_m\in V,\ \sigma=(i\mapsto\sigma_i)\in S_m\}$$

(3) 记$v_1\cdots v_m$为$v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{\otimes m}$在$\mathrm{Sym}^mV$中的象. 则$\mathrm{Sym}^mV$中的每个元素都可写成这样元素的有限线性组合.

若$(e_1,\cdots,e_n)$是$V$的一个基底($n=\dim V$), 则

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}:1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_m\le n)$$

是$\mathrm{Sym}^mV$的一个基底. 记$F[X_1,\cdots,X_n]_m$为$F$上关于变量$X_1,\cdots,X_n$的$m$次齐次多项式构成的线性空间, 则

$$\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le n}c_{i_1,\cdots,i_m}X_{i_1}\cdots X_{i_m}\mapsto\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le n}c_{i_1,\cdots,i_m}e_{i_1}\cdots e_{i_m}$$

给出线性同构$F[X_1,\cdots,X_n]_m\to\mathrm{Sym}^mV$. 特别有$\dim\mathrm{Sym}^mV=\binom{n+m-1}{m}$.

特别当$m=0$时, 我们规定$\mathrm{Sym}^0V=F$. 利用上面的多项式描述, 这对应于零次多项式, 也就是来自$F$的元素(作为常数).

**定义-命题 5.4.** 取定有限维线性空间$V$及正整数$m$. 仍记$S_m$为$m$个文字的置换群. 对于置换$\sigma=(i\mapsto\sigma_i)\in S_m$, 记$\mathrm{sgn}(\sigma)$为$\sigma$作为置换的符号, 也就是方阵$(\delta_{i,\sigma_j})_{1\le i,j\le m}$的行列式.

(1) $V$自身的$m$重张量积$V^{\otimes m}=V\bigotimes\cdots\bigotimes V$中有线性子空间素

$$RA_m=\{v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m-\mathrm{sgn}(\sigma)v_{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma_m}:\ v_1,\cdots,v_m\in V,\ \sigma\in S_m\}.$$

对应的商空间$V^{\otimes m}/RA_m$称为$V$的$m$重反对称张量积空间, 记作$\mathrm{Alt}^mV$, 也记作$\bigwedge^m V$. 我们有正合列

$$0\to RA_m\xrightarrow{\iota}V^{\otimes m}\xrightarrow{\pi}\mathrm{Alt}^mV\to 0.$$

(2) 对任意线性空间$T$, 线性空间$\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^m(V),T)$自然同构于$V^m$上取值于$T$中的反对称$m$重线性映射全体构成的线性空间, 也就是

$$\mathrm{Alt}^m(V;T):=\{f\in\mathrm{Mult}(V,\cdots,V;T):f(v_1,\cdots,v_m)=\mathrm{sgn}(\sigma)f(v_{\sigma_1},\cdots,v_{\sigma_m}),\forall v_1,\cdots,v_m\in V,\ \sigma\in S_m\}.$$

(3) 记$v_1\wedge\cdots\wedge v_m$为$v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{\otimes m}$在$\mathrm{Alt}^mV$中的象. 则$\mathrm{Alt}^mV$中的每个元素都可写成这样元素的有限线性组合.

若$(e_1,\cdots,e_n)$是$V$的一个基底($n=\dim V$), 则

$$(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_m}:1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n)$$

是$\mathrm{Alt}^mV$的一个基底. 特别有$\dim\mathrm{Alt}^mV=\binom{n}{m}$, 并且$m>n$时$\mathrm{Alt}^mV=0$.

注意$\mathrm{Alt}^nV=Fe_1\wedge\cdots\wedge e_n$是一维线性空间. 对于$m=0$, 我们规定$\mathrm{Alt}^0V=F$.

上述性质的证明留作练习.

