第一章 拓扑空间

我们假设读者已经熟悉了点集拓扑中的基本概念和性质，其中包括拓扑空间的概念、连续映射、拓扑空间的紧致性、连通性、分离性等基本内容。本章我们将主要介绍拓扑空间的同胚、同伦以及在代数拓扑中常见的一些构做拓扑空间的办法。

§1.1 拓扑空间与同胚

在介绍拓扑空间的同胚之前，我们先来回顾一下点集拓扑中的一些基本概念。

定义1.1.1 设X是一个集合，$\mathcal{T}$是X的一个子集族，其元素被称为X的开集，满足：

(1) $X \in \mathcal{T}$，X本身是开集

(2) $\emptyset \in \mathcal{T}$，空集$\emptyset$是开集

(3) $\mathcal{T}$中任意多个开集$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$的并$\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$还是开集。

(4) $\mathcal{T}$中有限个开集的交$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$还是开集。

$\mathcal{T}$被称为X的拓扑，集合X连同其拓扑$\mathcal{T}$，$(X, \mathcal{T})$称为一个拓扑空间。

两个拓扑空间X，Y之间的对应$f : X \longrightarrow Y$称为连续映射，如果对任何Y中的开集V，其对应的原像$f^{-1}(V)$是X中的开集。

例1 任何度量空间(X, ρ)中都可以赋予一种自然的拓扑$\mathcal{T}$。X中开集$U \in \mathcal{T}$ 是X中任意多个开球体$\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha\in I}$的并

$$U = \bigcup_{\alpha\in I} B(x_\alpha, r_\alpha)。$$

两个度量空间X，Y之间的连续映射$f : X \longrightarrow Y$等同与连续映射的$\varepsilon - \delta$定义。

定义1.1.2 如果空间X的任何开覆盖，都有一个有限子覆盖，即：对X的任何开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$，都存在$\mathcal{U}$的一个有限子族

$$\mathcal{U}_0 = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}\}$$

仍构成X的一个开覆盖，则称X是紧致拓扑空间

定义1.1.3 空间X称为Hausdorff空间，如果对X中的任意两点x, y都存在不相交的开邻域U, V将这两点分开，即：$x \in U$，$y \in V$且$U \cap V = \emptyset$。此时X也称为T_2可分离空间。

度量空间(X, ρ)中的有界闭集是紧致的，比如：单位区间$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$和二维欧氏空间中的正方形$I \times I \subset \mathbb{R}^2$等都是紧致空间。而任何度量空间都一定是Hausdorff空间。

定义1.1.4 空间X称为是连通的，如果X不能被分成两个不相交的开集的并，即不存在开集U, V使得$U \cup V = X$且$U \cap V = \emptyset$。

空间X称为是道路连通的，如果X中任何两点x,y之间都可以用一条道路连接，即存在映射$\sigma : I \longrightarrow X$使得$\sigma(0) = x$，$\sigma(1) = y$。这个映射$\sigma$称为$X$中的一条道路。

道路连通的空间一定是连通的。但一般来说：连通的空间不一定是道路连通的。

例2 实数轴$\mathbb{R}$上的单位区间I本身作为一个拓扑空间是紧致的、连通且道路连通的Hausdorff空间。在I中挖去点$\{\frac{1}{2}\}$后$I-\{\frac{1}{2}\}$既不紧致，也不连通。

定义1.1.5 设X,Y是两个拓扑空间，如果存在连续映射$f : X \to Y$和$g : Y \to X$使得$g \cdot f = 1_X$，$f \cdot g = 1_Y$，即

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

可换，则称X与Y同胚，记为$f : X \xrightarrow{\cong} Y$或$X \cong Y$。

例3 记

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i^2 = 1\}$$

为$n+1$维欧氏空间中的标准球面。

$$N = (0, \cdots, 0, 1) \in S^n$$

为球面上的北极。则从S^n上挖去北极点N后$S^n - \{N\}$与n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$同胚。

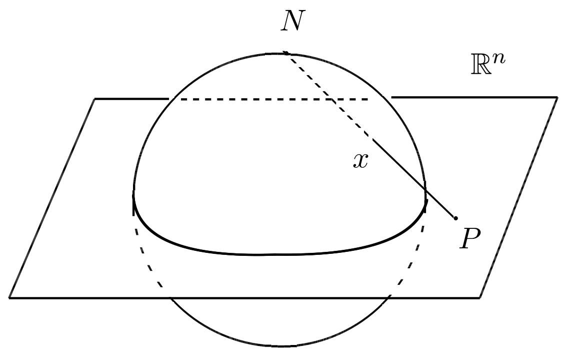


图1.1

如图1.1，记$\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^{n+1}$中最后一个坐标$x_{n+1} = 0$的点。对S^n中任何一点x，从北极N向x引一条射线，交$\mathbb{R}^n$与点P。定义$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$为$f(x) = P$。易知$f$是即单且满的同胚映射。

另外，注意到，在上述映射中北极N应该对应到$\mathbb{R}^n$的无穷远点。因而有$S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$。$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$又被称作$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的一点紧致化。

显然，以上提到的拓扑空间的紧致性、连通性、分离性都是空间的同胚不变量。即：如果X 与Y同胚，则

(1) X是紧致空间当且仅当Y也是紧致空间。
(2) X是Hausdorff空间当前仅当Y是Hausdorff空间。
(3) X是连通（道路连通）空间当且仅当Y也是连通（道路连通）空间。

例4 试证明1维欧氏空间$\mathbb{R}$不与2维欧氏空间$\mathbb{R}^2$同胚。

如果$\mathbb{R}$与$\mathbb{R}^2$同胚，$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 是同胚映射，$g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ 是同胚逆，即：$g\cdot f=1_X$，$f\cdot g=1_Y$。我们假设$f(0)=x_0\in\mathbb{R}^2$，其中0是$\mathbb{R}$的坐标原点。则$g(x_0)=0$。（见图1.2）

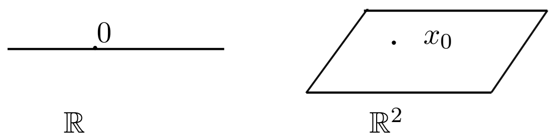


图1.2

考虑$f|_{\mathbb{R}-\{0\}}:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^2-\{x_0\}$。显然它还是同胚映射，但$\mathbb{R}-\{0\}$是不连通的，而$\mathbb{R}^2-\{x_0\}$是连通的。矛盾。

一个自然的问题，既然1维欧氏空间不与2维欧氏空间同胚，那么n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 也应该不与$n+1$维欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$同胚。但利用紧致性、分离性及连通性却不能证明这一点。为此我们需要对拓扑空间引进更多的“不变量”。而基本群，同调群及上同调环就是新的不变量，也可以说是从拓扑空间范畴到群范畴的函子。

定义1.1.6 一个范畴$\mathcal{C}$包含两部分的内容

(1) 对象$X,Y,\cdots\in\mathcal{C}$，（比如拓扑空间、群、分次环等等）。
(2) 对象之间的态射$f:X\to Y$，（比如空间之间的连续映射、群之间的同态等等）。

它们满足

(1) 对于任何态射$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$g\cdot f:X\to Z$还是态射，称为f与g的合成，且满足
$$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f。$$
(2) 对任何对象X，存在态射$1_X:X\to X$，满足对任何态射$f:X\to Y$及$h:Z\to X$
$$f\cdot 1_X=f:X\to Y,\qquad\qquad 1_X\cdot h=h:Z\to X。$$

- 所有的拓扑空间$X,Y,\cdots$及拓扑空间之间的所有的映射$f:X\to Y$构成一个范畴，称为拓扑空间范畴，记为$\mathcal{T}$。
- 所有的群$G,K,\cdots$及群之间所有的同态$h:G\to K$ 构成一个范畴，称为群范畴，记为$\mathcal{G}$。

定义1.1.7 从一个范畴$\mathcal{C}$到另一个范畴$\mathcal{D}$的一个共变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是一个对应，

(1) 任何范畴$\mathcal{C}$中的对象X，对应范畴$\mathcal{D}$中的对象$F(X)\in\mathcal{D}$。

(2) 任何范畴$\mathcal{C}$中的态射$f:X\to Y$，对应范畴$\mathcal{D}$ 中的态射$F(f):F(X)\to F(Y)$。

它们满足

(1) 对任何$1_X:X\to X$，$F(1_X)=1_{F(X)}:F(X)\to F(X)$。

(2) 对任何$\mathcal{C}$中的态射$f:X\to Y$及$g:Y\to Z$，

$$F(g\cdot f)=F(g)\cdot F(f):F(X)\longrightarrow F(Z)。$$

从$\mathcal{C}$到$\mathcal{D}$的反变函子$F^*:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 仍然将对象$X\in\mathcal{C}$对应到对象$F^*(X)\in\mathcal{D}$，将态射$f:X\to Y$ 对应到态射$F^*(f)$，只不过$\mathcal{D}$中的态射$F^*(f)$是反方向的，即：

$$F^*(f):F^*(Y)\longrightarrow F^*(X)。$$

因而对$\mathcal{C}$中的态射$f:X\to Y$及$g:Y\to Z$有

$$F^*(g\cdot f)=F^*(f)\cdot F^*(g):F^*(Z)\longrightarrow F^*(X)。$$

代数拓扑的实质就是构做了一系列的从拓扑空间范畴$\mathcal{T}$到群范畴$\mathcal{G}$的函子，比如基本群$\pi_1(-)$，同调群$H_q(-)$是从拓扑空间范畴到群范畴的共变函子，而上同调环是从拓扑空间范畴到分次环的反变函子。

§1.1 习题

1 试利用S^n同胚与$\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$，北极点$N$对应无穷远点$\infty$，给出$\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$的拓扑$\mathcal{T}$。

2 试举例说明：拓扑空间可以是连通的但不道路连通。

3 设$\mathcal{T}_1$是拓扑空间X的拓扑，$\mathcal{T}_2$是拓扑空间Y的拓扑。证明：

$$\mathcal{B}=\{U\times V\subset X\times Y|U\in\mathcal{T}_1\text{是}X\text{中开集，}V\in\mathcal{T}_2\text{是}Y\text{中开集}\}$$

构成$X\times Y$的一个拓扑基。

4 记$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$为2维欧氏空间中的单位圆，

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$$

为2维欧氏空间中的圆带。证明：S^1不与X同胚。

5 记$GL_n(\mathbb{R})$为所有n阶实可逆矩阵构成的集合。一个n阶可逆矩阵A可以看成是$n\times n$维欧氏空间$\mathbb{R}^{n\times n}$中的点（它有$n\times n$个元素）。因此可以定义两个n阶可逆矩阵A, B的距离使得$GL_n(\mathbb{R})$成为一个度量空间，因而它是一个拓扑空间。

试证明：$GL_n(\mathbb{R})$不是道路连通的拓扑空间。

6 记$SO(n)$为所有行列式等于1的正交矩阵构成的集合，它与$GL_n(\mathbb{R})$有相似的拓扑。试利用正交矩阵的相似标准型证明：$SO(n)$是道路连通的。

§1.2 同伦与空间的伦型

同伦是代数拓扑中的一个非常重要的概念，相对于同胚来说，是一种退而求其次的办法。两个映射$f,g:X\to Y$可以不相同，但可以通过连续变化从一个映射变到另一个映射。同样，两个拓扑空间X与Y可以不同胚，但可以通过连续变化从一个空间变成另外一个空间。

比如：圆S^1不与圆带

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$$

同胚。如图1.3，将圆带的宽度逐渐变小，最后将圆带的宽度变成0即变成圆S^1。这就是空间的同伦。

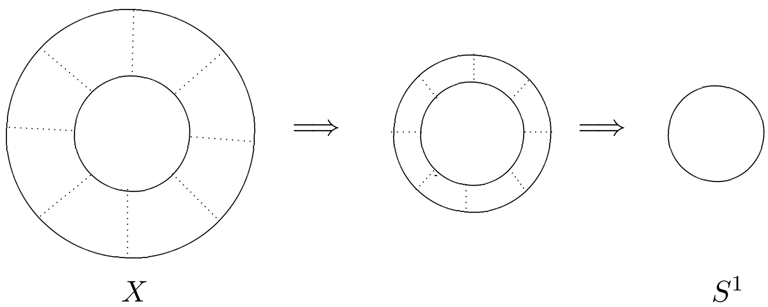


图1.3

定义1.2.1 设$f,g:X\to Y$是两个映射，如果存在映射$F:X\times I\to Y$使得，对任何$x\in X$

$$F(x,0)=f(x),\qquad F(x,1)=g(x)$$

则称映射f与g是同伦等价的，称F为从映射f到映射g的伦移，记为$f\overset{F}{\simeq}g:X\to Y$或简记为$f\simeq g$。

伦移$F:X\times I\to Y$中的第二个坐标$t\in I=[0,1]$可以看成时间。固定一个时刻t，$F(-,t)$可以看做是从X到Y映射

$$f_t=F(-,t):X\longrightarrow Y$$

而$f_t:X\to Y$是随时间$t\in I$连续变化的一系列映射。在初始时刻$t=0$时$f_0=f:X\to Y$，到最终时刻$t=1$时变成了$f_1=g$。（如图1.4）

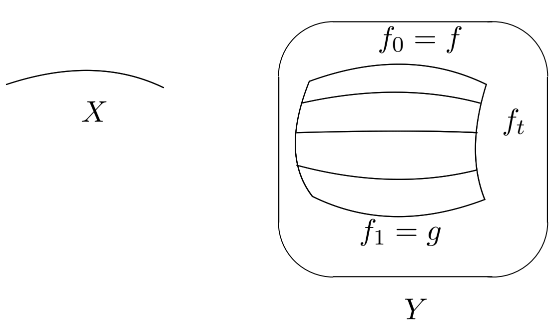


图1.4

例1 （见图1.3）记$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$为圆带，$f:X\to X$定义为：对任何$(x,y)\in X$

$$f(x,y)=\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

则$f:X\to X$同伦等价与单位映射1_X。

构做伦移$F:X\times I$为：对任何$(x,y)\in X$及$t\in I$

$$F((x,y),t)=\frac{(x,y)}{(1-t)\sqrt{x^2+y^2}+t},\quad 即\quad f_t(x,y)=\frac{(x,y)}{(1-t)\sqrt{x^2+y^2}+t}$$

则有

$$f_0(x,y)=F((x,y),0)=\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(x,y),$$
$$f_1(x,y)=F((x,y),1)=\frac{(x,y)}{1}=1_X(x,y)。$$

在介绍下面的结论之前，我们先来介绍点集拓扑中的一个基本结论。

粘接定理 设A,B是拓扑空间X的两个闭子空间，满足$A\cup B=X$。$f:A\to Y$，$g:B\to Y$是两个连续映射。如果对任何$x\in A\cap B$，$f(x)=g(x)$，则可以定义粘接映射$H:X\to Y$：对任何$x\in X$

$$H(x)=\begin{cases} f(x) & 如果x\in A\\ g(x) & 如果x\in B\end{cases}$$

$H:X\to Y$是连续的。

记$Y^X=\{f:X\to Y|f连续\}$为所有从X到Y的连续映射构成的集合。

定理1.2.1 在所有从X到Y的映射构成的集合Y^X中，同伦关系是一种等价关系。

证明： 1，反身性：对于$f:X\to Y$，有伦移$F:X\times I\to Y$：对任何$x\in X$和$t\in I$，$F(x,t)=f(x)$，易知F是f到自身的伦移。

2，对称性：如果$f\overset{F}{\simeq}g$，F是从f到g的伦移。定义$G:X\times I\to Y$为：对任何$x\in X$，$t\in I$，$G(x,t)=F(x,1-t)$。则

$$G(x,0)=F(x,1)=g(x),\qquad G(x,1)=F(x,0)=f(x),$$

G是从g到f的伦移。

3，传递性：如果$f\overset{F}{\simeq}g$，$g\overset{G}{\simeq}h$，构做$H:X\times I\to Y$为：对任何$x\in X$及$t\in I$，

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & 如果0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ G(x,2t-1) & 如果\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由于当$t=\dfrac{1}{2}$时$F(x,1)=g(x)=G(x,0)$，可以将F与G粘接在一起得到连续映射H（见图1.5）且

$$H(x,0)=F(x,0)=f(x),\qquad H(x,1)=G(x,1)=h(x),$$

f同伦等价与h。

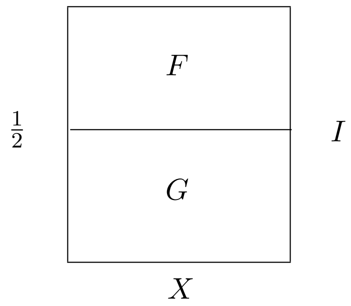


图1.5

例2 设X是任意拓扑空间，$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i^2 = 1\}$为$n+1$维欧氏空间中的标准球面，$f, g : X \to S^n$ 是两个映射。如果对任何$x \in X$都有$f(x) \neq -g(x)$（$g(x)$不是$f(x)$在球面上的对径点），则$f \simeq g$。

对任何$x \in X$，考察$\mathbb{R}^{n+1}$中连接$f(x)$，$g(x)$的直线，$h(t) = (1-t)f(x) + tg(x)$，其中$t \in I$。易知$h(t)$不经过坐标原点。否则，存在$t \in [0,1]$使得$(1-t)f(x) + tg(x) = 0 = (0, 0, \cdots, 0)$，因而$(1-t)f(x) = -tg(x)$。考虑向量$(1-t)f(x) = -tg(x)$的长度有

$$\| (1-t)f(x) \| = (1-t) = \| -tg(x) \| = t$$

因而$1 - t = t = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}g(x) = 0$，$f(x) = -g(x)$，矛盾。

由$(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$构做同伦$F : X \times I \to S^n$：对任何$x \in X$，$t \in I$

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\| (1-t)f(x) + tg(x) \|}$$

易知F连续且

$$F(x,0) = \frac{f(x)}{\| f(x) \|} = f(x), \qquad F(x,1) = \frac{g(x)}{\| g(x) \|} = g(x)$$

$f \overset{F}{\simeq} g$。

定义1.2.2 所有从X到Y的映射构成的集合Y^X关于同伦等价关系$\simeq$的商集合$Y^X/\simeq$称为X到Y的映射同伦类集，记为

$$[X, Y] = Y^X/\simeq = \{[f] | f : X \to Y \text{连续}\}$$

映射$f : X \to Y$所在的同伦等价类记为$[f]$。

定义1.2.3 如果A是空间X的一个子空间，则(X, A)称为一个空间偶。

对于另一个空间偶(Y, B)，如果映射$f : X \to Y$满足$f(A) \subset B$，则称f是空间偶之间的映射，记为$f : (X, A) \to (Y, B)$。

对于空间偶之间的映射$f, g : (X, A) \to (Y, B)$，如果$f \overset{F}{\simeq} g$且从f到g的伦移$F : X \times I \to Y$满足：$F(A \times I) \subset B$（即伦移过程中A中点总映射到B），则称空间偶之间的映射f与g同伦，记为$f \overset{F}{\simeq} g : (X, A) \to (Y, B)$。

更进一步，如果$f|_A = g|_A : A \to B$且伦移F满足：对任何$a \in A, t \in I$，$F(a,t) = f(a) = g(a)$（伦移过程中保持A中的点不动），则称f与g相对于A同伦，记为$f \overset{F}{\simeq} g\ rel\ A$。

许多时候我选X的子空间$A = \{x_0\}$为独点空间，此时的空间偶(X, x_0)称为**带基点**的空间。

定义1.2.4 称空间X与Y是同伦等价的或有相同的伦型，如果存在映射$f : X \to Y$和$g : Y \to X$ 使得

$$g \cdot f \simeq 1_X, \qquad\qquad f \cdot g \simeq 1_Y$$

即：下面图表同伦可换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\simeq 1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\simeq 1_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

记为$f : X \xrightarrow{\simeq} Y$或$X \simeq Y$。我们称$g$为$f$的同伦逆。

对应的有空间偶之间的同伦等价$f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, b)$。

例3 圆带$X = \{(x, y) \in \mathbb{R} | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$与圆$S^1$同伦等价。

有映射$r : X \to S^1$，对任何$(x, y) \in X$，$r(x, y) = \dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in S^1$ 和内射$i : S^1 \to X$，满足：$r \cdot i = 1_{S^1} : S^1 \to X \to S^1$。而$i \cdot r = f : X \to S^1 \to X$为例1中的$f$。在例1中已经证明$f \simeq 1_X$，因而$r : X \xrightarrow{\simeq} S^1$。

引理1.2.2 设$f \overset{F}{\simeq} f_1 : X \to Y$，$g \overset{G}{\simeq} g_1 : Y \to Z$，则

$$g \cdot f \simeq g_1 \cdot f_1 : X \to Y \to Z.$$

证明： 设$F : X \times I \longrightarrow Y$是从$f$到$f_1$的伦移，$G : Y \times I \longrightarrow Z$ 是从g到g_1的伦移。考察$g \cdot F : X \times I \to Y \to Z$，有：

$$g \cdot F(x, 0) = g \cdot f(x), \qquad\qquad g \cdot F(x, 1) = g \cdot f_1(x)$$

$g \cdot F$是从$g \cdot f : X \to Y \to Z$到$g \cdot f_1$的伦移。

考察$G \cdot (f_1 \times 1) : X \times I \to Y \times I \to Z$，其中$(f_1 \times 1)(x, t) = (f_1(x), t)$，有：

$$G \cdot (f_1 \times 1)(x, 0) = G(f_1(x), 0) = g \cdot f_1(x), \quad G \cdot (f_1 \times 1) = G(f_1(x), 1) = g_1 \cdot f_1(x)$$

$G \cdot (f_1 \times 1)$是从$g \cdot f_1 : X \to Y \to Z$到$g_1 \cdot f_1$的伦移。

由映射同伦的传递性中$g \cdot f \simeq g \cdot f_1 \simeq g_1 \cdot f_1$。

定理1.2.3 拓扑空间的同伦关系$X \simeq Y$是一种等价关系

证明： 1，反身性：显然X与自身同伦（有相同的伦型）。

2，对称性：如果$f : X \xrightarrow{\simeq} Y$是同伦等价，$g : Y \to X$是$f$的同伦逆，则$g : Y \xrightarrow{\simeq} X$是同伦等价，$f$是$g$的同伦逆。

3，传递性：设$f:X\xrightarrow{\simeq}Y$是同伦等价，$g:Y\to X$是f的同伦逆，$\mu:Y\xrightarrow{\simeq}Z$也是同伦等价，$\nu:Z\to Y$是$\mu$的同伦逆。考察映射

$$\mu\cdot f:X\to Y\to Z,\qquad\qquad g\cdot\nu:Z\to Y\to X$$

及它们的合成$(g\cdot\nu)\cdot(\mu\cdot f)$，有下面的同伦交换图：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "1_Y"] & Z \arrow[d, "\nu"] \\
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

即$(g\cdot\nu)\cdot(\mu\cdot f)=g\cdot(\nu\cdot\mu)\cdot f\simeq g\cdot 1_Y\cdot f=g\cdot f\simeq 1_X$。同理，$(\mu\cdot f)\cdot(g\cdot\nu)\simeq 1_Z$。$X$与$Z$同伦等价。

定义1.2.4 设Y是拓扑空间，y_0是Y中一点。一个映射$f:X\longrightarrow Y$称为是零伦的如果f同伦等价与常值映射

$$c_{y_0}:X\longrightarrow y_0\longrightarrow Y.$$

一个同伦等价与独点空间$\{*\}$的空间称为可缩空间。

例4 n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$是可缩空间。

n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的点可以表示成$r(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足$\sum x_i^2=1$是$n-1$维球面上的点,$r\in[0,\infty)$ 这个点到原点0的距离。定义映射$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\{0\}$为：对任何$r(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$f(r(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0.$$

记$i:\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$为内射。易证：

$$f\cdot i=1_{\{0\}}:\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n\longrightarrow\{0\}$$

而$i\cdot f:\simeq 1_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$。因而$f:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\simeq}\{0\}$

定义1.2.5 设A是X的一个子空间，$i:A\hookrightarrow X$是内射。如果存在映射$r:X\to A$ 使得$r\cdot i=1_A:A\xrightarrow{i}X\xrightarrow{r}A$，则称$A$是$X$的收缩核。

如果$i\cdot r\simeq 1_X:X\xrightarrow{r}A\xrightarrow{i}X$，则称$A$是$X$ 的形变收缩核。此时A与X同伦等价。

例3中S^1是圆带$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$的形变收缩核。

定义1.2.6 映射集Y^X中可以定义拓扑$\mathcal{T}$：对任何X的紧集K及Y中的开集U，记

$$N(K,U)=\{f:X\to Y|\text{满足}f(K)\subset U\text{的映射}f\}\subset Y^X$$
$$\mathcal{B}=\{N(K,U)\subset Y^X|\text{所有}N(K,U)\text{组成的}Y^X\text{的子集族}\}$$

可以证明$\mathcal{B}$构成Y^X的一个拓扑基。由此得到的Y^X的拓扑称为Y^X的紧开拓扑，Y^X称为映射空间。

§1.2 习题

1 证明：例4中的$i \cdot f \simeq 1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$。

2 设$f : X \longrightarrow S^n$是一个不满的映射，$N = (0, \cdots, 0, 1)$是$n$维球面的北极。证明：$f$同伦等价与常值映射$c_N : X \longrightarrow \{N\}$。

3 令$\mathbb{R}^n - \{0\}$为n维欧氏空间挖去坐标原点$\{0\}$得到的空间。证明：$n-1$维球面S^{n-1}是$\mathbb{R}^n - \{0\}$的形变收缩核。

4 设$f : S^n \longrightarrow X$是映射。证明：$f$同伦等价与一个常值映射的充分必要条件是$f$可以扩充到$n+1$维球体$B^{n+1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) | \sum x_i^2 \leqslant 1\}$上。

5 证明：X的子空间A是X的收缩核的重分必要条件是：任何映射$f : A \to Y$都可以扩充到X上。

6 证明：映射空间Y^X的道路连通分支与映射同伦类集$[X, Y]$一一对应。

§1.3 常见的拓扑空间

代数拓扑中研究的拓扑空间基本都是很好的空间，许多时候就是欧氏空间的一部分。而代数拓扑中更多的是关心拓扑空间中基本块（单形，胞腔）之间的粘接关系。

单纯复形* 单纯复形是由一些单形通过它们的顶点、边、面等重合拼在一起的一个几何体K。

给定欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的$q+1$个点$(a_0, a_1, \cdots, a_q)$，如果向量组$a_1-a_0, a_2-a_0, \cdots, a_q-a_0$是线性无关的则称这$q+1$个点为一个**几何无关点组**。

欧氏空间中：一个点(a_0)一定是几何无关的，两个点(a_0, a_1)几何无关指它俩不重合，三个点(a_0, a_1, a_2)几何无关指这三个点不在一条直线上，四个点几何无关指这四个点不在同一个平面上，$\cdots$

易证：如果$(a_0, a_1, \cdots, a_q)$是一个几何无关的点组，则它的任何一个子组$(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})$也是几何无关的。

如果$(a_0, a_1, \cdots, a_q)$是一个几何无关的点组，则它张成欧氏空间中的一个q-维单形

$$\sigma = [a_0, a_1, \cdots, a_q] = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_q a_q | \text{其中每个}\lambda_i \geqslant 0\text{且}\sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\}.$$

它的一个子组$(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})$张成一个r-维子单形$\sigma' = [a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}]$，称为$\sigma = [a_0, a_1, \cdots, a_q]$ 的一个r-维面。

容易看出：一个点(a_0)张成的单形是这个点a_0，两个几何无关的点(a_0, a_1) 张成的单形是连接这两个点的线段，三个几何无关的点(a_0, a_1, a_2)张成的的单形是这三个点构成的三角形，四个几何无关的点(a_0, a_1, a_2, a_3)张成的单形是这四个点构成的四面体（见图1.6）

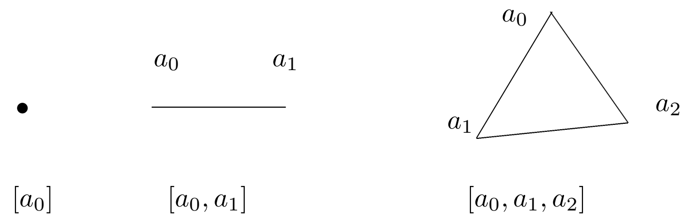
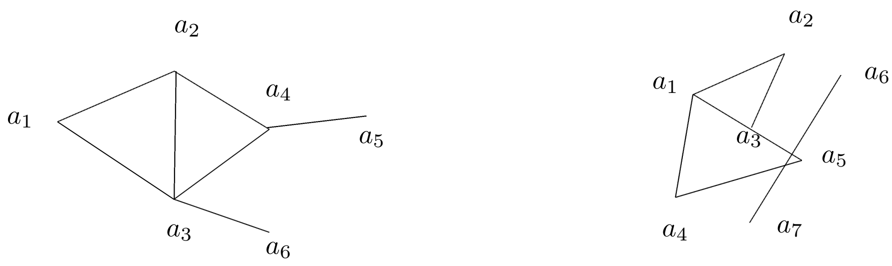


图1.6

定义1.3.1 单纯复形$K = \{\sigma | \sigma = [a_0, a_1, \cdots, a_q]\text{是欧氏空间中的单形}\}$ 是欧氏空间中的一族单形，它满足：

1 如果$\sigma \in K$是单纯复形K中的一个单形，则σ所有的面σ'也是K中的单形。
2 单纯复形K中的两个单形σ与τ或者不交，或者相交于它们的一个公共的面，即规则相处（见图1.7）。

单纯复形K中所有单形构成的几何体称为单纯复形的几何实现，记为$|K|$。如果某拓扑空间X同胚与$|K|$，则称K为X的一个三角剖分。



规则相处　　　　不规则相处

图1.7

乘积空间 设$(X,\mathcal{T}_1)$，$(Y,\mathcal{T}_2)$是两个拓扑空间。此时

$$\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2=\{U\times V\subset X\times Y|\text{其中}U\in\mathcal{T}_1，V\in\mathcal{T}_2\}$$

只能构成$X\times Y$的一组拓扑基。由此拓扑基生成$X\times Y$拓扑，$X\times Y$连同这个拓扑称为乘积空间。

比如：正方形$I^2=I\times I$作为I与I的乘积空间有一种拓扑，作为$\mathbb{R}^2$ 的子空间（度量空间）也有一种拓扑。这两种拓扑是一致的。

附贴空间 附贴空间是一种商空间，他是通过将拓扑空间中某些点粘合在一起得到的空间。

定义1.3.2 设$(X,\mathcal{T})$是一个拓扑空间，“$\sim$”是X中的一种等价关系，$X/\sim$是X对“$\sim$”的商集合。此时有自然投射

$$p:X\longrightarrow X/\sim \qquad p(x)=[x]，[x]\text{是}x\text{所在的等价类。}$$

在$X/\sim$中定义拓扑$\mathcal{T}/\sim$为：$W\subset X/\sim$是$X/\sim$中的开集当且仅当$p^{-1}(W)$是X中的开集。则$(X/\sim,\mathcal{T}/\sim)$称为$X$对“$\sim$”的商空间。

事实上，许多代数拓扑中用到的拓扑空间都是通过商空间构做出来的。下面我们将通过一些例子介绍一些常用的构做拓扑空间的办法。

例1 在单位区间$I=[0,1]$中定义等价关系“$\sim$”为：$x\sim y$当且仅当$x=y$或$x=0,y=1$。这样$I/\sim$同胚与圆S^1（见图1.8）

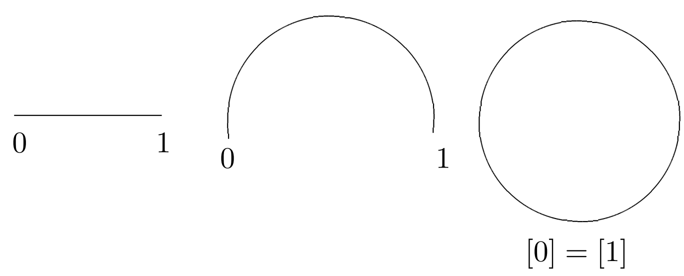


图1.8

这种方法叫粘合法，即将拓扑空间中的一些点和另外一些点粘合在一起。

例2 将$I^2 = I \times I$中两个对边$\{0\} \times I$和$\{1\} \times I$ 按同方向粘合（$(0,t) \sim (1,t)$）得到圆柱面。

将$I^2 = I \times I$中两个对边$\{0\} \times I$和$\{1\} \times I$按反方向粘合（$(0,t) \sim (1,1-t)$）得到的是Möbius带。（见图1.9）

图1.9

例3 将$I^2 = I \times \{0\}$中两对边$I \times \{0\}$和$I \times \{1\}$按同方向粘合得到圆柱面，之后再将另两个对边$\{0\} \times I$和$\{1\} \times I$也按同方向粘合（$(0,t) \sim (1,t)$）得到一个环面记为T^2。

将$I^2 = I \times \{0\}$中两对边$I \times \{0\}$和$I \times \{1\}$按同方向粘合得到圆柱面，之后再将另两个对边$\{0\} \times I$和$\{1\} \times I$按反方向粘合（$(0,t) \sim (1,1-t)$）得到Klein瓶，记为K。（见图1.10）

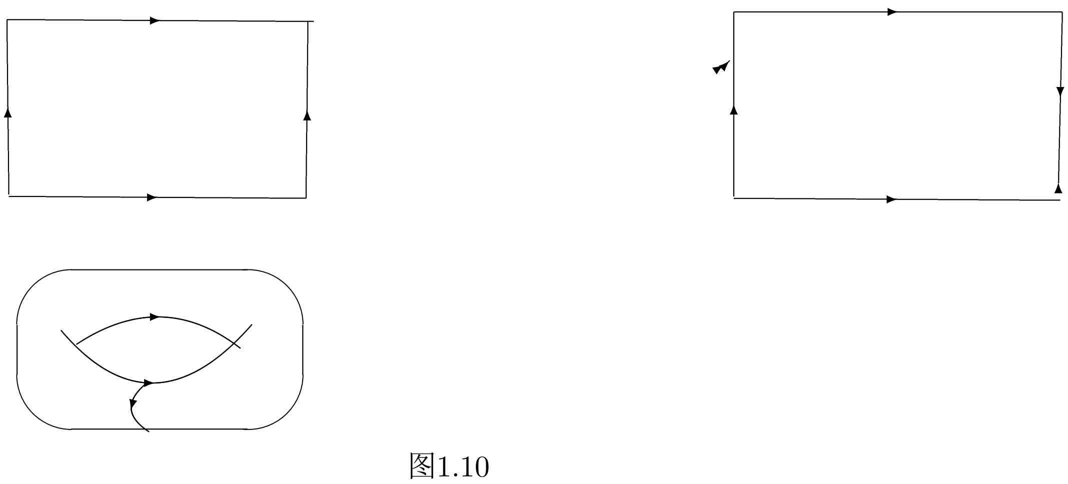


图1.10

例4 将球面$S^2 = \{\alpha = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$的对径点粘合（$\alpha \sim -\alpha$）得到的是实射影平面$\mathbb{R}P^2 = S^2/(\alpha \sim -\alpha)$。

将上半球面$E^2_+ = \{\alpha = (x,y,z) | z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 中的大圆$S^1 = \{\alpha = (x,y,0) \in E^2_+ | x^2 + y2 = 1\}$按对径点粘合（$(x,y,0) \sim (-x,-y,0)$）得到的也是实射影平面$\mathbb{R}P^2$。

一般地，将n-维球面$S^n = \{\alpha = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n=1} | \sum x_i^2 = 1\}$ 的对径点粘合（$\alpha \sim -\alpha$）得到到空间被称为n-维实射影空间记为$\mathbb{R}P^n = S^n/(\alpha \sim -\alpha)$。（见图1.11）

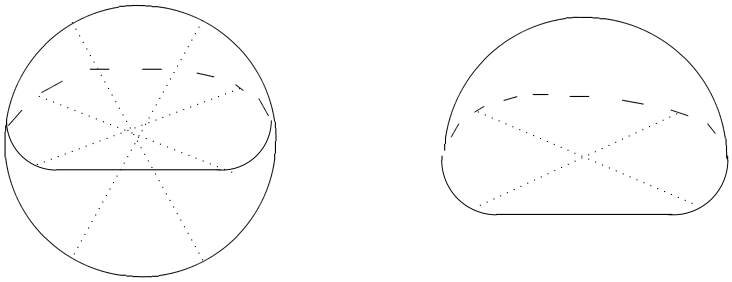


图1.11

定义1.3.3 设X是一个拓扑空间。将$X \times I$中的$X \times \{1\}$粘合成一点，即：对任何$x, y \in X$，$(x,1) \sim (y,1)$得到的空间称为X的锥，记为$CX = X \times I/X \times \{1\}$。将$CX$中的$X \times \{0\}$再粘合成一点得到的空间称为$X$的双角锥，记为$\Sigma X = CX/X \times \{0\}$。$X \times I$称为$X$的柱。（见图1.12）

空间X的柱$X \times I$与X本身是同伦等价的，而它的锥CX是可缩空间（同伦等价与独点空间）

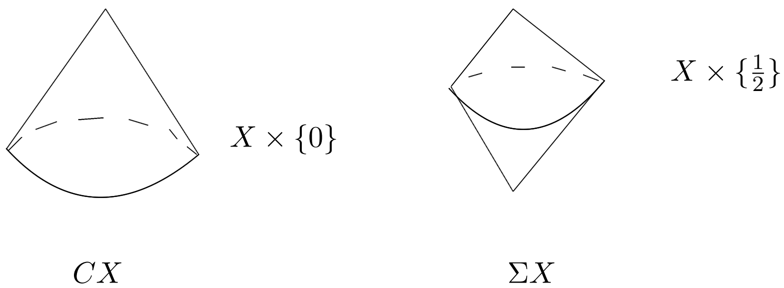


图1.12

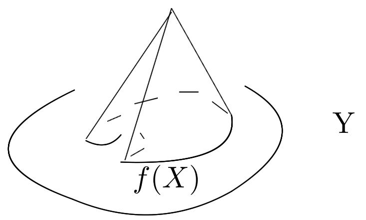
定义1.3.4 设A是X的子空间，$f : A \to Y$是映射。在X与Y的不交并$X \coprod Y$中定义等价关系"$\sim$"为:对所有的$a \in A$，a与Y中的$f(a)$等价，即$a \sim f(a)$。X, Y中其它的点只与自己等价。$X \coprod Y/\sim$称为将X按映射$f : A \to Y$粘接在Y 上得到的空间，记为$Y \cup_f X$。

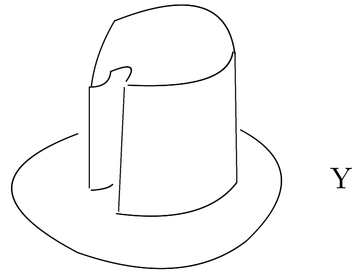
定义1.3.5 设$f : X \to Y$是映射。

将X的锥CX中的$X \times \{0\}$按$f : X \times \{0\} \cong X \to Y$粘接在$Y$上得到的空间称为$f : X \to Y$的映射锥，记为$Y \cup_f CX$。

将X的柱$X \times I$中的$X \times \{0\}$按$f : X \times \{0\} \cong X \to Y$粘接在$Y$上得到的空间称为$f : X \to Y$的映射柱，记为$Y \cup_f (X \times I)$。（见图1.13）

事实上$f : X \to Y$的映射柱$Y \cup_f (X \times I)$与Y是同伦等价的，并且Y是$Y \cup_f (X \times I)$的形变收缩核。





$Y \cup_f CX$ $\qquad\qquad$ $Y \cup_f (X \times I)$

图1.13

$n-1$-维球面S^{n-1}的锥CS^{n-1}同胚与n-维实球体

$$e^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum x_i^2 \leqslant 1\} \cong CS^{n-1}.$$

S^{n-1}同胚与e^n的边界。映射$f : S^{n-1} \to Y$的映射锥$Y \cup_f CS^{n-1}$称为在Y上通过f粘贴一个n-维胞腔得到的空间，记为$Y \cup_f e^n$。

例5 记$S^1 = \{e^{2\pi it} \in \mathbb{C} | t \in [0,1]\}$为复平面上的单位圆。定义映射$m : S^1 \to S^1$为：对任何$e^{2\pi it} \in S^1$

$$m(e^{2\pi it}) = e^{2m\pi it},$$

这是一个绕了S^1 m-周的映射。在S^1上通过m粘贴一个2-维胞腔得到的空间$S^1 \cup_m e^2$称为模m的Moore空间。

CW**复形*** CW复形是通过逐步粘贴胞腔的办法得到的空间，而粘贴每个n-维胞腔e^n时的映射$f : S^{n-1} \to X^{(n-1)}$起关键作用。

定义1.3.6 CW复形X是一族子空间$\{X^{(n)} | n \geqslant 0\}$的并$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{(n)}$，其中$X^{(n)}$称为$X$的$n$-维骨架。它是用归纳法构做出来的：

1 $X^{(0)}$是一些离散的点$\{x_i | i \in \Gamma\}$。

2 设X的$n-1$-维骨架$X^{(n-1)}$已经得到，X的n-维骨架$X^{(n)}$是在$X^{(n-1)}$上粘贴一些n-维胞腔得到的，即

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_{f_\alpha} e_\alpha^n,$$

其中每个e_α^n都同胚与n-维球体，称为X的一个n-维胞腔，$f_\alpha : S_\alpha^{n-1} \to X^{n-1}$ 是胞腔e_α^n的粘贴映射。

例6 单纯复形K的几何实现$|K|$（有时我们也会将二者混用）是CW复形。

只需令$|K|^{(n-1)}$为单纯复形K中维数小于等于$n-1$的所有单形构成的几何体即可。K的任何一个单形σ看做是$|K|$的一个n维胞腔，它的边界$\partial\sigma \cong S^{n-1}$ 是$n+1$个$n-1$-维面的并，已经包含在$|K|^{n-1}$中了。用内射$i : \partial\sigma \to |K|^{(n-1)}$粘接$n$维胞腔得到$n$-维骨架$|K|^{(n)}$。

例7 n维球面S^n可以有多种CW复形结构。

1，令球面的0-维骨架$X^{(0)}=\{x_0\}$为一个点，中间不加1-维到$n-1$-维骨架，$X^{(n-1)}=X^{(0)}$。在$X^{(n-1)}=\{x_0\}$上通过常值映射$c: S^{n-1}\to x_0$粘贴n-维胞腔得到的空间

$$X^{(n)}=x_0\cup_c e^n=e^n/\partial e^n\cong S^n.$$

2，令球面的0-维骨架$X^{(0)}=\{x_0\}$为一个独点，$n-1$-维骨架$X^{(n-1)}=x_0\cup_c e^{n-1}$，它同胚与一个$n-1$维球面。在$n-1$-维骨架$S^{n-1}$上粘贴两个胞腔也可以得到$n$-维球面

$$S^n=X^{(n)}=(x_0\cup_c e^{n-1})\cup_{1_+}e^n_+\cup_{1_-}e^n_-$$

其中$1_+,1_-: S^{n-1}\to X^{(n-1)}\cong S^{n-1}$都是同胚映射。

3，令$X^{(0)}=\{0,1\}$为离散的点构成的拓扑空间，它可以看成是0-维球面。在$X^{(0)}$上粘接两个1-维胞腔得到1维球面S^1

$$S^1=X^{(1)}=\{0,1\}\cup_{1_+}e^1_+\cup_{1_-}e^1_-.$$

其中$e^1_+\cong e^1_-\cong I$，$1_+,1_-: S^0=\{0,1\}\to\{0,1,\}$ 都是单位映射。

归纳地假设已经有了$n-1$-维球面的胞腔结构$X^{(n-1)}\cong S^{n-1}$，同上在$X^{(n-1)}\cong S^{n-1}$上粘接上两个胞腔得到S^n的胞腔结构。

§1.3 习题

1 证明：例4中将球面$S^2=\{\alpha=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$的对径点粘合和将上半球面$E^2_+=\{\alpha=(x,y,z)|z\geqslant 0,x^2+y^2+z^2=1\}$中的大圆$S^1=\{\alpha=(x,y,0)\in E^2_+|x^2+y2=1\}$按对径点粘合（$(x,y,0)\sim(-x,-y,0)$）得到的是同一个拓扑空间。

