南京大学数学系试卷（B）

姓名 ____________ 学号 ____________ 院系 ______________

考试科目 复变函数 任课教师 张高飞 考试时间 2015.7.2

题　号	一	二	总　分
得　分			

一、计算题（10×2=20 分）

1. 已知欧拉常数 $\gamma=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log n\right)$.

2. 写出函数 $\cos\pi z$ 的 Hadamard 乘积.

二、证明题 （共 80 分）

1. (15 分)用 Poisson 求和公式证明 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\tau+n)^2}=-4\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{2\pi in\tau}$ (τ 固定 $\operatorname{Im}(\tau)>0$).

2. (10 分)证明方程 $e^z-z=0$ 在复平面内有无穷多个根。

3. (10 分)定义函数 $\operatorname{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$，证明 $\pi(x)\sim\operatorname{Li}(x), x\to\infty$ 。

4. (15 分)证明从上半平面 $\mathbf{H}$ 到单位圆盘 $\mathbf{D}$ 的所有共形映射都具有如下的形式

$$e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\theta\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{H}.$$

5. (10 分)假设 $f:D(0,R)\to\mathbf{C}$ 为一个全纯函数，且存在 $M>0$ 使得 $|f(z)|\le M$.证明

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{M^2-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le\frac{|z|}{MR}.$$

6. (20 分)当 $\operatorname{Re}(\alpha)>0,\operatorname{Re}(\beta)>0$ 时，定义 Beta 函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt$. 证明

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

当 $x>0$ 时，定义 Bessel 函数 $J_\nu(x)=\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-(1/2)}dt(\nu>-1/2)$.证明

$$J_\nu(x)=(\frac{x}{2})^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(x^2/4\right)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$