**命题 5.5.** 若$W=U\bigoplus V$是有限维线性空间的直和分解, 则对任意的$N\in\mathbb{N}$有如下同构

$$\mathrm{Sym}^NW\simeq\bigoplus_{j=0,\cdots,N}\mathrm{Sym}^jU\bigotimes\mathrm{Sym}^{N-j}V;\ \mathrm{Alt}^NW\simeq\bigoplus_{j=0,\cdots,N}\mathrm{Alt}^jU\bigotimes\mathrm{Alt}^{N-j}V.$$

特别, 若$m=\dim U,n=\dim V,d=\dim W=m+n$, 则计算上述同构的维数可得

$$\binom{m+n}{N}=\sum_{j=0,\cdots,N}\binom{m}{j}\binom{n}{N-j}.$$

*Proof.* □

对于对偶空间, 我们有如下性质:

**命题 5.6.** 若$V$是有限维线性空间, 则对任意$m \in \mathbb{N}$存在自然同构

$$\mathrm{Sym}^m(V^\vee)\simeq(\mathrm{Sym}^m V)^\vee,\ \mathrm{Alt}^m(V^\vee)\simeq(\mathrm{Alt}^m V)^\vee.$$

**命题 5.7.** 取定$d$维线性空间$V$, 基底为$e=(e_1,\cdots,e_d)$, 对偶空间$V^\vee$的对偶基底为$e^\vee=(e_1^\vee,\cdots,e_d^\vee)$.

*(1)* $\mathrm{Alt}^d V$是一维线性空间, 有基底$e_1\wedge\cdots\wedge e_d$;

*(2)*

$$\mathrm{Alt}^m V\times\mathrm{Alt}^{d-m}V\to\mathrm{Alt}^d V,\ (v_1\wedge\cdots\wedge v_m, v_{m+1}\wedge\cdots\wedge v_d)\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_d$$

是双线性映射, 并且诱导 $(\mathrm{Alt}^m V)^\vee\simeq\mathrm{Alt}^{d-m}V$.

最后, 我们注意线性映射的张量积有以下衍生形式 (证明从略):

**命题 5.8.** 若$f:U\to V$是线性映射, 则$f$诱导了如下的线性映射

$$\mathrm{Sym}^m(f):\mathrm{Sym}^m U\to\mathrm{Sym}^m V,\ u_1\cdots u_m\mapsto f(u_1)\cdots f(u_m)$$

$$\mathrm{Alt}^m(f):\mathrm{Alt}^m U\to\mathrm{Alt}^m V,\ u_1\wedge\cdots\wedge u_m\mapsto f(u_1)\wedge\cdots\wedge f(u_m).$$

特别, 若$f:V\to V$是$d$维线性空间$V$到自身的线性映射, 在$V$的基底$e=(e_1,\cdots,e_n)$下的方阵表示为$(a_{ij})$ ($f(e_j)=\sum_i a_{ij}e_i,\forall i$), 则$\mathrm{Alt}^d(f):\mathrm{Alt}^d V\to\mathrm{Alt}^d$在基底$e_1\wedge\cdots\wedge e_d$下的方阵表示为常数$\det(a_{ij})$, 不依赖于基底的选取.

有时也将$\mathrm{Alt}^{\dim V}V$记作$\det V$, 而$f:V\to V$诱导的映射$\det(f):\det(V)\to\det(V)$就是用$f$的任一方阵表示的行列式给出的数乘; 我们可以将映射$\det(f)$等同于唯一的$F$中元素$\det(a_{ij})$(不依赖于基底的选取).

**推论 5.9.** 给定有限维线性空间$V$上的自同态$f:V\to V$. 已知存在$U\subset V$是线性子空间, 在$f$作用下不变, 即$f(U)\subset U$. 记$h:U\to U$为$f$在$U$上的限制, 即$h(u)=f(u)$; 记$g:V/U\to V/U$为$f$诱导的商空间$V/U$上的自同态, 即$g([v])=[f(v)],\forall[v]\in V/U$. 则有$\det(f)=\det(g)\det(h)$.

证明. 仿照2.8, 可取$V$的基底$e=(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n)$使得$(u_1,\cdots,u_m)$是$U$的基底, 且$([v_1],\cdots[v_n])$是$W$的基底. 则$f$的方阵表示$\mathrm{Mat}_e(f)$是分块上三角方阵, 对角块分别是$h$和$g$的方阵表示. 直接计算可得$\det(f)=\det(g)\det(h)$.

(也可以证明$\det(V)\simeq\det(U)\bigotimes\det(W)$, 从而得到作为映射的等式$\det(f)\simeq\det(h)\otimes\det(g)$, 再取基底直接计算.) □

## 6. 对称代数与外代数

对于$F$上的有限维线性空间$V$, 我们注意到有自然的双线性映射

$$\mathrm{Sym}^m V \times \mathrm{Sym}^n V \to \mathrm{Sym}^{m+n} V,\ \mathrm{Alt}^m V \times \mathrm{Alt}^n V \to \mathrm{Alt}^{m+n} V$$

性质类似乘积. 为此我们引入$F$代数的概念. 相关内容在环论中有更详细的展开.