2 证明：任何一个拓扑空间X的锥$CX=X\times I/X\times\{1\}$都是可缩空间。

3 证明：映射$f: X\to Y$的映射柱$Y\cup_f(X\times I)$与Y同伦等价。而映射

$$i\cdot f: X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{i}Y\cup_f(X\times I)$$

与$i: X\xrightarrow{\cong}X\times\{1\}\to Y\cup_f(X\times I)$同伦等价。

4 证明：例5中模2的Moore空间，即通过$2(e^{2\pi it})=e^{4\pi it}$粘接一个2-维胞腔得到的空间$S^1\cup_2 e^2$与实射影平面$\mathbb{R}P^2$是同胚的。

5 证明：例3中通过粘合对边得到的环面T^2与乘积空间$S^1\times S^1$同胚。

6 证明：从环面T^2中挖去一点得到的空间$T^2-\{[1/2,1/2]\}$和从Klein瓶中挖去一点得到的空间$K-\{[1/2,1/2]\}$是同伦等价的。

7 记$SO(3)$为所有行列式等于1的正交矩阵构成的拓扑空间，$\mathbb{R}P^3=S^3/(\alpha\sim-\alpha)$ 为3-维实射影空间。证明：$SO(3)$与$\mathbb{R}P^3$同胚。

第二章 基本群

代数拓扑的一个基本方法就是要构做一些从拓扑空间范畴（或流形、拓扑群等范畴）到群范畴的共变或反变函子$\mathcal{F}:\mathfrak{T}\to\mathfrak{G}$。任给一个拓扑空间$X$，$\mathcal{F}(X)$是$X$的一个代数不变量。两个拓扑空间的代数不变量相同时它们可能同胚或同伦，但当两个拓扑空间的代数不变量不同时它们一定不会同胚。

先来看一个例子：记$\mathbb{R}^2-\{0\}$为从2-维平面中挖去坐标原点得到的空间。（见图2.1）

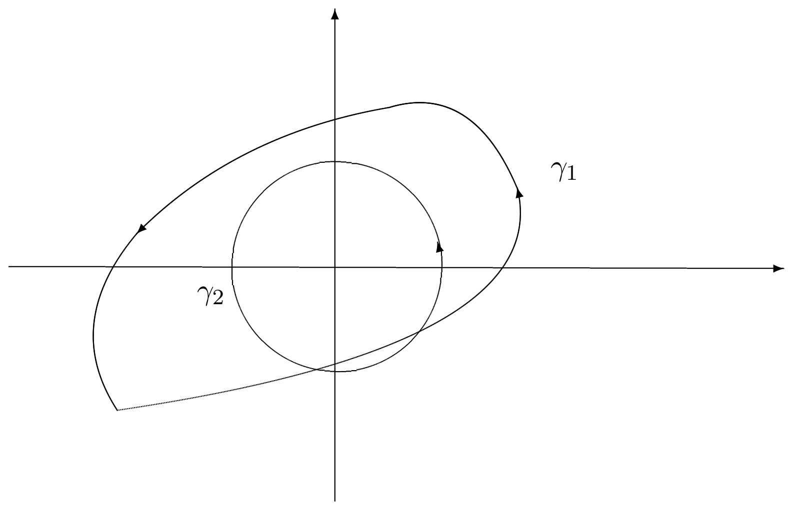


图2.1

为考察$\mathbb{R}^2-\{0\}$和$\mathbb{R}^2-\{0\}$中光滑闭曲线γ的性质，我们考察曲线积分

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx=\int_\gamma Qdy+Pdx.$$

由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，这个曲线积分与线路无关。但$\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 在坐标原点$0=(0,0)$不连续。沿单位圆周逆时针方向的曲线积分

$$\oint_{\gamma_2}\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx=2\pi,$$

因而任何沿逆时针方向一周的曲线积分$\displaystyle\oint_{\gamma_1}Qdy+Pdx$都等于$2\pi$，而沿顺时针方向一周的曲线积分等于$-2\pi$。

考察$\mathbb{R}^2-\{0\}$中所有的光滑闭曲线γ。曲线积分$\displaystyle\oint_\gamma Qdy+Pdx$的取值一定等于某个$k\cdot 2\pi$。这里$k$反映的是闭曲线$\gamma$的性质，当$k$取正值时说明它沿逆时针方向绕坐标原点$(0,0)$转了$k$周；当$k$取负值时说明它沿顺时针方向绕坐

标原点转了$|k|$周。k所有可能的取值$\mathbb{Z}$反映的是拓扑空间$\mathbb{R}^2-\{0\}$的性质，它就是$\mathbb{R}^2-\{0\}$的基本群。

§2.1 道路同伦与基本群

定义2.1.1 映射$\sigma: I\to X$，$\sigma(0)=x_0$，$\sigma(1)=x_1$称为空间X中从x_0到x_1的一条道路。

对于X中从x_0到x_1的两条道路$\sigma,\tau: I\to X$，如果存在同伦$F: I\times I :\to X$（或$f_t: I\to X$，$t\in[0,1]$）使得对任何$s,t\in I$

$$\begin{aligned} F(s,0)=&\sigma(s), \qquad F(s,1)=\tau(s), \qquad (f_0=\sigma,\ f_1=\tau)\text{且}\\ F(0,t)\equiv& x_0, \qquad F(1,t)\equiv x_1, \qquad (f_t(0)=x_0,\ f_t=x_1)\text{，}\end{aligned}$$

则称σ与τ是道路同伦的，记为$\sigma\overset{F}{\simeq}_p\tau$或$\sigma\overset{f_t}{\simeq}_p\tau$；$F$（$f_t$）称为从$\sigma$到$\tau$的道路伦移。

注 在道路同伦的伦移（$F(-,t)$或$f_t(-)$）过程中，要求保持起点x_0、终点x_1不动，即

$$F(0,t)\equiv x_0, \qquad\qquad F(1,t)\equiv x_1$$

是必要的。事实上，在一个道路连通的空间中任何两条道路σ，τ（甚至它们的起点、终点都不同）一定是同伦的。

例1 n-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中任何从x_0到x_1的两条道路σ, τ都是道路同伦的。

有道路伦移$f_t: I\to\mathbb{R}^n$，$t\in[0,1]$

$$\begin{aligned} f_t(s)=&(1-t)\sigma(s)+t\tau(s) && && \text{满足}\\ f_0(s)=&\sigma_s, && f_1(s)=\tau(s) && \text{且}\\ f_t(0)=&(1-t)x_0+tx_0\equiv x_0, && f_t(1)\equiv x_1. && \end{aligned}$$

这种同伦称为线性同伦。

命题2.1.1 空间X的所有从x_0到x_1的道路组成的集合中道路同伦$\simeq_p$是一种等价关系。

证明： 仿照定理1.2.1；映射的同伦是一种等价关系的证明，要求在伦移过程中保持起点、终点不动知命题成立。

定义2.1.2 设σ, τ是X中的两条道路，满足$\sigma(1)=\tau(0)$（σ的终点$=\tau$的起点）。定义X中的道路$\sigma*\tau: I\to X$ 为

$$\sigma*\tau(s)=\begin{cases}\sigma(2s) & \text{如果}0\leqslant s\leqslant 1/2\\ \tau(2s-1) & \text{如果}1/2\leqslant s\leqslant 1\text{。}\end{cases}$$

$\sigma*\tau$称为σ与τ的道路乘积或道路连接。

注 当σ的终点$\neq\tau$的起点时，σ与τ不能做乘积。当σ的终点$=\tau$的起点时，由§1.2中的粘接定理知：$\sigma*\tau$是连续函数，且$\sigma*\tau$在$[0,1/2]$走完σ的全程，在$[1/2,1]$走完τ的全程。

命题2.1.2 设$\sigma \overset{F}{\simeq}_p \sigma'$，$\tau \overset{G}{\simeq}_p \tau'$并且$\sigma(1)=\sigma'(1)=\tau(0)=\tau'(0)$，则$\sigma * \tau$与$\sigma' * \tau'$道路同伦。

证明： 设

$$\begin{array}{ll} \sigma \overset{F}{\simeq}_p \sigma' & F: I\times I \to X\text{是从}\sigma\text{到}\sigma'\text{的道路伦移，} \\ \tau \overset{G}{\simeq}_p \tau' & G: I\times I \to X\text{是从}\tau\text{到}\tau'\text{的道路伦移。} \end{array}$$

如图2.2所示，令

$$H: I\times I \to X, \qquad H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t) & 0\leqslant s\leqslant 1/2; \\ G(2s-1,t) & 1/2\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

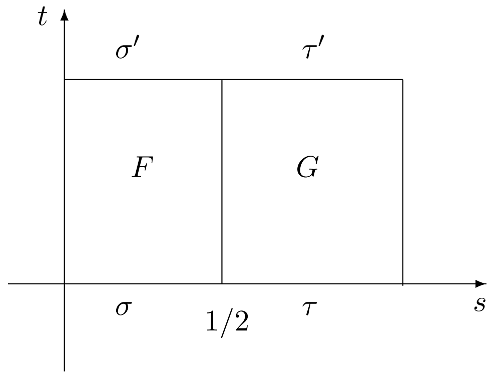


图2.2

由$F(1,t)\equiv\sigma(1)=\tau(0)\equiv G(0,t)$易知$H$是$F$与$G$粘接得到的连续函数，且

$$H(s,0)=\begin{cases} F(2s,0) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ G(2s-1,0) & 1/2\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \sigma * \tau(s),$$

$$H(s,1)=\begin{cases} F(2s,1) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ G(2s-1,1) & 1/2\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \sigma' * \tau'(s)$$

$$H(0,t)=F(0,t)=\sigma(0), \qquad H(1,t)=G(1,t)=\tau(1)$$

H是从$\sigma * \tau$到$\sigma' * \tau'$的道路伦移。

设有三条定理σ, τ, ν满足：$\sigma(1)=\tau(0)$，$\tau(1)=\nu(0)$即：

σ的终点$=\tau$的起点，τ的终点$=\nu$的起点，

此时有道路乘积$(\sigma * \tau) * \nu$和$\sigma * (\tau * \nu)$。由定义知：

$$(\sigma * \tau) * \nu(s)=\begin{cases} \sigma * \tau(2s) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ \nu(2s-1) & 1/2\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma(4s) & 0\leqslant s\leqslant 1/4 \\ \tau(4s-1) & 1/4\leqslant s\leqslant 1/2 \\ \nu(2s-1) & 1/2\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

$$\sigma * (\tau * \nu)(s)=\begin{cases} \sigma(2s) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ \tau * \nu(2s-1) & 1/2\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma(2s) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ \tau(4s-2) & 1/2\leqslant s\leqslant 3/4 \\ \nu(4s-3) & 3/4\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

显然作为道路$(\sigma * \tau) * \nu \neq \sigma * (\tau * \nu)$，但我们有：

命题2.1.3 如果三条道路σ,τ,ν满足：

$$\sigma(1)=\tau(0) \qquad\qquad \tau(1)=\nu(0)$$

则$(\sigma*\tau)*\nu\simeq_p\sigma*(\tau*\nu)$。

证明： 如图2.3，我们构做从$(\sigma*\tau)*\nu$到$\sigma*(\tau*\nu)$ 的道路伦移

$$F:I\times I\longrightarrow X, \qquad\qquad f_t:I\longrightarrow X$$

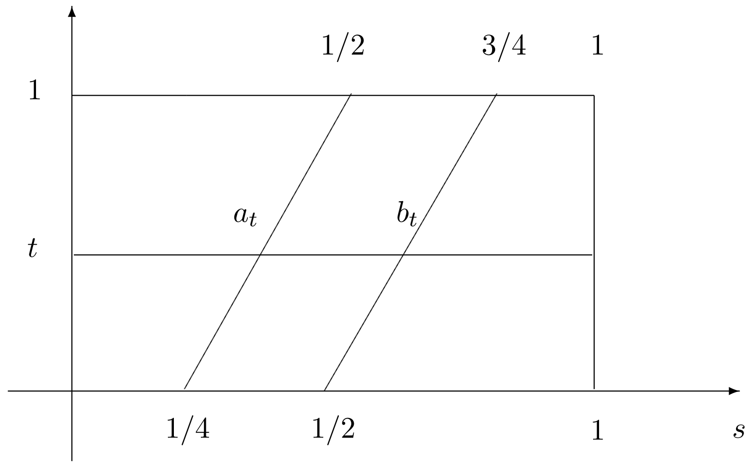


图2.3

做$(1/4,0)$到$(1/2,1)$的连线L_1，做$(1/2,0)$到$(3/4,1)$的连线L_2。对于$t\in[0,1]$，从$(0,t)$做一条平行于s轴的直线交L_1与(a_t,t)、交L_2与(b_t,t)。

道路同伦变化过程在t时刻$f_t:I\to X$在$[0,a_t]$走σ这段道路，在$[a_t,b_t]$走τ这段道路，在$[b_t,1]$走ν这段道路，即：

$$f_t(s)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{s}{a_t}\right) & 0\leqslant s\leqslant a_t\\ \tau\left(\dfrac{s-a_t}{b_t-a_t}\right) & a_t\leqslant s\leqslant b_t\\ \nu\left(\dfrac{s-b_t}{1-b_t}\right) & b_t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

容易验证f_t连续且：

$f_0:I\to X$在$[0,1/4]$走σ这段道路，在$[1/4,1/2]$走τ这段道路，在$[1/2,1]$走ν这段道路,即$f_0=(\sigma*\tau)*\nu$.

$f_1:I\to X$在$[0,1/2]$走σ这段道路，在$[1/2,3/4]$走τ这段道路，在$[3/4,1]$走ν这段道路,即$f_1=\sigma*(\tau*\nu)$.

设X是一个拓扑空间,x_0是X中的一个固定点（称为基点）,考虑X中所有起点$\sigma(0)$终点$\sigma(1)$都在x_0的闭路构成的集合

$$\Omega X=\{\sigma:I\longrightarrow X|\sigma(0)=\sigma(1)=x_0\}.$$

ΩX中任何两条闭路σ,τ都满足$\sigma(1)=\tau(0)$,因而可以做道路乘积$\sigma*\tau$.

$$*:\Omega X\times\Omega X\longrightarrow\Omega X$$

是ΩX中的一种运算.但这种运算不满足结合律，无法使ΩX构成半群.

考虑ΩX对道路同伦关系$\simeq_p$的等价类集$\Omega/\simeq_p$.

定义2.1.3 以x_0为起点、终点的所有闭路关于道路同伦的等价类集$\Omega X/\simeq_p$记为$\pi_1(X, x_0)$,其元素是一个等价类

$$[\sigma] = \{\tau : I \longrightarrow X | \tau(0) = \tau(1) = x_0 \text{且} \tau \simeq_p \sigma\}.$$

（所有与σ道路同伦的闭路构成的子集）σ是$[\sigma]$的一个代表元.

注意到, 当$\sigma' \simeq_p \sigma$时σ'也是$[\sigma]$的一个代表元,且$[\sigma'] = [\sigma]$. 对于$\pi_1(X, x_0)$中的两个道路同伦类$[\sigma]$, $[\tau]$, 在$[\sigma]$中任选一个代表元σ, 在$[\tau]$中任选一个代表元τ, 对应的有以$\sigma * \tau$为代表元的道路同伦类

$$[\sigma * \tau] = \{\nu | \nu \simeq_p \sigma * \tau\}.$$

由于当$\sigma \simeq_p \sigma'$, $\tau \simeq_p \tau'$时, $\sigma * \tau \simeq_p \sigma' * \tau'$. 等价类$[\sigma * \tau]$与代表元$\sigma$, τ的选取无关；

定义2.1.4 在$\pi_1(X, x_0)$中定义乘法：$[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma * \tau]$.

定理2.1.4 $\pi_1(X, x_0)$对于乘法“$\cdot$”构成一个群, 称为X的以x_0为基点的基本群.

证明 1, 由定义知运算“$\cdot$”封闭。

2, 结合律：对于$\pi_1(X, x_0)$中的三个元$[\sigma]$, $[\tau]$, $[\nu]$, 由乘积的定义知：

$$\begin{aligned} ([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot [\nu] =& [\sigma * \tau] \cdot [\nu] = [(\sigma * \tau) * \nu] \\ [\sigma] \cdot ([\tau] \cdot [\nu]) =& [\sigma] \cdot [\tau * \nu] = [\sigma * (\tau * \nu)] \end{aligned}$$

由命题2.1.3知$(\sigma * \tau) * \nu \simeq_p \sigma * (\tau * \nu)$, 因而作为道路同伦类

$$[(\sigma * \tau) * \nu] = [\sigma * (\tau * \nu)].$$

3, 单位元：在x_0处的常值道路c_{x_0}所在的道路同伦类$[c_{x_0}]$是$\pi_1(X, x_0)$的乘法单位元. 在此我们只证明$[c_{x_0}]$是$\pi_1(X, x_0)$的右单位, 读者自己证明$[c_{x_0}]$是左单位.

任给道路同伦类$[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\sigma] \cdot [c_{x_0}] = [\sigma * c_{x_0}]$其中

$$\sigma * c_{x_0}(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ x_0 & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

如图2.4,我们构做从$\sigma * c_{x_0}$到σ的道路伦移

$$F : I \times I \longrightarrow X, \qquad\qquad f_t : I \longrightarrow X$$

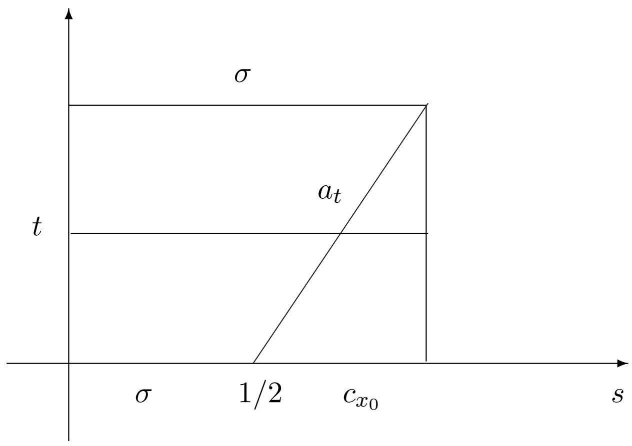


图2.4

从$(1/2,0)$向$(1,1)$引一条直线L. 对任何$t\in[0,1]$, 从$(0,t)$引一条平行于s轴的直线交L与(a_t,t). 在t时刻, f_t在$[0,a_t]$走σ 这段道路, 在$[a_t,1]$保持不动, 即

$$f_t(s)=\begin{cases}\sigma(\dfrac{s}{a_t}) & 0\leqslant s\leqslant a_t\\ x_0 & a_t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

因而$[\sigma * c_{x_0}]=[\sigma]$.

4, 逆元素：对任何$[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$, 定义σ的逆道路$\sigma^{-1}:I\to X$ 为$\sigma^{-1}(s)=\sigma(1-s)$. 我们证明$\sigma*\sigma^{-1}\simeq_p c_{x_0}$, 因而

$$[\sigma]\cdot[\sigma^{-1}]=[\sigma*\sigma^{-1}]=[c_{x_0}]$$

如图2.5, 构做从$\sigma*\sigma^{-1}$到常值道路c_{x_0}的道路伦移。

$$G:I\times I\longrightarrow X,\qquad\qquad g_t:I\longrightarrow X$$

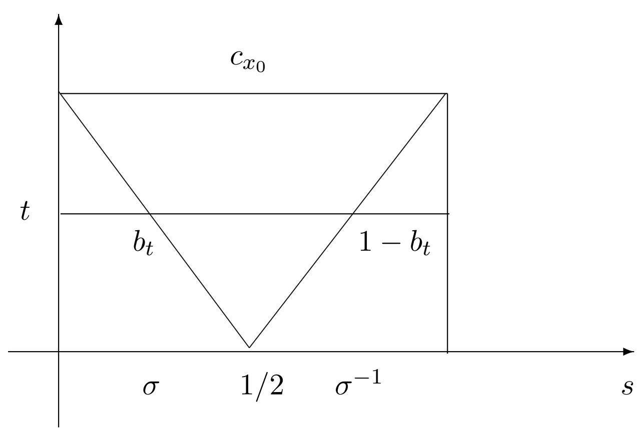


图2.5

从$(1/2,0)$分别向$(0,1)$和$(1,1)$各引一条直线K_1, K_2. 对任何$t\in[0,1]$, 从$(0,t)$引一条平行于s轴的直线分别交K_1, K_2与(b_t,t), $(1-b_t,t)$. 伦移过程中在t时刻g_t在$[0,b_t]$沿σ从$\sigma(0)$到$\sigma(2b_t)$这一段, 在$[b_t,1-b_t]$停留在$\sigma(2b_t)$,

由于$\sigma(2b_t)=\sigma^{-1}(1-2b_t)$, 在$[1-b_t,1]$沿$\sigma^{-1}$返回到$x_0$, 即：

$$g_t(s)=\begin{cases}\sigma(2s) & 0\leqslant s\leqslant b_t\\ \sigma(2b_t) & b_t\leqslant s\leqslant 1-b_t\\ \sigma^{-1}(2s-1) & 1-b_t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

注意到, 当$t=1$时$b_t=0$, $g_1=c_{x_0}$.

例2 记0为欧氏空间$\mathbb{R}^n$的原点, $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)=0$.

事实上$\mathbb{R}^n$中任何一条起点、终点在0的闭路σ都道路同伦与常值道路. 道路伦移为$F:I\times I\to\mathbb{R}^n$

$$F(s,t)=(1-t)\sigma(s).$$

§2.1 习题

1 设σ, $\tau:I\to X$是空间X中从x_0到x_1的两条道路，证明：如果不要求保持起点、终点不动，这两条道路一定是同伦等价的.

2 试计算出命题2.1.3证明中的a_t,b_t并写出道路伦移$F:I\times I\to X$及$f_t:I\to X$的解析表达式.

3 计算出定理2.1.4证明中的a_t, b_t并写出伦移f_t, g_t的解析表达式.

4 设$n>1$. 记S^n为n维标准球面, $x_0=(1,0,\cdots,0)$. 证明：S^n的基本群$\pi_1(S^n,x_0)=0$.

提示：当$n>1$时任何闭路$\sigma:I\to S^n$不会是满映射, 类似于§1.2习题2的证法可以证明σ可以收缩成一个常值道路. 但当$n=1$时不对.

§2.2 基本群的性质

事实上$\pi_1(-,-)$是一个从带基点的拓扑空间偶范畴$\mathcal{T}_0$到群范畴$\mathcal{G}$的的一个共变函子, 因而他是同胚不变量. 不仅如此$\pi_1(-,-)$还是拓扑空间的同伦不变量, 即:当(X,x_0)与(Y,y_0)同伦等价时, 它们的基本群是同构的。

设$f:X\to Y$是一个映射, 则对X中的任何道路$\sigma: I\to X$, $f\cdot\sigma: I\xrightarrow{\sigma} X\xrightarrow{f} Y$ 是Y中的一条道路.

引理2.2.1 如果$f:X\to Y$是一个映射, X中的两条道路σ与τ道路同伦, 则$f\cdot\sigma$与$f\cdot\tau$道路同伦.

证明 首先由$\sigma(0)=\tau(0)$, $\sigma(1)=\tau(1)$知$f\cdot\sigma(0)=f\cdot\tau(0)$, $f\cdot\sigma(1)=f\cdot\tau(1)$. 设$H_t: I\to X$, $t\in[0,1]$是从σ 到τ的道路伦移, $H_0=\sigma$, $H_1=\tau$, 则$f\cdot H_t: I\to X\to Y$ 是从$f\cdot\sigma$到$f\cdot\tau$的道路伦移.

有引理2.2.1易知：如果$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$是带基点的拓扑空间之间的映射, 那么对于$\pi_1(X,x_0)$中的一个道路同伦等价类$[\sigma]$中的任何两条道路σ,σ', $f\cdot\sigma$和$f\cdot\sigma'$在$\pi_1(Y,y_0)$ 的同一个道路同伦等价类中, 即: $[f\cdot\sigma]=[f\cdot\sigma']$. 这样映射$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$导出一个映射

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0),$$

$f_*([\sigma])=[f\cdot\sigma]$.

定理2.2.2 映射$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$导出的映射$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$是一个群同态且满足：

1, 对于映射$g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$

$$(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_* \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\cdot f)_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "g_*"] \\ & \pi_1(Z,z_0). \end{tikzcd}$$

2, 对于$1:(X,x_0)\to(X,x_0)$, $1_*=1:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$.

证明 1, 对于$[\sigma],[\tau]\in\pi_1(X,x_0)$, $[\sigma]\cdot[\tau]=[\sigma*\tau]$

$$f_*([\sigma]\cdot[\tau])=f_*([\sigma*\tau])=[f\cdot(\sigma*\tau)]$$

注意到$f\cdot(\sigma*\tau): I\xrightarrow{\sigma*\tau} X\xrightarrow{f} Y$ 是Y中闭路

$$f\cdot(\sigma*\tau)(s)=\begin{cases} f\cdot\sigma(2s) & 0\leqslant s\leqslant 1/2 \\ f\cdot\tau(2s-1) & 1/2\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

因而$f\cdot(\sigma*\tau)=(f\cdot\sigma)*(f\cdot\tau)$, $f_*([\sigma]\cdot[\tau])=f_*([\sigma])\cdot f_*([\tau])$, f_*是群同态.

2, 对于映射$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, $g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ 及$[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$,

$$(g\cdot f)_*([\sigma])=[g\cdot f\cdot\sigma], \qquad I\xrightarrow{\sigma} X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z$$
$$g_*\cdot f_*([\sigma])=g_*(f_*([\sigma]))=g_*([f\cdot\sigma])=[g\cdot f\cdot\sigma]$$

$(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_*$.

3, 对于单位映射$1:(X,x_0)\to(X,x_0)$, 显然

$$1_* = 1 : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0).$$

因而$\pi_1(-,-)$是从带基点的拓扑空间范畴$\mathcal{T}_0$到群范畴$\mathcal{G}$的一个共变函子.

定理2.2.3 1, 如果带基点的空间映射f与g同伦; $f\simeq g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, 则它们导出的基本群的同态相同

$$f_* = g_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$$

2, 如果带基点的空间同伦等价$f:(X,x_0)\xrightarrow{\simeq}(Y,y_0)$, 则它们的基本群同构。

$$f_* : \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y,y_0)$$

证明 1, 设$H: X\times I\to Y$是从f到g的伦移, 由于是带基点的空间映射的同伦, H满足: 对任何$t\in[0,1]$, $H(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)$. 对任何道路同伦类$[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$

$$H\cdot(\sigma\times 1) : I\times I \xrightarrow{\sigma\times 1} X\times I \xrightarrow{H} Y$$

满足:

$$\begin{aligned} H\cdot(\sigma\times 1)(s,0) =& f\cdot\sigma(s), & H\cdot(\sigma\times 1)(s,1) =& g\cdot\sigma(s) \quad \text{且} \\ H\cdot(\sigma\times 1)(0,t) =& H(\sigma(0),t) = f(x_0), & H\cdot(\sigma\times 1)(1,t) =& g(x_0) \end{aligned}$$

2, 设$g:(Y,y_0)\to(X,x_0)$是$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$的同伦逆，则

$$g_*\cdot f_* = (g\cdot f)_* = 1 \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\cdot f)_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "g_*"] \\ & \pi_1(X,x_0) \end{tikzcd}$$

$$f_*\cdot g_* = (f\cdot g)_* = 1 \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "(f\cdot g)_*"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[d, "f_*"] \\ & \pi_1(Y,y_0) \end{tikzcd}$$

下面我来看基点x_0在基本群$\pi_1(X,x_0)$中的作用。

首先I及$I\times I$都是道路连通的, 闭路的起点、终点$\sigma(0)=\sigma(1)=x_0$, 道路的伦移F满足$F(0,t)=\sigma(0)=x_0$. 因而道路及道路伦移映射的像全落在X的x_0所在的道路连通分支中. $\pi_1(X,x_0)$只与x_0所在的道路连通分支有关. 为此, 我总假设X是道路连通的. 当X不道路连通时, 对X的道路连通分支分别研究其基本群.

设X是道路连通的拓扑空间, $\gamma : I \to X$是X中从x_0到x_1的一条道路. 则对X中任何一条起点、终点在x_0的闭路σ, $\gamma^{-1} * \sigma * \gamma$ 是X中一条起点、终点在x_1的闭路,其中γ^{-1}是γ的逆道路（见图2.6）.

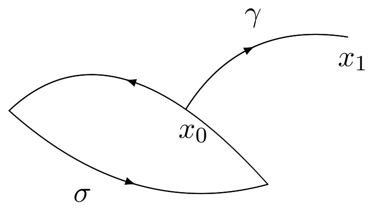


图2.6

命题2.2.4 X中从x_0到x_1的一条道路γ诱导出基本群的同构

$$\gamma^* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X.x_1),$$

其中γ^*定义为：对任何$[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, $\gamma^*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$.

证明 首先, 道路同伦类$[\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$不依赖于$[\sigma]$中代表元$\sigma$的选取, γ^*的定义合理.

设$[\sigma]$, $[\tau]$是$\pi_1(X, x_0)$中的两个道路同伦类,

$$\gamma^*([\sigma]) \cdot \gamma^*([\tau]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \tau * \gamma] = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma * \gamma^{-1} * \tau * \gamma].$$

仿照定理2.1.4中$\sigma^{-1} * \sigma \simeq_p c_{x_0}$的证明, 读者容易证明

$$\gamma^{-1} * \sigma * (\gamma * \gamma^{-1}) * \tau * \gamma \simeq_p \gamma^{-1} * \sigma * \tau * \gamma.$$

因而$\gamma^*([\sigma]) \cdot \gamma^*([\tau]) = \gamma^*([\sigma] \cdot [\tau])$. γ^*是同态.

γ的逆道路γ^{-1}诱导出同态:${\gamma^{-1}}^* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$. 由

$${\gamma^{-1}}^* \cdot \gamma^*([\sigma]) = [\gamma * (\gamma^{-1} * \sigma * \gamma) * \gamma^{-1}]$$

易知${\gamma^{-1}}^* \cdot \gamma^* = 1 : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, 同样$\gamma^* \cdot {\gamma^{-1}}^* = 1$. γ^*是同构.

由此知: 对一个道路连通的空间X, 基本群$\pi_1(X, x_0)$与基点x_0的选取无关. 以后X的基本群可以简记为$\pi_1(X)$.

如果$\gamma : I \to X$是X中起点、终点都在x_0的闭路, 则$[\gamma]$本身是$\pi_1(X, x_0)$ 中的道路同伦类, 同时γ还导出基本群的同构

$$\gamma^* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

容易验证:对任何$[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\gamma^*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma] = [\gamma]^{-1} \cdot [\sigma] \cdot [\gamma],$$

这个同构是基本群$\pi_1(X, x_0)$的一个内自同构.

设$f, g : X \to Y$是同伦的两个映射, $x_0 \in X$, 但$f(x_0) \neq g(x_0)$, 不仿设$f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$. 设$F : X \times I :\to Y$是f到g的伦移. 固定x_0 $F(x_0, t) = \gamma(t)$是从y_0到y_1的一条道路.

命题2.2.5 对于同伦的两个映射$f \overset{F}{\simeq} g : X \to Y$ 有基本群同态的交换图

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\gamma^*", "\cong"'] \\ & \pi_1(Y,y_1) \end{tikzcd}$$

其中$\gamma(t) = F(x_0,t)$.

证明 设$[\sigma] \in \pi_1(X,x_0)$是$X$的一个道路同伦类,

$$f_*([\sigma]) = [f \cdot \sigma] \in \pi_1(Y,y_0), \qquad g_*([\sigma]) = [g \cdot \sigma] \in \pi_1(Y,y_1).$$

注意到:固定$t \in [0,1]$, s在$[0,1]$变化, $F(\sigma(s),t)$是起点、终点在$\gamma(t) = F(x_0,t)$的一条闭路. 如图2.7, 我们构做从$\gamma^{-1} * (f \cdot \sigma) * \gamma$到$c_{x_1}^{-1} * (g \cdot \sigma) * c_{x_1}$ 的道路同伦. 则由$[c_{x_1}^{-1} * (g\sigma) * c_{x_1}] = [g \cdot \sigma]$知:

$$\gamma^* \cdot f_*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * (f \cdot \sigma) * \gamma] = g_*([\sigma]).$$

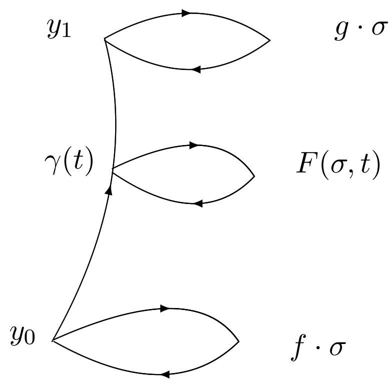


图2.7

道路伦移在t时刻, $[0,1/3]$沿γ的逆道路从y_1走到$\gamma(t) = \gamma^{-1}(1-t)$, $[1/3,2/3]$沿$F(\sigma,t)$走起点、终点在$\gamma(t)$的闭路, $[2/3,1]$沿γ从$\gamma(t)$ 返回到y_1, 即:

$$f_t(s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(3s(1-t)) & 0 \leqslant s \leqslant 1/3 \\ F(\sigma(3s-1),t) & 1/3 \leqslant s \leqslant 2/3 \\ \gamma((3s-2)(1-t)+t) & 2/3 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

定理2.2.6 如果$f : X \overset{\simeq}{\longrightarrow} Y$是同伦等价的两个空间, $f(x_0) = y_0$, 则

$$f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$$

是基本群的同构.

证明 设$g : Y \longrightarrow X$是f的同伦逆. 此时我们不能希望$g(y_0) = x_0$, 为此假设$g(y_0) = x_1$, $f(x_1) = y_1$. 设F是$g \cdot f$到单位映射的伦移, G是$f \cdot g$到单位映

射的伦移;

$$g\cdot f \overset{F}{\simeq} 1 : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$
$$f\cdot g \overset{G}{\simeq} 1 : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y.$$

则F给出X中从x_1到x_0的一条道路$\gamma(t) = F(x_0,t)$; G给出Y中从y_1到y_0的一条道路$\delta(t) = G(y_0,t)$, 而

$$f\cdot\gamma : .I \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y$$

给出Y中另一条从y_1到y_0的道路. 由命题2.2.5知:

$$\gamma^* g_* f_* = 1 : \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[drr, "1"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X,x_1) \arrow[d, "\gamma^*"] \\ & & \pi_1(X,x_0) \end{tikzcd}$$

并且$\delta^* f_* g_* = 1$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\gamma^*"'] & \pi_1(Y,y_1) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "(f\cdot\gamma)^*"'] & \pi_1(Y,y_0) \\ & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

注意到这里的f_*有两个, 一个是$f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$, 另一个是$f_* : \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(Y,y_1)$. 由于上图可换, 我们有

$$(\gamma^* g_*)\cdot f_* = 1 f_*\cdot(\gamma^* g_*) \neq \qquad 1$$
$$\delta^*\cdot(f\cdot\gamma)^{*^{-1}}\cdot f_*\cdot(\gamma^* g_*) = 1$$

而$\delta^*\cdot(f\cdot\gamma)^{*^{-1}} = ((f\cdot\gamma^{-1}) * \delta)^*$ 是$\pi_1(Y,y_0)$的一个内自同构. 因而$f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ 是同构。

定义2.2.1 道路连通的空间X称为是单连通的, 如果其基本群$\pi_1(X,x_0) = 0$.

§2.2 习题

1 设$\gamma : I \to X$是X中以x_0为起点、终点的闭路, 证明: $\gamma^* = 1 : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$的充分必要条件是$[\gamma]$ 和$\pi_1(X,x_0)$中任何道路同伦类都可换.

2 设X是道路连通的空间, 证明: X单连通的充要条件是, X中任何起点、终点相同的道路$\sigma,\tau : I \to X$都道路同伦。

3 设X是单连通的拓扑空间, 记$D^2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 1\}$, 为单位圆盘, S^1是单位圆. 证明: 任何映射$f : S^1 \to X$都可以扩充到D^2上.

4 证明: 如果$f : X \to Y$同伦等价与常值映射c_{y_0}则f导出基本群的零同态$f_* = 0 : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$.

5 令$CX = X \times I/X \times \{1\}$为空间$X$的锥, $f : X \to Y$是映射. 证明: f同伦与常值映射的充分必要条件是f可以扩充到CX上.

6 设X, Y都是道路连通的空间, 证明: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

注 设G_1, G_2是乘法群, 在$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ 中定义乘法$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1',\ g_2 \cdot g_2')$使$G_1 \times G_2$还构成群.

7 设$A \subset X$是X的收缩核, $r : X \to A$是收缩映射, 基点$x_0 \in A$. 证明: $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是单射, $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$是满射.

8 设G关于运算“$\cdot$”是一个拓扑群(既是拓扑空间又群, 并且乘积运算, 求逆运算都是连续的), e是他的单位元. 令ΩX为G中起点、终点在e的所有闭路构成的集合. 对于$\sigma, \tau \in \Omega X$, 定义一条闭路$\sigma \otimes \tau : I \to G$为:

$$(\sigma \otimes \tau(s) = \sigma(s) \cdot \tau(s)$$

1, 证明: 这个运算使ΩX构成一个群.

2, 在所有道路同伦等价类$\pi_1(G, e)$中定义一种运算“$\otimes$”: 对任何$[\sigma], [\tau] \in \pi_1(G, e)$, $[\sigma] \otimes [\tau] = [\sigma \otimes \tau]$. 证明: 这种运算和利用道路乘积$*$定义的运算是等价的, 即在$\pi_1(G, e)$中

$$[\sigma] \otimes [\tau] = [\sigma \otimes \tau] = [\sigma * \tau] = [\sigma] \cdot [\tau].$$

3, 证明: $\pi_1(G, e)$是一个交换群.

9 证明: $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/6$, 而$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \ncong \mathbb{Z}/4$.

§2.3 圆的基本群

在本节我们将通过实直线$\mathbb{R}$来计算圆S^1的基本群。事实上，圆的基本群$\pi_1(S^1,x_0)$中的一个道路同伦等价类仅依赖于它绕圆旋转的周数。当周数为负时指沿反方向旋转。

记$S^1=\{e^{2\pi it}\in\mathbb{C}|t\in\mathbb{R}\}$为复平面上的单位圆, 选取基点$x_0=e^0=1$.
定理2.3.1 $\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}$, 生产元是$\sigma_1:I\to S^1$, $\sigma_1(t)=e^{2\pi it}$.

构做映射

$$\phi:\mathbb{R}\to S^1,\qquad \phi(x)=e^{2\pi ix}$$

和

$$\psi:S^1-\{-1=e^{\pi i}\}\longrightarrow(-1/2,1/2),\qquad \psi(e^{2\pi it})=t$$

（见图2.8）

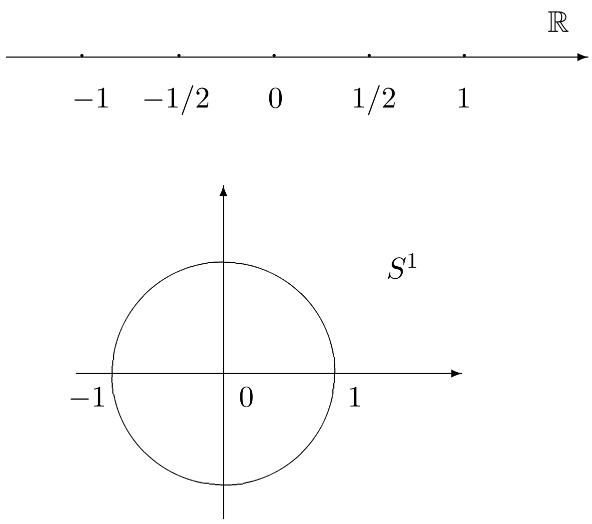


图2.8

容易验证，$\psi:S^1-\{-1\}\to(-1/2,1/2)$是同胚映射. 而对任何$S^1$中的一点$z_0=e^{2\pi it_0}$和这点的一个小邻域$U_0=\{e^{2\pi it}|t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon\}$

$$\phi^{-1}(e^{2\pi it_0})=\{t_0+n|n\in\mathbb{Z}\}=\{t_0\}\times\mathbb{Z}$$
$$\phi^{-1}(U_0)=\cup_{n\in\mathbb{Z}}(n+t_0-\varepsilon<t<n+t_0+\varepsilon)\cong U_0\times\mathbb{Z}$$

引理2.3.2（**道路提升引理**） 如果$\sigma:I\to S^1$是S^1中一条起点在$\sigma(0)=e^0=1$的道路则在$\mathbb{R}$中有唯一的一条起点在$\sigma'(0)=0$的道路$\sigma':I\to\mathbb{R}$ 使

得$\phi\cdot\sigma'=\sigma$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I \arrow[ur, dotted, "\sigma'"] \arrow[r, "\sigma"'] & S^1. \end{tikzcd}$$

引理2.3.3（覆盖同伦定理） 设$\sigma,\tau:I\to S^1$是S^1中道路同伦的两条起点在$\sigma(0)=\tau(0)=1$的道路, $F:I\times I\to S^1$是从σ到τ的道路伦移. 则存在唯一的$\mathbb{R}$中的伦移$F':I\times I\to\mathbb{R}$使得$F'(0,0)=0$. 而$\sigma'=F'(s,0)$是$\sigma$的道路提升, $\tau'=F'(s,1)$是τ的道路提升.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I\times I \arrow[ur, dotted, "F'"] \arrow[r, "F"'] & S^1. \end{tikzcd}$$

证明 我们将两个引理, $\sigma:I\to S^1$可以看成是$F_\sigma:I\times I\to S^1$, 对任何$t\in[0,1]$, $F_\sigma(s,t)=\sigma(s)$.

提升的存在性: $F:I\times I\to S^1$连续, $I\times I$是紧致空间, S^1是度量空间, 因而F在$I\times I$上一致连续. 取$\varepsilon=1$存在$\delta>0$使得:对任何$y,y'\in I\times I$, 当$\rho(y,y')<\delta$时, $\rho(F(y),F(y'))<1$. 在此我们只要求$F(y)$与$F(y')$不是对径点即可, 在$\mathbb{C}$中$\dfrac{F(y)}{F(y')}\neq-1$, 因而$\psi:S^1-\{-1\}\to(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 在$\dfrac{F(y)}{F(y')}$上有定义.

对任何$y\in I\times I$, $\rho(0,y)\leqslant\sqrt{2}$, 其中0是坐标原点$(0,0)$. 选定$N$使得$\dfrac{\sqrt{2}}{N}<\delta$, 因而对任何$y\in I\times I$ $\dfrac{\rho(0,y)}{N}<\delta$. 同时由于$I\times I$是凸集, 连接坐标原点0与$y$的线段全在$I\times I$中.

将线段$0y$ N等分, 分点是

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_{k-1}<y_k<\cdots<y_N=y$$

（$y_k=\dfrac{k}{N}y$）. 此时$\rho(y_{k-1},y_k)<\delta$, $\dfrac{F(y_k)}{F(y_{k-1})}\neq-1$.

令$F':I\times I\to\mathbb{R}$为: 对任何$y\in I\times I$

$$F'(y)=\psi\left(\frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})}\right)+\psi\left(\frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{F(y_2)}{F(y_1)}\right)+\psi\left(\frac{F(y_1)}{F(y_0)}\right).$$

由于N是固定的, F'连续且

$$\phi\cdot F'(y)=e^{2\pi iF'(y)}=\frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})}\cdot\frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})}\cdots\frac{F(y_2)}{F(y_1)}\frac{F(y_1)}{F(y_0)}=F(y)$$

在此记$F(y_0)=F(0)=e^{2\pi i0}$. 归纳的记$F(y_{k-1})=e^{2\pi it_{k-1}}$. 由于$\dfrac{F(y_k)}{F(y_{k-1})}\neq-1$, 我们可以根据$t_{k-1}$的取值, 通过适当的选取$t_k\in(-\infty,\infty)$使得$t_k-t_{k-1}\in(-1/2,1/2)$且$F(y_k)=e^{2\pi it_k}$. 在此也可以理解为: 当从$F(y_{k-1})$到$F(y_k)$沿逆

时针方向走时, 则通过选t_k 使得$1/2 > t_k - t_{k-1} > 0$. 当沿顺时针方向走时, 则通过选t_k使得$-1/2 < t_k - t_{k-1} < 0$. 此时

$$\frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})} = \frac{e^{2\pi i t_k}}{e^{2\pi i t_{k-1}}} = e^{2\pi i(t_k - t_{k-1})}$$
$$\psi\left(\frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})}\right) = t_k - t_{k-1}$$

而

$$\begin{aligned}F'(y) =&\psi\left(\frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})}\right) + \psi\left(\frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{F(y_2)}{F(y_1)}\right) + \psi\left(\frac{F(y_1)}{F(y_0)}\right)\\ =&(t_N - t_{N-1}) + (t_{N_1} - t_{N-2}) + \cdots + (t_2 - t_1) + (t_1 - 0) = t_N.\end{aligned}$$

提升的唯一性: $I \times I$是道路连通的. 对于映射$G : I \times I \to \mathbb{R}$, 如果$\phi \cdot G = C_x$, 则$G(I \times I) \subset \phi^{-1}(x)$. 而

$$\phi^{-1}(x) = \{t + k | k \in \mathbb{Z}\}$$

是一些离散的点, 映射的像$G(I \times I)$是连通的, 因而$G(I \times I) \equiv t + k_0$是一个常值.

