2023 数学分析 C 期末考试

will　　　　捡到试卷的群友

某平凡的数学讨论群

版本：0.10

日期：2023 年 2 月 21 日

注　意

这张试卷是王奕倩老师和苗栋老师一起出的, 同时具有两个老师的出题特点.

一、(10 分)

1. 将 $e^{-x}, x \in (0, \pi)$ 分别作奇延拓和偶延拓, 求其 Fourier 展开.
2. 求 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k(2k-1)}{4k^2+1}$.

二、(10 分) 设 $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$ 在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 上连续. 求

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

三、(10 分) 设三角级数 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 一致收敛, 其中 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
证明: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty$
若仅知该级数收敛, 是否仍然有相同结论? 说明理由.

四、(10 分) 计算:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}t$$

五、(10 分) 设 $f(x, y)$ 在 $x, y \leqslant 0$ 上非负连续, 广义积分 $J(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 和 $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 分别关于 x 和 y 在 y 在 $[0, +\infty)$ 上内闭一致收敛. 设广义积分 $\int_0^{+\infty} I(y)$ 收敛 (记为 S).
证明: 广义重积分 $\int_{x,y\leqslant 0} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛并等于 S.

六、(20 分) 设周期为 1 的函数 f 在 $[0, 1]$ 上广义可积且平方可积. 设 $\varepsilon > 0$
定义 $f_\varepsilon : \mathbb{R} \ni x \mapsto \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)\,\dfrac{\mathrm{d}t}{2\varepsilon}$.
证明 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^1 |f - f_\varepsilon|^2 = 0$ (注: 箭头符号 ↓ 原文如此)

七、(20 分) 设 $B \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球, $y \in \mathbb{R}^3$ 模长为 $\dfrac{1}{2}$. 求积分:

$$\int_B \frac{\mathrm{d}x}{\|y - x\|},$$

八、(5 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为凸开集, $K \subset \Omega$ 为紧集. 证明: 存在常数 C 使得对任何定义在 Ω 上的凸函数 F(可能无界), 皆有

$$\sup_K |F(x)| \leqslant C \int_\Omega |F(x)|$$

九、(5 分) 记 $\|v\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^6} v^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 设 u 是 $\mathbb{R}^6$ 上具有紧支集的光滑函数.
证明: $\|\nabla u\|_2 \cdot \|u\| \leqslant 2.5\|\|x^{\frac{1}{2}}\|u\|_2$.
其中 $\|x\|$ 表示 $\mathbb{R}^6$ 中向量 x 的欧氏范数.