**定义 6.1.** (1) 域$F$上的代数(亦称为$F$-代数)是带有额外的乘法结构的$F$上线性空间$A$: 详言之, 在$A$上存在$F$-双线性映射

$$A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \cdot b = ab$$

满足以下条件:

结合律 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a,b,c \in A$;

中心 $\exists \phi : F \to A, c \mapsto \phi(c)$ 满足$\phi(c) \cdot a = a \cdot \phi(c), \forall a \in A$;

幺元 $\phi(1) \cdot a = a = a \cdot \phi(1), \forall a \in A$ (此处$1 = 1_F$是$F$的乘法单位元).

可以证明上面的$\phi : F \to A$是单射, 由此通常将$c \in F$与$\phi(c) \in A$等同, 直接记为$c$.

给定$F$-代数$A, B$, $A$到$B$的$F$-代数同态指的是$F$-线性映射$f : A \to B$满足

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2),\ \forall a_1, a_2 \in A.$$

注意此时必有$f(1) = 1$.

若$F$-代数同态$f : A \to B$可逆, 即存在$F$-代数同态$g : B \to A$满足$g \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ g = \mathrm{id}_B$, 则称$f$是$A$到$B$的$F$-代数同构.

类似于线性空间的情形, 我们可以讨论给定代数的子代数、商代数等概念.

(2) 更进一步, $F$上的分次代数是带有额外的分次结构的$F$-代数$A$: 分次结构指的是$A$作为线性空间有直和分解$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$满足

$$a_m \cdot a_n \in A_{m+n},\ \forall a_m \in A_m, a_n \in A_n, m, n \in \mathbb{Z}.$$

称$A_n$为$A$中次数为$n$的齐次部分. 每个$a \in A$可唯一写成有限求和$a = \sum_n a_n$: $a_n$称为$a$的$n$-次分量. $A$中的齐次元素指的是并集$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}$中的元素.

类似地, 对于两个分次$F$-代数$A$和$B$, 可以考虑分次代数同态$f : A \to B$: $\phi$是$F$-代数同态, 同时保持分次结构, 即$f(A_m) \subset B_m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. 分次$F$-代数的同构可以仿照(1)来定义.

**注记 6.2.** (1) 上面(1)中定义的代数也称作$F$上的结合含幺代数.

(2) 上面(2)中的分次用到整数加法群$\mathbb{Z}$. 也可以讨论按照指定的交换群$G$作分次的$G$-分次代数: 即$F$-代数$A$具有线性空间分解$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, 满足

$$a_g \cdot a_h \in a_{g+h},\ \forall a_g \in A_g, a_h \in A_h, g, h \in G.$$

本文中的域$F$是固定的, 因此后面经常省略$F$, 直接称“代数”、“分次代数”等.

**例 6.3.** 取定有限维线性空间$V$.

(1) $\mathrm{End}(V)=\mathrm{Hom}(V,V)$是$V$到自身的线性自同态全体构成的线性空间. 复合映射

$$\mathrm{End}(V)\times\mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V),(\phi,\psi)\mapsto\phi\circ\psi$$

是双线性映射. 定义

$$F\to\mathrm{End}(V),\ c\mapsto c\cdot\mathrm{id}_V(v\mapsto cv).$$

则$(\mathrm{End}(V),\circ,c\mapsto c\cdot\mathrm{id}_V)$给出了一个代数. 注意这个代数的乘法(复合)不满足交换律.

取定$V$的一个基底$e=(e_1,\cdots,e_d)$, 则有映射

$$\mathrm{End}(V)\to\mathrm{Mat}_{d\times d}(F),\ \phi\mapsto\mathrm{Mat}_e(\phi).$$

线性代数的知识告诉我们这是代数同构.

(2) 考虑$F$是实数域$\mathbb{R}$的情形. 复数域$V=\mathbb{C}$是二维实线性空间, 有基底$e=(1,\mathbf{i})$ ($\mathbf{i}$为虚数单位). 由此可将$\mathrm{End}(V)$与$\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$等同. 定义

$$A=\{\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\}.$$

容易验证$A$本身是$\mathbb{R}$-代数, 且乘法交换, 是$\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$的子代数.