设$F : I \times I \to S^1$有两个提升$F', F'' : I \times I \to \mathbb{R}$且都满足$F'(0) = F''(0) = 0$. 则$F' - F'' : I \times I \to \mathbb{R}$连续且

$$\phi(F' - F'') = \frac{e^{2\pi i F'}}{e^{2\pi i F''}} = \frac{F}{F} = c_1$$

因而$F' - F''$是一个常值映射, 由$F'(0) = F''(0)$知$F' \equiv F''$.

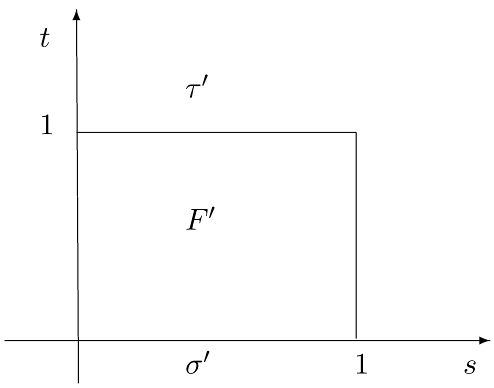


图2.9

考察$F'(s, 0) = \sigma'(s)$和$F'(s, 1) = \tau'(s)$（见图2.9）, 我们注意到

$$\phi \cdot \sigma'(s) =\phi \cdot F'(s, 0) = F(s, 0) = \sigma(s), \quad \phi \cdot \tau'(s) =\phi \cdot F'(s, 1) = F(s, 1) = \tau(s).$$

同样由于$\{0\} \times I$和$\{1\} \times I$都道路连通,

$$\phi \cdot F'(0, t) =F(0, t) \equiv 1, \qquad \phi \cdot F'(1, t) =F(1, t) \equiv 1$$

$F'(\{0\}\times I), F'(\{1\}\times I)\in\phi^{-1}(1)$ 也是常值并且

$$\sigma'(0)=F'(0,0)=0=F'(0,1)=\tau'(0),$$

σ',τ'分别是σ,τ 的道路提升.

定理2.3.1的证明 对任何道路同伦类$[\sigma]\in\pi(S^1,1)$, 任选一个代表元$\sigma: I\to S^1$. σ在$\mathbb{R}$中有唯一的道路提升$\sigma': I\to\mathbb{R}$ 使得$\sigma'(0)=0$. 在此不能断定道路提升的终点$\sigma'(1)$也是0, 由$\phi\cdot\sigma'(1)=\sigma(1)=1$ 知$\sigma'(1)\in\phi^{-1}(1)=\mathbb{Z}$. 因而$\sigma$唯一的对应一个整数$\sigma'(1)=n$, 这个整数实际上代表的是$\sigma$绕圆转的周数.

如果$\sigma\simeq_p\tau$, $F: I\times I\to S^1$是从σ到τ的道路伦移. 则F有唯一的同伦提升$F': I\times I\to\mathbb{R}$使得$F'(0,0)=0$而

$$F'(0,s)=\sigma'(s),\qquad\qquad F'(1,s)=\tau'(s)$$

分别是σ,τ的道路提升

前面我们已经证明了$F'(\{1\}\times I)\in\phi^{-1}(1)$是常值. 道路提升的终点$\sigma'(1)=\tau'(1)=n$与道路同伦类$[\sigma]$ 中代表元σ的选取无关.

定义$\chi:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$为: 对任何道路同伦类$[\sigma]\in\pi_1(S^1,1)$, 任选一个代表元$\sigma$, 做$\sigma$在$\mathbb{R}$中的道路提升$\sigma'$. 定义

$$\chi([\sigma])=\sigma'(1)\qquad \text{道路提升的终点.}$$

下面我们证明$\chi:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$是群同构.

首先证明χ是群同态. 对任何两个道路同伦类$[\sigma],[\tau]\in\pi_1(S^1,1)$ 假设σ',τ'分别是σ,τ的道路提升且$\sigma'(0)=\tau'(0)=0$, 则$\chi([\sigma])=\sigma'(1)$, $\chi([\tau])=\tau'(1)$.

考虑$\sigma*\tau$的道路提升, 我们注意到: 它们各自的道路提升σ'和τ'不能做乘积, 但σ'和$\sigma'(1)+\tau'$可以做乘积, 其中$\sigma'(1)$是一个整数. 并且

$$\phi\cdot(\sigma'(1)+\tau'(s))=\phi(\sigma'(1))\cdot\phi(\tau'(s))=\tau(s).$$

$\sigma'*(\sigma'(1)+\tau')$是$\sigma*\tau$的道路提升.因而

$$\begin{aligned}\chi([\sigma]\cdot[\tau])=\chi([\sigma*\tau])=\sigma'*(\sigma'(1)+\tau')(1)=\sigma'(1)+\tau'(1)\\ =\chi([\sigma])+\chi([\tau])\end{aligned}$$

χ是群同态.

对任何$n\in\mathbb{Z}$, 有S^1中的闭路

$$\sigma_n: I\longrightarrow S^1,\qquad \sigma_n(s)=e^{2\pi ins}$$

它的道路提升为

$$\sigma'_n: I\longrightarrow S^1, hskip1cm\sigma'_n(s)=ns$$

$\chi([\sigma_n])=\sigma'_n(1)=n$, χ是满同态.

设$[\sigma],[\tau]$ 是$\pi_1(S^1,1)$中的两个道路同伦类, $\sigma',\tau': I\to\mathbb{R}$分别是$\sigma,\tau$的道路提升. 如果

$$\chi([\sigma])=\sigma'(1)=\chi([\tau])=\tau'(1),$$

则σ',τ'是$\mathbb{R}$中起点在0, 终点相同的道路. 我们可以很容易的构做出从σ'到τ'的道路伦移

$$F'(s,t)=(1-t)\sigma'(s)+t\tau'(s).$$

因而$F=\phi\cdot F'$是从σ到τ的道路伦移, $[\sigma]=[\tau]$. χ是单同态.

例1 $\mathbb{R}^2-\{0\}$与圆S^1同伦等价, 因而$\pi_1(\mathbb{R}^2-\{0\},(1,0))\cong\mathbb{Z}$.

例2 $n\geqslant 3$时, $\mathbb{R}^n$不与$\mathbb{R}^2$拓扑.

设$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^n$同胚, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ 是同胚映射. 设$f(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$, 则

$$f:\mathbb{R}^2-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n-\{x_0\}$$

也是同胚映射. 它导出基本群的同构,

$$f_*:\pi_1(\mathbb{R}^2-\{0\},(1,0))\xrightarrow{\cong}\pi_1(\mathbb{R}^n-\{f(0)\},f(1,0)).$$

但是$\pi_1(\mathbb{R}^2-\{0\},(1,0))\cong\mathbb{Z}$, 而$\mathbb{R}^n-\{f(0)\}$同伦等价与$n-1$维球面$S^{n-1}$. 在§2.1习题4中我们证明过: $n-1\geqslant 2$时, $\pi_1(S^{n-1},x_0)=0$. 因而当$n\geqslant 3$时$\pi_1(\mathbb{R}^n-\{f(0)\},f(1,0))=0$. 矛盾.

例3 环面$T^2=S^1\times S^1$, 因而

$$\pi_1(S^1\times S^1,(1,1))=\pi_1(S^1,1)\times\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

命题2.3.4 圆盘D^2的边界S^1不是D^2的收缩核, 即不存在映射$r:D^2\to S^1$使得$r\cdot i=1_{S^1}$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "1"'] & D^2 \arrow[d, "r"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

证明: 记$D^2=\{z\in\mathbb{C}||z|\leqslant 1\}$为复平面上的单位圆盘, 并去基点$x_0=1$. 如果存在$r:D^2\to S^1$使得$r\cdot i=1_{S^1}$, 则映射导出基本群的同构$r_*\cdot i_*=1$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "1"'] & \pi_1(D^2,1) \arrow[d, "r_*"] \\ & \pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

但是D^2是可缩空间, 其基本群$\pi_1(D^2,1)=0$, 而$\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}$. 矛盾.

例4 记映射$n:S^1\to S^1$为$n(e^{2\pi is})=e^{2\pi int}$, 它导出基本群的同态$n_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1)$. 对$\pi_1(S^1,1)$中的道路同伦类$[\sigma]$, 设$\sigma':I\to\mathbb{R}$ 是代表元σ在$\mathbb{R}$中的提升. 由ϕ的定义知

$$\sigma:I\longrightarrow S^1\qquad 为\sigma(s)=e^{2\pi i\sigma'(s)}.$$

因而对$s\in I$

$$n\cdot\sigma(s)=n(\sigma(s))=e^{2\pi in\sigma'(s)}$$

$n_*([\sigma])=n\cdot[\sigma]$为$[\sigma]$乘以$n$倍.

定理2.3.5(Brouwer**不动点定理**) 任何圆盘D^2到自身的映射$f: D^2 \to D^2$都有不动点, 即存在$x \in D^2$使得$f(z) = z$.

证明: 如果$f: D^2 \to D^2$不存在不动点, 即对任何$z \in D^2$, $f(z) \neq z$.

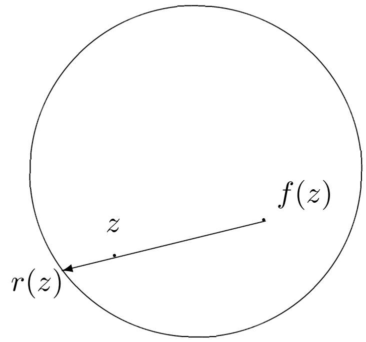


图2.10

如图2.10, 从$f(z)$向z引一条射线, 这条射线交边界圆与$r(z)$. 定义$r: D^2 \to S^1$为: 对任何$z \in D^2$, $r(z)$为射线与边界圆的交点. 容易验证, 当$z \in S^1$在边界圆上时$r(z) = z$, $r \cdot i = 1_{S^1}$. 与命题2.3.4矛盾.

定理2.3.4是Brouwer不动点定理的2维形式, 更一般的Brouwer不动点定理是: 任何n维实球体$D^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | \sum x_i^2 \leqslant 1\}$ 到自身的映射$f: D^n \to D^n$都有不动点.

§2.3 习题

1 试证明1维形式的Brouwer不动点定理, 即任何映射$f: [-1, 1] \to [-1, 1]$ 都有不动点.

2 设$X = U \cup V$, 其中U, V是X的开集, 基点$x_0 \in U \cap V$. 证明:如果U, V都是单连通的, $U \cap V$是道路连通的, 则X是单连通的.

3 求$D^n - \{0\}$的基本群$\pi_1(D^n - \{0\}, x_0)$, 其中0是坐标原点.

4 试利用圆的基本群证明代数基本定理, 即复数域上的n次方程在复数域上一定有n 个根.

5 设$A \hookrightarrow X$是X的收缩核, $\pi_1(A, x_0)$是$\pi_1(X, x_0)$的正规子群. 证明:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) \times \pi_1(X, x_0)/\pi_1(A, x_0).$$

6 设A是一个3×3阶矩阵, 其各个元素a_{ij}均大于0. 试证明: A有一个正的特征值λ_1, 且有一个各分量都大于0的属于λ_1特征向量.

提示： 令$T = \{(x, y, z)^T \in S^2 | x, y, z \geqslant 0\}$为第一卦限的四分之一球面. 考虑映射

$$f: T \to S^2 \qquad f(x, y, z,) = \frac{A \cdot (x, y, z)^T}{\| A \cdot (x, y, z)^T \|}$$

利用Brouwer不动点定理证明结论.

§2.4 van Kampen定理

在介绍van Kampen定理之前, 我们先来介绍一个关于群的基本概念–自由积.

定义2.4.1 设A, B是两个群e_A, e_B分别是A, B的单位元. 定义A与B的自由积$A * B$是一个群.

其单位元为$e = e_A = e_B$.

其元素是任意长度的字

$a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n$　可以认为是乘积, 满足结合律, 其中$a_i \in A$, $b_i \in B$

逆元素

$$(a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n)^{-1} = b_n^{-1}a_n^{-1} \cdots b_2^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}.$$

例1 设$\mathbb{Z}\{a\}, \mathbb{Z}\{b\}$分别是由$a, b$生成的自由Abel群, 则$\mathbb{Z}\{a\} * \mathbb{Z}\{b\}$或简记为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(a, b)$ 为由a, b生成的自由群. 其元素形如

$$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_1}b^{m_2} \cdots a^{n_s}b^{m_s} \quad 其中 n_i, m_i \in \mathbb{Z}.$$

在$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$中由$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$生成的正规子群称为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$的交换化子, 记为$[\mathbb{Z}, \mathbb{Z}]$. 其元素是所有满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = 0, \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_1 = 0$$

的元素$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \cdots a^{n_s}b^{m_s}$. 而商群

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/[\mathbb{Z}, \mathbb{Z}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

例2 记$\mathbb{Z}/2\{a\}, \mathbb{Z}/2\{b\}$分别为由$a, b$生成的乘法群$\mathbb{Z}/2$. 记

$$\mathbb{Z}/2\{a\} = \{e, a\}, \qquad \mathbb{Z}/2\{b\} = \{e, b\}.$$

则$\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$是一个非交换群, 其元素有以下4种形式:

$$\begin{array}{ll} abab \cdots ab, & baba \cdots ba \\ abab \cdots aba & baba \cdots bab. \end{array}$$

定义2.4.2 设S是一个集合, 定义$F(S)$为由S生成的自由群. 其元素为所有的字

$$F(S) = \{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s} | 其中 \alpha_i \in S,\ k_i \in \mathbb{Z},\ 满足 \alpha_i^0 = e\}$$

乘积满足结合律且

$$(\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s}) \cdot (\beta_1^{l_1}\beta_2^{l_2} \cdots \beta_t^{l_t}) = \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s}\beta_1^{l_1}\beta_2^{l_2} \cdots \beta_t^{l_t}.$$

逆元素为

$$(\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s})^{-1} = \alpha_s^{-k_s} \cdots \alpha_2^{-k_2}\alpha_1^{-k_1}.$$

简单的说, 在一个自由群$F(S)$中元素之间的乘积没有任何关系. 因此尽管自由群很大, 但它也有很好的性质

定理2.4.1 对任何群G, 任何集合的映射$f : S \to G$都可以扩充成群同态$F_f : F(S) \to G$, 使得对任何$\alpha \in S$, $F_f(\alpha) = f(\alpha)$.

证明 定义$F_f : F(S) \to G$为: 对任何$F(S)$中的字$\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_s^{k_s}$,

$$F_f(\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_s^{k_s}) = f(\alpha_1)^{k_1}f(\alpha_2)^{k_2}\cdots f(\alpha_s)^{k_s}.$$

容易验证F_f是满足条件的群同态.

在此应当注意到: 如果F是由集合S生成的一般的群（非自由群）, G是另一个群. 一般情况下集合映射$f : S \to G$不能扩充成群同态. 原因是: 在群F中可能有一些关系, 比如$\alpha^3 = e, \alpha^2\beta = \beta\alpha$等, 而在$G$当中$f(\alpha), f(\beta)$没有这些关系.

例3 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$是由$S = \{a, b\}$生成的群, 有关系

$$a^2 = e, \quad b^3 = e, \quad ab = ba.$$

集合映射$f : \{a, b\} \to \mathbb{Z}/5,\ f(a) = 1, f(b) = 2$就不能扩充成群同态. 否则

$$f(e) = 0 = f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

定理2.4.2 任何群G都同构与某个自由群的商群.

证明: 记G^*为从群G中除去单位元e后得到的集合. 由G^*生成一个自由群$F(G^*)$. 定义集合映射$fG^* \to G$为: 对任何$a \in G^*$, $f(a) = a \in G$. 将f扩充成群同态$F_f : F(G^*) \to G$. 容易验证F_f是一个满同态, 因而$G \cong F(G^*)/KerF_f$.

定理2.4.3的另一种解释是: 任何群都是由生成元和关系组给出的. 在此集合G^*是生成元$KerF_f$是关系组. 当然许多群的生成元不必找这么多.

例4 对于群$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 不必找$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^*$ 做生成元生成自由群. 找生成元$\{a, b\}$生成自由群$F(a, b)$. 定义集合映射

$$f : \{a, b\} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad f(a) = (1, 0), f(b) = (0, 1)$$

并扩充成群同态$F_f : F(a, b) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 容易验证$F_f$是满同态, $KerF_f$为$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$生成的正规子群.

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong F(a, b)/\langle [a, b] \rangle.$$

另一种理解方法是$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$由两个元素$a, b$生成, 关系是$ab = ba$.

van Kampen**定理** 设U, V是空间X的两个开集, 满足:

1, $U \cup V = X$且基点$x_0 \in U \cap V$.

2, $U \cap V$, U, V都是道路连通的.

则$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$. 其中$N$由一下方式给出: 记

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0), \qquad i_2 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_2(V, x_0)$$

为内射导出的基本群同态. 任取$[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ $i_1([\sigma]) \in \pi_1(U, x_0)$, $i_2([\sigma]) \in \pi_1(V, x_0)$ 因而

$$i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma]) \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

N为$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$中所有的$i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$ 生成的正规子群, 即:

$$N = \langle i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma]) | [\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0).$$

van Kampen定理也可以理解为$X = U \cup V$的基本群$\pi_1(X, x_0)$等于在U的基本群与V的基本群的自由积$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$中添加关系: 对任何$U \cap V$的基本群$\pi_1(U \cap V, x_0)$中的任何道路同伦类$[\sigma]$, $i_1([\sigma]) = i_2([\sigma])$.

证明*: 定理的证明很长, 在此我们只阐述一下定理证明的思路, (读者可以参考。。。的Elements of Topology).

记

$$
\begin{aligned}
&j_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0), && j_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)\\
&\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) && \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\\
&i : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)
\end{aligned}
$$

为内射导出的基本群同态. 由群自由积的性质知j_1, j_2导出同态

$$j = j_1 * j_2 : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$

并且有商同态

$$p : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N.$$

因此, 我们有下面群同态的交换图.

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[drr, bend left, "\phi_1'"] & & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] \arrow[r, "i"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[rr, dotted, bend right=10, "\phi"'] & A * B \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "p"] & \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"] \arrow[ur, "\phi_2"] \arrow[urr, bend right, "\phi_2'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

其中$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$简记为$A * B$.

在此, 我们需要构做一个同构映射$\phi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 使得上图可换, 而$p \cdot \phi$是同构.

首先构做一个对应$\bar{\phi} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

对任何$\pi_1(X, x_0)$中的道路同伦类$[\sigma]$, 选取一个代表元

$$\sigma : I \longrightarrow X \qquad \text{使得}\sigma(0) = \sigma(1) = x_0.$$

由于单位区间I是紧致的, $\{U, V\}$是X的一个开覆盖, 存在I的一个划分

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = 1$$

使得对任何i, $\sigma([t_{i-1}, t_i])$的像或者在U中或者在V中.

我们记

$$\sigma_i' : I \longrightarrow X \qquad\qquad \sigma_i'(s) = \sigma((1-s)t_{i-1} + st_i)$$

为σ在$[t_{i-1}, t_i]$一段的道路, 则σ_i'或者是U中道路或者是V中道路. 道路的起点是$\sigma(t_{i-1}) = x_{i-1}$, 终点是$\sigma(t_i) = x_i$.

由于$U, V, U \cap V$都是道路连通的,我们依照以下原则选取从基地x_0到$x_i = \sigma(t_i)$的道路τ_i. (见图2.11) 对任何$0 < i < n$

1 如果$\sigma([t_{i-1},t_i]),\sigma([t_i,t_{i+1}])$的像同在$U$或同在$V$中, 我们选取$\tau_i$ 为U或V中从x_0到$x_i=\sigma(t_i)$的道路. 此时

$\sigma_i'*\tau_i^{-1}$是U或V中从$x_{i-1}=\sigma(t_{i-1})$到基点x_0的道路.

$\tau_i*\sigma_{i+1}'$是U或V中从基点x_0到$x_{i+1}=\sigma(t_{i+1})$的道路.

2 如果$\sigma([t_{i-1},t_i]),\sigma([t_i,t_{i+1}])$一个在$U$中一个在$V$中, 比如:

$$\sigma([t_{i-1},t_i])\subset U, \qquad\qquad \sigma([t_i,t_{i+1}])\subset V,$$

则$x_i=\sigma(t_i)\in U\cap V$. 我们选$\tau_i$为$U\cap V$中从基点$x_0$到$x_i=\sigma(t_i)$的一条道路. 此时

$\sigma_i'*\tau_i^{-1}$是U中从$x_{i-1}=\sigma(t_{i-1})$到基点x_0的道路.

$\tau_i*\sigma_{i+1}'$是V中从基点x_0到$x_{i+1}=\sigma(t_{i+1})$的道路.

特别的, $\sigma_1'*\tau_1^{-1}$, $\tau_{n-1}'*\sigma_n'$是起点、终点在x_0的闭路.

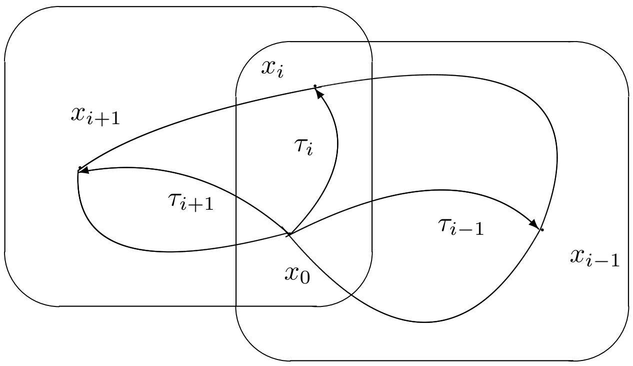


图2.11

由此得到: 对任何$1\leqslant i\leqslant n$, $\tau_{i-1}*\sigma_i'*\tau_i^{-1}$是$U$或$V$中的闭路, 因而

$$[\sigma_1'*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma_i'*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma_n']$$

是$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$中的一个元素, 他代表$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中的一个等价类.

要完成整个定理的证明, 我们还需要完成以下几个步骤.

1, 证明等价类

$$\big([\sigma_1'*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma_i'*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma_n']\big)\cdot N$$

在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中不依赖与从基点$x_0$到$x_i=\sigma(t_i)$的道路$\tau_i$的选取。这是因为当另选从$x_0$到$x_i$的道路$\gamma_i$时,

$$\begin{aligned}&[\sigma_1'*\gamma_1^{-1}]\cdot[\gamma_1*\sigma_2'*\gamma_2^{-1}]\cdots[\gamma_{i-1}*\sigma_i'*\gamma_i^{-1}]\cdots[\gamma_{n-1}*\sigma_n']\\=&[\sigma_1'*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\gamma_1^{-1}]\cdot[\gamma_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2'*\tau_2^{-1}]\cdot[\tau_2*\gamma_2^{-1}]\cdots[\gamma_{n-1}*\tau_{n-1}^{-1}]\cdot[\tau_{n-1}*\sigma_n']\\=&[\sigma_1'*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma_i'*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma_n']\end{aligned}$$

其中$[\tau_i*\gamma_i^{-1}]$及$[\gamma_i*\tau_i^{-1}]$同为$\pi_1(U,x_0)$或$\pi_1(V,x_0)$ 中的元, 或者虽分别在$\pi_1(U,x_0)$和$\pi_1(V,x_0)$中, 但同来自$\pi_1(U\cup V,x_0)$. $[\tau_i\gamma_i^{-1}]\cdot[\gamma_i*\tau_i^{-1}]=1$.

2, 证明等价类

$$\big([\sigma_1'*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma_i'*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma_n']\big)\cdot N$$

在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中不依赖与分点

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=1$$

的选取. 这可以通过证明: 增加分点t'_i不改变等价类来实现. 当

$$0=t'_0<t'_1<\cdots t'_{j-1}<t'_j<\cdots t'_m=1$$

是另一种划分时, 可以通过增加分点使得$t_0,t_1,\cdots,t_n$, 和$t'_0,t'_1,\cdots,t'_m$都是

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_{k-1}<s_k<\cdots<s_N=1$$

的分点. 这样$0=s_0<s_1<\cdots<s_{k-1}<s_k<\cdots<s_N=1$既是在$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$是增加了分点也是在$0=t'_0<t'_1<\cdots<t'_n=1$上增加了分点.

对于增加一个分点t'_i, 假设

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t'_i<t_i<\cdots<t_n=1.$$

记

$$\begin{aligned}
&\sigma''_i: I\to X, && \sigma''_i(s)=\sigma((1-s)t_{i-1}+st'_i)\\
&\sigma'''_i: I\to X, && \sigma'''_i(s)=\sigma((1-s)t'_i+st_i)
\end{aligned}$$

分别为σ在$[t_{i-1},t'_i]$和$[t'_i,t_i]$的一段, τ'_i为从x_0到x'_i的道路. 则增加分点后对应的等价类为

$$\begin{aligned}
&[\sigma'_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma''_i*\tau_i'^{-1}]\cdot[\tau'_i*\sigma'''_i*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma'_n]\\
=&[\sigma'_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma''_i*\tau_i'^{-1}*\tau'_i*\sigma'''_i*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma'_n]\\
=&[\sigma'_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma''_i*\sigma'''_i*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma'_n]\\
=&[\sigma'_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma'_i*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma'_n]
\end{aligned}$$

这是因为$[\tau_{i-1}*\sigma''_i*\tau_i'^{-1}],[\tau'_i*\sigma'''*\tau_i^{-1}]$同在$\pi_1(U,x_0)$中或者同在$\pi_1(V,x_0)$中, 可以在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$中做乘积.

3, 证明等价类

$$\big([\sigma'_1*\tau_1^{-1}]\cdot[\tau_1*\sigma_2*\tau_2^{-1}]\cdots[\tau_{i-1}*\sigma'_i*\tau_i^{-1}]\cdots[\tau_{n-1}*\sigma'_n]\big)\cdot N$$

在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中不依赖与道路同伦等价类$[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$ 中代表元σ的选取.

设$\sigma\simeq_p\rho$, $F: I\times I\to X$是从σ到ρ的道路伦移. 由于$I\times I$是紧致的, U,V是X的一个开覆盖, 存在$\delta>0$使得对$I\times I$中任两个点x,y, 当他俩的距离$\rho(x,y)<\delta$时$F(x),F(y)$同在U中或同在V中.

将$I=[0,1]$做一个划分$0=t_0<t_1<\cdots<t_{j-1}<t_j<\cdots<t_n=1$使得$max\{t_j-t_{j-1}|j=1,2,\cdots n\}<\delta/2$. 记

$$\begin{aligned}
&\sigma_j: I\longrightarrow X, && \text{为}\sigma_j(s)=F(s,t_j),\\
&F_j: I\times I\longrightarrow X && \text{为}F_j(s,t)=F(s,(1-t)t_{j-1}+tt_j).
\end{aligned}$$

则有道路同伦

$$\sigma=\sigma_0\overset{F_1}{\simeq_p}\sigma_1\overset{F_2}{\simeq_p}\sigma_2\simeq_p\cdots\simeq_p\sigma_{j-1}\overset{F_j}{\simeq_p}\sigma_j\simeq_p\cdots\simeq_p\sigma_n=\rho$$

在此, 我们只需要证明σ_{j-1}对应的等价类

$$\big([\sigma'_{j-1,1}*\tau_{j-1,1}^{-1}]\cdots[\tau_{j-1,i-1}*\sigma'_{j-1,i}*\tau_{j-1,i}^{-1}]\cdots[\tau_{j-1,n-1}*\sigma'_{j-1,m}]\big)\cdot N$$

和σ_j对应的等价类

$$\left([\sigma'_{j,1}*\tau'^{-1}_{j,1}]\cdot[\tau'_{j,1}*\sigma'_{j,2}*\tau'^{-1}_{j,2}]\cdots[\tau'_{j,i-1}*\sigma'_{j,i}*\tau'^{-1}_{j,i}]\cdots[\tau'_{j,n-1}*\sigma'_{j,m}]\right)\cdot N$$

在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中相等, 则$\sigma=\sigma_0$对应的等价类与$\sigma_n=\rho$对应的等价类相同.

将$\sigma\simeq_p\rho$拆分成许多段道路同伦的好处是当我们给出I的一个划分

$$0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{i-1}<s_i<\cdots<s_m=1,$$

他满足

$$\max\{s_i-s_{i-1}|i=1,2,\cdots,m\}<\delta/2$$

时不仅σ_{j-1},σ_j在$[s_{i-1},s_i]$的一段全在U中或全在V中, 而且从σ_{j-1}到σ_j的整个伦移F_j在$[s_{i-1},s_i]\times I$这一段也全在U中或全在V中. (见图2.12)

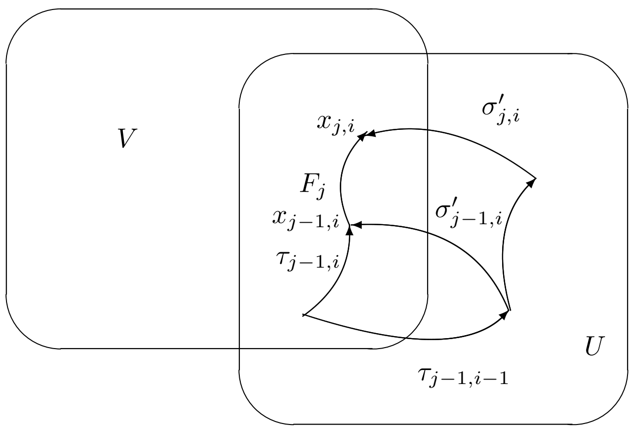


图2.12

选取从x_0到$x_{j-1,i}=\sigma_j(s_i)$的道路$\tau_{j-1,i}$, 固定s_i, $F_j(s_i,t)$是从$x_{j-1,i}$到$x_{j,i}$的道路, 并选取从x_0到$x_{j,i}$ 的道路$\tau'_{j,i}$为$\tau_{j-1,i}*F_j(s_i,-)$. 注意到, 当$F_j([s_{i-1},s_i]\times I)$与$F_j([s_i,s_{i+1}]\times I)$一个在$U$中另一个在$V$中时$F_{(}\{s_i\}\times I)\subset U\cap V$, 这样的选取是合理的. 易知在$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$中

$$[\tau_{j-1,i-1}*\sigma'_{j-1,i}*\tau^{-1}_{j-1,i}]=[\tau'_{j,i-1}*\sigma'_{j,i}*\tau'^{-1}_{j,i}].$$

这样我们建立了从$\pi_1(X,x_0)$到$\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$的对应$\phi$

4, 证明: $\phi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/N$是同态, 并且是满同态.

5, 证明: $\phi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$是单同态. 考虑下面群同态的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"'] & \pi_1(U,x_0)*\pi_a(V,x_0)/N \\
\pi_1(X,x_0), \arrow[ur, dotted, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

其中$j:\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$是由$j_1:\pi_{(}U,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$, $\jmath_2$: $\pi_1(V,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$诱导出的群的自由积到群的同态(见习题2). 由$\phi$的构造,

我们知道j 是一个满同态. 对任何$[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, $i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$在群的自由积$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$中不能被消去. 这是因为

$$i_1([\sigma])^{-1} \in \pi_1(U, x_0), \qquad\qquad i_2([\sigma]) \in \pi_1(V, x_0).$$

当通过j将$i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$映射到$\pi_1(X, x_0)$中后

$$j(i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])) = i([\sigma])^{-1} \cdot i([\sigma]) = 0 \in \pi_1(X, x_0).$$

因而由所有$i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$生成的正规子群$N$是$Kerj$的子群

$$N \subset Kerj \subset \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

另一方面

$$N = Kerp = Ker(\phi \cdot j) = j^{-1}(Ker\phi) \supset j^{-1}(0) = Kerj = N,$$

因而$Ker\phi = \{0\}$, ϕ是单射.

§2.4 习题

1 记$\mathbb{Z}\{a\}$, $\mathbb{Z}\{b\}$分别为a, b生成的乘法群$\mathbb{Z}$, 证明: 由$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$生成的正规子群中元素形如$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \cdots a^{n_s}b^{m_s}$.

2 设G_1, G_2, H是群, 证明: 任何群同态$f_1 : G_1 \to H$, $f_2 : G_2 \to H$都可以唯一的扩充成群同态

$$f_1 * f_2 : G_1 * G_2 \longrightarrow H$$

使得对于$a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$, $f_1 * f_2(a_1) = f_1(a_1)$, $f_1 * f_2(a_2) = f_2(a_2)$.

3 设G是一个非交换群, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$成为G的一个交换子. 证明: G中所有的交换子$\{[a, b] | a, b \in G\}$生成的子群

$$[G, G] = \{[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] | a_i, b_i \in G\}$$

是G的一个正规子群, 且$G/[G, G]$是交换群.

4 设G_1, G_2是交换群, $G = G_1 * G_2$. 证明: $G/[G, G] \cong G_1 \oplus G_2$.

5 设m, n互素, 记$G = \mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/n$. 证明: $G/[G, G] \cong \mathbb{Z}/m \cdot n$.

6 证明: $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$是满同态.

7 设$U \cup V = X$, U, V是道路连通的, $U \cap V$是单连通的. 证明:

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

是群同构.

§2.5 基本群的计算与应用

在证明了van Kampen定理之后，我们来讨论基本群的计算与应用等问题. 当然基本群的计算是一个很难的问题, 许多空间的基本群还是计算不出来的.

一点并: 设$(X,x_0),(Y,y_0)$是两个带基点的拓扑空间, 定义他们的一点并$X\vee Y$为$X\coprod Y/x_0\sim y_0$, 即将X和Y在基点粘和在一起.

命题2.5.1 记$S^1\vee S^1$为两个圆S^1_1,S^1_2沿基点$x_0=1$粘和得到的拓扑空间, 则

$$\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)\cong F(a,b)$$

为由两个元$\{a,b\}$生成的自由群.
证明: 将$S^1\vee S^1$分成两个开集的并$U\cup V=S^1\vee S^1$(见图2.13)

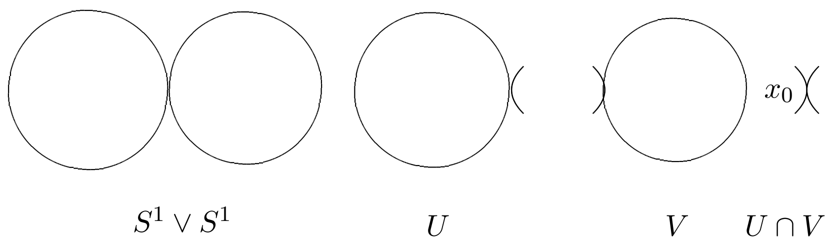


图2.13

U,V都同伦等价与S^1, $\pi_1(U,x_0)\cong\pi_1(V,x_0)\cong\mathbb{Z}$. $U\cap V$是可缩空间, $\pi_1(U\cap V,x_0)=0$. 因而$\pi_1(S^1\vee S^1)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/0=F(a,b)$是由两个元$a,b$生成的自由群. a,b代表的意义分别是绕左侧和右侧的圆逆时针方向转一周.

例1 类似于命题2.5.1的证明方法, 容易得出

$$\pi_1(S^1\vee S^2,x_0)\cong\pi_1(S^1,x_0)*\pi_1(S^2,x_0)=\mathbb{Z}$$

设X是一个拓扑空间, $f:(S^1,1)\to(X,x_0)$是映射. f导出基本群的同态$f_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(X,x_0)$.
命题2.5.2 记$X\cup_f(CS^1)=X\cup_f e^2$为$f:S^1\to X$的映射锥. 则

$$\pi_1(X\cup_f e^2,x_0)\cong\pi_1(X,x_0)/\langle f_*([\sigma_1])\rangle,$$

其中$\langle f_*([\sigma_1])\rangle$为$\pi_1(S^1,1)$的生成元$[\sigma_1]$在同态$f_*$下的像生成的正规子群.
证明: 记$S^1=\{e^{2\pi it}|t\in\mathbb{R}\}$. 将$X\cup_f e^2=Y$分成$U,V$的并, (见图2.14)

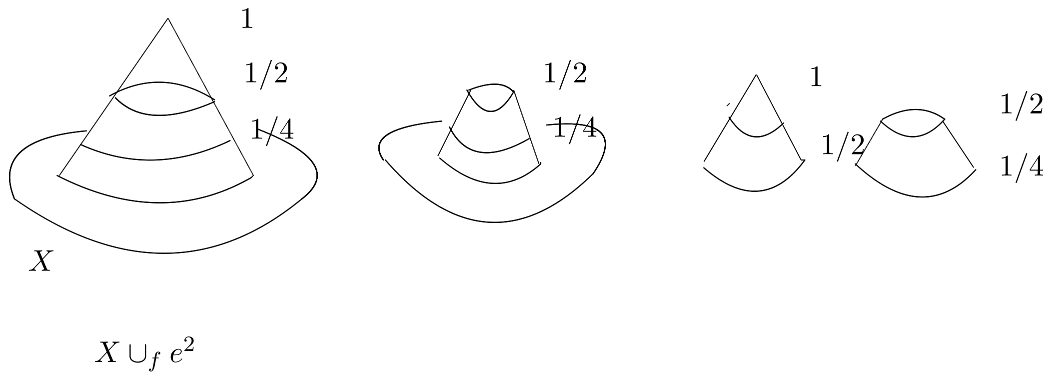


图2.14

其中$U = X \cup_f (S^1 \times [0, 1/2)) = X \coprod S^1 \times [0, 1/2)/(z, 0) \sim f(z)$为映射锥砍去上部的锥$S^1 \times [1/2, 1]/S^1 \times \{1\}$得到的开集. $V = S^1 \times (1/4, 1]/S^1 \times \{1\}$为映射锥上部的锥. $U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$. 取基点$x_0 = (1, 1/3)$为$U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$中的一点.

则U同伦等价与X,

$$P : U \xrightarrow{\simeq} X \qquad \begin{array}{l} \text{对于} x \in X,\ P(x) = x. \\ \text{对于} (z, t) \in S^1 \times [0, 1/2),\ P(z, t) = f(z). \end{array}$$

是同伦等价映射. V是可缩空间. $U \cap V \simeq S^1$. 由van Kampen定理知

$$\begin{aligned} \pi_1(X \cup_f e^2, x_0) \cong & \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \\ \cong & \pi_1(X, P(x_0)) * \{e\}/P_*(N). \end{aligned}$$

下面我们计算正规子群N和$P_*(N)$. $U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$,

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

的生成元为$[\sigma_1']$,其中

$$\sigma_1' : I \longrightarrow U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2), \qquad \sigma_1'(s) = (e^{2\pi i s}, 1/3).$$

N为$\pi_1(U, x_0) * \{e\}$中由$i_1([\sigma_1'])$生成的正规子群.

考察基本群的同构$P_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, P(x_0))$, 我们注意到

$$P \cdot \sigma_1'(s) = P(e^{2\pi i s}, 1/3) = f(e^{2\pi i s})$$

因而$P_* \cdot i_1([\sigma_1']) = [f \cdot \sigma_1] = f_*([\sigma_1])$. 命题成立.

推论2.5.3 设$n \geqslant 2$, $f : S^n \to X$为任意映射, $X \cup_f CSn = X \cup_f e^{n+1}$为$f$的映射锥. 则

$$\pi_1(X \cup_f e^{n+1}, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

证明 将f的映射锥$X\cup_f e^{n+1}$做与命题2.5.2类似的分解$X\cup_f e^{n+1}=U\cup V$. 此时仍有$U\simeq X$, V可缩, 而$U\cap V\simeq S^n$. 因而$\pi_1(U\cap V,x_1)=\{e\}$, 由$i_1([\sigma])^{-1}i_2([\sigma])$ 生成的正规子群$N=\{e\}$. 结论成立.

例2 n维实射影平面$\mathbb{R}P^n$的基本群$\pi_1(\mathbb{R}P^n,x_0)\cong\mathbb{Z}/2$.

2维实射影空间$\mathbb{R}P^2$可以看作映射锥$S^1\cup 2e^2$其中$2:S^1\to S^1$为$2(z)=z^2$, 即对于$z=e^{2\pi it}\in S^1$, $2(e^{2\pi it})=e^{2\pi i2t}$. 它导出基本群的2倍映射

$$2:\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}\longrightarrow\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}.$$

由命题2.5.2知$\pi_1(\mathbb{R}P^2,[x_0])\cong\mathbb{Z}/(2)=\mathbb{Z}/2$.

当$n>2$时, n维射影空间可以看作$n-1$维射影空间$\mathbb{R}P^{n-1}$上的映射锥

$$\mathbb{R}P^n=\mathbb{R}P^{n-1}\cup_p e^n,$$

其中$p:S^{n-1}\to\mathbb{R}P^{n-1}=S^{n-1}/-x\sim x$为粘和对径点的映射. 由命题3.5.3知$\pi_1(\mathbb{R}P^n,x_0)\cong\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1},x_0)\cong\mathbb{Z}/2$.

定理2.5.4 任何群都可以实现为拓扑空间的基本群, 即: 对任何群G都存在拓扑空间(X,x_0)使得$\pi_1(X,x_0)\cong G$.

证明 设群G是由其元素的集合$S=\{\alpha_i|i\in\Lambda\}$生成的, 其中$\Lambda$ 是一个下标集. 记$F(S)$为由S生成的自由群, 有自然的满同态

$$\phi:F(S)\to G,\qquad \text{满足}\phi(\alpha_i)=\alpha_i.$$

由群同态基本定理知$G\cong F(S)/Ker\phi$. 设$Ker\phi$是由$F(S)$中的元素簇$\{\beta_j|j\in\Gamma\}$生成的正规子群, 其中Γ是下标集. 则

$$G\cong F(S)/\langle\beta_j|j\in\Gamma\rangle.$$

令$Y=\bigvee\limits_{i\in\Lambda}S_i^1$为圆簇$\{S_i^1|i\in\Lambda\}$的一点并. 由定理2.5.1及习题1知

$$\pi_1(Y,y_0)=\pi_1(\bigvee_{i\in\Lambda}S_i^1,y_0)\cong F(S)$$

为由$S=\{\alpha_i|i\in\Lambda\}$生成的自由群. 对于每一个$\beta_j\in\pi_1(Y,y_0)=F(S)$,记$\beta_j$的闭路代表元为$\beta_j:I\to Y$. 在$Y$上通过每个映射

$$\beta_j':S^1\longrightarrow Y,\qquad \text{对于}s\in[0,1],\ \beta_j'(e^{2\pi is})=\beta_j(s)$$

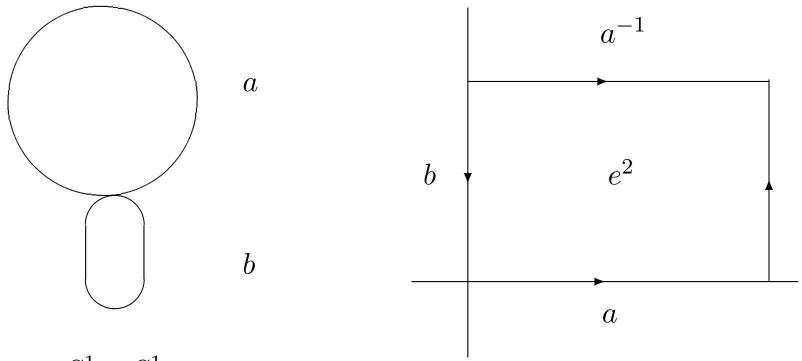
都粘贴一个2维胞腔e_j^2, $j\in\Gamma$并令

$$X=Y\bigcup_{j\in\Gamma}\cup_{\beta_j'}e_j^2.$$

则对每一个$j\in\Gamma$, 基本群同态$\beta_{j_*}':\pi_1(S^1,y_0)\cong\mathbb{Z}\to\pi_1(Y,y_0)$将$\pi_1(S^1,y_0)$的生成元$[\sigma_1]$映射到$\beta_j$. 由命题2.5.2知

$$\pi_1(Y\bigcup_{j\in\Gamma}\cup_{\beta_j'}e_j^2,y_0)\cong\pi_1(Y,y_0)/\langle\beta_j|j\in\Gamma\rangle=G.$$

例3 环面$T = S^1 \times S^1$, 因此其基本群是$\pi_1(S^1 \times S^1, x_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 环面还可以用一下方法构造出了(见图2.15)



$S^1 \vee S^1$

图2.15

环面是两组对边按同方向粘和得到的. 在此我们先做两个圆的一点并$S^1 \vee S^1$ 作为骨架, 之后将e^2的边界$\partial e^2 = S^1$粘在骨架$S^1 \vee S^1$ 上, 即

$$T = S^1 \vee S^1 \cup_f e^2.$$

$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$是由两个元a, b生成的自由群$F(a, b)$. 考察e^2的边界在$S^1 \vee S^1$上的粘法, 它的一周是a, b, a的反方向, b的反方向, 即f_*将$\pi_1(S^1, y_0)$的生成元$[\sigma_1]$映射到了$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$中的$aba^{-1}b^{-1}$. 因而

$$\pi_1(T, x_0) = \pi_1(S^1 \vee S^1 \cup_f e^2, x_0) = F(a, b)/\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

类似的, Klein瓶K也可以看成是在骨架$S^1 \vee S^1$上通过映射$g : \partial e^2 = S^1 \to S^1 \vee S^1$粘上了正方形$e^2$,

$$K = S^1 \vee S^1 \cup_g e^2.$$

所不同的是e^2的边界粘在$S^1 \vee S^1$上的方法是a, b, a的反方向, b, 即g_*将$\pi_1(S^1, y_0)$的生成元映到了$aba^{-1}b$. 因而

$$\pi_1(K, x_0) = F(a, b)/\langle aba^{-1}b\rangle.$$

§2.5 习题

1 求多个圆一点并$\bigvee_{\alpha \in I} S^1_\alpha$的基本群$\pi_1(\bigvee_{\alpha \in I} S^1_\alpha, x_0)$, 其中$I$是一个下标集.