定义映射

$$\phi:\mathbb{C}\to A,\ a+b\mathbf{i}\mapsto\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}.$$

可以验证这是$\mathbb{R}$-代数的同构: $\phi(z)=\mathrm{Mat}_e(m_z)$就是在$V=\mathbb{C}$上用$z=a+b\mathbf{i}$定义的线性映射$x\mapsto zx$的方阵表示.

(3) 规定$V^{\otimes0}=F$. 直和$R:=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V^{\otimes n}$上带有自然的分次代数结构:

- 定义

$$V^{\otimes m}\times V^{\otimes n}\to V^{\otimes(m+n)},\ (u_1\otimes\cdots\otimes u_m,v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\mapsto u_1\otimes\cdots\otimes u_m\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n.$$

  这一定义通过直和结构扩张为双线性映射$R\times R\to R$.
- 定义$F\to R,c\mapsto c\in F=V^{\otimes0}$.
- 对$m\in\mathbb{N}$, 定义$R_m=V^{\otimes m}$; 对$m\in\mathbb{Z}_{<0}$, 定义$R_m=0$.

直接按照定义可以验证, 这给出了$R$上的分次代数结构. 我们记$\mathbf{T}(V):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V^{\otimes n}$, 称之为线性空间$V$对应的张量代数. 注意$\mathbf{T}(V)$的乘法是非交换的.

容易验证: 若$f:U\to V$是线性映射, 则$f$诱导了线性映射

$$f^{\otimes n}:U^{\otimes n}\to V^{\otimes n},\ u_1\otimes\cdots u_n\mapsto f(u_1)\otimes\cdots\otimes f(u_n).$$

(规定$f^{\otimes0}:F\to F$为恒等映射). 直和$\mathbf{T}(f):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}f^{\otimes n}:\mathbf{T}(U)\to\mathbf{T}(V)$是分次代数同态. 若$f:U\to V$是线性空间同构, 则$\mathbf{T}(f)$是分次代数同构.

(4) 直和$R:=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}^nV$上带有自然的分次代数结构:

- 定义

$$\mathrm{Sym}^m V \times \mathrm{Sym}^n V \to \mathrm{Sym}^{m+n} V,\ (u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_n) \mapsto u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n.$$

  这一定义通过直和结构扩张为双线性映射$R \times R \to R$.
- 定义$F \to R, c \mapsto c \in F = \mathrm{Sym}^0 V$.
- 对$m \in \mathbb{N}$, 定义$R_m = \mathrm{Sym}^m V$; 对$m \in \mathbb{Z}_{<0}$, 定义$R_m = 0$.

直接按照定义可以验证, 这给出了$R$上的分次代数结构. 我们记$\mathrm{Sym}(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n V$, 称之为线性空间$V$对应的对称张量代数. 注意$\mathrm{Sym}(V)$的乘法是交换的.

容易验证: 若$f : U \to V$是线性映射, 则$f$诱导了线性映射$\mathrm{Sym}^n f : \mathrm{Sym}^n U \to \mathrm{Sym}^n V$, 并由此扩张为分次代数同态$\mathrm{Sym}(f) : \mathrm{Sym}(U) \to \mathrm{Sym}(V)$.

特别, 取定$V$的一个基底$e = (e_1, \cdots, e_d)(d = \dim V)$, 则有线性空间的同构

$$U := FX_1 \bigoplus \cdots \bigoplus FX_d \to V, X_i \mapsto e_i$$

$(X_1, \cdots, X_d$为互异的$n$个文字). 可以直接验证$\mathrm{Sym}(U) = F[X_1, \cdots, X_d]$就是$F$上$n$个文字生成的多项式代数, 而$d$维线性空间$V$的对称张量代数与它同构.

(5) 直和$R := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Alt}^n V$上带有自然的分次代数结构:

- 定义

$$\mathrm{Alt}^m V \times \mathrm{Alt}^n V \to \mathrm{Alt}^{m+n} V,\ (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \mapsto u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

  这一定义通过直和结构扩张为双线性映射$R \times R \to R$.
- 定义$F \to R, c \mapsto c \in F = \mathrm{Alt}^0 V$.
- 对$m \in \mathbb{N}$, 定义$R_m = \mathrm{Alt}^m V$; 对$m \in \mathbb{Z}_{<0}$, 定义$R_m = 0$. 事实上$m \notin [0, \dim V]$时有$R_m = 0$.

直接按照定义可以验证, 这给出了$R$上的分次代数结构. 我们记$\mathrm{Alt}(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Alt}^n V$, 称之为线性空间$V$对应的反对称张量代数, 又称为$V$的外代数.

注意$\mathrm{Alt}(V)$的乘法是不交换的, 但齐次元素的乘法有较好的性质: 若有$\alpha \in \mathrm{Alt}^m(V), \beta \in \mathrm{Alt}^n(V)$, 则有$\alpha \wedge \beta = (-1)^{mn} \beta \wedge \alpha$成立. 同时$\dim \mathrm{Alt}(V) = 2^{\dim V}$, 而上面的$\mathbf{T}(V)$, $\mathrm{Sym}(V)$在$V \neq 0$时是无限维的.

容易验证: 若$f : U \to V$是线性映射, 则$f$诱导了线性映射$\mathrm{Alt}^n f : \mathrm{Alt}^n U \to \mathrm{Alt}^n V$, 并由此扩张为分次代数同态$\mathrm{Alt}(f) : \mathrm{Alt}(U) \to \mathrm{Alt}(V)$.

**例 6.4** (三维空间的外积)**.** 取定三维空间$V = F^3$, 带有标准基底$e = (e_1, e_2, e_3)$, 其对偶空间$V^\vee$有对偶基底$e^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, e_3^\vee)$. 取定$V$上的双线性映射

$$V \times V \xrightarrow{\langle , \rangle} F,\ \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle = \sum_i x_i y_i.$$

则$\langle , \rangle$诱导同构

$$V \to V^\vee, e_i \mapsto e_i^\vee.$$

另一方面, $\mathrm{Alt}^2V=V\bigwedge V$有基底$(e_1\wedge e_2,e_2\wedge e_3,e_\wedge e_1)$. 5.7给出同构

$$\mathrm{Alt}^2V\to V^\vee,e_2\wedge e_3\mapsto e_1^\vee,e_3\wedge e_1\mapsto e_2^\vee,e_1\wedge e_2\mapsto e_3^\vee.$$

由此得到同构$V\bigwedge V\to V$, 对应的反对称双线性映射就是叉积

$$V\times V\to V,\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2y_3-y_2x_3\\x_3y_1-y_3x_1\\x_1y_2-y_1x_2\end{bmatrix}.$$

同样由上述同构$\mathrm{Alt}^2V\simeq V^\vee$, 可以验证: 三个向量的混合积$[u,v,w]=\langle u\times v,w\rangle$等于外积$u\wedge v\wedge w$在标准基底$e_1\wedge e_2\wedge e_3$下的坐标, 也等于线性映射

$$V\to V:\ e_1\mapsto u,e_2\mapsto v,e_3\mapsto w$$

的行列式.

作为外代数的应用, 我们讨论Cayley-Hamilton定理. 首先定义自同态的迹:

**定义 6.5** (迹)**.** 给定有限维线性空间$V$, 取其基底$e=(e_1,\cdots,e_n)$, 及其对偶空间$V^\vee$的对偶基底$e^\vee=(e_1^\vee,\cdots,e_n^\vee)$. 对线性自同态$f:V\to V$, 定义$f$的迹为

$$\mathrm{Tr}(f)=\sum_{j=1,\cdots,n}e_j^\vee(f(e_j)).$$

注意双线性映射

$$V\times V^\vee\to F,\ (v,\phi)\mapsto\phi(v)$$

对应的映射$\mathbf{ev}\in\mathrm{Hom}(V\bigotimes V^\vee,F)$在同构$\mathrm{Hom}(V\bigotimes V^\vee,F)\simeq\mathrm{Hom}(V,V)=\mathrm{End}(V)$下映为$\mathrm{id}_V$ (利用自然同构$(V^\vee)^\vee\simeq V$), 而$\mathbf{ev}$的伴随映射$\mathbf{ev^t}:F\to V\bigotimes V^\vee$恰为$1\mapsto\mathrm{id}_V=\sum_j e_j\otimes e_j^\vee$, 故$\mathrm{Tr}(f)$可以实现为下列映射的复合

$$F\overset{\mathbf{ev^t}}{\to}V\bigotimes V^\vee\overset{f\otimes\mathrm{id}_{V^\vee}}{\longrightarrow}V\bigotimes V^\vee\overset{\mathbf{ev}}{\to}F.$$

特别, 这不依赖于基底和坐标的选取.