2 求$SO(3)$的基本群$\pi_1(SO(3), E)$.

3 求从环面T中挖去一点x得到的空间的基本群$\pi_1(T - \{x\}, x_0)$.

4 证明从环面中挖去一点$T - \{x\}$和从Klein瓶中挖去一点$K - \{y\}$得到的空间的基本群同构.

5 求从2维实射影空间中挖去一点得到的空间的基本群$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$.

6 试构作拓扑空间(X, x_0)使得$\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}/6$.

7 记$T\natural T$为从两个环面中各挖去一个小圆盘D^2后沿圆盘的边界粘和在一起得到空间,

$$T\natural T = (S^1 \times S^1) - D^2 \cup_{S^1} (S^1 \times S^1) - D^2$$

称为两个环面的联通和. 求$T\natural T$的基本群.

§2.6* 覆盖空间

在证明圆的基本群$\pi_1(S^1,x_0)=\mathbb{Z}$时用到了一个映射$\phi:\mathbb{R}\to S^1$, $\phi(t)=e^{2\pi it}$他满足

1, 对任何$z\in S^1$, $\phi^{-1}(z)\cong\mathbb{Z}$.

2, 存在z的道路连通邻域U使得$\phi^{-1}(U)\cong U\times\mathbb{Z}$.

第三章 奇异同调群

基本群是从带基点的拓扑空间范畴$\mathfrak{T}_0$到群范畴$\mathfrak{G}$的一个共变函子, 即:

1, 对任何带基点的拓扑空间(X, x_0)有一个群$\pi_1(X, x_0)$与之对应.

2, 对于拓扑空间之间的映射$f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$有群同态$f_*:\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, y_0)$ 与之对应.

奇异同调群是从拓扑空间范畴$\mathfrak{T}$到Abel群范畴$\mathfrak{A}$的一个共变函子序列$\{H_n(-)|n\geqslant 0\}$.

§3.1 奇异链复形与奇异同调群

首先我们将n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$推广到无穷维欧氏空间,

$$\mathbb{R}^\infty=\{\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots)|\text{其中自某个}x_n\text{以后所有的}x_m\text{全等于}0.\}$$

在$\mathbb{R}^\infty$中有自然的加法、数乘运算, 因而他是线性空间. 同时对于$\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_m\cdots), \beta=(y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots)\in\mathbb{R}^\infty$ 由于只有有限个x_m, y_m不为0, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(x_m-y_m)^2$不存在收敛性问题. 定义$\alpha$与$\beta$的距离

$$\rho(\alpha, \beta)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_m)^2+\cdots}.$$

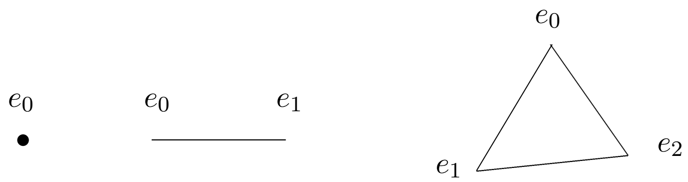
记$\mathbb{R}^\infty$中点

$$\begin{aligned}
e_0&=(0,0,0,\cdots,0,\cdots)\\
e_1&=(1,0,0,\cdots,0,\cdots)\\
e_2&=(0,1,0,\cdots,0,\cdots)\\
&\cdots\\
e_q&=(0,0,0,\cdots,1,\cdots)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

容易验证: 对任何$q\geqslant 0$, $e_0, e_1, \cdots, e_q$是几何无关的($e_1-e_0, e_2-e_0, \cdots, e_q-e_0$是线性无关的). 他张成$\mathbb{R}^\infty$ 中的一个q维标准单形(见图3.1)

$$\begin{aligned}
\Delta^q=&(e_0, e_1, \cdots, e_q)\\
=&\{\lambda_0e_0+\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_qe_q|\lambda_i\geqslant 0, \sum_{i=0}^{q}\lambda_i=1\}\\
=&\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_q, 0\cdots)\in\mathbb{R}^\infty|\lambda_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{q}\lambda_i=1-\lambda_0\leqslant 1\}
\end{aligned}$$

Δ^q中的点$\nu=\lambda_0e_0+\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_qe_q$, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$称为$\nu$的重心坐标.



$\Delta^0 = (e_0)$ $\Delta^1 = (e_0, e_1)$ $\Delta^2 = (e_0, e_1, e_2)$

图3.1

定义3.1.1 设X是一个拓扑空间. 从q维标准标准单形到X的连续映射$\sigma : \Delta^q \to X$称为X的一个q维奇异单形. X中所有q维奇异单形生成的自由Abel群

$$S_q(X) = \{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i | n_i \in \mathbb{Z},\ \sigma_i : \Delta^q \to X\}$$

称为X的q维奇异链群.

在此应当注意的是:
1, 两个奇异单形σ, σ'相等指的是作为映射$\sigma = \sigma' : \Delta^q \to X$两者相等.
2, 奇异链群$S_q(X)$中的元素称为一个q维奇异链, 他是奇异单形的线性组合$x = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_k\sigma_k$(有限和) 且只在映射相同时才可以系数相加.
3, 0维奇异单形$\sigma_x : \Delta^0 = e_0 \to X$可以看做是$X$中的一个点$\sigma_x(e_0) = x$, 记为$x = \sigma_x$. 因而0维奇异链群$S_0(X)$可以看做是$X$中所有点的线性组合.
4, 1维单形$\sigma : \Delta^1 \cong [0, 1] \to X$可以看做是$X$中的一条道路, 因而1维奇异链群$S_1(X)$可以看做是$X$中所有道路的线性组合.

对于每一个$0 \leqslant i \leqslant q$, 存在线性映射

$$F^i : \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q.$$

F^i将Δ^{q-1}的顶点$e_0, e_1, \cdots, e_{q-1}$映到$\Delta^q$的顶点$e_0, e_1, \cdots, \widehat{e}_i, \cdots, e_q$, 即

$$F^i(\lambda_0e_0 + \lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_{q-1}e^{q-1}) = \lambda_0e_0 + \cdots + \lambda_{i-1}e_{i-1} + \lambda_ie_{i+1} + \cdots + \lambda_{q-1}e_q.$$

F^i称为Δ^q的第i个面.

例1, 2维标准单形有3个面$F^0, F^1, F^2 : \Delta^1 \to \Delta^2$ 其中

$$F^0(e_0, e_1) \longrightarrow (e_1, e_2), \quad F^1(e_0, e_1) \longrightarrow (e_0, e_2), \quad F^2(e_0, e_1) \longrightarrow (e_0, e_1).$$

(见图3.2)

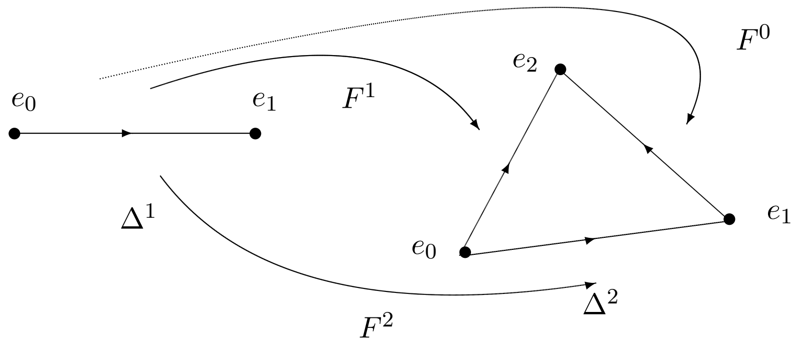


图3.2

定义3.1.2 设$q > 0$, $\sigma : \Delta^q \to X$是X的一个q维单形, 则对于$0 \leqslant i \leqslant q$

$$\sigma \cdot F^i : \Delta^{q-1} \xrightarrow{F^i} \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$$

是一个$q-1$维单形.

定义: 1, q维单形σ的边缘是一个$q-1$维链

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \cdot F^i$$

2, 将∂_q在q维链群$S_q(X)$中做线性扩充, 即: 对于q维链$x = \sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j$, 定义

$$\partial_q(\sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j) = \sum_{j=1}^{k} n_j \partial_q(\sigma_j) = \sum_{j=1}^{k} n_j \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_j \cdot F^i,$$

得到同态$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, 这个同态称为奇异链群上的边缘算子.

3, 令$\partial_0 : S_0(X) \to 0$为零同态, 则有链群同态序列

$$\cdots \longrightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

这个奇异链群序列称为X的奇异链复形, 记为$S_*(X)$.

比如, 对于一个2维奇异单形$\sigma : \Delta^2 \to X$

$$\partial_2(\sigma) = \sigma \cdot F^0 - \sigma \cdot F^1 + \sigma \cdot F^2.$$

引理3.1.1 对于任何$q \geqslant 0$, 合成

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0 : S_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X)$$

因而$Im\partial_{q+1} \subset Ker\partial_q$.

证明: $\partial_0\partial_1 = 0 : S_1(X) \to S_0(X) \to 0$是显然的.

对于$q>0$, 只需证明对任何$q+1$维奇异单形$\sigma:\Delta^{q+1}\to X$, $\partial_q\partial_{q+1}(\sigma)=0$. 为此首先考察

$$F^i\cdot F^j:\Delta^{q-1}\xrightarrow{F^j}\delta^q\xrightarrow{F^i}\Delta^{q+1}$$

注意到$F^i:\Delta^q\to\Delta^{q+1}$将顶点映射为

$$F^i(e_0,\cdots,e_{j-1},e_j\cdots e_q)=(e_0,\cdots e_{i-1},e_{i+1},\cdots e_j,e_{j+1},\cdots,e_{q+1})$$

当$0\leqslant i\leqslant j\leqslant q+1$时,

$$\begin{aligned}F^i\cdot F^j(e_0,e_1,\cdots,e_{q-1})=&F^i(e_0,\cdots,e_{j-1},e_{j+1},\cdots,e_q)\\=&(e_0,\cdots e_{i-1},e_{i+1},\cdots e_j,e_{j+2}\cdots e_{q+1})\end{aligned}$$

当$0\leqslant j<i\leqslant q+1$时,

$$\begin{aligned}F^i\cdot F^j(e_0,e_1,\cdots,e_{q-1})=&F^i(e_0,\cdots,e_{j-1},e_{j+1},\cdots,e_q)\\=&(e_0,\cdots e_{j-1},e_{j+1},\cdots e_{i-1},e_{i+1}\cdots e_{q+1})\\=&F^j(e_0,\cdots,e_{i-2},e_i\cdots,e_q)\\=&F^j\cdot F^{i-1}(e_0,e_1,\cdots,e_{q-1})\end{aligned}$$

因此我们有: 当$0\leqslant j<i\leqslant q+1$时,

$$F^i\cdot F^j=F^j\cdot F^{i-1}:\Delta^{q-1}\longrightarrow\Delta^q\longrightarrow\Delta^{q+1}.$$

考察$\partial_q\partial_{q+1}(\sigma)$

$$\begin{aligned}\partial_q\partial_{q+1}(\sigma)=&\partial_q(\sum_{i=1}^{q+1}(-1)^i\sigma\cdot F^i)\\=&\sum i=0^{q+1}(-1)^i\partial_q(\sigma\cdot F^i)\\=&\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\sigma\cdot F^i\cdot F^j\\=&\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^i\cdot F^j+\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q+1}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^i\cdot F^j\\=&\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^i\cdot F^j+\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q+1}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^j\cdot F^{i-1}\end{aligned}$$

注意到当用s替代j用t替代$i-1$时

$$\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q+1}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^j\cdot F^{i-1}=\sum_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant q}(-1)^{s+t+1}\sigma\cdot F^s\cdot F^t$$

因而

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^i\cdot F^j+\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q+1}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^j\cdot F^{i-1}\\=&\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q}(-1)^{i+j}\sigma\cdot F^i\cdot F^j+\sum_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant q}(-1)^{s+t+1}\sigma\cdot F^s\cdot F^t=0\end{aligned}$$

引理成立.

定义3.1.3 在链复形

$$\cdots \longrightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

中定义:

1, $\mathbb{Z}_q(X) = Ker\partial_q$, $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, 称为$X$的闭链群. $\mathbb{Z}_q(X)$中的元$z = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$称为$X$的一条闭链, 他满足$\partial_q(z) = 0$.

2, $\mathbb{B}_q(X) = Im\partial_{q+1}$, $\partial_{q+1} : S_{q+1}(X) \to S_q(X)$, 称为$X$的$q$维边缘链群, 他是闭链群$\mathbb{Z}_q(X)$的子群. 对于$S_q(X)$中的两个奇异链$x_1, x_2$, 当$x_1 - x_2 = \partial_{q+1}(x)$时称$x_1, x_2$相差一个边缘($x_1, x_2$不必都是闭链).

3, 商群$H_q(X) = \mathbb{Z}_q(X)/\mathbb{B}_q(X) = Ker\partial_q/Im\partial_{q+1}$称为$X$的$q$维整系数非约化奇异同调群, 简称为$X$的$q$维同调群, 记为$H_q(X)$或$H_q(X, \mathbb{Z})$.

对于X的q维闭链$z \in \mathbb{Z}_q(X)$, z在q维同调群$H_q(X)$中的等价类记为$[z] \in H_q(X)$, z称为同调类$[z]$的一个代表元. 两个同调类$[z] = [z']$指两个代表元闭链z, z'相差一个边缘,$z - z' = \partial_{q+1}(x)$.

首先我们通过下面几个例子看同调的几何意义:

例1 如果$\sigma : \Delta^1 \cong I \to X$是一条闭路$\sigma(e_1) = \sigma(e_0)$, 则作为1维奇异单形$\sigma$是$S_1(X)$中的一条闭链, $[\sigma]$是1维同调群中的一个同调类.

如果σ道路同伦与常值道路, 则σ是一个边缘, $[\sigma] = 0 \in H_1(X)$.

$\Delta^1 = (e_0, e_1) = \{\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 | \lambda_0, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\} \cong I$. 拓扑空间$X$中的一个1维奇异单形$\sigma : \Delta^1 \to X$可以看成是$X$中的一条道路, 起点在$\sigma(e_0)$终点在$\sigma(e_1)$. σ的边缘

$$\partial_1(\sigma) = \sigma \cdot F^0 - \sigma \cdot F^1 = \sigma(e_1) - \sigma(e_0).$$

注意到0维单形是一个点e_0, $\sigma \cdot F^0(e_0) = \sigma(e_1)$是终点, $\sigma \cdot F^1(e_0) = \sigma(e_0)$ 是起点. 因此$\partial_1(\sigma)$可以看做是终点减去起点.

当σ是X中的一条闭路时$\sigma(e_1) = \sigma(e_0)$, $\partial_1(\sigma) = 0$. 作为奇异单形$\sigma : \Delta^1 \to X$是$S_1(X)$中的一个闭链, $[\sigma]$代表1维同调群中的一个同调类.

当$\sigma : \Delta^1 \to X$道路同伦与常值道路$c_0 : \Delta^1 \to \sigma(e_0) \in X$时, 设$F : \Delta^1 \times I \to X$是从$\sigma$到$c_0$的道路伦移, 即对于$\nu \in \Delta^1$, $t \in I$

$$\begin{aligned} F(\nu, 0) =& \sigma(\nu), & F(\nu, 1) \equiv& c_0(\nu) = \sigma(e_0). \\ F(e_0, t) =& \sigma(e_0), & F(e_1, t) =& \sigma(e_1) = \sigma(e_0). \end{aligned}$$

F可以收缩成Δ^1的锥到X的映射$\widetilde{F} : C\Delta^1 \to X$, 其中$C\Delta^1 = \Delta^1 \times I/\Delta^1 \times \{1\}$, 映射$\widetilde{F}$为: 对任何$[\nu, t] \in C\Delta^1$

$$\widetilde{F}([\nu, t]) = F(\nu, t)$$

由于$F(\nu, 1) \equiv \sigma(e_0)$, $\widetilde{F}$连续.

另外构作线性同胚映射$f : \Delta^2 \to C\Delta^1$使得

$$f(e_0) = [\nu, 1], \qquad f(e_1) = [e_0, 0], \qquad f(e_2) = [e_1, 0]$$

(见图3.3)

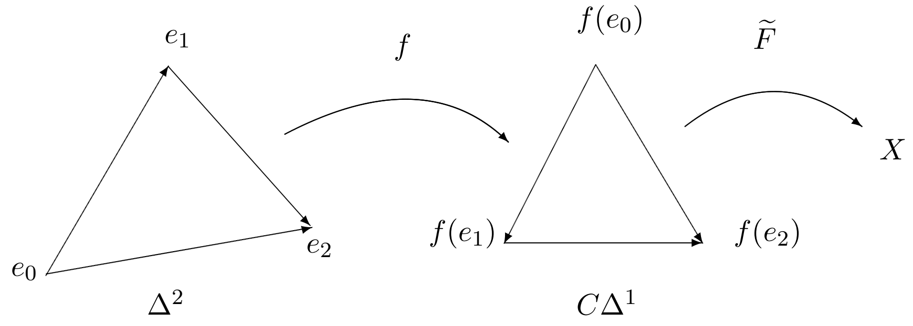


图3.3

则$\widetilde{F}\cdot f:\Delta^2\xrightarrow{f}C\Delta^1\xrightarrow{\widetilde{F}}X$ 是X中的一个2维奇异单形.

$$\partial_2(\widetilde{F}\cdot f)=\widetilde{F}\cdot f\cdot F^0-\widetilde{F}\cdot f\cdot F^1+\widetilde{F}\cdot f\cdot F^2.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}\cdot f\cdot F^0&=\sigma:(e_0,e_1)\xrightarrow{F^0}(e_1,e_2)\xrightarrow{f}\Delta^1\times\{0\}\xrightarrow{\widetilde{F}}X\\
\widetilde{F}\cdot f\cdot F^1&=c_0:(e_0,e_1)\xrightarrow{F^1}(e_0,e_2)\xrightarrow{f}\{e_1\}\times I\xrightarrow{\widetilde{F}}X\\
\widetilde{F}\cdot f\cdot F^2&=c_0:(e_0,e_1)\xrightarrow{F^2}(e_0,e_1)\xrightarrow{f}\{e_0\}\times I\xrightarrow{\widetilde{F}}X
\end{aligned}$$

我们有$\partial_2(\widetilde{F}\cdot f)=\sigma-c_0+c_0=\sigma$. σ是一个边缘, $[\sigma]=0\in H_1(X)$.

例2 当奇异单形$\sigma,\tau:\Delta^1\to X$满足$\sigma(e_1)=\tau(e_0)$时可以做道路乘积

$$\sigma*\tau:\Delta^1\longrightarrow X,$$

对于$(1-\lambda_1)e_0+\lambda_1e_1\in\Delta^1$,

$$\sigma*\tau((1-\lambda_1)e_0+\lambda_1e_1)=\begin{cases}\sigma((1-2\lambda_1)e_0+2\lambda_1e_1) & 0\leqslant\lambda_1\leqslant 1/2,\\ \tau((2-2\lambda_1)e_0+(2\lambda_1-1)e_1) & 1/2\leqslant\lambda_1\leqslant 1.\end{cases}$$

则$\sigma+\tau-\sigma*\tau=\partial_2(\delta)$是一个上边缘.

我们构作X中的一个2奇异单形$F:\Delta^2\to X$, (见图3.4)

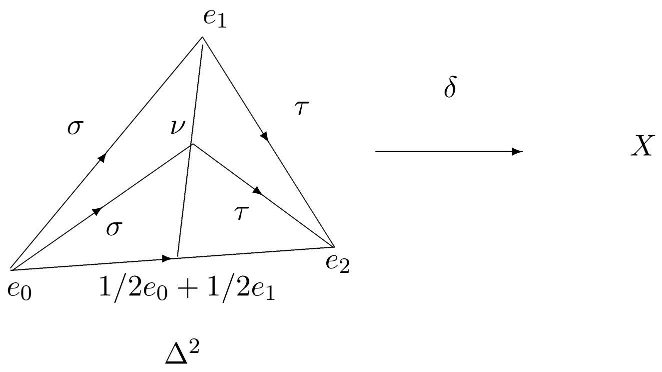


图3.4

从e_1向e_0, e_2的中点$1/2e_0 + 1/2e_2$引一条直线L. 对于直线L上的一点$\nu = (1-s)e_1 + s(1/2e_0 + 1/2e_2)$, 引一条从$e_0$到$\nu$的直线$l_1$, 他上面的点记为$(1-t)e_0 + t\nu$, 再引一条从$\nu$到$e_2$的直线$l_2$, 他上面的点记为$(1-t)\nu + te_2$. 定义$\delta : \Delta^2 \to X$为:

对于l_1上的点$(1-t)e_0 + t\nu$, $\quad \delta((1-t)e_0 + t\nu) = \sigma((1-t)e_0 + te_1)$.

对于l_2上的点$(1-t)\nu + te_2$, $\quad \delta((1-t)\nu + te_2) = \tau((1-t)e_0 + te_1)$.

由

$$\begin{aligned} \delta \cdot F^2 =& \sigma : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^2} (e_0, e_1) \xrightarrow{\delta} X \\ \delta \cdot F^1 =& \sigma * \tau : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^1} (e_0, e_2) \xrightarrow{\delta} X \\ \delta \cdot F^0 =& \tau : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^2} (e_1, e_2) \xrightarrow{\delta} X \end{aligned}$$

知$\sigma + \tau - \sigma * \tau = \partial_2(\delta)$.

例3 环面$T = S^1 \times S^1$是由$I \times I$按同方向粘和对边得到的(见图3.5).

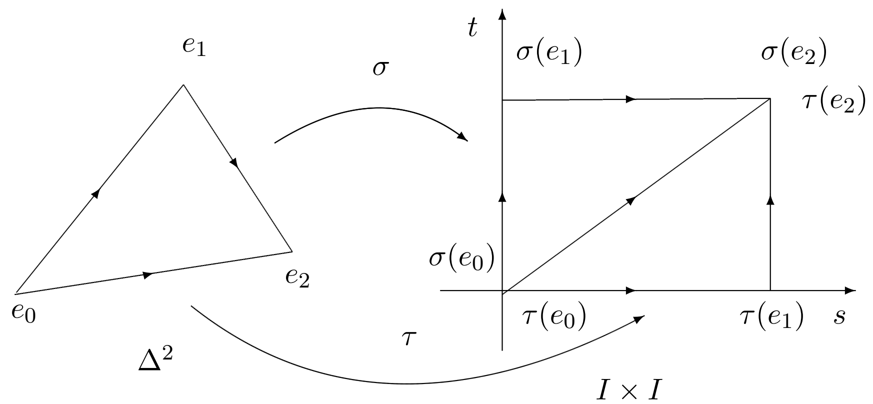


图3.5

我们构作$\sigma, \tau : \Delta^2 \to I \times I$分别为$\Delta^2$到$I \times I$的上半部分三角形$\{(s,t) \in I \times I | s \leqslant t\}$和到下半部分三角形$\{(s,t) \in I \times I | s \geqslant t\}$的线性同胚使得

$$\begin{aligned}
\sigma(e_0) =&(0,0), & \sigma(e_1) =&(0,1), & \sigma(e_2) =&(1,1) \\
\tau(e_0) =&(0,0), & \tau(e_1) =&(1,0), & \tau(e_2) =&(1,1)
\end{aligned}$$

并记$\pi : I \times I \to T = I \times I / \sim$为粘和映射. 则$\pi \cdot \sigma, \pi \cdot \tau$是环面$T$中的两个2维单形.

由于粘和以后$(s,0) \sim (s,1)$, $(0,t) \sim (1,t)$, 有

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \sigma \cdot F^0 =&\pi \cdot \tau \cdot F^2, & \pi \cdot \sigma \cdot F^2 =&\pi \cdot \tau \cdot F^0, \\
\pi \cdot \sigma \cdot F^1 =&\pi \cdot \tau \cdot F^1
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (e_1,e_2) \arrow[r, "\sigma"] & \{1\} \times I \arrow[dr, "\pi"] & \\
(e_0,e_1) \arrow[ur, "F^0"] \arrow[dr, "F^2"'] & & & T \\
 & (e_0,e_1) \arrow[r, "\tau"] & \{0\} \times I \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

因此

$$\begin{aligned}
\partial_2(\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau) =&\pi \cdot \sigma \cdot F^0 - \pi \cdot \sigma \cdot F^1 + \pi \cdot \sigma \cdot F^2 \\
&-\pi \cdot \tau \cdot F^2 + \pi \cdot \tau \cdot F^1 - \pi \cdot \tau \cdot F^0 \\
=& \, 0
\end{aligned}$$

$\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau$是$T$的一个2维闭链, $[\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau]$代表环面$T$的2维同调群中的一个同调类. 而$\pi \cdot \sigma$和$\pi \cdot \tau$的像恰好把环面分成了两部分.

命题3.1.2 如X是道路连通的, 则X的0维同调群$H_0(X) = \mathbb{Z}$. $H_0(X)$的生成元是$[x_0] \in H_0(X)$, 且对X中的任何点x_1, $[x_0] = [x_1]$.

证明: 考察链复形

$$\cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

闭链群$\mathbb{Z}_0(X) = Ker\partial_0 = S_0(X)$是由$X$的所有的点生成的自由Abel群.

对于0维闭链群中的任何两个点x_0, x_1, 存在从x_0到x_1的道路$\sigma : \Delta^1 = I \to X$使得$\sigma(e_0) = x_0$, $\sigma(e_1) = x_1$. 因而x_1与x_0相差一个边缘$\partial_1(\sigma)$, 作为同调类$[x_0] = x_1$. 在0维同调群$H_0(X)$中$[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i] = [\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) x_0]$.

推论3.1.3 如果X有n个道路连通分之$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, 则$X$的0维同调群$H_0(X)$是$n$个$\mathbb{Z}$的直和.

对于一般的拓扑空间来说, q维奇异链群$S_q(X)$总是无限生成的自由Abel群. 要想直接从定义计算出其同调群$H_q(X)$基本是不可能的. 但对于独点空

间$\{x_0\}$ 来说, 由于q维奇异单形$\sigma_q : \Delta^q \to \{x_0\}$只有一个, 可以计算出其各维同调群.

命题3.1.4 独点空间$\{x_0\}$的同调群为

$$H_q(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

证明: 独点空间$\{x_0\}$是道路连通的, 因而$H_0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$.

对于$q > 0$, 记独点空间唯一的q维奇异单形为$\sigma_q : \Delta^q \to \{x_0\}$, $S_q(\{x_0\}) = \mathbb{Z}\{\sigma_q\}$为由$\sigma_q$生成的自由Abel群. 对任何$0 \leqslant i \leqslant q$

$$\sigma_q \cdot F^i = \sigma_{q-1} : \Delta^{q-1} \xrightarrow{F^i} \Delta^q \xrightarrow{\sigma_q} \{x_0\}.$$

考察链复形

$$\cdots \longrightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots,$$

1, 当$q = 2k > 0$是偶数时

$$\begin{aligned}\partial_{2k}(\sigma_{2k}) = &\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\sigma_{2k} \cdot F^i \\ =&\sigma_{2k-1} - \sigma_{2k-1} + \cdots + \sigma_{2k-1} - \sigma_{2k-1} + \sigma_{2k-1} \\ =&\sigma_{2k-1}.\end{aligned}$$

$\partial_{2k} : S_{2k}(\{x_0\}) \to S_{2k-1}(\{x_0\})$是同构, 闭链群$\mathbb{Z}_{2k}(\{x_0\}) = Ker\partial_{2k} = 0$. 因而

$$H_{2k}(\{x_0\}) = 0/Im\partial_{2k+1} = 0.$$

2, 当$q = 2k + 1 > 0$是奇数时

$$\begin{aligned}\partial_{2k+1}(\sigma_{2k+1}) = &\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\sigma_{2k+1} \cdot F^i \\ =&\sigma_{2k} - \sigma_{2k} + \cdots + \sigma_{2k} - \sigma 2k \\ =&0.\end{aligned}$$

闭链群$\mathbb{Z}_{2k+1}(\{x_0\}) = S_{2k+1}(\{x_0\})$. 但此时$\partial_{2k+2} : S_{2k+2} \to S_{2k+1}(\{x_0\})$是同构, $\mathbb{B}(\{x_0\}) = Im\partial_{2k+2} = S_{2k+1}(\{x_0\})$. 同调群

$$H_{2k+1}(\{x_0\}) = \mathbb{Z}_{2k+1}(\{x_0\})/\mathbb{B}_{2k+1}(\{x_0\}) = 0.$$

§3.1 习题

1 如果我们改变0维边缘算子为

$$\partial_0^* : S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

对任何0维奇异链$\sum_{i=1}^{k}n_ix_i$, $\partial_0^*(\sum_{i=1}^{k}n_ix_i) = \sum_{i=1}^{k}n_i \in \mathbb{Z}$.

1, 证明: $\partial_0^*\partial_1 = 0$.

2, 此时的链复形变为

$$\cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

0维同调群变为$\widetilde{H}_0(X) = Ker\partial_0^*/Im\partial_1$称为约化同调群.

证明: $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

2 设X有两个道理连通分支X_1, X_2, 证明:q维奇异链群

$$S_q(X) \cong S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$$

且

$$\partial_q(S_q(X_1)) \subset S_{q-1}(X_1), \qquad \partial_q(S_q(X_2)) \subset S_{q-1}(X_2).$$

因而$H_q(X) \cong H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$.

3 证明:如果1维奇异单形$C_0 : \Delta^1 \to X$是常值映射, 则C_0是一个边缘.

4 证明: 如果两个1维奇异单形$\sigma \simeq_p \tau : \Delta^1 \to X$作为$X$ 中的道路是道路同伦的, 则$\sigma - \tau$是一个边缘.

5 设$\sigma : \Delta^1 \to X$是从x_1到x_2的一条道路, $\gamma_0, \gamma_1 : \Delta^1 \to X$分别是从$x_0$到$x_1, x_2$的道路. 证明: 作为1维奇异链, $\gamma_1 + \sigma - \gamma_2$是一条闭链.

6 记$\sigma^{-1} : \Delta^1 \to X$是$\sigma$的逆道路. 证明: 1维奇异链$\sigma + \sigma^{-1}$是一个边缘.

7 设$\sigma, \tau : \Delta^1 \to X$是$X$中起点、终点都在$x_0$的闭路. 证明: 作为1维同调类$[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau] \in H_1(X)$.

§3.2 同调群的同伦不变性

设$f: X \to Y$是一个映射, 则对X的任意q维奇异单形$\sigma: \Delta^q \to X$,

$$f \cdot \sigma : \Delta^1 \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

是Y的一个奇异单形. 将这个对于在$S_q(X)$上做线性扩充得到同态

$$f_\sharp : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y).$$

引理3.2.1 映射$f: X \to Y$导出的同态$f_\sharp : S_q(X) \to S_q(Y)$满足$\partial_q \cdot f_\sharp = f_\sharp \cdot \partial_q$, 即

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & S_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\sharp"'] & \cdots \arrow[r] & S_1(X) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & S_0(X) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"'] & S_{q-1}(Y) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_1(Y) \arrow[r, "\partial_1"'] & S_0(Y) \arrow[r, "\partial_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

可换. 因而$f_\sharp$导出同调群的同态$f_*: H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$.

证明: 对任何q维奇异单形$\sigma: \Delta^q \to X$,

$$f_\sharp \cdot \partial_q(\sigma) = f_\sharp(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \cdot F^i) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i f \cdot (\sigma \cdot F^i)$$
$$= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i (f \cdot \sigma) \cdot F^i = \partial_q \cdot f_\sharp(\sigma)$$

因而$f_\sharp \cdot \partial_q = \partial_q \cdot f_\sharp$.

对任何X的q维同调类$[z] \in H_q(X)$, 取他的一个代表元$z \in \mathbb{Z}_q(X)$. 由

$$\partial_q(f_\sharp(z)) = f_\sharp(\partial_q(z)) = f_\sharp(0) = 0$$

知$f_\sharp(z)$, 是Y的q维闭链.

如果z'是同调类$[z]$的另一个代表元, 则z与z'相差一个边缘, 即存在$q+1$维链$x = \sum_k m_k \tau_k \in S_{q+1}(X)$使得$z - z' = \partial_{q+1}(x)$. 因而

$$f_\sharp(z) - f_\sharp(z') = f_\sharp(z - z') = \partial_{q+1}(f_\sharp(x)).$$

定义同调群映射$f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$为

$$f_*([z]) = [f_\sharp(z)] \in H_q(Y).$$

容易验证f_*是群同态.

定理3.2.2 映射$f: X \to Y$导出的同调群的同态$f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$满足:

1), 单位映射$1: X \to X$导出的同态是单位映射$1_* = 1: H_q(X) \to H_q(X)$.

2), 映射$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$的合成$g\cdot f$导出的同态满足

$$(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_* \qquad \begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\cdot f)_*"'] & H_q(Y) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(Z). \end{tikzcd}$$

因而同调群是同胚不变量, 同调函子是一列从拓扑空间范畴$\mathfrak{T}$到Abel群范畴$\mathfrak{A}$的共变函子.

证明: 对X的任何q维奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$.

1) 由$1_\sharp(\sigma)=1\cdot\sigma=\sigma$易得.

2) 由

$$(g\cdot f)_\sharp(\sigma)=g\cdot f\cdot\sigma=g_\sharp\cdot f_\sharp(\sigma)$$

知$(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_*$.

由定理3.2.2易知:如果$f:X\overset{\cong}{\to}Y$是同胚映射, $g:Y\overset{\cong}{\to}X$是同胚逆映射则对任何$q\geqslant 0$, $f_*:H_q(X)\overset{\cong}{\to}H_q(Y)$都是同构.

和基本群一样, 同调群也是同伦不变量:

定理3.2.3 如果$f\overset{F}{\simeq}g:X\to Y$是同伦的两个映射, 则他们导出相同的同调群同态

$$f_*=g_*:H_q(X)\longrightarrow H_q(Y).$$

推论3.2.4 如果X与Y是同伦等价的拓扑空间, $f:X\overset{\simeq}{\to}Y$ 是同伦等价映射, 则f导出同调群的同构映射

$$f_*:H_q(X)\xrightarrow{\cong}H_q(Y)$$

证明: 设$g:Y\to X$是f的同伦逆, $g\cdot f\simeq 1_X$, $f\cdot g\simeq 1_Y$. 则有$g_*\cdot f_*=1$, $f_*\cdot g_*=1$

$$\begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_q(Y) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_q(Y) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_q(X) \arrow[d, "f_*"] \\ & H_q(Y) \end{tikzcd}$$

$f_*:H_q(X)\to H_q(Y)$是同构.

定理3.2.3的证明: 定理证明的关键是通过从f到g的伦移$F:X\times I\to Y$ 构作一系列链群之间的同态

$$\{H_q:S_q(X)\longrightarrow S_{q+1}(Y)\}_{q\geqslant 0}$$

使得$g_\sharp - f_\sharp = H_{q-1}\cdot\partial_q + \partial_{q+1}\cdot H_q$, 即有下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] \arrow[dl, "H_q"] & S_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] \arrow[dl, "H_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"'] & S_{q-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

特别的,在$q=0$时$g_\sharp - f_\sharp = \partial_1\cdot H_0 : S_0(X)\to S_0(Y)$.

此时, 对X中的任何q维闭链$z\in\mathbb{Z}_q(X)$, 尽管$f_\sharp(z)\neq g_\sharp(z)$ 但是

$$g_\sharp(z) - f_\sharp(z) = \partial_{q+1}\cdot H_q(z) + H_{q-1}\cdot\partial_q(z) = \partial_{q+1}(H_q(z)).$$

$f_\sharp(z)$与$g_\sharp(z)$相差一个边缘$\partial_{q+1}(H_q(z))$, 他们代表的同调类相同, 即

$$f_*([z]) = [f_\sharp(z)] = [g_\sharp(z)] = g_*([z]).$$

$f_\sharp, g_\sharp : S_*(X)\to S_*(Y)$称为奇异链复形间的链映射. 而

$$H_* = \{H_q : S_q(X)\to S_{q+1}(Y)\}_{q\geqslant 0}$$

称为从链映射$f_\sharp$到$g_\sharp$ 的链同伦.

下面我们构作从$f_\sharp$到$g_\sharp$的链同伦$H_q : S_q(X)\to S_{q+1}(Y)$.

记$F : I\times X\to Y$为从f到g的伦移, 满足对任何$x\in X$

$$F(0,x) = f(x), \qquad F(1,x) = g(x).$$

注意到: 任何q维单形Δ^q都是凸集, 因而$I\times\Delta^q$ 也是凸集, 即对任何$x = (t_1,\nu_1), y = (t_2,\nu_2)\in I\times\Delta^q$, 连接$x,y$的线段还在$I\times\Delta^q$中. 对任何$t\in I$,

$$(1-t)x + ty \in I\times\Delta^q.$$

$I\times\Delta^q$底层$\{0\}\times\Delta^q$的$q+1$个顶点仍记为$e_0, e_1, \cdots e_q$, 即

$$e_0 = (0,e_0), e_1 = (0,e_1), \cdots, e_q = (0,e_q).$$

$I\times\Delta^q$顶层$\{1\}\times\Delta^q$的$q+1$个顶点记为$\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q$(见图3.6).

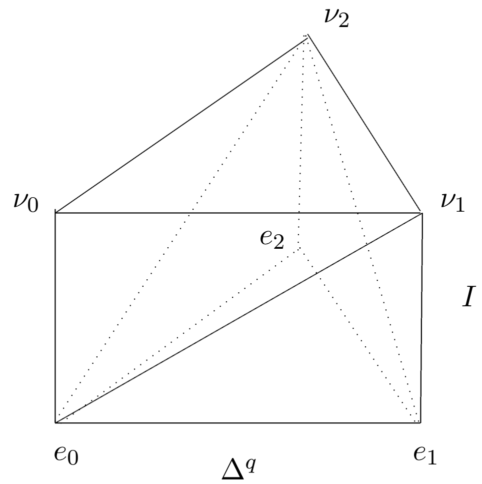


图3.6

对任何$0 \leqslant i \leqslant q$, $q+2$个顶点$e_0, \cdots, e_i, \nu_i, \cdots, \nu_q$ 张成$I \times \Delta^q$中的一个$q+1$维单形. 记

$$D_i : \Delta^{q+1} \longrightarrow I \times \Delta^q$$

为将顶点$(e_0, e_1, \cdots, e_{q+1})$映射到顶点$(e_0, \cdots, e_i, \nu_i, \cdots, \nu_q)$ 的线性扩充, 即

$$\begin{aligned} &D_i(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{q+1} e_{q+1}) \\ =&\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_i e_i + \lambda_{i+1} \nu_i + \cdots + \lambda_{q+1} \nu_q. \end{aligned}$$

这样对任何X中的q维奇异单形$\sigma : \Delta^q \to X$, 合成映射

$$F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i : \Delta^{q+1} \xrightarrow{D_i} I \times \Delta^q \xrightarrow{1\times\sigma} I \times X \xrightarrow{F} Y$$

是Y中的一个$q+1$维奇异单形.

定义$H_q : S_q(X) \to S_{q+1}(Y)$为: 对任何$X$中的$q$维奇异单形$\sigma$

$$H_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i.$$

剩下的问题就是验证: 对任何q

$$g_\sharp(\sigma) - f_\sharp(\sigma) = g \cdot \sigma - f \cdot \sigma = H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma) + \partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma).$$

对于0维单形σ_x,

$$H_0(\sigma_x) = F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 : \Delta^1 \to I \times \{e_0\} \to I \times X \to Y$$

$$\begin{aligned} \partial_1 H_0(\sigma_x) =&F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^0 - F \cdot (1 \times \sigma_x) \times D_0 \cdot F^1 \\ F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^0(e_0) =&F \cdot (1 \times \sigma_x)(v_0) = F(1, x) = g \cdot \sigma_x(e_0) \\ F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^1(e_0) =&F \cdot (1 \times \sigma_x)(e_0) = F(0, x) = f \cdot \sigma_x(e_0) \end{aligned}$$

$\partial_1 H_0 = g_\sharp - f_\sharp$.

对于$q>0$, 考察$D_i:\Delta^{q+1}\to I\times\Delta^q$与第$j$个面$F^j:\Delta^q\to\Delta^{q+1}$. 我们有

$$\begin{aligned}g\cdot\sigma=&F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_0\cdot F^0:\Delta^q\xrightarrow{F^0}\Delta^{q+1}\xrightarrow{D_0}I\times\Delta^q\xrightarrow{1\times\sigma}I\times X\xrightarrow{F}Y\\ f\cdot\sigma=&F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_q\cdot F^{q+1}:\Delta^q\xrightarrow{F^{q+1}}\Delta^{q+1}\xrightarrow{D_q}I\times\Delta^q\xrightarrow{1\times\sigma}I\times X\xrightarrow{F}Y\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}F^0(e_0,e_1,\cdots,e_q)=&(\widehat{e}_0,e_1,e_2,\cdots,e_{q+1}),\\ D_0(\widehat{e}_0,e_1,e_2,\cdots,e_{q+1})=&(\widehat{e}_0,\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q)\\ F^{q+1}(e_0,e_1,\cdots,e_q)=&(e_0,e_1,,\cdots,e_q,\widehat{e}_{q+1}),\\ D_q(e_0,e_1,\cdots,e_q,\widehat{e}_{q+1})=&(e_0,e_1,\cdots,e_q,\widehat{\nu}_q)\end{aligned}$$

对于q维奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$,

$$\begin{aligned}\partial_{q+1}\cdot H_q(\sigma)=&\partial_{q+1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^iF\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\right)\\ =&\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^j\\ H_{q-1}\cdot\partial_q(\sigma)=&H_{q-1}\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\sigma\cdot F^j\right)\\ =&\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma\cdot F^j)\cdot D_i\\ =&\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot(1\times F^j)\cdot D_i\end{aligned}$$

在此，我们希望$\partial_{q+1}\cdot H_q(\sigma)$中的项和$H_{q-1}\cdot\partial_q(\sigma)$中的项互相消去, 最后只剩下

$$F\cdot(1\times\sigma)\cdot F^0\cdot D_0-F\cdot(1\times\sigma)\cdot F^{q+1}\cdot D_q.$$

注意到:$D_i\cdot F^j:\Delta^q\xrightarrow{F^j}\Delta^{q+1}\xrightarrow{D_i}I\times\Delta^q$ 将Δ^q的顶点$(e_0,e_1,\cdots,e_q)$映射到

$$(e_0,\cdots,\widehat{e}_j,\cdots e_{q+1})\xrightarrow{D_i}\begin{cases}(e_0,\cdots,\widehat{e}_j,\cdots,e_i,\nu_i,\cdots,\nu_q) & j\leqslant i\\ (e_0,\cdots,e_i,\nu_i,\cdots,\widehat{\nu}_{j-1},\cdots,\nu_q) & i<j\end{cases}$$

$(1\times F^j)\cdot D_i:\Delta^q\xrightarrow{D_i}I\times\Delta^{q-1}\xrightarrow{(1\times F^j)}I\times\Delta^q$将$\Delta^q$的顶点$(e_0,e_1,\cdots,e_q)$映射到

$$(e_0,\cdots,e_i,\nu_i,\cdots,\nu_{q-1})\xrightarrow{1\times F^j}\begin{cases}(e_0,\cdots,\widehat{e}_j,\cdots,e_{i+1},\nu_{i+1},\cdots,\nu_q) & j\leqslant i\\ (e_0,\cdots,e_i,\nu_i,\cdots,\widehat{\nu}_j,\cdots,\nu_q) & i<j\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}&(1\times F^j)\cdot D_i=D_{i+1}\cdot F^j,\quad j\leqslant i\text{时}\\ &(1\times F^j)\cdot D_i=D_i\cdot F^{j+1},\quad j>i\text{时}.\end{aligned}$$

同时注意到, 当$q\geqslant i\geqslant 1$时

$$(e_0,\cdots,e_{i-1},\widehat{e}_i,\nu_i,\cdots,\nu_q)=(e_0,\cdots,e_{i-1},\widehat{\nu}_{i-1},\nu_i,\cdots,\nu_q)$$

因而, 我们还有

$$D_i\cdot F^i=D_{i-1}\cdot F^i$$

$$H_{q-1}\cdot\partial_q(\sigma)=\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant q-1}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_{i+1}\cdot F^j$$
$$+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant q}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^{j+1}.$$

将$\partial_{q+1}\cdot H_q(\sigma)$写成

$$\partial_{q+1}\cdot H_q(\sigma)=\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^j$$
$$+\sum_{0\leqslant i<j-1\leqslant q}(-1)^{i+j}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^j$$
$$+\sum_{0\leqslant j=i\leqslant q}(-1)^{2i}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^i$$
$$+\sum_{0\leqslant i=j-1\leqslant q}(-1)^{2i+1}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^{i+1}.$$

注意到$\partial_{q+1}\cdot H_q(\sigma)$中的前两部分被$H_{q-1}\cdot\partial_q(\sigma)$消去了.

$$\sum_{0\leqslant j=i\leqslant q}(-1)^{2i}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^i+\sum_{0\leqslant i=j-1\leqslant q}(-1)^{2i+1}F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_i\cdot F^{i+1}$$

中的项互相消去后只剩下

$$F\cdot(1\times\sigma)D_0\cdot F^0-F\cdot(1\times\sigma)\cdot D_q\cdot F^{q+1}=g\cdot\sigma-f\cdot\sigma.$$

例1 我们知道$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\sum x_i^2=1\}$, $I^n=I\times I\times\cdots\times I$以及标准单形$\Delta^n$都是可缩空间, 因而

$$H_q(E^n)\cong H_q(I^n)\cong H_q(\Delta^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=0\\ 0 & q>0\end{cases}$$

§3.2 习题

1 证明: 从$\mathbb{R}^{n_1}$中挖去坐标原点$\{0\}$后所得空间$\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$的各维同调群与n维球面S^n的同调群同构.

2 记x,y是2维环面T中的两个点, 证明:

$$H_q(T-\{x\})\cong H_q(S^1\vee S^1),\qquad H_q(T-\{x,y\}\cong H_q(S^1\vee S^1\vee S^1).$$

§3.3 π_1与H_1的关系*

从定义看基本群有比较好的几何意义, 而同调群非常抽象. 事实上同调群也有很好的几何意义. 本节我们介绍基本群和1维同调群的关系. 从基本群$\pi_1(X,x_0)$到1维同调群$H_1(X)$有一个满同态, 通过这个满同态, 由$\pi_1(X,x_0)$可以计算出$H_1(X)$.

定理3.3.1 存在同态$\chi:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$. 当$X$道路连通时$\chi$是满同态, $Ker\chi$是$\pi_1(X,x_0)$的交换化子群

$$[\pi_1,\pi_1]=\{\text{所有}[\alpha,\beta]=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1},\ \alpha,\beta\in\pi_1(X,x_0)\text{生成的正规子群}\}.$$

因而$H_1(X)=\pi_1(X,x_0)/Ker\chi$是基本群$\pi_1(X,x_0)$的交换化.

证明: 在§3.1 例1中我们曾提到过, 对于X中的一条闭路$\sigma:I=\Delta^1\to X$ $\partial_1(\sigma)=\sigma(e_1)-\sigma(e_0)=0$, 因而$\sigma$是$S_1(X)$中的一条闭链.

对于$\pi_1(X,x_0)$中的任何一个道路同伦等价类$[\sigma]$, 选取$[\sigma]$的一个代表元$\sigma:I=\Delta^1\to X$, 定义$\chi([\sigma])$为σ在1维同调群中代表的同调类$[\sigma]\in H_1(X)$.

1, 首先我们证明这样的定义合理, 即: 当$\sigma\simeq_p\tau$道路同伦时, 1维同调类$[\sigma]=[\tau]$.

在§3.1习题4中有这样一个结论: 如果$\sigma\simeq_p\tau$, 则$\sigma-\tau$ 是一个边缘, 即: $\sigma-\tau=\partial_2(x)$. 因而当$\sigma,\tau$都是闭链时, 作为同调类$[\sigma]=[\tau]$. 证明方法如下:

设$F:I\times I\to X$是从σ到τ的道路伦移,

$$\begin{aligned} F(s,0)&=\sigma(s), & F(s,1)&=\tau(s)\\ F(0,t)&\equiv\sigma(0)=x_0, & F(1,t)&\equiv x_0 \end{aligned}$$

因而F可以通过锥形$\Delta=I\times I/\{1\}\times I$映射到$X$,

$$\begin{tikzcd} I\times I \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \Delta=I\times I/\{1\}\times I \arrow[r, "\widehat{F}"'] & X \end{tikzcd}$$

(见图3.7)

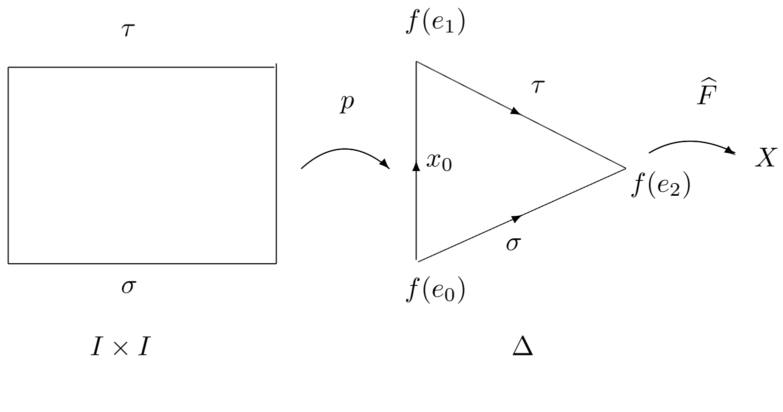


图3.7

构作从Δ^2到$\Delta = I \times I/\{1\} \times I$的线性同胚$f : \Delta^2 \to \Delta$使得

$$f(e_0) = (0,0), \qquad f(e_1) = (0,1), \qquad f(e_2) = \{1\} \times I.$$

则$\widehat{F} \cdot f : \Delta^2 \to \Delta \to X$ 是X中的2维奇异单形. Δ^2到x_0的常值映射$c_{x_0} : \Delta^2 \to X$是X中的另一个2维奇异单形.

$$\partial_2(\widehat{F} \cdot f) = \tau - \sigma + x_0, \qquad \partial_2(c_{x_0}) = x_0 - x_0 + x_0$$

其中$x_0 : \Delta^1 \to X$是常值映射. 因而

$$\partial_2(c_{x_0} - \widehat{F} \cdot f) = \sigma - \tau.$$

2, 证明χ是同态.

在§3.1 例2中我们曾经证明过如果$\sigma(e_1) = \tau(e_0)$, 则在X的奇异链复形中$\sigma + \tau - \sigma * \tau = \partial_2(\delta)$. 因而, 对于$X$中的两条闭路$\sigma, \tau$

$$\chi([\sigma] \cdot [\tau]) = \chi([\sigma * \tau]) = [\sigma * \tau] \in H_1(X)$$

而在$H_1(X)$中

$$[\sigma * \tau] = [\sigma + \tau] = [\sigma] + [\tau].$$

3, 证明χ是满同态.

设$z = \sum n_k \sigma_k$是$S_1(X)$中的一条闭链, 其中$\sigma_k : \Delta^1 = I \to X$是$X$中的道路, $\partial_1(z) = 0$. 在此我们首先将z代表的同调类$[z]$的表示法做一个变换:

1) 当$n_k > 0$时, 将$n_k \sigma_k$表示为

$$\sigma_k + \sigma_k + \cdots + \sigma_k = n_k \sigma_k.$$

2) 当$n_k < 0$时, $-\sigma_k - \sigma_k - \cdots - \sigma_k = n_k \sigma_k$.

在§3.1 习题6中我们曾经证明过如果σ^{-1}是σ的逆道路, 则$\sigma + \sigma^{-1}$是一个边缘. 证明方法如下:

首先$\sigma + \sigma^{-1} - \sigma * \sigma^{-1} = \partial_2(\delta)$ (见§3.1 例2). 同时$\sigma * \sigma^{-1}$是起点、终点在$\sigma(e_0)$的闭路且道路同伦与常值道路. 在§3.1 例1中我们证明过: 此时$\sigma * \sigma^{-1} = \partial_2(x)$是一个边缘. 因而

$$\sigma + \sigma^{-1} = \partial_2(\delta + x), \qquad -\sigma = \sigma^{-1} + \partial_2(\delta + x)$$

将$z = \sum n_k \sigma_k$中的$-\sigma_k$替换成σ_k^{-1}, 他代表相同的同调类. 这样$z = \sum n_k \sigma_k$代表的同调类$[z]$ 被表示成了

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m = z$$

3) 由于$z = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m$是闭链,

$$\partial_1(z) = \sigma_1(e_1) - \sigma_1(e_0) + \sigma_2(e_1) - \sigma_2(e_0) + \cdots + \sigma_m(e_1) - \sigma_m(e_0) = 0$$

其所有的终点和所有的起点两两相消. 在此我们适当调整σ_i的顺序使得σ_i的终点等于σ_{i+1}的起点, 而σ_m的终点等于σ_1的起点.

$$\sigma_1(e_1) = \sigma_2(e_0), \quad \sigma_2(e_1) = \sigma_3(e_0), \quad \cdots, \quad \sigma_{m-1}(e_1) = \sigma_m(e_0), \quad \sigma_m(e_1) = \sigma_1(e_0).$$

此时$\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m$是$X$中的一条闭路, 但起点、终点在$\sigma_1(e_0) = \sigma_m(e_1)$不一定是$X$的基点$x_0$. 由于$X$是道路连通的, 任意选取从$x_0$到$\sigma_1(e_0)$的一条道路$\gamma$,

$$\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}$$

是X中起点、终点在x_0的闭路. 他代表$\pi_1(X, x_0)$中的一个道路同伦等价类. 考察

$$\chi([\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}]) = [\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}] \in H_1(X).$$

而在链群$S_1(X)$中

$$\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1} = \gamma + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m + \gamma^{-1} + \partial_2(y)$$

且$\gamma + \gamma^{-1} = \partial_2(\delta + x)$. 因而作为同调类

$$[\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}] = [\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m].$$

4, 证明$Ker\chi = [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$是基本群的交换化子群.

$\pi_1(X,x_0)$是一个非交换群, 他的交换化子群$[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$是由所有的$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$其中$\alpha, \beta \in \pi_1(X,x_0)$生成的子群. 这个子群是$\pi_1(X,x_0)$的正规子群, 并且一个元素

$$\gamma = \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_s^{k_s} \in [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$$

的充分必要条件是: 出现的每一个相同的α_i的总方次的和等于0. 比如

$$\alpha^{i_1}\beta^{j_1}\gamma^{k_1}\alpha^{i_2}\beta^{j_2}\gamma^{k_2}\cdots\alpha^{i_r}\beta^{j_r}\gamma^{k_r} \in [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$$

的充分必要条件是

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_r = 0, \qquad j_1 + j_2 + \cdots + j_r = 0, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0.$$

设$[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$是一个闭路同伦类, $\chi([\gamma]) = 0 \in H_1(X)$, 即: γ是一个边缘$\gamma = \partial_2(x) = \partial_2(\sum_{i=1}^k n_i\sigma_i)$. 同样将$x$表示成$\pm\sigma_1 + \pm\sigma_2 + \cdots + \pm\sigma_m$, 则

$$\begin{aligned}
&\gamma - \partial_1(\pm\sigma_1) - \partial_2(\pm\sigma_2) - \cdots - \partial_2(\pm\sigma_m)\\
=&\gamma - \pm(\sigma_1 \cdot F^0 - \sigma_1 \cdot F^1 + \sigma_1 \cdot F^2) - \cdots - \pm(\sigma_m \cdot F^0 - \sigma_m \cdot F^1 + \sigma_m \cdot F^2)\\
=&0
\end{aligned}$$

$\sigma_i \cdot F^j : \Delta^1 \to \Delta^2 \to X$是$X$中的一条道路, 简记为$\alpha_{ij} = \sigma_i \cdot F^j$, $i = 1, 2, \cdots, m, j = 0, 1, 2$. 上式可写成

$$(3.1)\quad \gamma - \pm(\alpha_{10} - \alpha_{11} + \alpha_{12}) - \pm(\alpha_{20} - \alpha_{21} + \alpha_{22}) - \cdots - \pm(\alpha_{m0} - \alpha_{m1} + \alpha_{m2}) = 0,$$

即每一个相同的α_{ij}包括γ出现的正负号的总和等于0.

对于每一个$\sigma_i : \Delta^2 \to X$, $\alpha_{ij} = \sigma_i \cdot F^j : \Delta^1 \to X$ 选取从x_0到$\sigma_i(e_0), \sigma_i(e_1), \sigma_i(e_2)$的道路$\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2}$. 当$\sigma_i(e_j) = \sigma_{i'}(e_{j'})$时选取相同的道路$\eta_{ij} = \eta_{i'j'}$. (见图3.8)

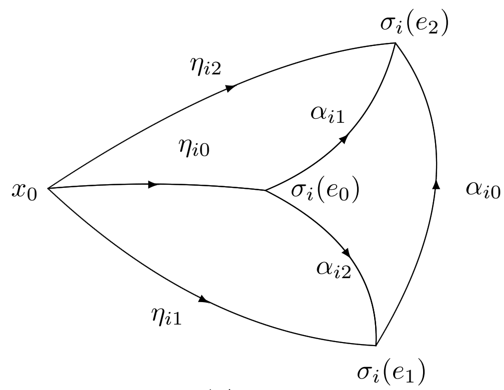


图3.8

则

$$\begin{aligned}\beta_{i0} =&\eta_{i1} * \alpha_{i0} * \eta_{i2}^{-1}\\ \beta_{i1} =&\eta_{i0} * \alpha_{i1} * \eta_{i2}^{-1}\\ \beta_{i2} =&\eta_{i0} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1}\end{aligned}$$

是X中的三条起点、终点在x_0的闭路. 考察

$$\begin{aligned}\beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2} =&(\eta_{i1} * \alpha_{i0} * \eta_{i2}^{-1}) * (\eta_{i2} * \alpha_{i1}^{-1} * \eta_{i0}^{-1})(\eta_{i0} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1})\\ \simeq_p&\eta_{i1} * (\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}) * \eta_{i1}^{-1}.\end{aligned}$$

注意到闭路$\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}$是映射$\sigma_i : \Delta^2 \to X$在边界部分的限制, 可以扩充到整个$\Delta^2$上. 因而$\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}$及

$$\beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2} \simeq_p \eta_{i1} * \alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1}$$

道路同伦与常值道路c_{x_0}. 道路同伦等价类$[\gamma]$可以表示成

$$[\gamma] = [\gamma]([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1}([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1} \cdots ([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1}.$$

(3.1)已经说明了每个相同的α_{ij}包括γ出现的正负号的总和等于零. 而这个表达式中对应的下标及正负号与(3.1)相同, 对应的每个相同的β_{ij}包括γ 出现的正负号的总和也等于零, $\gamma \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$

§3.4 相对同调群与正合序列

设(X,A)是一个拓扑空间偶, 对应的有X和A的奇异链复形

$$S_*(X), \qquad S_q(X)=\left\{\sum_i n_i\sigma_i | n_i\in\mathbb{Z},\sigma_i:\Delta^q\to X\right\}$$

$$S_*(A), \qquad S_q(A)=\left\{\sum_i n_i\sigma_i' | n_i\in\mathbb{Z},\sigma_i':\Delta^q\to A\right\}.$$

$S_q(A)$是$S_q(X)$的子群且边缘算子$\partial_q:S_q(A)\hookrightarrow S_{q-1}(A)$.

定义3.4.1 对于空间偶(X,A), 令$S_q(X,A)=S_q(X)/S_q(A)$称为(X,A)的相对q维奇异链群. 边缘算子$\partial_q:S_q(X)\to S_{q-1}(X)$导出相对奇异链群的边缘算子

$$\widetilde{\partial}_q: \quad \begin{array}{ccc} S_q(X,A) & \longrightarrow & S_{q-1}(X,A) \\ \| & & \| \\ S_q(X)/S_q(A) & \longrightarrow & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

同样定义:
1) $\mathbb{Z}_q(X,A)=Ker\widetilde{\partial}_q$称为相对闭链群.
2) $\mathbb{B}_q(X,A)=Im\widetilde{\partial}_{q+1}$相对边缘链群.
3) $H_q(X,A)=\mathbb{Z}_q(X,A)/\mathbb{B}_q(X,A)$称为相对同调群.

相对链群$S_q(X,A)$是商群$S_q(X)/S_q(A)$. 其元素还记为

$$\widetilde{x}=\sum_i n_i\sigma_i$$

其中$n_i\in\mathbb{Z}$是整数, $\sigma_i:\Delta^q\to X$ 是奇异单形, 只不过当奇异单形σ的像$\sigma_i(\Delta^q)\subset A$全落到$A$中时认为$\sigma_i=0$. 因而

1, 相对闭链群$\mathbb{Z}_q(X,A)$中的相对闭链$\widetilde{z}=\sum n_i\sigma_i$不一定满足$\partial_q(\widetilde{z})=0$, 只要$\partial_q(\widetilde{z})=\sum m_j\tau_j$中每个$q-1$维奇异单形$\tau_j$的像$\tau_j(\Delta^{q-1})\subset A$全落到$A$中即可.

2, 相对边缘链群$\mathbb{B}_q(X,A)$中的元$\widetilde{b}=\sum n_i\sigma_i$也不一定是边缘$\sum n_i\sigma_i=\partial_{q+1}(\widetilde{x})$, 只要

$$\partial_{q+1}(\widetilde{x})=\sum n_i\sigma_i+\sum k_j\sigma_j',$$

多余的奇异单形σ_j'的像$\sigma_j'(\Delta^q)\subset A$全落在$A$中即可.

例1 记$E^1_-=\{e^{2\pi is}|1/2\leqslant s\leqslant 1\}$ 为圆S^1的下半圆(见图3.9)

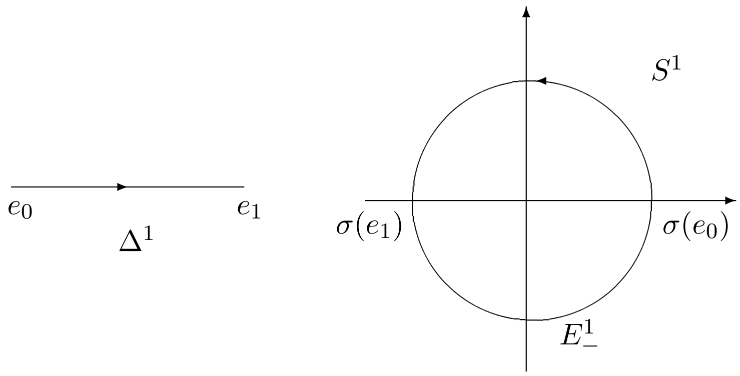


图3.9

构作1维奇异单形$\sigma : \Delta^1 \to S^1$

$$\sigma((1-s)e_0 + se_1) = e^{\pi is}$$

$\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) \neq 0$, 但是$\sigma(e_1) = -1, \sigma(e_0) = 1 \in E_-^1$.

$$\sigma \in \mathbb{Z}_1(S^1, E_-^1)$$

是相对闭链. 因而$[\sigma] \in H_1(S^1, E_-^1)$是相对同调群中的一个相对同调类.

类似的, 如果$f : (X, A) \to (Y, B)$是空间偶的映射$f(A) \subset B$, 则f导出同调群的同态和相对同调群的同态

$$\begin{aligned} f_* &: H_q(A) \longrightarrow H_q(B) \\ f_* &: H_q(X) \longrightarrow H_q(Y) \\ f_* &: H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B). \end{aligned}$$

性质3.4.1 设$f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ 都是空间偶的映射, 则

1, $(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$

$$\begin{tikzcd} H_q(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\cdot f)_*"'] & H_q(Y,B) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(Z,C) \end{tikzcd}$$

2, $1_* = 1 : H_q(X, A) \to H_q(X, A)$, 因而相对同调群是同胚不变量.

相对同调群不仅是同胚不变量，而且还是同伦不变量.

定理3.4.2

1, 如果$f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$是同伦等价的空间偶之间的映射(从$f$到$g$的伦移$F$保持$F(A \times I) \subset B$), 则

$$f_* = g_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B).$$

2, 如果$f_*:(X,A)\xrightarrow{\simeq}(Y,B)$是空间偶之间的同伦等价, 则

$$f_*:H_q(X,A)\xrightarrow{\cong}H_q(Y,B)$$

是同构.

证明: 在此应当注意的是: 空间偶之间的映射$f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$ 同伦等价要求伦移$F:X\times I\to Y$保持$F(A\times I)\hookrightarrow B$. 因此$f\simeq g:X\to Y$, 同时$f|_A\simeq g|_A:A\to B$. 由伦移$F$导出的链同伦即有链同伦$H_q:S_q(X)\to S_{q+1}(Y)$也有链同伦$H_q:S_q(A)\to S_{q+1}(B)$. 因此$H_q$导出链同伦

$$\widetilde{H}_q:S_q(X,A)=S_q(X)/S_q(A)\to S_q(Y,B)=S_q(Y)/S_q(B)$$

同样满足

$$g_\sharp-f_\sharp=\widetilde{\partial}_{q+1}\cdot\widetilde{H}_q+\widetilde{H}_{q-1}\cdot\widetilde{\partial}_q$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X,A) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{q+1}"] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] & S_q(X,A) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_q"] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] \arrow[dl, "\widetilde{H}_q"] & S_{q-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "g_\sharp"', "-f_\sharp"] \arrow[dl, "H_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(Y,B) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{q+1}"'] & S_q(Y,B) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_q"'] & S_{q-1}(Y,B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意到, 空间偶(X,A)与(Y,B)同伦等价蕴含X与Y 同伦等价, 同时子空间A与B也同伦等价. 因此

$$\begin{aligned}H_q(X)\cong&H_q(Y)\\H_q(A)\cong&H_q(B)\\H_q(X,A)\cong&H_q(Y,B).\end{aligned}$$

例2 令$f:(S^1,E^1_-)\to(S^1,e^{2\pi i})$为

$$f(e^{2\pi it})=\begin{cases}e^{4\pi it} & 0\leqslant t\leqslant 1/2\\ e^{2\pi i} & 1/2\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

$i:(S^1,e^{2\pi i})\to(S^1,E^1_-)$为内射. 容易验证有空间偶映射的同伦等价：

$$\begin{aligned}f\cdot i\simeq&1:(S^1,e^{2\pi i})\longrightarrow(S^1,E^1_-)\longrightarrow(S^1,e^{2\pi i})\\ i\cdot f\simeq&1:(S^1,E^1_-)\longrightarrow(S^1,e^{2\pi i})\longrightarrow(S^1,E^1_-)\end{aligned}$$

因而有相对同调群的同构

$$f_*:H_q(S^1,E^1_-)\xrightarrow{\cong}(S^1,e^{2\pi i}).$$

例1中的相对闭链$\sigma:\Delta^1\to S^1$,

$$\begin{aligned}\sigma((1-s)e_0+se_1)=&e^{\pi is}\\ f\cdot\sigma((1-s)e_0+se_1)=&f(e^{\pi is})=e^{2\pi is}.\end{aligned}$$

注意到$S_q(X,A)=S_q(X)/S_q(A)$, $j_\sharp:S_q(X)\to S_q(X,A)$是满同态, 映射的核$Kerj_\sharp=S_q(A)$. 我们称

$$0\longrightarrow S_q(A)\xrightarrow{i_\sharp}S_q(X)\xrightarrow{j_\sharp}S_q(X,A)\longrightarrow 0$$

为链群的一个正合序列。

定义3.4.2 设

$$\cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{f_{q+1}}C_q\xrightarrow{f_q}C_{q-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\xrightarrow{f_1}C_0\xrightarrow{f_0}C_{-1}\longrightarrow\cdots$$

是群同态的一个序列.
1, 称序列在C_q处正合, 如果$Imf_{q+1}=Kerf_q$.
2, 称整个序列是正合的如果他在每一个C_q处都正合。

在长正合序列中, $f_q\cdot f_{q+1}=0$, 因而$Imf_{q+1}\subset f_q$. 如果考虑正合序列的同调群$Kerf_q/Imf_{q+1}$, 他一定是平凡的即:

$$H_q(C_*,f_*)=Kerf_q/Imf_{q+1}=0.$$

例3 对于空间偶(X,A)的链群同态

$$0\longrightarrow S_q(A)\xrightarrow{i_\sharp}S_q(X)\xrightarrow{j_\sharp}S_q(X,A)\longrightarrow 0$$

是正合序列.
1) 序列在$S_q(A)$处正合指$Im0=Keri_\sharp$, 即: $i_\sharp$是单射.
2) 序列在$S_q(X)$处正合指$Imi_\sharp=Kerj_\sharp$, 即: $j_\sharp:S_q(X)\to S_q(X)/S_q(A)$的核等于$S_q(A)$.
3) 序列在$S_q(X,A)$处正合指, $Imj_\sharp=Ker0=S_q(X,A)$, 即$j_\sharp$是满同态.

利用群的正合序列求解群的结构是群的分类中的一个重要问题.
问题 如果群A,B已知, 而群G是下面正合序列中的群

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}G\xrightarrow{g}B\longrightarrow 0.$$

能否确定中间的群G是什么?
对于交换群来说，似乎可以确定中间的群G会有几种可能，在第四章中我们还将提及这个问题. 但对于非交换群A,B,G来说, 知道有上面的正合序列, 且已知群A,B的结构时, 要确定群G的结构仍然是非常困难的问题.

例4 如果

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}/5\xrightarrow{f}G\longrightarrow 0$$

是群的正合序列, 则可以确定$G\cong\mathbb{Z}/5$.
一般的, 如果

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}G\longrightarrow 0$$

是正合序列, 也可以确定$G\cong A$, 并且无论A是交换群或非交换群结论都成立.

例5 如果有交换群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

则我们至少可以知道群G有两种可能, $G \cong \mathbb{Z}/4$或$G \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

当群$G \cong \mathbb{Z}/4$时, $f : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4$为$f(1) = 2$.

当群$G \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$时, $f : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$为$f(1) = (1, 0)$或$(0, 1)$.

定义3.4.3 交换群的正合序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & G \arrow[l, bend left, dotted, "\chi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[l, bend left, dotted, "\rho"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

称为交换群的短正合序列.

当存在$\chi : G \to A$使得

$$\chi \cdot f = 1 : A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\chi} A,$$

或存在$\rho : B \to G$使得

$$g \cdot \rho = 1 : B \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{g} B$$

时称这个短正合序列是可裂的.

引理3.4.3 如果

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & G \arrow[l, bend left, dotted, "\chi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[l, bend left, dotted, "\rho"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

是可裂的短正合序列, 则$G \cong A \oplus B$.

证明: 1, 如果存在$\chi : G \to A$使得$\chi \cdot f = 1$. 我们可以构作同态$\phi : G \to A \oplus B$为: 对任何$x \in G$,

$$\phi(x) = (\chi(x), g(x)) \in A \oplus B$$

此时, 如果$\phi(x) = 0$则$\chi(x) = 0, g(x) = 0$. 由于这个序列正合且$g(x) = 0$, $x \in Kerg = Imf$, 存在$a \in A$使得$x = f(a)$. 而由

$$\chi(x) = \chi(f(a)) = \chi \cdot f(a) = a = 0$$

知$a = 0$, 因而$x = f(0) = 0$.

对任何$(a, b) \in A \oplus B$, 由于$g : G \to B$是满同态, 存在$x \in G$使得$g(x) = b$. 设$\chi(x) = a'$, 则

$$g(x + f(a - a')) = g(x) + g \cdot f(a - a') = g(x) = b$$

且

$$\chi(x + f(a - a')) = \chi(x) + \chi \cdot f(a - a') = a' + (a - a') = a.$$

存在$x + f(a - a') \in G$使得$\phi(x + f(a - a')) = (a, b)$. ϕ是满同态.

2, 如果存在$\rho : B \to G$使得$g \cdot \rho = 1$, 我们可以构作同态$\psi : A \oplus B \to G$为: 对任何$(a, b) \in A \oplus B$

$$\psi(a, b) = f(a) + \rho(b).$$

同样可以证明ψ即单且满, $A \oplus B \cong G$.

同时, 通过证明我们也可以看出来: 存在$\chi : G \to A$使得$\chi \cdot f = 1_A$和存在$\rho : B \to G$使得$g \cdot \rho = 1_B$ 是等价的.

例6 正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

是不可裂的, 这是因为同态$\rho : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$只能是零同态.

而正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

一定是可裂的. 这是因为, 由于g是满同态, 存在$x \in G$使得$g(x) = 1 \in \mathbb{Z}$. 此时可以构作同态$\rho : \mathbb{Z} \to G$为: 对任何$n \in \mathbb{Z}$ $\rho(n) = nx \in G$, 他满足$g \cdot \rho = 1_{\mathbb{Z}}$.

对于空间偶(X, A), 内射$i : A \to X$导出链复形同态$i_\sharp : S_q(A) \to S_q(X)$ 和同调群同态$i_* : H_q(A) \to H_q(X)$.

商映射$j_\sharp : S_q(X) \to S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$满足$\widetilde{\partial}_q \cdot j_\sharp = j_\sharp \cdot \partial_q$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "j_\sharp"'] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "j_\sharp"'] & S_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "j_\sharp"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X, A) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{q+1}"'] & S_q(X, A) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_q"'] & S_{q-1}(X, A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因而$j_\sharp$导出同调群同态$j_* : H_q(X) \to H_q(X, A)$.

在此X可以看成是空间偶$(X, \emptyset)$, 其中$\emptyset$是空集, $S_q(\emptyset) = 0$,

$$S_q(X) = S_q(X, \emptyset) = S_q(X)/S_q(\emptyset).$$

$j_\sharp : S_q(X) \to S_q(X, A)$可以看成是空间偶间映射$j : (X, \emptyset) \to (X, A)$导出的相对链复形之间的链映射$j_\sharp : S_q(X, \emptyset) \to S_q(X, A)$.

由此我们得到同调群的同态

$$H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A).$$

参照相对链群$S_q(X, A)$中元素的表示方法, 考察相对同调群中的相对同调类$[\widetilde{z}] \in H_q(X, A)$.

相对同调类$[\widetilde{z}]$的代表元$\widetilde{z} \equiv z = \sum_k n_k \sigma_k \in S_q(X)$是相对闭链指

$$\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_1$$

其中每个$q-1$维奇异单形τ_j的像$\tau_j(\Delta^{q-1}) \subset A$全落到$A$中, 因而$\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_j$是$S_{q-1}(A)$中的奇异链. 注意到

$$\partial_{q-1} \cdot \partial_q(z) = \partial_{q-1}(\sum_j m_j \tau_j) = 0$$

$\partial_q(z) = \sum_j m_j\tau_j$是$S_{q-1}(A)$中的闭链, 他代表$A$的同调群$H_{q-1}(A)$中的一个同调类

$$[\partial_q(z)] = \left[\sum_j m_j\tau_j\right] \in H_{q-1}(A).$$

定义3.4.4 定义联系同态$\delta_q : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$为: 对任何相对同调类$[\widetilde{z}] \in H_q(X,A)$, $\delta_q([\widetilde{z}]) = [\partial_q(z)]$为$\partial_q(z) = \sum_j m_j\tau_j$所代表的同调类.

引理3.4.4 对于相对同调类$[\widetilde{z}] \in H_q(X,A)$, $H_{q-1}(A)$中的同调类$\delta_q([\widetilde{z}] = [\partial_q(z)]$不依赖与代表元$z$的选取, 联系同态$\delta_q : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$的定义合理.

证明:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_{q+1}(A) \arrow[r, "i_\sharp"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "j_\sharp"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & S_{q+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_{q+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(A) \arrow[r, "i_\sharp"] \arrow[d, "\partial_q"'] & S_q(X) \arrow[r, "j_\sharp"] \arrow[d, "\partial_q"'] & S_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{q-1}(A) \arrow[r, "i_\sharp"] \arrow[d] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "j_\sharp"] \arrow[d] & S_{q-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

1, 对于相对同调类$[\widetilde{z}] \in H_q(X,A)$, $\delta_q([\widetilde{z}]) = [\partial_q(z)]$ 不依赖与$S_q(X)$中代表元z的选取.

如果$j_\sharp(z) = j_\sharp(z') \in S_q(X,A)$, 即$z - z' = \sum n_k\sigma_k \in S_q(A)$, 则

$$\partial_q(z) = \partial_q(z') + \partial_q(\sum n_k\sigma_k).$$

而每个σ_k的像$\sigma_k(\Delta^q) \subset A$全在$A$中, $\partial_q(z)$与$\partial_q(z')$相差$S_{q-1}(A)$中的一个边缘$\partial_q(\sum n_k\sigma_k) \in \mathbb{B}_{q-1}(A)$,

$$[\partial_q(z)] = [\partial_q(z')] \in H_{q-1}(A).$$

2, 如果$\widetilde{z}$与$\widetilde{z}'$相差一个相对边缘$\widetilde{\partial}_{q+1}(\widetilde{x})$, 即: 存在$x \in S_{q+1}(X)$使得

$$\partial_{q+1}(x) = z - z' + \sum n_k\sigma_k$$

其中每个σ_k的像都在A中. 则$z = \partial_{q+1}(x) + z' - \sum n_k\sigma_k$

$$\partial_q(z) = \partial_q \cdot \partial_{q+1}(x) + \partial_q(z') - \partial_q(\sum n_k\sigma_k) = \partial_q(z') - \partial_q(\sum n_k\sigma_k).$$

$\partial_q(z)$与$\partial_q(z')$相差$S_{q-1}(A)$中的一个边缘$\partial_q(\sum n_k\sigma_k)\in\mathbb{B}_{q-1}(A)$,

$$[\partial_q(z)]=[\partial_q(z')]\in H_{q-1}(A).$$

通过联系同态δ_q我们得到了同调群同态的一个序列

$$\cdots\to H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\delta_q}H_{q-1}(A)\xrightarrow{i_*}H_{q-1}(X)\to\cdots$$

$$\cdots\to H_1(X)\xrightarrow{j_*}H_1(X,A)\xrightarrow{\delta_1}H_0(A)\xrightarrow{i_*}H_0(X)\xrightarrow{j_*}H_0(X,A)\longrightarrow 0$$

定理3.4.5 同调群同态的序列是一个正合序列, 称为同调群的长正合序列.

证明: 定理证明的方法称为"追图法", 读者要掌握追图法可以从证明习题5(五项引理)开始.

由于需要证明序列在每一处都正合, 整个证明比较长. 在此只给出在$H_q(X,A)$处正合的证明.

对于$H_q(X)$中的同调类$[z]$, 由于z是$\mathbb{Z}_q(X)$中的闭链, $\partial_q(z)=0$

$$\delta_q\cdot j_*([z])=\delta_q([z])=[\partial_q(z)]=[0]$$

$Imj_*\subset Ker\delta_q*$.

对于相对同调类$[\tilde{z}]\in H_q(X,A)$, 相对闭链$z\in S_q(X)$满足$\partial_q(z)\in S_{q-1}(A)$. 如果

$$\delta_q([z])=[\partial_q(z)]=0\in H_{q-1}(A)$$

即$\partial_q(z)\in\mathbb{B}_{q-1}(A)$是$A$中的边缘, 存在$x\in S_q(A)$使得$\partial_q(z)=\partial_q(x)$. 注意到相对链群$S_q(X,A)=S_q(X)/S_q(A)$是商群, 我们可以选相对同调类$[\tilde{z}]$的代表元为$z-x$. 此时$\partial_q(z-x)=0$, $[z-x]\in H_q(X)$而

$$j_*[z-x]=[z-x]=[\tilde{z}]\in H_q(X,A)$$

$Ker\delta_q\subset Imj_*$.

例6 记E^n_+,E^n_-为球面S^n的上下半球面, $E^n_+\cong E^n_-$都同胚与n维球体E^n(当$n=1$时$E^1_+=\cong E^1_-$同胚与单位区间). 他们都是可缩空间. 考察(S^n,E^n_-)的同调群长正合序列.

1) 当$q-1>0$时$H_q(E^n_-)\cong H_{q-1}(E^n_-)=0$

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots\longrightarrow & H_q(E^n_-) & \xrightarrow{i_*} & H_q(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(S^n,E^n_-) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(E^n_-) & \longrightarrow\cdots\\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

$j_*H_q(S^n)\to H_q(S^n,E^n_-)$是同构.

2) 在0维, 1维附近的正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots\longrightarrow & H_1(E^n_-) & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^n,E^n_-) & \xrightarrow{\delta_1} & & \\ & \| & & & & & & & \\ & 0 & & H_0(E^n_-) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^nE^n_-) & \longrightarrow 0\end{array}$$

E_-^n, S^n都是道路连通的空间, $i_*: H_0(E_-^n) \to H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 是同构. 因而$Im\delta_1 = Keri_* = 0$,

$$j_*: H_1(S^n) \xrightarrow{\cong} H_1(S^n, E_-^n)$$

是同构, $Imi_* = Kerj_* = H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$

$$H_0(S^n E_-^n) \cong 0.$$

例7 记E^2为单位圆盘S^1是他的边界圆, 考察(E^2, S^1) 的同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_2(E^2) \xrightarrow{j_*} H_2(E^2, S^1) \xrightarrow{\delta_2} H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(E^2) \longrightarrow \cdots$$

由于E^2是可缩空间$H_2(E^2) = H_1(E^2) = 0$,

$$\delta_2: H_2(E^2, S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1).$$

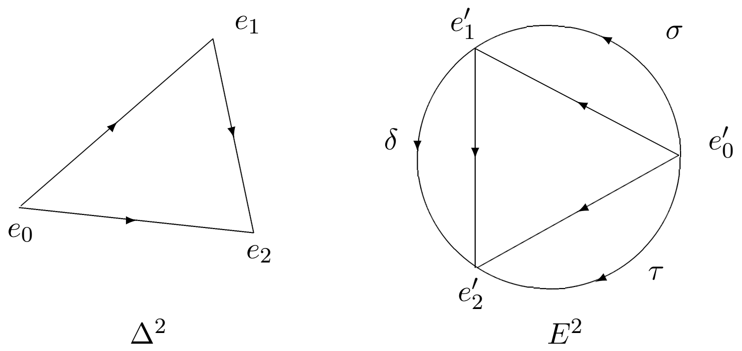


图3.10

由π_1与H_1的关系知$H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1, e_0')/[\pi_1, \pi_1]$

$$\chi: \pi_1(S^1, e_0') \xrightarrow{\cong} H_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

$H_1(S^1)$的生成元是$\chi[z]$, 其中闭路$z: \Delta^1 \to S^1$绕圆逆时针方向一周.

构作E^2的2维奇异单形$\mu: \Delta^2 \to E^2$. 将Δ^2放在圆盘内部与圆盘的边界外接, 从圆心向圆的边界做辐射得到Δ^2与圆盘E^2的同胚μ(见图3.10).

$$\partial_2(\mu) = \sigma - \tau + \delta \in S_1(S^1)$$

因而μ是$S_2(E^2, S^1)$中的相对闭链, $[\mu]$代表相对同调群$H_2(E^2, S^1)$中的一个相对同调类.

考察联系同态$\delta_2: H_2(E^2, S^1) \to H_1(S^1)$, 我们有

$$\delta_2([\mu]) = [\partial_2(\mu)] = [\sigma - \tau + \delta] \in H_1(S^1).$$

注意到$\tau^{-1} + \tau$是一个边缘, 而$\sigma * \delta * \tau^{-1} - (\sigma + \delta + \tau^{-1})$ 也是一个边缘.因而作为1维同调类

$$[\sigma - \tau + \delta] = [\sigma + \delta + \tau^{-1}] = [\sigma * \delta * \tau^{-1}] = [z]$$

是$H_1^{(}S^1)$的生成元. $[\mu]$是$H_2(E^2,S^1)=\mathbb{Z}$的生成元.

例8 记E^n为n维实球体, S^{n-1}是他的边界球面.
考察(E^n,S^{n-1})在1维附近的同调群的正合序列, 我们有正合序列

$$\begin{array}{l} H_1(E^n) \xrightarrow{j_*} H_1(E^n,S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_1} H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_0(E^n) \xrightarrow{j_*} H_0(E^n,S^{n-1}) \longrightarrow 0 \\ \quad \shortparallel \\ \quad 0 \end{array}$$

1) 当$n>1$时S^{n-1}是道路连通的, $H_0(S^{n-1})=\mathbb{Z}$, 0维同调群的生成元是$[x_0]$. $H_0(E^n)=\mathbb{Z}$的生成元也是$[x_0]$, 并且$i_*([x_0])=[x_0]$,

$$i_*: H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_0(E^n)$$

是同构. 因而$Imi_*=Kerj_*=H_0(E^n)=\mathbb{Z}$,

$$j_*=0: H_0(E^n,S^{n-1}) \longrightarrow H_0(E^n,S^{n-1})$$

是零同态, $H_0(E^n,S^{n-1})=0$. 同时$Im\delta_1=Keri_*=0$, 因而

$$H_1(E^n,S^{n-1})=0.$$

2) 当$n=1$时0维球面$S^0=\{x_0=1,x_1=-1\}$是两个孤立的点, $H_0(S^0)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. 0维同调类的生成元有两个$[x_0],[x_1]$. E^1是道路连通的, $H_0(E^1)=\mathbb{Z}$. 0维同调群的生成元是$[x_0]=[x_1]$.
考察$i_*: H_0(S^0)\to H_0(E^1)$, 我们注意到

$$i_*([x_0])=[x_0]\in H_0(E^1), \qquad i_*([x_1])=[x_1]\in H_0(E^1).$$

但在$H_0(E^1)$中$[x_0]=[x_1]$, $Keri_*=Im\delta_1=\mathbb{Z}$由$[x_1]-[x_0]=[x_1-x_0]$生成. 因而

$$H_1(E^1,S^0)\cong Im\delta_1=Keri_*=\mathbb{Z}.$$

令$\sigma':\Delta^1\to E^1$为线性同胚. $\sigma\in S_1(E^1,S^0)$ 满足

$$\partial_1(\sigma')=\sigma(e_1)-\sigma'(e_0)=x_1-x_0\in S_0(S^0)$$

因而是相对闭链, 他代表一个1维相对同调类$[\sigma']\in H_1(E^1,S^0)$. 考察联系同态$\delta_1$, 我们有

$$\delta_1[\sigma']=[\partial_1(\sigma')]=[x_1-x_0]=[x_1]-[x_0]$$

$\delta_1[\sigma']$是$Im\delta_1=Keri_*$的生成元. 因而$[\sigma']$是$H_1(E^1,S^0)$的生成元.