**命题 6.6.** *取定$d$维线性空间$V$的自同态$f$($d\in\mathbb{N}_{>0}$), 并诱导$\mathrm{Alt}^mV$上的自同态$\mathrm{Alt}^m(f)$ ($m=0,1,\cdots,d$, 约定$\mathrm{Alt}^0(f)=\mathrm{id}_F$).*

*(1) 若$f$在$V$的基底$e=(e_1,\cdots,e_n)$下的方阵表示为$\mathrm{Mat}_e(f)=(a_{ij})$, 则*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^mf)=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_m\le m}\det(a_{k_ik_j})_{1\le i,j\le m}$$

*即为$(a_{ij})$的所有$m$-阶主子式之和.*

特别地, 若$f:V\to V$可以上三角化, 即存在$V$的基底$e=(e_1,\cdots,e_d)$使$\mathrm{Mat}_e(f)$为上三角方阵, 对角线上的系数依次为$z_1,\cdots,z_d$. 则$\mathrm{Alt}^m(f)$在$\mathrm{Alt}^mV$上的迹为

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^m(f))=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le d}z_{i_1}\cdots z_{i_m}.$$

*(2)* 在$\mathrm{End}(V)$中成立等式

$$\sum_{j=0,\cdots,d}(-1)^j\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^j(f))f^{d-j}=0.$$

证明概要. (1) 由题设$f(e_j)=\sum_{i=1,\cdots,n}a_{ij}e_i$, 因而对于$1\le k_1<\cdots<k_m\le n$

$$\mathrm{Alt}^m(f)(e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_m}=(\sum_i a_{ik_1}e_{k_1}))\wedge\cdots\wedge(\sum_i a_{ik_m}e_{k_m})=\sum_{1\le\ell_1<\cdots<\ell_m\le n}\det(a_{\ell_i k_j})_{1\le i,j\le m}e_{\ell_1}\wedge\cdots\wedge e_{\ell_m}.$$

比较系数可得$\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^m f)=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_m\le m}\det(a_{k_ik_j})_{1\le i,j\le m}$.

上三角情形是上述等式的特例.

(2) 我们借助域扩张和张量积的相关概念简述证明思路.

记$K$为$F$的代数闭包. $V_K=V\bigotimes_F K$是$K$上$d$维线性空间. 取$e=(e_1,\cdots,e_d)$为$V$的$F$-基底, 则$e\otimes 1:=(e_1\otimes 1,\cdots,e_d\otimes 1)$为$V_K$的$K$-基底. $f$诱导$V_K$上的$K$-线性自同态$\phi:=f\otimes\mathrm{id}_K$.

直接计算可得$\mathrm{Mat}_e(f)$和$\mathrm{Mat}_{e\otimes 1}(\phi)$在$\mathrm{Mat}_{d\times d}(K)$中相等, 因此$\mathrm{Tr}(f)=\mathrm{Tr}(\phi)$. 与此类似, $\mathrm{Alt}^mV\bigotimes_F K=\mathrm{Alt}^m(V_K)$作为$K$-线性空间同构, 因而$\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^m f)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^m\phi), \forall m=0,1,\cdots,d$. 注意到$f\mapsto\phi=f\otimes 1$给出了$F$-代数的单射$\mathrm{End}_F(V)\to\mathrm{End}_K(V_K)$, 因而

$$\sum_{j=0,\cdots,d}(-1)^j\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^j(f))f^{d-j}$$

在$\mathrm{End}_F(V)$中为零当且仅当

$$\sum_{j=0,\cdots,d}(-1)^j\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^j(\phi))\phi^{d-j}$$

在$\mathrm{End}_K(V_K)$中为零.

由此我们可以假设$F=K$是代数闭域. 此时$f$可以上三角化. 不妨设$f$的上三角方阵表示的对角线上元素依次为$z_1,\cdots,z_d$. 则

$$\sum_{j=0,\cdots,d}(-1)^j\mathrm{Tr}(\mathrm{Alt}^j(f))f^{d-j}=\sum_{j=0,\cdots,d}(-1)^j\prod_{1\le i_1<\cdots<i_j\le d}z_{i_1}\cdots z_{i_j}f^n=\prod_{1\le k\le d}(f-z_k\mathrm{id}_V).$$

在方阵环中直接计算可得等式右边为0. □