§3.4 习题

1 设有非交换群的正合序列

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

试确定G所有可能的结构.

2 在例5的正合序列中G可能是非交换群吗? 可以确定G是4阶群. 试确定4阶群的分类.

3 假设有群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

试证明: G一定是交换群且$G \cong \mathbb{Z}/6$.
当

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0.$$

是正合序列时还能确定$G \cong \mathbb{Z}/6$吗? 说明理由.

4 证明: 如果B是自由Abel群, 则正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

一定是可裂的.

5 (**五项引理**) 假设下面的交换图中每一行都是正合的

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1", "\cong"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_2", "\cong"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_0"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\varphi_3", "\cong"'] & E \arrow[d, "\varphi_4", "\cong"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "k'"'] & E' \end{tikzcd}$$

且$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$都是同构. 证明: $\varphi_0 : C \to C'$是同构.

6 完成定理3.4.5的证明.

7 设x_0是空间X的基点, 证明:

1) 当$q > 0$时$H_q(X) \cong H_q(X, x_0)$.

2) 当$q = 0$时$H_0(X) \cong H_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}$.

因而$H_q(X, x_0)$也被称为带基点空间(X, x_0)的约化同调群, 记为$\widetilde{H}_q(X)$.

§3.5 切除定理

设(X,A)是一个空间偶, $U \subset A$是X中的一个开集. 则有内射导出的相对同调群的同态

$$j_*: H_q(X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow H_q(X,A).$$

定理3.5.1(**切除定理**) 如果U的闭包包含在A的内部$\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$, 则

$$j_*: H_q(X\setminus U, A\setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X,A)$$

是切除同构.

推论3.5.2 设$V \subset U \subset A$, 其中V是X中的开集且V的闭包包含在A的内部$\subset \overset{\circ}{A}$. 如果$(X\setminus U, A\setminus U)$是$(X\setminus V, A\setminus V)$的形变收缩核, 即: 存在收缩映射

$$j': (X\setminus V, A\setminus V) \longrightarrow (X\setminus U, A\setminus U)$$

使得$j'\cdot i = 1$且

$$i\cdot j' \simeq 1: (X\setminus V, A\setminus V) \xrightarrow{j'} (X\setminus U, A\setminus U) \xrightarrow{i} (X\setminus V, A\setminus V),$$

则i_*是空间偶同伦等价导出的同调群同构j'_*是切除同构, 因而

$$j_*: H_q(X\setminus U, A\setminus U) \xrightarrow{i_*} H_q(X\setminus V, A\setminus V) \xrightarrow{j'_*} H_q(X,A)$$

也是切除同构.

在给出切除定理的证明之前我们先来看切除定理的应用.
例1 球面的同调群为

$$H_q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & q=0, \\ 0 & q>0. \end{cases} \qquad H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0, \\ 0 & 0<q<n\text{或}q>n, \\ \mathbb{Z} & q=n \end{cases}$$

记$S^n = \{(x_0,x_1,\cdots,x_n) | \sum x_i^2 = 1\}$为$n$维球面,

$$\begin{aligned} E^n_+ =& \{(x_0,x_1,\cdots,x_n) | \sum x_i^2 = 1, x_0 \geqslant 0\} \\ E^n_- =& \{(x_0,x_1,\cdots,x_n) | \sum x_i^2 = 1, x_0 \leqslant 0\} \end{aligned}$$

为球面的上、下半个球面, 他们都同胚与n维球体, 是可缩空间. 令

$$U = \{(x_0,x_1,\cdots,x_n) | \sum x_i^2 = 1, -1 \leqslant x_0 < -1/2\}$$

为下半个球体的下半部分. 则$\overline{U} \subset \overset{\circ}{E^n_-}$, 因而

$$j_*: H_q(S^n\setminus U, E^n_-\setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, E^n_-)$$

是切除同构.

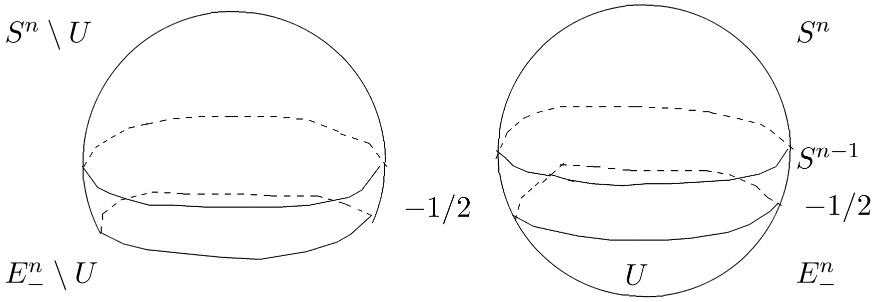


图3.11

注意到空间偶$(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U)$同伦等价与$(E_+^n, S^{n-1})$, 其中

$$S^{n-1} = \{(0, x_1, \cdots, x_n) | \sum x_i^2 = 1\}$$

是E_+^n的边界球面. 内射

$$i : (E_+^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n \setminus U, E_-^n \setminus U)$$

是同伦等价. 因而有同调群的同构

$$j_* : H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{i_*} H_q(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_q(S^n, E_-^n)$$

1) 考察空间偶(E_+^n, S^{n-1})的同调群的长正合序列,

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_q(E_+^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(E_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{q-1}(E_+^n) & \longrightarrow \cdots \\ & \shortparallel & & & & & & \shortparallel & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

因而当$q > 1$时

$$\delta_q : H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_{q-1}(S^{n-1})$$

是同构.

同样考察(S^n, E_-^n)的同调群的长正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_q(E_-^n) & \xrightarrow{i_*} & H_q(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(S^n, E_-^n) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(E_-^n) & \longrightarrow \cdots \\ & \shortparallel & & & & & & \shortparallel & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

我们得到当$q > 1$时

$$j_* : H_q(S^n) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, E_-^n)$$

是同构.

结合切除同构我们有以下同调群的同构: 当$q > 1$, $n \geqslant 1$时

$$H_{q-1}(S^{n-1}) \xleftarrow[\cong]{\delta_q} H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_q(S^n, E_-^n) \xleftarrow[\cong]{j_*} H_q(S^n)$$

特别的, 取$n=1,2$我们有

$$\begin{aligned}0 \cong& H_q(S^0) \cong H_{q+1}(S^1) \cong H_{q+2}(S^2) \cong \cdots \cong H_{q+n}(S^n)\\ \mathbb{Z} \cong& H_1(S^1) \cong H_2(S^2) \cong H_3(S^3) \cong \cdots \cong H_n(S^n)\end{aligned}$$

2) 在§3.4 例6中我们证明了: $j_*: H_1(S^n) \to H_1(S^n, E_-^n)$是同构. 在§3.4 例8中我们还证明了: 当$n>1$时$H_1(E^n S^{n-1})=0$, 当$n=1$时$H_1(E^1, S^0) \cong \mathbb{Z}$. 因而,

(1) 当$n>1$时

$$0 \cong H_1(E_+^n, S^{n-1}) \underset{\cong}{\xrightarrow{j_*}} H_1(S^n, E_-^n) \underset{\cong}{\xleftarrow{j_*}} H_1(S^n)$$

因而当$n>q>0$时, $n-q+1>1$

$$0 \cong H_1(E_+^{n-q+1}, S^{n-q} \cong H_1(S^{n-q+1}) \cong H_2(S^{n-q+2}) \cong H_q(S^n)$$

(2) 当$n=1$时

$$\mathbb{Z} \cong H_1(E_+^1, S^0) \underset{\cong}{\xrightarrow{j_*}} H_1(S^1, E_-^1) \underset{\cong}{\xleftarrow{j_*}} H_1(S^1)$$

为证明切除定理，我们需要首先引进重心重分这个概念.

$\mathbb{R}^\infty$中的$q+1$个点$\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q$ 都会都会张成一个单形

$$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q] = \{\lambda_0\nu_0 + \lambda_1\nu_1 + \cdots + \lambda_q\nu_q | \lambda_i \geqslant 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_q\nu_q\},$$

这个单形的重心定义为

$$b^q = \frac{1}{q+1}\nu_0 + \frac{1}{q+1}\nu_1 + \cdots + \frac{1}{q+1}\nu_q.$$

q维标准单形Δ^q到$\mathbb{R}^\infty$中单形$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$的线性映射

$$\tau: \Delta^q = [e_0, e_1, \cdots, e_q] \longrightarrow [\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$$

称为一个q维线性单形, 仍记为$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$.

线性单形$[b, \nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}]$ 被简记为$B([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}])$. 对于同一个顶点$b$, 线性单形的线性组合

$$\sum n_i [b, \nu_{0i}, \nu_{1i}, \cdots, \nu_{q-1i}]$$

简记为$B(\sum n_i[\nu_{0i}, \nu_{1i}, \cdots, \nu_{q-1i}])$.

定义3.5.1

1) 0维线性单形$[\nu_0]$的重心重分$Sd[\nu_0]$是他自身$[\nu_0]$.

2) 对于1维单形$[\nu_0, \nu_1]$, 他的重心为

$$b^1 = \frac{1}{2}\nu_0 + \frac{1}{2}\nu_1.$$

(b^1, ν_1), (b^1, ν_0) 分别张成$[\nu_0, \nu_1]$中的两个1维单形$[b^1, \nu_0], [b^1, \nu_1] \subset [\nu_0, \nu_1]$.

1维线性单形$[\nu_0, \nu_1]$的重心重分$Sd([\nu_0, \nu_1])$定义为

$$Sd([\nu_0, \nu_1]) = [b^1, \nu_1] - [b^1, \nu_0] = B^1([\nu_1] - [\nu_0]) = B^1(\partial_1([\nu_0, \nu_1]).$$

3) 归纳假设对$q-1$维线性单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}]$已经构作了重心重分$Sd$. 对于$q$维线性单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$, 他的边缘是一些$q-1$维线性单形的线性组合, 已有重心重分. 记$q$维单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$的重心为$b^q$, 定义

$$Sd[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]=B^q\left(Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right).$$

例1 对于2维线性单形$1:[e_0,e_1,e_2]\to[e_0,e_1,e_2]$,

$$\partial_2([e_0,e_1,e_2])=[e_1,e_2]-[e_0,e_2]+[e_0,e_1].$$

1维单形$[e_1,e_2]$, $[e_0,e_2]$, $[e_0,e_1]$的重心分别为

$$b_0^1=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2,\qquad b_1^1=\frac{1}{2}e_0+\frac{1}{2}e_2,\qquad b_2^1=\frac{1}{2}e_0+\frac{1}{2}e_1$$

在此对线性单形$[e_0,e_1,e_2]$的三个1维面

$$[e_0,e_1,e_2]\cdot F^0=[e_1,e_2],\qquad [e_0,e_1,e_2]\cdot F^1=[e_0,e_2],$$
$$[e_0,e_1,e_2]\cdot F^2=[e_0,e_1]$$

已经做了重心重分

$$\begin{aligned}
Sd([e_1,e_2])=&B_0^1(\partial_1([e_1,e_2])=B_0^1([e_2]-[e_1])=[b_0^1,e_2]-[b_0^1,e_1]\\
Sd([e_0,e_2])=&B_1^1(\partial_1([e_0,e_2])=B_1^1([e_2]-[e_0])=[b_1^1,e_2]-[b_1^1,e_0]\\
Sd([e_0,e_1])=&B_2^1(\partial_1([e_0,e_1])=B_2^1([e_1]-[e_0]=[b_2^1,e_1]-[b_2^1,e_0].
\end{aligned}$$

2维单形$[e_0,e_1,e_2]$的重心为

$$b^2=\frac{1}{3}e_0+\frac{1}{3}e_1+\frac{1}{3}e_2.$$

由定义知2维线性单形$[e_0,e_1,e_2]$的重心重分为

$$\begin{aligned}
&Sd([e_0,e_1,e_2])\\
=&B^2(Sd\cdot\partial_2([e_0,e_1,e_2]))\\
=&B^2\left(Sd([e_1,e_2])-Sd([e_0,e_2])+Sd([e_0,e_1])\right)\\
=&B^2\left(([b_0^1,e_2]-[b_0^1,e_1])-([b_1^1,e_2]-[b_1^1,e_0])+([b_2^1,e_1]-[b_2^1,e_0])\right)\\
=&([b^2,b_0^1,e_2]-[b^2,b_0^1,e_1])-([b^2,b_1^1,e_2]-[b^2,b_1^1,e_0])+([b^2,b_2^1,e_1]-[b^2,b_2^1,e_0]).
\end{aligned}$$

一般的, q维线性单形的重心重分$Sd([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])$是$q!$项的线性组合, (见图3.12)

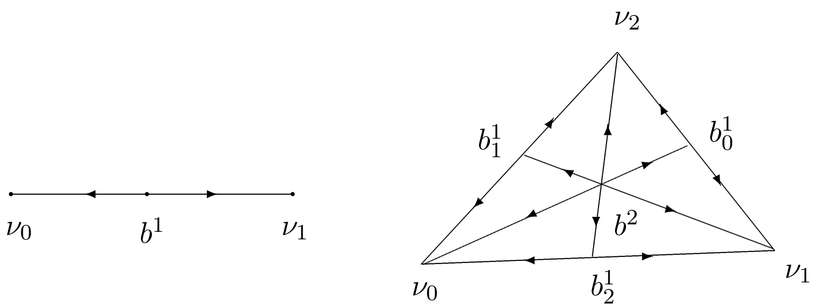


图3.12

定义3.5.2 设$\sigma : \Delta^q \to X$是X的一个奇异单形. 定义σ的重心重分$Sd(\sigma)$为

$$Sd(\sigma) = \sigma_\sharp(Sd([e_0, e_1, \cdots, e_q])) = \sigma \cdot (Sd([e_0, e_1, \cdots, e_q])).$$

其中$[e_0, e_1, \cdots, e_q]$为线性单形$1 : \Delta^q \to [e_0, e_1, \cdots, e_q]$.
定义奇异链复形的重心重分$Sd : S_q(X) \to S_q(X)$为$Sd(\sigma)$的线性扩充.

注意到$Sd([e_0, e_1, \cdots, e_q])$是一些线性单形$[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, e_{i_0}]$的线性组合,

$$\sigma \cdot [b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, e_{i_0}] : [e_0, e_1, \cdots, e_q] \to [b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, e_{i_0}] \xrightarrow{\sigma} X$$

是X中的q维奇异单形.

命题3.5.3 重心重分$Sd \simeq 1 : S_*(X) \to S_*(X)$是一个与单位映射链同伦的链映射, 即:
1) $\partial_q \cdot Sd = Sd \cdot \partial_q$.
2) 存在映射$\{T_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X)\}$使得

$$1 - Sd = \partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q.$$

证明: 1) 注意到对于线性单形$B^q([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}])$

$$\begin{aligned}
\partial_q(B^q([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}])) =& \partial_q([b^q, \nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}]) \\
=& [\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}] - B^q(\partial_{q-1}([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{q-1}])) \\
Sd([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]) =& B^q(Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q])) \\
\partial_q \cdot Sd([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]) =& Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]) \\
& - B^q\left(\partial_{q-1} \cdot Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q])\right).
\end{aligned}$$

对于0维线性单形$[\nu_0]$, $Sd([\nu_0]) = [\nu_0]$, 因而

$$Sd = 1 : S_0(X) \longrightarrow S_0(X).$$

对于1维线性单形$[\nu_0,\nu_1]$

$$\begin{aligned}\partial_1\cdot Sd([\nu_0,\nu_1]) =&Sd\cdot\partial_1([\nu_0,\nu_1]) - B^1(\partial_0\cdot Sd\cdot\partial_1([\nu_0,\nu_1]))\\ =&Sd\cdot\partial_1([\nu_0,\nu_1]).\end{aligned}$$

归纳假设对于$q-1$维线性单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}]$,

$$\partial_{q-1}\cdot Sd([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}]) = Sd\cdot\partial_{q-1}([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}])$$

成立. 则对q维线性单形

$$\begin{aligned}&\partial_q\cdot Sd([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\\ =&Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]) - B^q\left(\partial_{q-1}\cdot Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right)\\ =&Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]) - B^q\left(Sd\cdot\partial_{q-1}\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right)\\ =&Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]).\end{aligned}$$

对于q维奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$, $Sd(\sigma)=\sigma_\sharp(Sd([e_0,e_1,\cdots,e_q]))$. 因而

$$\partial_q\cdot Sd(\sigma)=\sigma_\sharp(\partial_q\cdot Sd([e_0,e_1,\cdots,e_q])) = Sd\cdot\partial_q(\sigma).$$

2) 下面我们构作从Sd到单位映射的链同伦$T_q: S_q(X)\to S_{q+1}(X)$

$$\begin{tikzcd}\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "1-" ', "Sd"] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "1-" ', "Sd"] \arrow[dl, "T_q" '] & S_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "1-" ', "Sd"] \arrow[dl, "T_{q-1}" '] & \cdots\\ \cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}" '] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q" '] & S_{q-1}(X) \arrow[r] & \cdots\end{tikzcd}$$

0维单形$[\nu_0]$的重心是$b^0=[\nu_0]$. 对于0维线性单形$[e_0]\to[\nu_0]$ 定义$T_0([\nu_0])$为单形$[\nu_0]$中的1维常值线性单形

$$T_0([\nu_0])=[\nu_0,\nu_0]\subset[\nu_0] \quad \text{即:} \quad T_0([\nu_0]):[e_0,e_1]\longrightarrow[\nu_0,\nu_0]$$

记为$T_0([\nu_0])=B^0([\nu_0])$.
对于0维奇异单形$\sigma:\Delta^0\to X$, 定义

$$T_0(\sigma)=\sigma_\sharp(T_0([e_0]))=\sigma\cdot(T_0([e_0])).$$

此时

$$\partial_1\cdot T_0(\sigma\cdot[e_0])=\sigma\cdot\partial_1([e_0,e_0]=\sigma\cdot([e_0]-[e_0])=0=(1-Sd)(\sigma\cdot[e_0]).$$

归纳的假设对于$\leqslant q-1$维线性单形, $T_{q-1}([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}])$ 已经给定且满足

$$(1-Sd)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}])=(\partial_q\cdot T_{q-1}+T_{q-2}\cdot\partial_{q-1})([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}]).$$

对于q维单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$, 记他的重心为$b^q$. 对于线性单形$[e_0,e_1,\cdots,e_q]\to[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$定义

$$T_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])=B^q\left((1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right).$$

由于$\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])$是一些$q-1$维线性单形的线性组合,

$$\begin{aligned}&(1-Sd)(\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]))\\=&(\partial_q\cdot T_{q-1}-T_{q-2}\cdot\partial_{q-1})(\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{q-1}]))\\=&\partial_q\cdot T_{q-1}\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\\=&\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])-\partial_q\cdot T_{q-1}\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

由此知

$$\begin{aligned}&\partial_{q+1}\cdot T_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\\=&\partial_{q+1}\cdot B^q\left((1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right)\\=&(1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\\&-B^q\left(\partial_q\cdot(1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right)\\=&(1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\\&-B^q\left(Sd\cdot\partial_q([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])\right) && \text{由(3.5.4)}\\=&(1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])-Sd([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]).\end{aligned}$$

因而对于q维线性单形

$$(1-Sd)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])=(\partial_{q+1}\cdot T_q+T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]).$$

注意到b^q是几何单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$的重心, $(1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q])$是一些$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$中的线性单形的线性组合. 因而

$$B^q((1-T_{q-1}\cdot\partial_q)([\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]))$$

是一些从Δ^{q+1}映射到$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$的线性单形的线性组合. 对于$q$维奇异单形$\sigma:[e_0,e_1,\cdots,e_q]\to X$ 定义

$$Sd(\sigma)=\sigma_\sharp(Sd([e_0,e_1,\cdots,e_q]))=\sigma\cdot(Sd([e_0,e_1,\cdots,e_q]))$$

他满足

$$\begin{aligned}(1-Sd)(\sigma)=&\sigma_\sharp((1-Sd)([e_0,e_1,\cdots,e_q]))\\=&\sigma_\sharp((\partial_{q+1}\cdot T_q+T_{q-1}\cdot\partial_q)([e_0,e_1,\cdots,e_q]))\\=&(\partial_{q+1}\cdot T_q+T_{q-1}\cdot\partial_q)(\sigma).\end{aligned}$$

有了重心重分的概念后我们来证明切除定理:

由于U的闭包包含在A的内部$\overline{U}\subset\mathring{A}$, $\{X\setminus\overline{U},\mathring{A}\}$构成$X$的一个开覆盖. 对任何奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$, 存在Lebesgue数$\varepsilon>0$ 使得对任何$x,y\in\Delta^q$, 当$\rho(x,y)<\varepsilon$时$\sigma(x),\sigma(y)$同在$X\setminus\overline{U}$中或同在$\mathring{A}$中.

对于$\mathbb{R}^\infty$中的单形$[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$, 设其直径是$\rho$, $[\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_q]$的重心重分中每一项$[b^q,\cdots,b^1,\nu_{i_0}]$的直径$\leqslant\frac{q}{q+1}\rho$. 对每一个$[b^q,\cdots,b^1,\nu_{i_0}]$再做重心重

分, 其每一项的直径$\leqslant \left(\frac{q}{q+1}\right)^2\rho$. 因而对于线性单形$[e_0,e_1,\cdots,e_q]$存在$m$使得对$[e_0,e_1,\cdots,e_q]$做$m$次重心重分后

$$Sd^m([e_0,e_1,\cdots,e_q]) = \sum \pm[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$$

中每一项$[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$的直径小于$\varepsilon$. 奇异单形$\sigma$做$m$次重心重分后

$$Sd^m(\sigma) = \sum \pm\sigma\cdot[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$$

中每一项$\sigma\cdot[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$ 的像同在$X\setminus\overline{U}$中或同在$\mathring{A}$中.

设$z=\sum n_i\sigma_i$是$S_q(X,A)$中的相对闭链, 由于是有限个奇异单形的线性组合, 存在m使得对z做m次重心重分后

$$Sd^m(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i(\sum \pm\sigma_i\cdot[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q])$$

中的每一项$\sigma_i\cdot[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$的像同在$X\setminus\overline{U}$中或同在$\mathring{A}$中.

由

$$\begin{aligned}
1-Sd =&\partial_{q+1}\cdot T_q + T_{q-1}\cdot\partial_q\\
Sd-Sd^2 =&Sd\cdot\partial_{q+1}\cdot T_q + Sd\cdot T_{q-1}\cdot\partial_q\\
=&\partial_{q+1}\cdot(Sd\cdot T_q) + (Sd\cdot T_{q-1})\cdot\partial_q\\
&\cdots\\
Sd^{m-1}-Sd^m =&\partial_{q+1}\cdot(Sd^{m-1}\cdot T_q) + (Sd^{m-1}\cdot T_{q-1})\cdot\partial_q
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
&1-Sd^m\\
=&\partial_{q+1}\cdot(1+Sd+\cdots+Sd^{m-1})\cdot T_q + (1+Sd+\cdots+Sd^m)\cdot T_{q-1}\cdot\partial_q.
\end{aligned}$$

Sd^m与单位映射链同伦, z与$Sd^m(z)$相差一个相对边缘. 在相对同调群中

$$[z] = [Sd^m(z)] = [Sd^m(\sum n_i\sigma_i)] \in H_q(X,A).$$

由于$Sd^m(\sum n_i\sigma_i)$中的每一项$\sigma_i\cdot[\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_q]$的像同在$X\setminus\overline{U}$中或同在$\mathring{A}$中. 在消去像在$A$中的奇异单形后我们认为$Sd^m(\sum n_i\sigma_i)$是$X\setminus U$中的奇异单形的线性组合, 他是$S_q(X\setminus U, A\setminus U)$中的相对闭链. 存在相对同调类$[Sd^m(z)]\in H_q(X\setminus U, A\setminus U)$使得$j_*[Sd^m(z)]=[z]$. $j_*: H_q(X\setminus U, A\setminus U)\to H_q(X,A)$ 是满同态.

假设有相对同调类$[z]\in H_q(X\setminus U, A\setminus U)$使得$j_*([z])=0\in H_q(X,A)$, 即存在$x=\sum m_j\tau_j\in S_{q+1}(X)$使得

$$\partial_{q+1}(x) = \partial_{q+1}(\sum m_j\tau_j) = z + y_A$$

其中y_A是$S_q(A)$中的奇异链. 同样对x做重心重分并将$Sd^m(x)$表示成$x_{X\setminus U}+x_A$, 其中$x_{X\setminus U}$是$X\setminus U$中的奇异链, x_A是A中的奇异链. 则

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}\cdot Sd^m(x) =&\partial_{q+1}(x_{X\setminus U}+x_A)\\
=&Sd^m(z)+Sd^m(y_A)
\end{aligned}$$

同样$Sd^m : S_q(X\setminus U) \to S_q(X\setminus U)$也与单位映射链同伦. $Sd^m(z)$与z相差$S_q(X\setminus U, A\setminus U)$中的一个相对边缘

$$Sd^m(z) = z + \partial_{q+1}(x_1) + y_1$$

其中$x_1 \in S_{q+1}(X\setminus U)$, $y_1 \in S_q(A\setminus U)$. 因而

$$\partial_{q+1}(x_{X\setminus U} - x_1) = z + y_1 + (Sd^m(y_A) - \partial_{q+1}(x_A)).$$

注意到$x_{X\setminus U}, x_1, z, y_1$都是$X\setminus U$中的奇异链, y_A, x_A是A中的奇异链. $(Sd^m(y_A) - \partial_{q+1}(x_A)$一定是$A\cap(X\setminus U) = A\setminus U$中的奇异链. $[z] = 0 \in H_q(X\setminus U, A\setminus U)$, j_*是单同态.

§3.5 习题

1 记ΣX为拓扑空间X的双角锥, 试仿照例1的方法证明: 当$q > 1$时, $H_{q-1}(X) \cong H_q(\Sigma X)$.

2 设$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$是一个线性单形,

$$Sd([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]) = \sum \pm[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}],$$

$[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}]$是$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$ 的重心重分中的一项. 由定义知b^q是几何单形$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$的重心.

试用归纳法证明: 线性单形$[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}]$中的第$r+1$个顶点$b^r$ 是几何单形$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$ 的某个r维面$[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_r}]$的重心, 而第$r$个顶点$b^{r-1}$是$[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_r}]$的$r-1$维面$[\nu_{i_0}, \cdots, \widehat{\nu}_{i_j}, \cdots, \nu_{i_r}]$的重心.

因而$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$的重心重分中的一项也可以记为

$$(\nu_{i_0}) \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}) \subset \cdots \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_r}) \subset \cdots \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_q})$$

其中$(\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_r})$代表单形$[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \cdots, \nu_{i_r}]$的重心.

3 设$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$是$\mathbb{R}^\infty$中的一个单形, 他的直径

$$\begin{aligned}\rho([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]) =& max\{\rho(x,y) | x, y \in [\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]\}\\ =& max\{\rho(\nu_i, \nu_j)\}.\end{aligned}$$

设$[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}]$是$[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q]$的重心重分中的一项, 证明: $[b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}]$的直径

$$\rho([b^q, b^{q-1}, \cdots, b^1, \nu_{i_0}]) \leqslant \frac{q}{q+1}\rho([\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q])$$

4 试利用§3.4例6中的结论及例1中的结论给出$H_2(S^2) \cong H_2(S^2, E^2_-) \cong \mathbb{Z}$的生成元.

5 记$S^m \vee S^n$为两个球面的一点并,

1), 利用切除定理求$(S^m \vee S^n, S^n)$的相对同调群$H_q(S^m \vee S^n, S^n)$

2), 求$S^m \vee S^n$的各维同调群$H_q(S^1 \vee S^1)$.

6 设X, Y是两个道路连通的拓扑空间, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$都有可缩的邻域$x_0 \in U \subset X$, $y_0 \in V \subset Y$. 证明: 当$q > 0$时

$$H_q(X \vee Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y)$$

§3.6 Mayer-Vietoris序列

利用同伦不变性、正合序列、切除定理计算拓扑空间的同调群是代数拓扑中的重要方法. 本节我们介绍另外一个重要的计算空间同调群的方法–Mayer-Vietoris序列, 他可以看做是: 将拓扑空间X分成两个子空间X_1, X_2的并, 通过子空间X_1, X_2及$X_1 \cap X_2$的同调群计算X的同调群的方法.

设X_1, X_2是空间X的两个开集满足$X_1 \cup X_2 = X$. 令$U = X \setminus X_1 = X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$, 则$U$是$X$中的闭集$\overline{U} = U \subset X_2 = \overset{\circ}{X}_2$.

$$j : (X \setminus U, X_2 \setminus U) = (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X, X_2)$$

导出切除同构

$$j_{1*} : H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_q(X, X_2).$$

同理易证

$$j_{2*} : H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_q(X, X_1)$$

也是切除同构.

定义3.6.1 称(X, X_1, X_2)是一个正合三元组, 如果$X_1 \cap X_2 = X$且

$$\iota_1 : H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_q(X, X_2)$$
$$\iota_2 : H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_q(X, X_1)$$

都是切除同构.

第四章 一般系数同调群

§4.1 链复形及其同调群

在第三章 奇异同调群中, 定义奇异同调群的关键是对任何拓扑空间X找到一簇交换群$S_q(X)$ 和群同态$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$满足$\partial_q\partial_{q-1} = 0$. 这样拓扑空间的同调群$H_q(X) = Ker\partial_q/Im\partial_{q+1}$. 将它们抽象出来就是链复形与上链复形的概念.

为统一记号, 在以下几章中我们总假定R是一个交换幺环, 比如$R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/m$等. 首先我们来复习一下抽象代数中关于模的一些基本概念和结论.

定义4.1.1 设R是一个交换幺环, M是一个Abel群. 如果存在映射$\varphi : R \times M \to M$(对于$r \in R$, $a \in M$, $\varphi(r, a)$记为$r \cdot a$称为数乘)使得对任何$r_1, r_2 \in R$, $a, b \in M$满足:

1), $(r_1 + r_2) \cdot a = r_1 \cdot a + r_2 \cdot a$,

2), $(r_1r_2) \cdot a = r_1 \cdot (r_2 \cdot a)$,

3), $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$,

4), $1 \cdot a = a$

则称M是一个R模.

回忆高等代数里线性空间V的概念我们会注意到: 线性空间的定义中的前4条是在讲V是一个Abel群, 而后4条实际就是模的概念中的1–4条. 因而: 当环R是域时, 域R上的模就是域R上的线性空间.

例1 设M是一个Abel群. 自然地定义数乘$\varphi : \mathbb{Z} \times M \to M$为: 对于$n \in \mathbb{Z}, a \in M$

1, 当$n > 0$时$n \cdot a = a + a + \cdots + a$为$n$个$a$的和,

2, 当$n < 0$时$n \cdot a = -a - a - \cdots - a$.

因而任何Abel群都有自然的$\mathbb{Z}$模结构.

约定: 交换幺环R由加法结构给出自然的$\mathbb{Z}$模结构.

同时我们也应当注意到: 对于一般的环R, 一般的Abel群M不一定有R模结构. 比如: $\mathbb{Z}$上就没有$\mathbb{Z}/2$模结构.

定义4.1.2 设R是一个交换幺环, $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$是一簇R模. 如果对每个$q \in \mathbb{Z}$都有R-模同态$\partial_q : C_q \to C_{q-1}$使得$\partial_q \cdot \partial_{q+1} = 0$, 则称$\{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$连同模同态$\partial_q$为一个链复形, 记为$C = \{C_q,\ \partial_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$;

$$C : \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_q} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \longrightarrow \cdots$$

如果同态映射的方向相反, 即$\delta_q : C_q \to C_{q+1}$且满足$\delta_q \cdot \delta_{q-1} = 0$, 则称$C = \{C_q,\ \delta_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$为一个上链复形.

$$C : \cdots \longleftarrow C_{q+1} \xleftarrow{\delta_q} C_q \xleftarrow{\delta_{q-1}} C_{q-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_1 \xleftarrow{\delta_0} C_0 \xleftarrow{\delta_{-1}} C_{-1} \longleftarrow \cdots$$

一般情况下我们总假定当$i<0$时$C_i=0$, 这样的（上）链复形又称为连通的（上）链复形.

链复形和上链复形的性质基本是一致的, 所不同的只是映射的方向. 在本章中我们只讨论链复形. 请读者自己补上上链复形相应的结论.

定义4.1.3 设$C=\{C_q,\partial_q\}$是一个链复形

$$C:\cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{\partial_q} C_q\xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\xrightarrow{\partial_1} C_0\xrightarrow{\partial_0} C_{-1}\longrightarrow\cdots$$

定义C_q的子群

$\mathbb{Z}_q(C)=Ker\partial_q$为链复形$C$的$q$维闭链群.

$\mathbb{B}_q(C)=Im\partial_{q+1}$为链复形$C$的$q$维边缘链群.

定义商群$H_q(C)=\mathbb{Z}_q(C)/\mathbb{B}_q(C)$为链复形$C$的$q$维同调群.

$\mathbb{Z}_q(C)$当中的一个元素z称为链复形C中的一个闭链, 它满足$\partial_q(z)=0$, $\mathbb{B}_q(C)$中的一个元素b称为链复形C的一个边缘, 它是C_{q+1}中某个元素x在边缘同态下的像$b=\partial_{q+1}(x)$. 同调群$H_q(C)$当中的元素$[z]$是一个等价类, 称为同调类, z是这个同调类当中的一个代表元. 当两个闭链z,z'相差一个边缘时即: $z-z'=\partial_{q+1}(x)$时称这两个闭链z与z'是同调的, 此时等价类$[z]=[z']$.

例2 拓扑空间X的奇异链群$S_q(X)=\{\sum_i k_i\sigma_i|k_i\in\mathbb{Z},\sigma_i:\Delta^q\to X\}$ 连同边缘同态$\partial_q:S_q(X)\to S_{q-1}(X)$构成一个链复形, 记为$S(X)=\{S_q(X),\partial_q\}$, 称为拓扑空间$X$的奇异链复形. $S(X)$的同调群即X的(整系数非约化)奇异同调群.

定义4.1.4 设$C=\{C_q,\partial_q\}$，$D=\{D_q,\partial'_q\}$是环R上的两个链复形. 如果对每个$q\in\mathbb{Z}$都存在R模同态$f_q:C_q\to D_q$, 它们满足$\partial'_q\cdot f_q=f_{q-1}\cdot\partial_q$, 则称$f=\{f_q\}_{q\in\mathbb{X}}$为链复形$C$到$D$的一个链映射, 记为$f:C\to D$, 即有以下同态的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"'] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"'] & D_{q-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

引理4.1.1 链映射$f:C\to D$导出闭链群, 边缘链群的同态

$$f_\#:\mathbb{Z}_q(C)\to\mathbb{Z}_q(D),\qquad\qquad f_\#:\mathbb{B}_q(C)\to\mathbb{B}_q(D)$$

和同调群的同态$f_*:H_q(C)\to H_q(D)$.

证明: 由$\partial'_q\cdot f_q=\partial_q\cdot f_{q-1}$易知$f_q(\mathbb{Z}_nqC))\subset\mathbb{Z}_q(D)$, $f_q(\mathbb{B}_q(C))\subset\mathbb{B}_q(D)$. 闭链群, 边缘链群同态$f_\#$为$f_q$分别在闭链群, 边缘链群$\mathbb{Z}_q(C)$, $\mathbb{B}_q(C)$上的限制. 而同调群同态$f_*:H_q(C)\to H_q(D)$为$f_\#$导出的商群同态, 即: 对于$H_q(C)$的同调类$[z]$, $f_*([z])=[f_q(z)]$

引理4.1.2 如果$f:C\to D$, $g:D\to E$都是链映射, 则$g\cdot f=\{g_q\cdot f_q\}_{q\in\mathbb{Z}}:C\to D\to E$也是链映射. 导出的同调群的同态满足$(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_*$, 即有同

调群同态交换图

$$\begin{tikzcd} H_q(C) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\cdot f)_*"'] & H_q(D) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(E). \end{tikzcd}$$

定义4.1.5 设$f, g : C \to D$都是从C到D的链映射, 如果存在一簇同态$H = \{H_q : C_q \to D_{q+1}\}_{q\in\mathbb{Z}}$使得对任何$q \in \mathbb{Z}$

$$f_q - g_q = \partial_{q+1} \cdot H_q + H_{q-1} \cdot \partial_q,$$

则称链映射f链同伦与g, 记为$f \overset{H}{\simeq} g$, 即有如下的交换图:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}-g_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q-g_q"] \arrow[dl, "H_q"'] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}-g_{q-1}"] \arrow[dl, "H_{q-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & D_q \arrow[r, "\partial_q"'] & D_{q-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

对于链复形C, D如果存在链映射$f : C \to D$和$g : D \to C$使得$g \cdot f \overset{H}{\simeq} 1_C$，$f \cdot g \overset{G}{\simeq} 1_D$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\simeq 1_C"'] & D \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\simeq 1_D"'] & C \arrow[d, "f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

则称链复形C与D是同伦等价的, 记为$f : C \xrightarrow{\simeq} D$.

引理4.1.3 对于链复形C, D

(1) 如果$f \overset{H}{\simeq} g : C \to D$是链同伦的两个链映射, 则它们导出的同调群的同态相同$f_* = g_* : H_q(C) \to H_q(D)$.

(2) 如果$f : C \xrightarrow{\simeq} D$是链同伦等价的两个链复形, 则它们的同调群同构$f_* : H_q(C) \xrightarrow{\cong} H_q(D)$且$f$导出同调群的同构映射.

证明 (1) 如果$f \overset{H}{\simeq} g : C \to D$是链同伦的两个链映射. 对任何同调类$[z] \in H_q(C)$, 由定义知

$$\begin{aligned} &f_*([z]) - g_*([z]) = [f_q(z) - g_q(z)] = [(f_q - g_q)(z)] \\ =&[H_{q-1}\partial_q(z) + \partial_{q+1}H_q(z)] = [\partial_{q+1}H_q(z)] = 0, \end{aligned}$$

其中由于z是闭链, $\partial_q(z) = 0$,$f_q(z) - g_q(z)$是一个边缘.

(2) 设$f: C \xrightarrow{\simeq} D$的链同伦逆为$g: D \longrightarrow C$, 即$g \cdot f \overset{H}{\simeq} id_C$, $f \cdot g \overset{G}{\simeq} id_D$. 则$g_* \cdot f_* = 1$，$f_* \cdot g_* = 1$

$$\begin{tikzcd} H_q(C) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_q(D) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_q(D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_q(C) \arrow[d, "f_*"] \\ & H_q(D), \end{tikzcd}$$

$f_*: H_q(C) \xrightarrow{\simeq} H_q(D)$是同构.

例3 设$S(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$, $S(Y) = \{S_q(Y), \partial_q\}$分别是拓扑空间$X, Y$的奇异链复形. 如$f: X \to Y$是连续映射, 则$f$导出链映射$f_\#: S(X) \to S(y)$. 而链映射$f_\#$诱导出同调群的同态$f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$.

如果$f \overset{F}{\simeq} g: X \to Y$ 是同伦等价的两个映射. 通过伦移$G: X \times I \to Y$构作出了$f_\#$到$g_\#$的链同伦$f_\# \overset{H}{\simeq} g_\#$, $H = \{H_q : S_q(X) \to S_{q+1}(Y)\}$. 因而$f_* = g_*: H_q(X) \to H_q(Y)$.

更进一步, 如果$f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ 是空间的同伦等价映射, $g: Y \to X$是f的同伦逆映射. 则f导出同调群的同构$f_*: H_q(X) \xrightarrow{\simeq} H_q(Y)$.

定义4.1.5 设C, D, E是三个链复形, $f: C \to D$, $g: D \to E$是链映射. 称

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

为链复形的短正合序列, 如果对任何$q \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow C_q \xrightarrow{f_q} D_q \xrightarrow{g_q} E_q \longrightarrow 0$$

都是R-模的短正合序列, 即有以下的交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"'] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial''_q"'] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"'] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"'] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"'] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\partial''_1"'] & D_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & D_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

使其中的每一行都是正合序列.

引理4.1.4 链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

证明: 这个引理的证明很长, 证明的方法被称为"追图法", 即根据交换图追到你想要的结果. 在此, 只给出联系同态$\partial : H_q(E) \to H_{q-1}(C)$的构做办法, 其余部分请读者自行证明.

对于$H_q(E)$中的任何一个同调类$[e_q]$, 其中$e_q \in E_q$是一个闭链. 这时你的任务是从E_q中的元素e_q, 按照交换图追到C_{q-1}当中的闭链c_{q-1}.

首先, 由于$g_q : D_q \to E_q$是满射, 我们可以找到D_q中的元素$d_q \in D_q$使得$g_q(d_q) = e_q$(先追到了D_q). 将D_q中的元素d_q用边缘同态映到D_{q-1}, 此时还看不出$\partial_q(d_q)$在D_{q-1}中有什么特点. 再将$\partial_q(d_q)$通过g_{q-1} 映射到E_{q-1}中, 会发现: 由于图表可换

$$g_{q-1}(\partial_q(d_q)) = \partial'_q \cdot g_q(d_q) = \partial'_q(e_q) = 0.$$

因而$\partial_q(d_q)$在同态g_{q-1}的核里. 而序列在D_n处正合, $Ker g_{q-1} = Im f_{q-1}$, $\partial_q(d_q)$也在f_{q-1}的像里, 因而存在$c_{q-1} \in C_q$使得$f_{q-1}(c_{q-1}) = \partial_q(d_q)$. 这样我们就追到了$C_{q-1}$中的元素$c_{q-1}$. 以下:

1), 证明c_{q-1}是C_{q-1}中的闭链并定义$\partial([z]) = [c_{q-1}]$为$c_{q-1}$所代表的等价类.

2), 证明c_{q-1}所代表的等价类$[c_{q-1}]$与元素d_q的选取无关.

3), 证明$[c_{q-1}]$与同调类$[e_q]$中代表元e_q的选取无关, 因而这个定义是合理的.

4), 完成序列在各处都正合的证明.

例4 设(X,A)是一对空间偶, 相对奇异链群$S_q(X,A) = S_q(X)/S_q(A)$. 因而有链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{j} S(X,A) \longrightarrow 0,$$

它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i} H_q(X) \xrightarrow{j} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

例5 设$x_0 \in A \subset X$是X的基点. 相对链复形$S(X,x_0) = \{S_q(X)/S_q(x_0), \partial_q\}$的同调群称为$X$的约化同调群, 记为$\widetilde{H}_q(X)$

$$\widetilde{H}_q(X) = H_q(S(X,x_0)) = H_q(X,x_0).$$

容易验证, $H_0(X) = \widetilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z}$, 而当$q > 0$时$\widetilde{H}_q(X) \cong H_q(X)$.

由链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A,x_0) \xrightarrow{i} S(X,x_0) \xrightarrow{j} S(X,A) \longrightarrow 0$$

导出约化同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{i} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{j} H_q(X,A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

在本节的最后我们用链复形, 链映射, 链同伦的语言给出Mayer-Vietoris序列和切除定理一个证明.

设X_1, X_2是X的两个开子集满足$X_1 \cup X_2 = X$并且记$X_1 \cap X_2 = V$. 令

$$S_q(X_1) + S_q(X_2) = \left\{ \sum_i k_i \sigma_i | k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i(\Delta^q) \subset X_1 \text{或} \sigma_i(\Delta^q) \subset X_2 \right\}$$

为X_1及X_2中的奇异单形生成的自由Abel群, 即要求奇异单形$\sigma_i : \Delta^q \to X$ 或者完全映射到X_1中, 或者完全映射到X_2中. 链复形$S(X_i)$的边缘同态∂_q诱导出边缘同态

$$\partial_q : S_q(X_1) + S_q(X_2) \longrightarrow S_{q-1}(X_1) + S_{q-1}(X)$$

使得$S(X_1)+S(X_2)=\{S_q(X_1)+S_q(X_2),\ \partial_q\}$构成一个链复形, 并且有自然链映射

$$\begin{aligned} i_1:&S(X_1)\longrightarrow S(X_1)+S(X_2), & i_2:&S(X_2)\longrightarrow S(X_1)+S(X_2)\\ j_1:&S(V)\longrightarrow S(X_1), & j_2:&S(V)\longrightarrow S(X_2)\\ i:&S(X_1)+S(X_2)\longrightarrow S(X). \end{aligned}$$

令

$$S_q(X_1)\oplus S_q(X_2)=\{(x_1,x_2)|其中x_1\in S_q(X_1),\ x_2\in S_q(X_2)\}$$

为链群$S_q(X_1)$与$S_q(X_2)$的直和, $S_q(X_1)\oplus S_q(X_2)$ 中的元素可以记为(x_1,x_2). 定义边缘同态$\partial_q:S_q(X_1)\oplus S_q(X_2)\to S_{q-1}(X_1)\oplus S_{q-1}(X_2)$为: 对任何$(x_1,x_2)\in S_q(X_1)\oplus S_q(X_2)$

$$\partial_n(x_1,x_2)=(\partial_q(x_1),\partial_q(x_2)).$$

显然$S(X_1)\oplus S(X_2)=\{S_q(X_1)\oplus S_q(X_2),\partial_q\}$构成一个链复形且

$$H_q(S(X_1)\oplus S(X_2))=H_q(X_1)\oplus H_q(X_2).$$

定义链映射$i_1-i_2:S(X_1)\oplus S(X_2)\to S(X_1)+S(X_2)$为: 对$(x_1,x_2)\in S_n(X_1)\oplus S_n(X_2)$, $(i_1-i_2)(x_1,x_2)=i_1(x_1)-i_2(x_2)$. 容易看出: 如果

$$(i_1-i_2)(x_1,x_2)=i_1(x_1)-i_2(x_2)=0$$

则$x_1=x_2$. 而由$x_1\in S_q(X_1)$且$x_2\in S_q(X_2)$知

$$x_1\in S_q(X_1)\cap S_q(X_2)=S_q(X_1\cap X_2)=S_q(V)$$

即i_1-i_2的核为

$$S_q(V)=\{(x_1,x_1)|x_1\in S_q(V)\}.$$

由此得到链复形的短正合序列

$$0\longrightarrow S(V)\xrightarrow{(j_1,j_2)}S(X_1)\oplus S(X_2)\xrightarrow{i_1-i_2}S(X_1)+S(X_2)\longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

定理4.1.5 $i:S(X_1)+S(X_2)\xrightarrow{\simeq}S(X)$ 导出同调群的同构, 因而(4.1)导出长正合序列(Mayer-Vietoris序列).

$$\cdots\longrightarrow H_q(V)\xrightarrow{(j_1,j_2)}H_q(X_1)\oplus H_q(X_2)\xrightarrow{i_1-i_2}H_q(X)\xrightarrow{\varphi}H_{q-1}(V)\longrightarrow\cdots$$

证明 切除定理证明的主要思路是: 构做了重心重分链映射$Sd:S(X)\longrightarrow S(X)$ 使得Sd与单位映射链1同伦等价. 重心重分链映射满足: 任何奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$可经过有限次重心重分Sd^r使得$Sd^r(\sigma)=\sum k_i\sigma_i$中的每个奇异单形$\sigma_i:\Delta^q\to X$或者$\sigma_i(\Delta^q)\subset X_1$或者$\sigma_i(\Delta^q)\subset X_2$.

下面我们利用这一结果证明i导出的同调群同态$i_*:H_q(S(X_1)+S(X_2))\to H_q(X)$即是单射又是满射.

对于$H_q(X)$中任何同调类$[z]$，其代表元$z=\sum k_i\sigma_i$. 由于是有限个奇异单形的线性组合, 存在r使得$z'=Sd^r(z)=\sum k_iSd^r(\sigma_i)=\sum m_j\sigma'_j$中每个奇异

单形σ_j'满足$\sigma_j'(\Delta^q)\subset X_1$或$\sigma_j'(\Delta^q)\subset X_2$. 由$Sd\overset{H}{\simeq}1$:知

$$\begin{aligned}
1-Sd =&\partial_{q+1}\cdot H_q+H_{q-1}\cdot\partial_q\\
Sd-Sd^2 =&\partial_{q+1}\cdot SdH_q+SdH_{q-1}\cdot\partial_q\\
&\vdots\\
Sd^{r-1}-Sd^r =&\partial_{q+1}\cdot Sd^{r-1}H_q+Sd^{r-1}H_{q-1}\cdot\partial_q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z-z'=(1-Sd^r)(z)=&\partial_{q+1}(H_q+SdH_q+\cdots+Sd^{r-1}H_q)(z)\\
&+(H_{q-1}+SdH_{q-1}+\cdots+Sd^{r-1}H_{q-1})\partial_q(z)\\
=&\partial_{q+1}(H_n+SdH_q+\cdots+Sd^{r-1}H_q)(z)
\end{aligned}$$

z与z'相差一个边缘. 因而我们可以选同调类$[z]$的代表元z', 而$z'\in S_q(X_1)+S_q(X_2)$. 存在$H_q(S(X_1)+S(X_2))$中的同调类$[z']$使得$i_*([z'])=[z']=[z]$. i_*是满同态.

对于$H_q(S(X_1)+S(X_2))$中的同调类$[z]$，其代表元为z，如果$i_*([z])=0\in H_q(X)$；即存在$x=\sum k_i\tau_i\in S_{q+1}(X)$使得$\partial_{q+1}(x)=z$. 注意, 此时的$q+1$维奇异单形$\tau_i$是$X$中的奇异单形, 不一定满足$\tau_i(\Delta^{q+1})\subset X_1$或$\tau_i(\Delta^{q+1})\subset X_2$. 同样存在$r$使得$Sd^r(x)=\sum m_j\tau_j'$中的每个$\tau_j'$或者是$X_1$中的或者是$X_2$中的$q+1$维奇异单形. 这样由

$$\begin{aligned}
z=&Sd^r(z)+\partial_{q+1}(H_q+SdH_q+\cdots+Sd^{r-1}H_q)(z)\\
=&Sd^r\partial_{q+1}(x)+\partial_{q+1}(H_q+SdH_q+\cdots+Sd^{r-1}H_q)(z)\\
=&\partial_{q+1}(Sd^r(x)+(H_q+SdH_q+\cdots+Sd^{r-1}H_q)(z))
\end{aligned}$$

知: z在$S_q(X_1)+S_q(X_2)$中是边缘.

注 作者曾试图证明$i:S(X_1)+S(X_2)\xrightarrow{\simeq}S(X)$ 是链复形的链同伦等价, 并找到了链映射$\kappa:S(x)\longrightarrow S(X_1)+S(X_2)$使得$\kappa\cdot i=1$

$$\begin{tikzcd}
S(X_1)+S(X_2) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "1"'] & S(X) \arrow[d, "\kappa"] \\
 & S(X_1)+S(X_2)
\end{tikzcd}$$

但找不到从链映射$i\cdot\kappa:S(X)\to S(X)$到1的链同伦$G_q:S_q(X)\to S_{q+1}(X)$.

在此, 读者可以证明: 如果C,D都是自由链复形(每个C_q,D_q都是自由R-模), 链映射$f:C\to D$ 导出同调群的同构, 则f是链复形的同伦等价映射.

定理4.1.6(切除定理) 设$A\subset X$是拓扑空间X的一个开集, $V\subset A$是X的一个闭集. 则对任何$q>0$

$$j:H_q(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow H_q(X,A)$$

是切除同构.

证明 记$X_1 = A$, $X_2 = X \setminus V$。则X_1, X_2是X的两个开集且$X_1 \cup X_2 = X$，$X_1 \cap X_2 = A \setminus V$ (见图4.1).

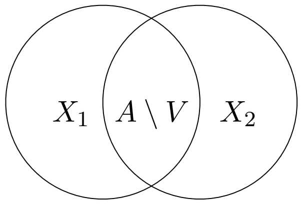


图4.1

考察以下链复形的短正合序列交换图和由链复形的短正合序列导出的同调群的长正合序列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S(X_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & S(X_1)+S(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & S(X_1)+S(X_2)/S(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S(X_1) \arrow[r] & S(X) \arrow[r] & S(X)/S(X_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
H_q(X_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H_q(X_1) \arrow[d] \\
H_q(S(X_1)+S(X_2)) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_q(X) \arrow[d] \\
H_q(S(X_1)+S(X_2)/S(X_1)) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & H_q(X, X_1) \arrow[d] \\
H_{q-1}(X_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H_{q-1}(X_1) \arrow[d] \\
H_{q-1}(S(X_1)+S(X_2)) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_{q-1}(X) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

已知$i : H_*(S(X_1)+S(X_2)) \longrightarrow H_*(X)$是同构, 由五项引理知

$$j : H_q(S(X_1)+S(X_2)/S(X_1)) \longrightarrow H_q(X, X_1)$$

是同构.

考察q维奇异链群$S_q(X_1)+S_q(X_2)/S_q(X_1)$中的生成元; $S_q(X_1)+S_q(X_2)$中的奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$或者全部映射到X_1中或者全部映射到X_2中, 而当$\sigma(\Delta^q)\subset X_1$时在$S_q(X_1)+S_q(X_2)/S_q(X_1)$中认为是零. 因此$S_q(X_1)+S_q(X_2)/S_q(X_1)$ 的生成元只剩下全部映射到X_2的奇异单形σ, 并且当$\sigma(\Delta^q)\subset X_1\cap X_2$ 时认为σ是零. 因而

$$S(X_1)+S(X_2)/S(X_1)\cong S(X_2)/S(X_1\cap X_2)=S(X_2,X_1\cap X_2),$$

即$j:H_q(X_2,X_1\cap X_2)\to H_q(X,X_1)$是同构. 由$X_2=X\setminus V$，$X_1=A$且$X_1\cap X_2=A\setminus V$知定理成立.

§4.1 习题

1 证明整数环$\mathbb{Z}$上不会有$\mathbb{Z}/2$-模结构.

2 设$M\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$为$\{x,y\}$生成的自由Abel群, $f:M\to M$ 为

$$f(x)=x+y,\qquad f(y)=x-y$$

的线性扩充. 证明: f不是满同态, $M/Imf\cong\mathbb{Z}/2$.

3 设$B\subset A$都是X的子空间, 证明有相对同调群的长正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_q(A,B)\xrightarrow{i}H_q(X,B)\xrightarrow{j}H_q(X,A)\xrightarrow{\delta}H_{q-1}(A,B)\longrightarrow\cdots$$

4 设X_1,X_2是X的开子空间, $X_1\cup X_2=X$且$B\subset X_1\cap X_2=A$. 证明有相对的Mayer-Vietoris序列

$$\cdots\longrightarrow H_q(A,B)\longrightarrow H_q(X_1,B)\oplus H_q(X_2,B)\longrightarrow H_q(X,B)\longrightarrow\cdots$$

5 设X_1,X_2,X_3及A都是X的开子集满足:

1) $X=X_1\cup X_2\cup X_3$.
2) $X_i\cap X_j=A$, $i\neq j$
3) X_1-A,X_2-A,X_3-A互不相交.

证明: $j_i:H_q(X_i,A)\to H_q(X,A)$都是单射且

$$H_q(X,A)=H_q(X_1,A)\oplus H_q(X_2,A)\oplus H_q(X_3,A).$$

6 完成定理4.1.4(正合序列)的证明.

§4.2 一般系数同调群

在第三章中我们讲到的奇异链复形, 奇异同调群被称作整系数非约化奇异同调群, 即系数环是整数环$\mathbb{Z}$. 在本章中我们将整数环$\mathbb{Z}$换成一般的交换幺环R 得到一般的R系数非约化奇异同调群.

设R是一个交换幺环. 令

$$S_q(X,R)=\{\sum r_i\sigma_i | r_i\in R,\ \sigma_i:\Delta^q\longrightarrow X\}$$

为X的所有q维奇异单形生成的自由R模. 定义R模同态$\partial_q : S_q(X,R)\to S_{q-1}(X,R)$为: 对任何$q$维奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$定义

$$\partial_q(\sigma)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma\cdot F^i$$

并在$S_q(X,R)$中做线性扩充, 其中$F^i:\Delta^{q-1}\to\Delta^q$为$\Delta^q$的第$i$个面映射. 易证:

$$\partial_{q+1}\cdot\partial_q=0:\qquad \begin{tikzcd} S_{q+1}(X,R) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[dr, "0"'] & S_q(X,R) \arrow[d, "\partial_q"] \\ & S_{q-1}(X,R) \end{tikzcd}$$

定义4.2.1 $S(X,R)=\{S_q(X,R),\partial_q\}_{q\geqslant 0}$是一个链复形, 称为拓扑空间$X$的$R$系数非约化奇异链复形

$$S(X,R):\cdots\longrightarrow S_{q+1}(X,R)\xrightarrow{\partial_{q+1}}S_q(X,R)\xrightarrow{\partial_q}S_{q-1}(X,R)\longrightarrow\cdots$$

$S(X,R)$的同调群$H_q(S(X,R))$称为X的q维R系数非约化奇异同调群, 简记为$H_q(X,R)$.

对于空间偶(X,A), 定义$S_q(X,A,R)=S_q(X,R)/S_q(A,R)$, ∂_q导出自然的边缘同态$\widetilde{\partial}_q:S_q(X,A,R)\to S_{q-1}(X,A,R)$. 链复形

$$S(X,A,R)=\{S_q(X,A,R),\widetilde{\partial}_q\}$$

的同调群称为(X,A)的R系数相对同调群, 记为$H_q(X,A,R)$.

注: 同样, 带基点$x_0\in X$空间的R系数约化同调群定义为链复形$S(X,x_0,R)$的同调群, 记为$\widetilde{H}_q(X,R)$.

在链复形$S(X,R)$的最后添加$S_{-1}(X,R)=R$得到链复形

$$\widetilde{S}(X,R):\cdots\longrightarrow S_q(X,R)\xrightarrow{\partial_q}S_{q-1}(X,R)\longrightarrow\cdots\longrightarrow S_0(X,R)\xrightarrow{\partial_0}R\longrightarrow 0.$$

其中$\partial_0:S_0(X,R)\to R$由: 对所有的0维奇异单形$x:\Delta^0\to X$, $\partial_0(x)=1$生成. $\widetilde{S}(X,R)$的同调群也是X的R系数约化同调群$\widetilde{H}_q(X,R)$.

和整系数同调群一个, 拓扑空间的R系数同调群同样有：

(1) 同伦不变性.

(2) 长正合序列.

(3) 切除定理.

读者可以参考第三章给出这三个定理的证明. 在此我们将利用链复形, 张量积和第三章的已知结果给出这三个定理的另一个证明.

定义4.2.2 设A, B都是R模. 定义它们的张量积$A\otimes_R B$为一个R模,

1. 生成元: $\{a\otimes b | a\in A, b\in B\}$,
2. 关系组: 对任何$a, a_1, a_2\in A$, $b, b_1, b_2\in B$及$r\in R$

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b,\\&a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2,\\&r\cdot a\otimes b=a\otimes r\cdot b.\end{aligned}$$

由张量积的定义易知: $A\otimes B$中的零元素为$0\otimes 0=0\otimes a=b\otimes 0$.

张量积$A\otimes B$中的元素记为$\sum_i a_1\otimes b_i$.

例1 任何Abel群都有自然的$\mathbb{Z}$模结构, 因而对任何Abel群A, B有张量积$A\otimes_{\mathbb{Z}} B$简记为$A\otimes B$.

例2 如A是一个Abel群, R是一个交换幺环. 将环R看成是一个Abel群, 有张量积$A\otimes R$.

在$A\otimes R$中定义R模结构: 对任何$r\in R$, $a\otimes r_1\in A\otimes R$,

$$r\cdot(a\otimes r_1)=a\otimes r\cdot r_1$$

使$A\otimes R$成为一个R模.

易证: $\mathbb{Z}\otimes R\cong R$.

如果A本身是一个R模, 则$A\otimes_R R\cong A$.

例3 $\mathbb{Z}/3\otimes\mathbb{Z}/2=0$, 这是因为: 对于$\mathbb{Z}/3\otimes\mathbb{Z}/2$ 中的生成元

$$\widetilde{1}\otimes\bar{1}=\widetilde{1}\otimes 3\cdot\bar{1}=3\cdot\widetilde{1}\otimes\bar{1}=\widetilde{0}\otimes\bar{1}=0.$$

一般地$\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n\cong\mathbb{Z}/(m,n)$其中$(m,n)$为$m$与$n$的最大公因数.

例4 设F是一个域, A, B都是域F上的模, 因而A, B是F上的线性空间. 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 分别是线性空间A, B的基. 则$A\otimes B$是域F上的$m\times n$维线性空间且

$$\{\alpha_i\otimes\beta_j | 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n\}$$

是$A\otimes B$的一组基.

命题4.2.1 R模同态$f: A\to A'$, $g: B\to B'$导出张量积的同态

$$f\otimes g: A\otimes B\to A'\otimes B'.$$

且对于另一对R模同态$f':A'\to A''$, $g':B'\to B''$

$$f'f\otimes g'g=(f'\otimes g')(f\otimes g):\qquad \begin{tikzcd} A\otimes B \arrow[r, "f\otimes g"] \arrow[dr, "f'f\otimes g'g"'] & A'\otimes g' \arrow[d, "f'\otimes g'"] \\ & A''\otimes B'' \end{tikzcd}$$

证明: 对于$A\otimes B$中的生成元$a\otimes b$定义$(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)$并做线性扩充. 由$f,g$是$R$模同态易知$f\otimes g$保持$A\otimes B$中的关系, 因而$f\otimes g$是$R$模同态.

命题4.2.2 R模的张量积满足:

(1) 交换同构$\tau:A\otimes B\longrightarrow B\otimes A$, $\tau(a\otimes b)=b\otimes a$.
(2) 如果$A=\oplus_i A_1$，则

$$(\oplus_i A_i)\otimes B\cong\oplus_i\,(A_i\otimes B),\qquad B\otimes(\oplus_i A_i)\cong\oplus_i\,(B\otimes A_i).$$

证明: 对于$A\otimes B$的生成元$a\otimes b$，定义$\tau(a\otimes b)=b\otimes a$并做线性扩充得到$R$模同构$\tau:A\otimes B\to B\otimes A$.

由直和的定义知(2)成立.

定理4.2.3 设$C=\{C_q,\partial_q\}$是整数环上的链复形(即每个C_q是Abel群), R是一个交换幺环. 则$C\otimes R=\{C_q\otimes R,\partial_q\otimes 1\}$是$R$上的链复形.

证明: 按例2, 对于Abel群C_q及交换幺环R, $C_q\otimes R$上有R模结构. 而$\partial_q\otimes 1:C_q\otimes R\to C_{q-1}\otimes R$还是$R$模同态. 由命题4.2.1知$(\partial_q\otimes 1)\cdot(\partial_{q+1}\otimes 1)=\partial_q\cdot\partial_{q+1}\otimes 1=0$. 所以$C\otimes R$是环$R$上的链复形.

例5 链复形$C=\{C_q,\partial_q\}$中每个$C_q=\mathbb{Z}$, 边缘同态∂_q为:
当$q=2k$是偶数时$\partial_{2k}=2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$为2倍映射.
当$n=2k+1$是奇数时$\partial_{2k+1}=0:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$为零同态.

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\xrightarrow{0}\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\xrightarrow{0}\mathbb{Z}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{0}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

易知:
当$q=2k>0$时$Ker\partial_{2k}=0$, C的同调群$H_{2k}(C)=0$.
当$q=2k+1>0$时$Ker\partial_{2k+1}=\mathbb{Z}$, $Im\partial_{2k+2}=2\mathbb{Z}$, C的同调群$H_{2k+1}(C)=\mathbb{Z}/2$.
对于环$\mathbb{Z}/2$, 考虑链复形$C\otimes\mathbb{Z}/2$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "2\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "2\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$C_q\otimes\mathbb{Z}/2=\mathbb{Z}/2$, $\partial_{2k}\otimes 1=2\otimes 1=0$且$\partial_{2k+1}\otimes 1=0$, 因而对所有的$q>0$, $H_q(C\otimes\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$.

注: 这个例子的模型源自于无穷维射影空间$\mathbb{R}P^{\infty}$的整系数胞腔链复形和$\mathbb{Z}/2$系数胞腔链复形.

对于拓扑空间X, 整系数奇异链群$S_q(X)$是由所有q维奇异单形$\sigma:\Delta^q\to X$生成的自由Abel群. R系数奇异链群是由所有q维奇异单形生成的自由R模. 由$\mathbb{Z}\otimes R\cong R$及命题4.2.2知$S(X,R)=S(X)\otimes R$. 由此我们有:

定理4.2.4 对于交换幺环R, 拓扑空间X的R系数奇异链复形$S(X,R)=S(X)\otimes R$. 因而R系数同调群$H_q(X,R)$满足:
1) 同伦不变性.
2)切除定理.
证明: 1) 对于任何$q\geqslant 0$, 作为R模

$$S_q(X,R)=\{\sum_i r_i\sigma_i|r_i\in R,\sigma_i:\Delta^n\to\}\cong S_q(X)\otimes R.$$

而边缘同态$\partial_q=\partial_q\otimes 1:S_q(X,R)\to S_{q-1}(X,R)$, 即下图可换

$$\begin{tikzcd}
S_q(X,R) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\cong"'] & S_{q-1}(X,R) \arrow[d, "\cong"] \\
S_q(X)\otimes R \arrow[r, "\partial_q\otimes 1"] & S_{q-1}(X)\otimes R
\end{tikzcd}$$

因而链复形$S(X,R)\cong S(X)\otimes R$.
拓扑空间的映射$f:X\to Y$导出的R系数链复形的链映射$f_{\#}=f_{\#}\otimes 1$即

$$\begin{tikzcd}
S_q(X,R) \arrow[r, "f_{\#}"] \arrow[d, equal] & S_q(Y,R) \arrow[d, equal] \\
S_q(X)\otimes R \arrow[r, "f_{\#}\otimes 1"] & S_q(Y)\otimes R
\end{tikzcd}$$

当$f\overset{F}{\simeq}g:X\to Y$是同伦等价的两个映射时, 伦移$G$诱导出从$f_{\#}$到$g_{\#}$的链同伦$H=\{H_q:S_q(X)\to S_{q+1}(Y)\}$. 而$H\otimes 1=\{H_q\otimes 1:S_q(X)\otimes R\to S_{q+1}(Y)\}$是从$f_{\#}\otimes 1:S(X)\otimes R\to S(Y)\otimes R$到$g_{\#}\otimes 1$的链同伦. 因而$R$系数同调群$H_q(X,R)$有同伦不变性.

2) 对于X的开集A和A的闭集V, 由于重心重分链映射$Sd\overset{H}{\simeq}1:S(X)\to S(X)$ 链同伦与单位链映射, $j:S(X\setminus V,A\setminus V)\to S(X,A)$ 导出同调群的同构. 张量积R以后$Sd\otimes 1\overset{H}{\simeq}1:S(X,R)\to S(X,R)$. 将同样的证明方法应用到链映射

$$j\otimes 1:S(X\setminus V,A\setminus V)\otimes R\longrightarrow S(X,A)\otimes R$$

上可知链映射$j\otimes 1$ 导出同调群的切除同构$j:H_q(X\setminus V,A\setminus V,R)\to H_q(X,A,R)$.

在此, 我们不能直接说: 由链复形的短正合序列

$$0\longrightarrow S(A)\xrightarrow{i}S(X)\xrightarrow{j}S(X)/S(A)\longrightarrow 0$$

导出链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A)\otimes R \xrightarrow{i\otimes 1} S(X)\otimes R \xrightarrow{j\otimes 1} S(X)/S(A)\otimes R \longrightarrow 0$$

因而有R系数同调群的长正合序列. 因为对于一般的交换幺环R和Abel群的短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

张量积R以后

$$0 \longrightarrow A\otimes R \xrightarrow{f\otimes 1} B\otimes R \xrightarrow{g\otimes 1} C\otimes R \longrightarrow 0$$

不一定正合, 即张量积不保持正合性. 因而出现了Tor挠群: 张量积的导出函子(见§4.3).

例5 对于环$\mathbb{Z}/2$和Abel群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

张量积$\mathbb{Z}/2$之后

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "2\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}/2\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

不正合. 这是因为对于$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2$的生成元$1\otimes 1$, $(2\otimes 1)(1\otimes 1)=0$.

$$2\otimes 1 = 0 : \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2$$

不再是单同态.

定义4.2.3 称一个短正合序列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend left, "h"] & 0
\end{tikzcd}$$

是可裂的如果存在同态$h: C\to B$使得$g\cdot h = 1_C$, 即

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C.
\end{tikzcd}$$

命题4.2.5 如果$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是可裂的短正合序列, 则$B \cong A\oplus C$。

证明: 构做同态$i: A\oplus C\to B$, 对任何$(a,c)\in A\oplus C$, $i(a,c)=f(a)+h(c)$. 如果$i(a,c)=f(a)+h(c)=0$，则$g\cdot i(a,c)=g\cdot f(a)+g\cdot h(c)=c=0$. 因而$c=0$且$i(a,c)=f(a)=0$. 由$f$是单射知$a=0$, i是单同态.

对任何$b \in B$考虑$b - h \cdot g(b)$. 显然$g(b - h \cdot g(b)) = g(b) - gh(g(b)) = 0$, $b - h \cdot g(b) \in Kerg = Imf$. 存在$a \in A$使得$f(a) = b - h \cdot g(b)$, 此时$i(a, g(b)) = f(a) + h \cdot g(b) = b$. i是满同态.

定理4.2.6

1) 对于Abel群的短正合序列$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 及交换幺环R, 有R模的正合序列

$$A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

2) 当C是自由Abel群时短正合序列$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 可裂, $B \cong A \oplus C$. 因而

$$0 \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

正合且可裂.

证明: 1) 由$g : B \longrightarrow C$是满同态容易证明$g \otimes 1 : B \otimes R \longrightarrow A \otimes R$ 也是满同态, 序列

$$A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

在$C \otimes R$处正合.

为证明序列在$B \otimes R$处正合, 考察$B \otimes R$的子模

$$H = \{\sum_i b_i \otimes r_i | b_i \in Imf, r_i \in R\} = Im(f \otimes 1).$$

易证: 对任何$\sum_i b_i \otimes r_i \in H$,

$$(g \otimes 1)(\sum_i b_i \otimes r_i) = \sum_i g(b_i) \otimes r_i = \sum_i 0 \otimes r_i = 0.$$

因而$H \subset Ker(g \otimes 1)$. 存在同态$\phi : B \otimes R/H \to C \otimes R$ 使下图可换

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] & B \otimes R \arrow[r] \arrow[d, "g \otimes 1"'] & B \otimes R/H \arrow[dl, "\phi"'] \\
& C \otimes R \arrow[ur, dotted, bend right, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

构做映射$\varphi : C \otimes R \to B \otimes R/H$如下:

对任何$C \otimes R$中的生成元$c \otimes r$, 由g是满射知存在$b \in B$使得$g(b) = c$. 定义

$$\varphi(c \otimes r) = \overline{b \otimes r} = b \otimes r + H.$$

如果$g(b) = g(b') = c$, 则存在$a \in A$使得$f(a) = b - b'$. 因而$b \otimes r - b' \otimes r = f(a) \otimes r$, $b \otimes r + H = b' \otimes r + H$定义合理.

容易验证$\phi \cdot \varphi = 1 : C \otimes R \to C \otimes R$, $\phi \cdot \varphi = 1$. 因而$C \otimes R \cong B \otimes R/H$，$Ker(g \otimes 1) = H = Im(f \otimes 1)$. 序列在$B \otimes R$处正合.

2) 如果C是自由Abel群, 设$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$是$C$的一组自由基（生成元）. 由$g$是满同态知: 对任何生成元$c_i$存在$b_i \in B$使得$g(b_i) = c_i$. 定义$h : \mathcal{C} \to B$为: $h(c_i) = b_i$. 由于C是自由Abel群, 集合映射$h : \mathcal{C} \to B$可扩充

成群同态$h: C \to B$. 并且由$g \cdot h(c_i) = g(b_i) = c_i$知$g \cdot h = 1: C \to B \to C$. 序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

可裂, $B \cong A \oplus C$. 由$B \otimes R = (A \oplus C) \otimes R = (A \otimes R) \oplus (C \otimes R)$知序列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes R \arrow[r, "f\otimes 1"] & B \otimes R \arrow[r, "g\otimes 1"] \arrow[d, equal] & C \otimes R \arrow[r] & 0. \\
0 \arrow[r] & A \otimes R \arrow[r] & (A \otimes R) \oplus (C \otimes R) \arrow[r] & C \otimes R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

可裂正合.

定理4.2.7 对于空间偶(X, A), 由于相对奇异链群$S_q(X, A)$是自由Abel群

$$0 \longrightarrow S(A) \otimes R \xrightarrow{i\otimes 1} S(X) \otimes R \xrightarrow{j\otimes 1} S(X, A) \otimes R \longrightarrow 0$$

是链复形的短正合序列. 它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, R) \xrightarrow{i} H_q(X, R) \xrightarrow{j} H_q(X, A, R) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A, R) \longrightarrow \cdots$$

§4.2**习题**

1 如果A是一个R模, 忘却A的R模结构将A看成一个Abel群. 在$A \otimes R$上赋予新的R模结构, $r \cdot (a \otimes r_1) = a \otimes r \cdot r_1$. 试举例说明: $A \otimes R \ncong A$.

2 证明: $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/(m, n)$, 其中$(m, n)$为$m$与$n$的最大公因数.

§4.3 Tor 与Ext

本节我们将介绍同调代数中的两个重要概念, 挠群Tor与Ext群. 在下一节将利用挠群Tor给出由整系数同调群$H_*(X)$确定一般系数同调群$H_*(X,R)$的办法–泛系数定理.

定义4.3.1 设R是一个交换幺环, A是一个R模. 一个R模的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

称为A的一个R模分解. 更进一步, 如果每个C_i都是自由R模, 则称这个分解为A的一个自由R模分解. 记为

$$C: \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

例1 $\mathbb{Z}/2$作为整数环$\mathbb{Z}$上的模, 以下正合序列是$\mathbb{Z}/2$的一个自由$\mathbb{Z}$ 模分解.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

其中$\cdots = C_q = C_{q-1} = \cdots = C_2 = 0$，$C_1 = C_0 = \mathbb{Z}$, $\partial_1 = 2$.

例2 $\mathbb{Z}$本身作为$\mathbb{Z}$模

$$C: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

是$\mathbb{Z}$的一个自由$\mathbb{Z}$模分解, 其中$\cdots = C_q = C_{q-1} = \cdots = C_1 = 0$, 只有$C_0 = \mathbb{Z}$, ε是同构映射.

一般地, 如果A是自由R模, 则有A的自由R模分解:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

其中除$C_0 = A$外其余的$C_i = 0$.

令$E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$为整数环$\mathbb{Z}$上由$x_1, x_2, \cdots, x_n$生成的外代数. 作为$\mathbb{Z}$模, 外代数$E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$是由所有的单项式

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} | (i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset (1, 2, \cdots n)\}$$

生成的自由$\mathbb{Z}$模. $E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$中有乘法满足

$$x_i x_j = -x_j x_i, \qquad x_1^2 = 0.$$

令

$$C_{s-1} = \mathbb{Z}\{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s} | \{i_1, i_2, \cdots i_s\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

为长度为s的单项式生成的自由$\mathbb{Z}$模. 并定义$\partial_{s-1} : C_{s-1} \to C_{s-2}$为:

$$\partial_{s-1}(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s}) = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j x_{i_1} \cdots \widehat{x}_{i_j} \cdots x_{i_s}$$

其中$x_{i_1} \cdots \widehat{x}_{i_j} \cdots x_{i_s}$ 为从$x_{i_1} \cdots x_{i_j} \cdots x_{i_s}$中去掉$x_{i_j}$后产生的长度为$s-1$的单项式.

$\varepsilon: C_0 \to \mathbb{Z}$为: 对任何$x_i \in E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，$\varepsilon(x_i) = 1$.
则

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

也是$\mathbb{Z}$的一个自由$\mathbb{Z}$模分解, 这个分解称为Kuszul分解.

命题4.3.1 R模A的一个R模分解对应一个链复形$C = \{C_q, \partial_q\}$

$$C: \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_n} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

其同调群$H_q(C) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$

证明: 当$q > 0$时序列在C_q处正合，$Ker\partial_q = Im\partial_{q+1}$，$H_q(C) = 0$.
$H_0(C) = C_0/Im\partial_1$. 由$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$正合知

$$A \cong C_0/Ker\varepsilon = C_0/Im\partial_1 = H_0(C).$$

定理4.3.2 对任何R模A, 它的自由R模分解存在.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

证明 定理的证明过程实际是一个逐步构作自由分解C_n的过程.
我们可以这样的构做自由R模和模同态: 任给一个集合$S = \{s_i | i \in I\}$, 令

$$F(S) = \left\{ \sum_i r_i s_i | \text{其中} r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

为由集合S中的元素生成的自由R模.

对任何R模M, 集合映射$f: S \to M$可以线性地扩充成模同态$f: F(S) \to M$,

$$f(\sum_i r_i s_i) = \sum_i r_i f(s_i).$$

这样第一步, 我们需要构做自由R模C_0并且要求$\varepsilon: C_0 \to A$是满同态.

设A是由$S_0 = \{s_i^0 | i \in I_0\}$生成的$R$模($A$不一定是自由$R$模, 但一般可以找到比较简约的生成元组. 如果很难找到简约的生成元组可以取集合$S_0 = A \setminus \{0\}$, 即从A中去掉零元后余下的所有元素, 它肯定是A的生成元组).

令$C_0 = F(S_0)$为由S_0生成的自由R模并定义集合映射$\varepsilon: S_0 \to A$为$\varepsilon(s_i^0) = s_i^0$. 将$\varepsilon$扩充成$R$模同态$\varepsilon: C_0 = F(S_0) \to A$, ε是满同态.

第二步, 我们需要构做C_1和∂_1使得

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

正合.

首先求同态ε的核$Ker\varepsilon$并找$Ker\varepsilon$的生成元组$S_1 = \{s_j^1 | j \in I_1\}$. 同样令$C_1 = F(S_1)$为由$S_1$生成的自由$R$模并定义集合映射$\partial_1 : S_1 \to Ker\varepsilon$为$\partial_1(s_j^1) = s_j^1 \in Ker\varepsilon$. 将$\partial_1$扩充成模同态, 则有合成映射

$$\partial_1 : C_1 = F(S_1) \xrightarrow{\partial_1} Ker\varepsilon \longrightarrow C_0$$

使得$Im\partial_1 = Ker\varepsilon$, 此时序列在$C_0$处正合.

归纳地假设已经得到正合序列

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

同样找出$Ker\partial_n$的生成元组$S_{n+1} = \{s_i^{n+1}\}$, 定义$C_{n+1} = F(S_{n+1})$并定义集合映射$\partial_{n+1}(s_i^{n+1}) = s_i^{n+1} \in Ker\partial_n$. 扩充成模同态$\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$, 则$Im\partial_{n+1} = Ker\partial_n$.

这种构做自由R模分解的办法被称作bar-分解. 由于对环R没有任何限制, 这样构做出来的自由R模分解会很大, C_n中会有很多生成元. 但对许多环来说, 其自由分解也只能这样构做, 但对有些特殊的环R可以构做简单的自由分解.

例3 设R是一个域, A是R模. 由于域R上的模是线性空间, 一定是自由的. 我们可以定义$C_0 = A$, $\varepsilon : A \to A$为同构映射. 这样有自由分解

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

例4 设R是一个主理想整环(常见的主理想整环有: 整数环$\mathbb{Z}$, 某个域$\mathbb{F}$上的一元多项式环$\mathbb{F}[x]$等). **主理想整环R上任何自由模的子模还是自由R模**. 因此对任何由$S = \{s_i | i \in I\}$生成的R模A, 令$C_0 = F(S)$并定义同态$\varepsilon : C_0 \to A$为$\varepsilon(s_i) = s_i$. 由于$Ker\varepsilon$是自由R模C_0的子模, 它也是自由R模. 我们可以定义$C_1 = Ker\varepsilon$, 而

$$\partial_1 : Ker\varepsilon \to C_0$$

为内射. A有短的自由分解

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Ker\varepsilon \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

例5 $\mathbb{Z}/2$上有$\mathbb{Z}/4$的模结构$\varphi : \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$, 定义为$a \cdot b = ab \in \mathbb{Z}/2$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C : \cdots \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow 0 \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & C_n & & C_{n-1} & \cdots & C_1 & & C_0 & & \mathbb{Z}/2 & \end{array}$$

是$\mathbb{Z}/2$的一个自由$\mathbb{Z}/4$模分解.

定义4.3.2 设R是一个交换幺环, 一个环R上的链复形$C = \{C_n, \partial_n\}_{n \geqslant 0}$称为自由链复形如果每个$C_n$都是自由$R$模. R模A称为链复形C的一个增广如

果存在满同态$\varepsilon : C_0 \to A$使得$H_0(C) = A$

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

定理4.3.1中一个R模A的自由分解对应的链复形C是一个自由链复形, 并且A是C的增广.

定理4.3.3（自由零调模型） 设$C = \{C_n, \partial_n\}$是一个自由链复形, A是C的增广, C'是A'的一个自由R模分解. 则对任何同态$\varphi : A \to A'$存在链映射

$$\varphi = \{\varphi : C_n \to C'_n\}$$

使得$\varepsilon' \cdot \varphi = \varphi \cdot \varepsilon$ 且任何两个这样的链映射φ, φ'都是链同伦的. 即有下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi-\varphi'"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi-\varphi'"] \arrow[dl, "H"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-\varphi'"] \arrow[dl, "H"'] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi-\varphi'"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi-\varphi'"] \arrow[dl, "H"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "0"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明: 这个定理的证明同样是用追图法. 首先我们利用归纳法构作链映射$\varphi : C_n \to C'_n$.

注意到在交换图中下面一行是一个长正合序列, 而每个C_n都是自由R模. 设$S_n = \{s_{nj} | nj \in I_n\}$ 是C_n的生成元, 则集合映射$\varphi_n : S_n \to C'_n$可扩充成R模同态$\varphi : C_n \to C'_n$.

利用追图法, 对于C_0的每个生成元s_{0j}, $\varphi \cdot \varepsilon(s_{0j}) \in A'$. 由$\varepsilon : C'_0 \to A'$是满同态知: 存在$c'_{0j} \in C'_0$使得$\varepsilon(c_{0j}) = \varphi \cdot \varepsilon(s_{0j})$. 定义$\varphi_0(s_{0j}) = c'_{0j}$，则$\varphi_0$的线性扩充$\varphi : C_0 \to C'_0$满足$\varphi \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \varphi$.

对于C_1的每个生成元s_{1j},

$$\varepsilon' \cdot \varphi \cdot \partial_1(s_{1j}) = \varphi \cdot \varepsilon \cdot \partial_1(s_{1j})) = 0$$

因而$\varphi \cdot \partial_1(s_{1j}) \in Ker\varepsilon' = Im\partial'_1$. 存在$c'_{1j} \in C'_1$ 使得$\partial'_1(c_{1j}) = \varphi \cdot \partial_1(s_{1j})$. 定义$\varphi_1(s_{1j}) = c_{1j}$, 则它的线性扩充$\varphi : C_1 \to C'_1$满足$\partial'_1 \cdot \varphi = \varphi \cdot \partial_1$.

归纳地假设$\varphi : C_{n-1} \to C'_{n-1}$已经给出. 对$C_n$的每个生成元$s_{nj}$

$$\partial'_{n-1} \cdot \varphi \cdot \partial_n(s_{nj}) = \varphi \cdot \partial_{n-1} \cdot \partial_n(s_{nj})) = 0$$

$\varphi \cdot \partial_n(s_{nj}) \in Ker\partial'_{n-1} = Im\partial'_n$. 存在$c'_{nj} \in C'_n$ 使得$\partial_n(c'_{nj}) = \varphi \cdot \partial_n(s_{nj})$. 同样定义$\varphi_n(s_{nj}) = c'_{nj}$, 它的线性扩充$\varphi : C_n \to C'_n$满足$\partial'_n \cdot \varphi = \varphi \cdot \partial_n$。这样构做的$\varphi = \{\varphi : C_n \to C'_n\}$是链映射.

设另有链映射$\varphi' = \{\varphi' : C_n \to C'_n\}$也满足在$C_0$处$\varphi' \cdot \varepsilon = \varepsilon' \cdot \varphi'$. 取

$$H = 0 : A \to C'_0,$$

对任何$s_{0j}\in C_0$,

$$\varepsilon'\cdot(\varphi-\varphi')(s_{0j})=(\varphi-\varphi)\cdot\varepsilon(s_{0j})=0.$$
$$(\varphi-\varphi')(s_{0j})\in Ker\varepsilon'=Im\partial_1',$$

存在$\tilde{c}'_{1j}\in C_1'$使得

$$\partial_1'(\tilde{c}'_{1j})=(\varphi-\varphi')(s_{0j}).$$

定义$H:C_0\to C_1'$为$H(s_{0,j})=\tilde{c}'_{1,j}$的线性扩充，则在$C_0$处

$$\varphi-\varphi'=H\cdot\varepsilon+\partial_1'\cdot H:C_0\to C_0'.$$

同样归纳地假设$H:C_{n-1}\to C_n'$已经给出且满足: 在C_{n-1}处

$$\varphi-\varphi'=H\cdot\partial_{n-1}+\partial_n'\cdot H.$$

对任何$s_{nj}\in C_n$, 考察$(\varphi-\varphi')(s_{nj})-H\cdot\partial_n(s_{nj})$我们有

$$\begin{aligned}&\partial_n'\cdot((\varphi-\varphi')-H\cdot\partial_n)(s_{nj})\\ =&(\varphi-\varphi')\cdot\partial_n(s_{nj})-\partial_n'\cdot H\cdot\partial_n(s_{nj})\\ =&((\varphi-\varphi')-\partial_n'\cdot H)\cdot\partial_n(s_{nj})\\ =&H\cdot\partial_{n-1}\cdot\partial_n(s_{nj})\\ =&0.\end{aligned}$$

$(\varphi-\varphi')(s_{nj})-H\cdot\partial_n(s_{nj})\in Ker\partial_n'=Im\partial_{n+1}'$, 存在$\tilde{c}'_{n+1j}\in C_{n+1}'$ 使得

$$\partial_{n+1}'(\tilde{c}'_{n+1j})=(\varphi-\varphi')(s_{nj})-H\cdot\partial_n(s_{nj}).$$

定义$H:C_n\to C_{n+1}'$为$H(s_{nj})=\tilde{c}'_{n+1j}$的线性扩充, 则在$C_n$处

$$(\varphi-\varphi')=H\cdot\partial_n+\partial_{n+1}'\cdot H:C_n\to C_n'.$$

由零调自由模型定理很容易看出: 一个R模的自由分解在链同伦的意义下是唯一的.

推论4.3.4 同一个R模A的不同自由分解C,C'是链同伦等价的.

证明: 对于A的两个自由分解C,C'

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "\phi"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "\phi"] & C'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] \arrow[d, "\phi"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由C是自由链复形C'是零调复形知: 对于单位映射$1:A\to A$存在链映射$\varphi:C\to C'$ 使得$\varepsilon'\cdot\varphi=\varepsilon\cdot 1$.

同样由C'是自由链复形C是零调链复形知: 对于$1:A\to A$存在链映射$\phi:C'\to C$使得$\varepsilon\cdot\phi=1\cdot\varepsilon'$.

而对于C到C的两个都满足$\varepsilon\cdot(\phi\cdot\varphi)=1\cdot\varepsilon$, $\varepsilon\cdot 1=1\cdot\varepsilon$的链映射$\phi\cdot\varphi$和1. 由于$C$即是自由链复形又是零调复形, 因而$\phi\cdot\varphi$与1链同伦, 链复形$C$与$C'$链同伦等价.

设A,B是两个R模, 任选A的一个自由R模分解C, 再与B做张量积得一个链复形$C\otimes B$

$$\cdots\longrightarrow C_n\otimes B\xrightarrow{\partial\otimes 1}C_{n-1}\otimes B\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\otimes B\xrightarrow{\partial\otimes 1}C_0\otimes B\longrightarrow 0.$$

命题4.3.5 链复形$C\otimes B$的同调群只与R模A,B有关, 与A的自由分解C的选取无关. $H_n(C\otimes B)$称为A与B的第n个挠群, 记为$Tor_n^R(A,B)$.

证明: 对于A的两个自由分解C,C', 存在链同伦等价映射$\varphi:C\xrightarrow{\simeq}C'$. 张量积$B$以后$\varphi\otimes 1:C\otimes B\xrightarrow{\simeq}C'\otimes B$还是链同伦等价映射, 因而

$$\varphi_*:H_n(C\otimes B)\xrightarrow{\simeq}H_n(C'\otimes B)$$

同构.

由定义及自由零调模型定理很容易得到: $Tor_n^R(A,B)$关于A,B都是共变函子，即：

定理4.3.6 1) R模同态$\varphi:A\longrightarrow A'$导出挠群同态

$$\varphi_*:Tor_n^R(A,B)\longrightarrow Tor_n^R(A',B).$$

2) R模同态$f:B\longrightarrow B'$导出挠群同态$f_*:Tor_n^R(A,B)\longrightarrow Tor_n^R(A,B')$

证明: 选定A和A'的自由分解C,C',

1) R模同态φ诱导出链映射$\varphi:C\longrightarrow C'$, 张量积$B$以后得到链映射

$$\varphi\otimes 1:C\otimes B\longrightarrow C'\otimes B.$$

链映射$\varphi\otimes 1$诱导出同调群的同态$\varphi_*:Tor_n^R(A,B)\longrightarrow Tor_n^R(A',B)$, 并且这个同态只与模同态$\varphi:A\longrightarrow A'$有关, 与链映射$\varphi:C\longrightarrow C'$的选取无关.

2) R模同态$f:B\longrightarrow B'$诱导出链群同态$1_n\otimes f:C_n\otimes B\longrightarrow C_n\otimes B'$, 从而诱导出链映射

$$1\otimes f:C\otimes B\longrightarrow C\otimes B'.$$

链映射$1\otimes f$诱导出同调群的同态$f_*:Tor_n^R(A,B)\longrightarrow Tor_n^R(A,B')$.

例6 $Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & n=0,1\\ 0 & n>1\end{cases}$

由例1取$\mathbb{Z}/2$的一个自由$\mathbb{Z}$模分解C

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0.$$

张量积$\mathbb{Z}/2$得到链复形

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "2\otimes 1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 & \cdots & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因而$H_0(C\otimes\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$，$H_1(C\otimes\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$ 而当$n>1$时$C_n\otimes\mathbb{Z}/2=0$.

一般地, 如果R是主理想整环, A,B是R上的模. A有形如例4中的自由分解

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Ker\varepsilon & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A \longrightarrow 0 \\
 & & \| & & \| & & & & \| & & \| & & & & \| \\
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{i} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A \longrightarrow 0
\end{array}$$

张量积B以后，对$n\geqslant 2$，$C_n\otimes B=0$因而$Tor_n^R(A,B)=0$. 由

$$0\longrightarrow C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

正合知

$$C_1\otimes B\xrightarrow{\partial_1}C_0\otimes B\xrightarrow{\varepsilon}A\otimes B\longrightarrow 0$$

正合(参加定理4.2.6的证明). 因此

$$Tor_0^R(A,B)=H_0(C\otimes B)=C_0\otimes B/Im\partial_1=C_0\otimes B/Ker\varepsilon=A\otimes B.$$

定义4.3.3 对于主理想整环R上的模A,B, $Tor_1^R(A,B)=H_1(C\otimes B)=Ker\partial_1$, 简记为$Tor^R(A,B)$.

特别的, 当主理想整环取$\mathbb{Z}$时$Tor_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$简记为$Tor(A,B)$.

例7 $\mathbb{Z}/2$作为$\mathbb{Z}/4$上的模, 有自由分解

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
C:\cdots\longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow 0 \\
 & \| & & \| & & & & \| & & \| & & \| & \\
 & C_n & & C_{n-1} & & \cdots & & C_1 & & C_0 & & \mathbb{Z}/2 &
\end{array}$$

（参见例5）与$\mathbb{Z}/2$做张量积后得到链复形

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\longrightarrow & \mathbb{Z}/4\otimes\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2\otimes 1} & \mathbb{Z}/4\otimes\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\otimes\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2\otimes 1} & \mathbb{Z}/4\otimes\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow 0 \\
 & \| & & \| & & & & \| & & \| & \\
\cdots\longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

因而对任何$n\geqslant 0$，$Tor_n^{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)=C_n\otimes\mathbb{Z}/2=\mathbb{Z}/2$.

定理4.3.7 对任何R模D及R模的短正合序列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$$

有挠群的长正合序列

$$\cdots\longrightarrow Tor_n^R(D,A)\xrightarrow{f_*}Tor_n^R(D,B)\xrightarrow{g_*}Tor_n^R(D,C)\xrightarrow{\delta}Tor_{n-1}^R(D,A)\longrightarrow$$

$$\cdots\longrightarrow Tor_1^R(D,C)\xrightarrow{\delta}D\otimes A\xrightarrow{f\otimes 1}D\otimes B\xrightarrow{g\otimes 1}D\otimes A\longrightarrow 0.$$

证明: 给定D的一个自由R模分解$\widetilde{D}$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0 \xrightarrow{\varepsilon} D \longrightarrow 0$$

由于每个D_n都是自由R模, 由命题4.2.2知

$$0 \longrightarrow D_n \otimes A \xrightarrow{1\otimes f} D_n \otimes B \xrightarrow{1\otimes g} D_n \otimes C \longrightarrow 0$$

都是正合序列.

$$0 \to \widetilde{D} \otimes A \xrightarrow{1\otimes f} \widetilde{D} \otimes B \xrightarrow{1\otimes g} \widetilde{D} \otimes C \to 0$$

是链复形的短正合序列, 它导出定理中同调群的长正合序列.

在给出挠群$Tor_n^R(A,B)$的定义和基本性质之后, 我们介绍扩张群Ext. 用同调代数的语言说: 由于张量积$\otimes$不保持正合性, 挠群Tor是张量积函子$\otimes$的导出函子. 同样由于同态函子Hom不保持正合性, Ext是Hom函子的导出函子.

定义4.3.4 对任何R模A, B, 定义

$$Hom_R(A,B) = \{f : A \longrightarrow B | f\text{是从}A\text{到}B\text{的}R\text{模同态}\}$$

为所有从A到B的R模同态构成的集合. $Hom_R(A,B)$中有自然的R模结构:
1) $f+g : A \longrightarrow B$定义为: 对任何$a \in A$, $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$.
2) $r \cdot f : A \longrightarrow B$定义为: 对任何$a \in A$, $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$.

例8 $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/5$和$\mathbb{Z}$作为整数环$\mathbb{Z}$上的模

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \qquad Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2;$$
$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}) = 0, \qquad Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/2) = 0$$

$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Z}$的同态f完全由$f(1) \in \mathbb{Z}$确定.
同样$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Z}/2$的同态f也完全由$f(1) \in \mathbb{Z}/2$确定.
由于在$\mathbb{Z}/2$中$1+1=0$, 同态$f : \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ 应该满足$f(0) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 0 \in \mathbb{Z}$, $f(1)$只能是0, f是零同态.

$Hom_R(-,-)$关于第一个变量是反变函子, 关于第二个变量是共变函子, 即:

命题4.3.8 同态$\phi : A \to B$诱导出同态$\phi^* : Hom_R(B,G) \longrightarrow Hom_R(A,G)$且满足:
1) 对于单位映射$1 : A \longrightarrow A$

$$1^* = 1 : Hom_R(A,G) \longrightarrow Hom_R(A,G).$$

2) 对于零同态$0 : A \longrightarrow B$有

$$0^* = 0 : Hom_R(B,G) \longrightarrow Hom_R(A,G)$$

3) 对于同态$\phi : A \longrightarrow B$和$\psi : B \longrightarrow C$有

$$(\psi \cdot \phi)^* = \phi^* \cdot \psi^* : \qquad \begin{tikzcd} Hom_R(C,G) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[dr, "(\psi\cdot\phi)^*"'] & Hom_R(B,G) \arrow[d, "\phi^*"] \\ & Hom_R(A,G). \end{tikzcd}$$

证明: 对于R模同态$\phi : A \to B$,

$$\phi^* : Hom_R(B,G) \longrightarrow Hom_R(A,G)$$

定义为: 对任何$f : B \to G \in Hom_R(B,G)$，$\phi^*(f) \in Hom_R(A,G)$为同态的合成

$$\phi^*(f) = f \cdot \phi : A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{f} G.$$

由定义容易验证1), 2), 3)成立.

命题4.3.9 同态$\psi : G \longrightarrow H$诱导出同态$\psi_* : Hom_R(A,G) \longrightarrow Hom_R(A,H)$且满足:

1) 对于单位映射$1 : G \longrightarrow G$

$$1_* = 1 : Hom_R(A,G) \longrightarrow Hom_R(A,G).$$

2) 对于同态$\psi : G \longrightarrow H$和$\phi : H \longrightarrow K$

$$(\phi \cdot \psi)^* = \phi_* \cdot \psi_* : \qquad \begin{tikzcd} Hom_R(A,G) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[dr, "(\phi\cdot\psi)_*"'] & Hom_R(A,H) \arrow[d, "\phi_*"] \\ & Hom_R(A,K). \end{tikzcd}$$

证明: 对于R模同态$\psi : G \to H$,

$$\psi_* : Hom_R(A,G) \longrightarrow Hom_R(A,H)$$

定义为: 对任何$f \in Hom_R(A,G)$, $\psi_*(f) \in Hom_R(A,H)$为同态合成

$$\psi_*(f) = \psi \cdot f : A \longrightarrow G \longrightarrow H.$$

易证这样定义的ψ^*是R模同态且满足1), 2).

定理4.3.10 对于一簇R模$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$及$\{G_\beta\}_{\beta\in J}$, 其中$I, J$是下标集有

1) $Hom_R(\bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha, G) \cong \prod_{\alpha\in I} Hom_R(A_\alpha, G)$.

2) $Hom_R(A, \bigoplus_{\beta\in J} G_\beta) \cong \bigoplus_{\beta\in J} Hom_R(A, G_\beta)$.

在此应当注意: 当下标集I, J无限时直和$\oplus$与直积$\prod$的区别.

同样, Hom函子也不保持正合性:

命题4.3.11

1) 如果$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$是$R$模的短正合序列, 则

$$0 \longrightarrow Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\phi^*} Hom_R(A,G)$$

是R模的短正合序列

2) 如果正合序列$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$是可裂的, 则

$$0 \longrightarrow Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\phi^*} Hom_R(A,G) \longrightarrow 0$$

也是正合的.

证明: 1) 序列在$Hom_R(C,G)$处正合指

$$\psi^* : Hom_R(C,G) \longrightarrow Hom_R(B,G)$$

是单同态.

对于任何$f \in Hom_R(C,G)$, $f : C \longrightarrow G$是同态. 而$\psi^*(f)$是同态合成

$$\psi^*(f) = f \cdot \psi : B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{f} G.$$

如果$\psi^*(f) = f \cdot \psi = 0$是零同态. 则由

$$\psi : B \longrightarrow C$$

是满同态知道: 对任何$c \in C$存在$b \in B$使得$\psi(b) = c$. 此时对任何$c \in C$

$$f(c) = f(\psi(b)) = f \cdot \psi(b) = 0.$$

$f : C \longrightarrow G$是零同态, 即$f = 0$. ψ^*是单同态.

2) 序列在$Hom_R(B,G)$处正合. 即$Im\psi^* = Ker\phi^*$

首先$\phi^* \cdot \psi^* = (\psi \cdot \phi)^* = 0$, 因而$Im\psi^* \subset Ker\phi^*$.

另外, 对于$g \in Ker\phi^*$, 即对于同态$g : B \longrightarrow G$合成

$$\phi^*(g) = g \cdot \phi = 0$$

则

$$g \cdot \phi = 0 \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h"] & 0 \\ & & G & & \end{tikzcd}$$

由代数同态基本定理知: 存在$h : C \longrightarrow G$使得$h \cdot \psi = g$, 即$\psi^*(h) = g$，$g \in Im\psi^*$.

3) 当正合序列$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$可裂时, $B \cong A \oplus C$

$$Hom_R(B,G) \cong Hom_R(A,G) \oplus Hom_R(C,G).$$

因而

$$0 \longrightarrow Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\phi^*} Hom_R(A,G) \longrightarrow 0$$

也可裂, 正合.

设$C=\{C_n,\partial_n\}$是环R上的链复形, G是一个R模. 由命题4.3.8知∂_n诱导出同态$\partial_n^*:Hom_R(C_{n-1},G)\longrightarrow Hom_R(C_n,G)$且满足$\partial_{n+1}^*\partial_n^*=0$。

$$Hom_R(C,G)=\{Hom_R(C_n,G),\partial_{n+1}^*\}$$

构成一个上链复形

$$\cdots\longleftarrow Hom_R(C_{n+1},G)\xleftarrow{\partial_{n+1}^*}Hom_R(C_n,G)\xleftarrow{\partial_n^*}Hom_R(C_{n-1},G)\longleftarrow\cdots$$

定义4.3.5 上链复形$Hom_R(C,G)$的上同调群

$$H^n(Hom_R(C,G))=Ker\partial_{n+1}^*/Im\partial_n^*$$

称为链复形C的G系数上同调群.

链映射$\varphi:C\longrightarrow D$诱导出上链复形的上链映射

$$\varphi^*:Hom_R(D,G)\longrightarrow Hom_R(C,B),$$

因而诱导出上同调群的同态$\varphi^*:H^n(Hom_R(D,G))\longrightarrow H^n(Hom_R(C,G))$.

两个链映射φ,ϕ之间的链同伦$H=\{H:C_{n-1}\to D_n\}$诱导出上链映射φ^*,ϕ^*之间的上链同伦

$$H^*=\{H^*:Hom_R(D_n,G)\to Hom_R(C_{n-1},G)\}$$

满足: $\varphi^*-\phi^*=H^*\cdot\partial_{n+1}^*+\partial_n^*\cdot H^*$. 因此它们诱导出的上同调群同态相同

$$\varphi^*=\phi^*:H^n(Hom_R(D,G))\longrightarrow H^n(Hom_R(C,G)).$$

当两个链复形$\varphi:C\overset{\simeq}{\to}D$链同伦等价时,

$$\varphi^*:Hom_R(D,G)\longrightarrow Hom_R(C,G)$$

是上链复形的上链同伦等价. 他们的上同调群同构

$$\varphi^*:H^n(D,G)\overset{\simeq}{\to}H^n(C,G).$$

定义4.3.6 设A,B是两个R模, 任选A的一个自由分解C, 构做链复形$Hom_R(C,B)$. 它的上同调群只与A,B有关而与自由分解C的选取无关, 定义A与B的Ext群（扩张群）为$Hom_R(C,B)$的上同调群

$$Ext_R^n(A,B)=H^n(Hom_R(C,B)).$$

由链复形的交换图

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi-"', "\phi"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi-"', "\phi"] \arrow[dl, "H"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-"', "\phi"] \arrow[dl, "H"'] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi-"', "\phi"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-"', "\phi"] \arrow[dl, "H"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & D_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

诱导出以下反向的上链复形的交换图

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & Hom_R(C_{n+1},B) \arrow[l] & Hom_R(C_n,B) \arrow[l, "\partial_{n+1}^*"'] & Hom_R(C_{n-1},B) \arrow[l, "\partial_n^*"'] & \cdots \arrow[l] & Hom_R(C_1,B) \arrow[l] & Hom_R(C_0,B) \arrow[l, "\partial_1^*"'] & 0 \arrow[l] \\
\cdots & Hom_R(D_{n+1},B) \arrow[l] \arrow[u, "\varphi^*", "-\phi^*"'] \arrow[ur, "H^*"] & Hom_R(D_n,B) \arrow[l, "\partial_{n+1}^*"] \arrow[u, "\varphi^*", "-\phi^*"'] \arrow[ur, "H^*"] & Hom_R(D_{n-1},B) \arrow[l, "\partial_n^*"] \arrow[u, "\varphi^*", "-\phi^*"'] & \cdots \arrow[l] & Hom_R(C_1,B) \arrow[l] \arrow[u, "\varphi^*", "-\phi^*"'] \arrow[ur, "H^*"] & Hom_R(C_0,B) \arrow[l, "\partial_1^*"] \arrow[u, "\varphi^*", "\phi^*"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

例9 $Ext^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)=\begin{cases}\mathbb{Z}/5 & n=0,1\\ 0 & n>1.\end{cases}$

选取$\mathbb{Z}/5$的自由分解C

$$C:\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{5}\mathbb{Z}\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}/5\longrightarrow 0$$

其中$C_1=C_0=\mathbb{Z}$, $\partial_1=5$是5倍映射, 而当$n>1$时$C_n=0$.

构做链复形$Hom_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Z}/5)$

$$Hom_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Z}/5):\cdots\longleftarrow 0\longleftarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\xleftarrow{5^*}Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\longleftarrow 0$$

当$n>1$时$Hom_{\mathbb{Z}}(C_n,\mathbb{Z}/5)=0$, 因而$Ext^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)$.

$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\cong\mathbb{Z}/5$, 而对任何同态$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/5$, $5^*(f)$为: 对任何$a\in\mathbb{Z}$,

$$5^*(f)(a)=f\cdot 5(a)=f(5a)=0\in\mathbb{Z}/5$$

$5^*=0$是零同态. 因而

$$\begin{aligned}Ext^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)=&Hom_R(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\cong\mathbb{Z}/5,\\ Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)=&Hom_R(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\cong\mathbb{Z}/5.\end{aligned}$$

更一般地: 如果A,B是主理想整环R上的模, A有形如例4中的自由分解, 因而当$n>1$时$Ext^n_R(A,B)=0$. 类似于$Tor^R_0(A,B)=A\otimes B$的证明, 可以证明

$$Ext^0_R(A,B)\cong Hom_R(A,B).$$

$Ext^1_R(A,B)$记为$Ext_R(A,B)$, 而当R为整数环$\mathbb{Z}$时, $Ext^1_{\mathbb{Z}}(A,B)$简记为$Ext(A,B)$.

Ext群与扩张的关系 设A,B是R模, $0\longrightarrow B\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$ 是R模的短正合序列, 此时R模E称为A,B的一种扩张, 他的结构并不能唯一确定. 比如：已知

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}/5\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}\mathbb{Z}/5\longrightarrow 0.$$

此时的E可以是$\mathbb{Z}/25$, 也可以是$\mathbb{Z}/5\oplus\mathbb{Z}/5$, 或者还有其他的可能. 但此时如果我们用$Ext$群就可以计算出$E$所有的可能.

对于任何短正合序列$0\longrightarrow B\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$, 任意选取$A$的自由分解$C$. 则有下面的自由零调模型:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上面的一行是自由链复形, 下面的一行可以看做是零调链复形. 因而单位映射$1:A\longrightarrow A$ 可以提升为链映射φ.

考察$\varphi_1:C_1\longrightarrow B$, 它可以看做上链群$Hom_R(C_1,B)$中的元素, 满足$\partial_2^*(\varphi_1)=\varphi_1\partial_2=0$. 因而$[\varphi_1]$代表$H^1(Hom_R(C,B))=Ext^1_R(A,B)$中的同调类.

因而, 一种扩张$0\longrightarrow B\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$ 确定$H^1(Hom(C,B))=Ext^1_R(A,B)$中的一个上同调类$[\varphi_1]$.

对于A,B的两种扩张

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} A \longrightarrow 0.$$

如果他们确定的上同调类$[\varphi_1] \in Ext_R^1(A,B)$相同, 则这两种扩张等价, 即

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cong"'] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"'] & E_1 \arrow[r, "g_1"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

可换.

习题

(1) 求$\mathbb{Z}$模上的挠群
  (1), $Tor(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/3)$，
  (2), $Tor(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/2)$，
  (3), $Tor(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3)$。

(2) 令p是一个奇素数，$T[x]$为域$\mathbb{Z}/p$上的高度为p的截缩多项式环；即$T[x] = \mathbb{Z}/p[x]/\langle x^p \rangle$。$\mathbb{Z}/p$上有$T[x]$模结构，定义为：$f(x) \cdot 1 = f(0)$即$x^i \cdot 1 = 0$。求$Ext$群$Ext^n_{T[x]}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$。

§4.4 泛系数定理

在介绍过张量积、挠群Tor和Ext群的基本知识以后，本节我们将介绍泛系数定理；从代数上讲：泛系数定理解释的是链复形C的同调群与$C\otimes A$的同调群的关系。而从几何上讲：这是一种由整系数同调群确定一般R系数同调群的办法。

首先我们看代数的泛系数定理：

定理4.4.1 设R是一个主理想整环，$C=\{C_n,\partial_n\}$是R上的自由链复形，则对任何R模A有以下可裂的短正合序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(C)\otimes_R A \arrow[r, "i\otimes 1"] & H_n(C\otimes_R A) \arrow[r] & Tor^R(H_{n-1}(C),A) \arrow[l, bend left, "\kappa"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

如果我们选定主理想整环$R=\mathbb{Z}$，选定自由链复形$C=S(X,A)$为奇异链复形，选定$\mathbb{Z}$ 模$A=R$，则有几何的泛系数定理：

定理4.4.2 对任何拓扑空间偶(X,A)及交换幺环R，有可裂的短正合序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(X,A)\otimes R \arrow[r, "i\otimes 1"] & H_n(X,A,R) \arrow[r] & Tor(H_{n-1}(X,A),R) \arrow[l, bend left, "\kappa"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

证明 对于主理想整环R上的自由链复形

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker\partial_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{\partial_n} Im\partial_n \longrightarrow 0$$

是一个短正合序列。定义链复形$Z=\{Z_n=Ker\partial_n,0\}$，$B_{-1}=\{B_{n-1}=Im\partial_n,0\}$，得到链复形的短正合序列：

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\partial} B_{-1} \longrightarrow 0$$

由于Z_n,B_{n-1}分别是自由R模C_n,C_{n-1}的子模，R是主理想整环，Z_n,B_{n-1}也是自由R模。张量积A以后得到正合序列：

$$0 \longrightarrow Z_n\otimes_R A \xrightarrow{i\otimes 1} C_n\otimes_R A \xrightarrow{\partial_n\otimes 1} B_{n-1}\otimes_R A \longrightarrow 0$$

这样我们有链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z\otimes_R A \xrightarrow{i\otimes 1} C\otimes_R A \xrightarrow{\partial\otimes 1} B_{-1}\otimes_R A \longrightarrow 0$$

它导出同调群的长正合序列

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(Z\otimes_R A) \arrow[r, "(i\otimes 1)_*"] \arrow[d, equal] & H_n(C\otimes_R A) \arrow[r, "(\partial\otimes 1)_*"] \arrow[d, equal] & H_n(B_{-1}\otimes_R A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(Z\otimes_R A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Z_n\otimes_R A \arrow[r, "(i\otimes 1)_*"] & H_n(C\otimes_R A) \arrow[r, "(\partial\otimes 1)_*"] & B_{n-1}\otimes_R A \arrow[r, "\delta"] & Z_{n-1}\otimes_R A \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

由于$\partial = 0 : Z_n \otimes_R A \to Z_{n-1} \otimes_R A$且$\partial = 0 : B_{n-1} \otimes_R A \to B_{n-2} \otimes_R A$，$H_n(Z \otimes_R A) = Z_n \otimes_R A$, $H_n(B_{-1} \otimes_R A) = B_{n-1} \otimes_R A$。

考察同态$(\partial \otimes 1)_* : H_n(C \otimes_R A) \longrightarrow H_n(B_{-1} \otimes_R A)$，由群同态基本定理我们有短正合序列

$$0 \longrightarrow Ker(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow H_n(C \otimes_R A) \longrightarrow Im(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow 0$$

下面我们计算$Ker(\partial \otimes 1)_*$和$Im(\partial \otimes 1)_*$。

首先，由联系同态的定义知

$$\delta = i : H_{n+1}(B_{-1} \otimes_R A) = B_n \otimes_R A \longrightarrow H_n(Z \otimes_R A) = Z_n \otimes_R A$$

是内射，因而

$$Ker(\partial \otimes 1)_* = Im(i \otimes 1)_* \cong Z_n \otimes_R A / Im\delta = Z_n \otimes A / B_n \otimes_R A = H_n(C) \otimes_R A$$

下面考察

$$Im(\partial \otimes_R 1)_* = Ker\delta \qquad \begin{array}{ccc} H_n(B_{-1} \otimes_R A) & \longrightarrow & H_{n-1}(Z \otimes_R A) \\ \| & & \| \\ B_{n-1} \otimes_R A & \xrightarrow{i} & Z_{n-1} \otimes_R A \end{array}$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

可以看成是$H_{n-1}(C)$的一个自由分解。张量积A以后得到链复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{n-1} \otimes_R A \xrightarrow{i} Z_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

因而$Ker\delta = Keri = Tor^R(H_{n-1}(C), A)$。定理得证。

例1 已知$H_n(\mathbb{R}P^{2k}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 2s-1 < 2k \\ 0 & n = 2s或 > 2k \end{cases}$ 求$H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)$。

由定理4.4.2知

(1) 对于$n = 0$有正合序列

$$0 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow Tor(H_{-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

此时认为$H_{-1}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$，因而
$H_0(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = H_0(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2$。

(2) 对于$n = 1$有正合序列

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow Tor(H_0(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

此时$H_1(\mathbb{R}P^{2k}) = \mathbb{Z}/2$，而$Tor(H_0(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) = Tor(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0$。因而
$H_1(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

(3) 当$1 < n = 2s-1 < 2k$取奇数时，正合序列

$$0 \longrightarrow H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow Tor(H_{2s-2}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

中$H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}) = \mathbb{Z}/2$，$H_{2s-2}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$。$H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

(4) 当$0 < n = 2s \leqslant 2k$时，正合序列

$$0 \longrightarrow H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow Tor(H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

中$H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$，$Tor(H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) = Tor(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。因而

$H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

(5) 当$n > 2k$时，$H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = 0$。

$H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)$常被记为$\mathbb{Z}/2[x]/\langle x^{2k+1}\rangle$。$\mathbb{Z}/2$上的多项式商掉$x^{2k+1}$，其中$x^n$是$H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)$的生成元。

§4.4 Künneth 公式

Künneth公式可以分为代数Künneth公式和几何Künneth公式。代数Künneth公式讲的是：怎样确定两个链复形张量积的同调群。而几何Künneth公式是一种利用X和Y的同调群确定乘积空间$X\times Y$的同调群的方法。相对来说代数Künneth公式较容易证明，为此我们先介绍代数Künneth公式。

在本节我们将限定环R是一个主理想整环。

定义4.5.1 设$C=\{C_n,\partial'_n\}$，$D=\{D_n,\partial''_n\}$是主理想整环R上的两个链复形。定义它们的张量积$C\otimes D$为链复形$\{(C\otimes D)_n,\partial_n\}$，其中

$$(C\otimes D)_n=\bigoplus_{i=0}^{n}C_i\otimes D_{n-i}=\bigoplus_{i+j=n}C_i\otimes D_j$$

边缘同态$\partial_n:(C\otimes D)_n\longrightarrow(C\otimes D)_{n-1}$在$(C\otimes D)_n$ 的子模$C_i\otimes D_j$，$i+j=n$上定义为：对$C_i\otimes D_j$中的生成元$a\otimes b$，$\partial_n(a\otimes b)=\partial'_i(a)\otimes b+(-1)^i a\otimes\partial''_j(b)$。 即：$(C\otimes D)_n$是下图中斜向的各$R$模的直和，其边缘同态是向右下斜向各$R$模的直和的映射。

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+2}\otimes D_{j-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & & \cdots \arrow[r] & C_{i+1}\otimes D_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+1}\otimes D_{j-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & C_i\otimes D_j \arrow[r] \arrow[d] & C_i\otimes D_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & \vdots & \\
 & \cdots \arrow[r] & C_{i-1}\otimes D_{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-1}\otimes D_j \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & & \\
\cdots \arrow[r] & C_{i-2}\otimes D_{j+2} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-2}\otimes D_{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

注意到$\partial'_i(a)\otimes b\in C_{i-1}\otimes D_j$，$a\otimes\partial''_j(b)\in C_i\otimes D_{j-1}$，

$$\partial_n:(C\otimes D)_n\longrightarrow(C\otimes D)_{n-1}$$

是同态。由

$$\begin{aligned}\partial\partial(a\otimes b)=&\partial\left(\partial(a)\otimes b+(-1)^i a\otimes\partial(b)\right)\\=&\partial\partial(a)\otimes b+(-1)^{i-1}\partial(a)\otimes\partial(b)+(-1)^i\partial(a)\otimes\partial(b)+(-1)^i a\otimes\partial\partial(b)\end{aligned}$$

知$\partial_n\partial_{n+1}=0$。

定义4.5.2 设$A=\{A_n\}$，$B=\{B_n\}$是分次R模，定义$A\otimes B$和$Tor^R(A,B)$也是分次R模；其中

$$(A\otimes B)_n=\bigoplus_{i+j=n}A_i\otimes B_j\qquad Tor^R(A,B)_n=\bigoplus_{i+j=n}Tor^R(A_i,B_j).$$

对于链复形C，它的各维同调群$H_*(C)=\{H_n(C)\}$构成分次R模。

定理4.5.1（**代数**Künneth**公式**） 设C，D是主理想整环R上的自由链复形，则有可裂的短正合序列

$$0 \longrightarrow [H_*(C)\otimes H_*(D)] \longrightarrow H_n(C\otimes D) \longrightarrow \left[Tor^R(H_*(C),H_*(D))\right]_{n-1} \longrightarrow 0.$$

推论4.5.2 如果R是一个域，则$H_i(C)$，$H_j(D)$都是R上的线性空间，$Tor^R(H_i(C),H_j(D))\equiv 0$。

$$H_n(C\otimes D)\cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(C)\otimes H_j(D)$$

定理4.5.1**的证明** 代数Künneth公式的证明思路和泛系数定理的证明很相近，只是更复杂。

首先由链复形C构做链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\partial} B_{-1} \longrightarrow 0$$

其中$Z_i=Ker\partial_i$，$B_{i-1}=Im\partial_i$。由于C是主理想整环R上的自由链复形，对任何i，Z_i，B_{i-1}都是自由R模。因而对任何j

$$0 \longrightarrow Z_i\otimes D_j \xrightarrow{i\otimes 1} C_i\otimes D_j \xrightarrow{\partial\otimes 1} B_{i-1}\otimes D_j \longrightarrow 0$$

是短正合序列。固定$i+j=n$做直和以后

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} Z_i\otimes D_j \xrightarrow{i\otimes 1} \bigoplus_{i+j=n} C_i\otimes D_j \xrightarrow{\partial\otimes 1} \bigoplus_{i+j=n} B_{i-1}\otimes D_j \longrightarrow 0$$

还是短正合序列。

考察链复形$Z\otimes D$，$C\otimes D$，$B_{-1}\otimes D$的边缘同态：注意到B_{-1}的第i个链群是B_{i-1}，对于$(B\otimes D)_n$的子模$B_{i-1}\otimes D_j$中的生成元$\partial_i(a)\otimes b$

$$\partial_n(\partial_i(a)\otimes b)=\partial_{i-1}\partial_i(a)\otimes b+(-1)^i\partial_i(a)\otimes\partial_j(b)=(-1)^i\partial_i(a)\otimes\partial_j(b)$$

对$(C\otimes D)_n$的子模$C_i\otimes D_j$中的生成元$a\otimes b$，

$$\begin{aligned}(\partial\otimes 1)\partial_n(a\otimes b) =&(\partial\otimes 1)(\partial_i(a)\otimes b+(-1)^i a\otimes\partial_j(b))\\ =&\partial_{i-1}\partial_i(a)\otimes b+(-1)^i\partial_i(a)\otimes\partial_j(b)\\ =&(-1)^i\partial_i(a)\otimes\partial_j(b)\\ =&\partial_n(\partial\otimes 1)(a\otimes b)\end{aligned}$$

我们有短正合序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus_{i+j=n}Z_i\otimes D_j \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d, "\partial_n"] & \oplus_{i+j=n}C_i\otimes D_j \arrow[r, "\partial\otimes 1"] \arrow[d, "\partial_n"] & \oplus_{i+j=n}B_{i-1}\otimes D_j \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus_{i+j=n-1}Z_i\otimes D_j \arrow[r, "i\otimes 1"] & \oplus_{i+j=n-1}C_i\otimes D_j \arrow[r, "\partial\otimes 1"] & \oplus_{i+j=n-1}B_{i-1}\otimes D_j \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即有张量积链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z\otimes D \xrightarrow{i\otimes 1} C\otimes D \xrightarrow{\partial\otimes 1} B_{-1}\otimes D \longrightarrow 0$$

它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(B_{-1}\otimes D) \xrightarrow{\delta} H_n(Z\otimes D) \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} H_n(B_{-1}\otimes D) \longrightarrow \cdots$$

因而有短正合序列

$$0 \longrightarrow Ker(\partial\otimes 1)_* \longrightarrow H_n(C\otimes D) \longrightarrow Im(\partial\otimes 1)_* \longrightarrow 0$$

下面我们计算$H_n(Z\otimes D), H_n(B_{-1}\otimes D)$及$Ker(\partial\otimes 1)_*, Im(\partial\otimes 1)_*$。
考虑链复形$Z\otimes D$的直和项及边缘同态

$$\begin{tikzcd}
Z_0\otimes D_n \arrow[d, "1\otimes\partial"] & Z_1\otimes D_{n-1} \arrow[d, "1\otimes\partial"] \arrow[dl, "0"'] & Z_2\otimes D_{n-2} \arrow[d, "1\otimes\partial"] \arrow[dl, "0"'] & \cdots & Z_{n-1}\otimes D_1 \arrow[d, "1\otimes\partial"'] & Z_n\otimes D_0 \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "0"'] \\
Z_0\otimes D_{n-1} & Z_1\otimes D_{n-2} & Z_2\otimes D_{n-3} & \cdots & Z_{n-1}\otimes D_0 & 0
\end{tikzcd}$$

我们注意到$\partial_n = 1\otimes\partial : Z_i\otimes D_j \to Z_i\otimes D_{j-1}$。因而由$Z_i$是自由$R$模知

$$H_n(Z\otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} Z_i\otimes H_j(D).$$

同理$H_{n+1}(B_{-1}\otimes D) = \oplus_{i+j=n} B_i\otimes H_j(D)$。而联系同态

$$\delta = i\otimes 1 : H_{n+1}(B_{-1}\otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} B_i\otimes H_j(D) \longrightarrow H_n(Z\otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} Z_i\otimes H_j(D)$$

是内射。因而

$$\begin{aligned}
Ker(\partial\otimes 1)_* =& Im(i\otimes 1)_* = H_n(Z\otimes D)/Ker(i\otimes 1)_* = H_n(Z\otimes D)/Im\delta \\
&= \bigoplus_{i+j=n} Z_i\otimes H_j(D)/\bigoplus_{i+j=n} B_i\otimes H_j(D) = \bigoplus_{i+j=n} H_i(C)\otimes H_j(D)
\end{aligned}$$

下面计算$Im(\partial\otimes 1)_* = Ker\delta$。考虑$H_n(B_{-1}\otimes D)$和$H_{n-1}(Z\otimes D)$的直和项

$$\delta = i\otimes 1 \qquad \begin{tikzcd}
B_{i-1}\otimes H_j(D) \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z_{i-1}\otimes H_j(D) \arrow[d, hook] \\
H_n(B_{-1}\otimes D) \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(Z\otimes D)
\end{tikzcd}$$

同样，由于$Z_{i-1} = Ker\partial_{i-1}$，$B_{i-1} = Im\partial_i$都是自由$R$模

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{i-1} \xrightarrow{i} Z_{i-1} \longrightarrow H_{i-1}(C) \longrightarrow 0$$

可以看做是$H_{i-1}(C)$的一个自由分解。张量积$H_j(C)$之后得到链复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{i-1}\otimes H_j(D) \xrightarrow{(i\otimes 1)} Z_{i-1}\otimes H_j(D) \longrightarrow 0$$

而$Ker(i\otimes 1) = Tor^R(H_{i-1}(C), H_j(D))$。因而

$$Im(\partial\otimes 1)_* = Ker\delta = \bigoplus_{i+j=n} Tor^R(H_{i-1}(C), H_j(D)) = \bigoplus_{i+j=n-1} Tor^R(H_i(C), H_j(D))$$

定理结论成立。

根据定义；对于环R上的两个模A,B，做R模A的自由分解C

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

张量积B得到链复形$C\otimes B$

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}\otimes B \xrightarrow{\partial\otimes 1} C_n\otimes B \xrightarrow{\partial\otimes 1} C_{n-1}\otimes B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1\otimes B \xrightarrow{\partial\otimes 1} C_0\otimes B \longrightarrow 0$$

$C\otimes B$的同调群$H_n(C\otimes B)=Tor_n^R(A,B)$。

做R模B的自由分解

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

张量积A得到链复形$D\otimes A$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1}\otimes A \xrightarrow{\partial\otimes 1} D_n\otimes A \xrightarrow{\partial\otimes 1} D_{n-1}\otimes B \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1\otimes A \xrightarrow{\partial\otimes 1} D_0\otimes A \longrightarrow 0$$

$D\otimes A$的同调群$H_n(D\otimes A)=Tor_n^R(B,A)$。从定义看$Tor_n^R(A,B)$与$Tor_n^R(B,A)$ 并不相同。

当A，B是主理想整环R上的模时，对于A,B的自由分解C，D有：

$$H_i(C)=\begin{cases} A & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases} \qquad\qquad H_j(D)=\begin{cases} B & j=0 \\ 0 & j>0 \end{cases}$$

考虑C与D的张量积，显然作为链复形$C\otimes D$与$D\otimes C$ 同构，因而它们的同调群同构。用Künneth公式计算$C\otimes D$ 由正合序列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} H_i(C)\otimes H_j(D) \longrightarrow H_1(C\otimes D) \longrightarrow Tor^R(H_0(C),H_0(D)) \longrightarrow 0$$

知$H_1(C\otimes D)=Tor^R(A,B)$。用Künneth公式计算$D\otimes C$得到$H_1(D\otimes C)=Tor^R(B,A)$。因而当$R$是主理想整环时

$$Tor^R(A,B)=Tor^R(B,A)$$

当R不是主理想整环时，同样有：

定理4.5.3 对任何交换幺环R上的模A,B，$Tor_n^R(A,B)\cong Tor_n^R(B,A)$。

这是同调代数中非常重要、也是比较难证明的一个定理（要用到谱序列的知识）。请读者参照（[6]第5章，谱序列）并给出一个证明）

例1 标准单形Δ^p,Δ^q是可缩空间，因而其整系数奇异链复形$S(\Delta^p)$的同调群为

$$H_i(\Delta^p)=\begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

由代数Künneth公式知有短正合序列

$$0\to \bigoplus_{i+j=n} H_i(\Delta^p)\otimes H_j(\Delta^q) \to H_n(S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q)) \to \bigoplus_{i+j=n-1} Tor^{\mathbb{Z}}(H_i(\Delta^p),H_j(\Delta^q)) \to 0$$

因而$H_n(S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q))=\begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

引理4.5.4（Eilenberg-Zilber**引理**） 对任何拓扑空间X,Y有自然的整系数链复形的链同伦等价映射$\rho: S(X\times Y)\longrightarrow S(X)\otimes S(Y)$。

因此对于主理想整环R，$S(X\times Y,R)=S(X\times Y)\otimes R$与$S(X)\otimes S(Y)\otimes R=S(X,R)\otimes S(Y,R)$链同伦等价。$H_n(X\times Y,R)=H_n(S(X,R)\otimes S(Y,R))$。由代数Künneth公式知：

定理4.5.5（Künneth**公式**） 设R是一个主理想整环，对任何拓扑空间X,Y有可裂的短正合序列

$$0 \to [H_*(X,R)\otimes H_*(Y,R)]_n \to H_n(X\times Y,R) \to [Tor^R(H_*(X,R),H_*(Y,R))]_{n-1} \to 0$$

特别的，如果R是一个域，则$H_i(X,R)$和$H_j(Y,R)$都是自由R模，

$$Tor^R(H_i(X,R),H_j(Y,R)) \equiv 0.$$

推论4.5.6 如果R是一个域，则对任何拓扑空间X,Y有同构

$$H_n(X\times Y,R) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X,R)\otimes H_j(Y,R)$$

引理4.5.4**的证明** Eilenberg-Zilber引理的证明很难，读者可以参考[4]的第13章。在此我们只给出引理证明的主要思路。

构做链映射ρ的入手点在于要求ρ是自然的链映射，即：当有映射

$$f: X \longrightarrow X', \qquad g: Y \longrightarrow Y'$$

时，有以下的交换图

$$\begin{array}{ccc} S(X\times Y) & \xrightarrow{\rho} & S(X)\otimes S(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f\times g)_\#} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\#\otimes g_\#} \\ S(X'\times Y') & \xrightarrow{\rho} & S(X')\otimes S(Y') \end{array}$$

注意到，任何$X\times Y$中的n维奇异单形$\sigma:\Delta^n \longrightarrow X\times Y$可以表示成$\sigma = (f,g)$其中

$$f:\Delta^n \to X, \qquad g:\Delta^n \to Y.$$

记$\iota_n:\Delta^n \longrightarrow \Delta^n$为单位映射，并记$\delta_n:\Delta^n \longrightarrow \Delta^n\times\Delta^n$为对角映射（即$\delta_n(x)=(x,x)$）。则

$$\sigma = (f,g) = (f\times g)\cdot\delta_n : \Delta^n \xrightarrow{\delta_n} \Delta^n\times\Delta^n \xrightarrow{(f\times g)} X\times Y$$

将$\delta_n:\Delta^n\to\Delta^n\times\Delta^n$看成$S_n(\Delta^n\times\Delta^n)$ 中的n维奇异单形，将

$$f\times g:\Delta^n\times\Delta^n \longrightarrow X\times Y$$

看成拓扑空间之间的映射。则$f\times g$诱导出奇异链群间的同态

$$(f\times g)_\#: S_n(\Delta^n\times\Delta^n) \longrightarrow S_n(X\times Y)$$

并且$(f\times g)_\#(\delta_n) = (f,g) = \sigma$。此时如果我们知道链映射

$$\rho: S_n(\Delta^n\times\Delta^n) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n)\otimes S_j(\Delta^n)$$

中$\rho(\delta_n)$在$\bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n)\otimes S_j(\Delta^n)$中的像（只要知道$\rho(\delta_n)$ 的像就够了），则由自然性可以定义$\rho: S_n(X\times Y)\to (S(X)\otimes S(Y))_n$为

$$\rho((f,g)) = \rho\cdot(f\times g)_\#(\delta_n) = (f_\#\otimes g_\#)(\rho(\delta_n)) \tag{4.5.7}$$

见下图

$$\begin{array}{ccc} S_n(\Delta^n\times\Delta^n) & \xrightarrow{\rho} & \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n)\otimes S_j(\Delta^n) \\ \downarrow{\scriptstyle (f\times g)_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f_\#\otimes g_\#} \\ S_n(X\times Y) & \xrightarrow{\rho} & \bigoplus_{i+j=n} S_i(X)\otimes S_j(Y) \end{array}$$

下面我们将利用零调自由模型定理归纳地给出$\rho(\delta_n)$进而给出$\rho: S_n(X\times Y)\longrightarrow (S(X)\otimes S(Y))_n$的定义。

首先$(S(\Delta^0)\otimes S(\Delta^0))_0 = S_0(\Delta^0)\otimes S_0(\Delta^0)$，定义

$$\rho(\delta_0)=\iota_0\otimes\iota_0$$

进而利用(4.5.7)给出

$$\rho: S_0(X\times Y)\longrightarrow (S(X)\otimes S(Y))_0.$$

此时链映射

$$\rho: S_0(X\times Y)\longrightarrow S_0(X)\otimes S_0(Y)$$

为：对任何$\sigma=(x,y)\in S_0(X\otimes Y)$，$\rho(x,y)=x\otimes y$。

之后我们构做

$$\rho: S_1(\Delta^1\times\Delta^1)\longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta_1)\otimes S_j(\Delta^1),$$

其中最重要的是找到$\rho(\delta_1)$在$\left[S_0(\Delta^1)\otimes S_1(\Delta^1)\right]\oplus\left[S_1(\Delta^1)\otimes S_0(\Delta^1)\right]$中的像。由此可以利用(4.5.7)定义$\rho: S_1(X\times Y)\longrightarrow [S(X)\otimes S(Y)]_n$。

首先考察$S(\Delta^n\times\Delta^n)$和$S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n)$的同调群。由例1我们知道

$$H_j(S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n)) = H_j(\Delta^n\times\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j=0 \\ 0 & j>0 \end{cases}$$

$H_0(\Delta^n\times\Delta^n)$的生成元为$[(x,y)]$，$H_0(S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n))$的生成元为$[x\otimes y]$，其中$x,y:\Delta^0\longrightarrow\Delta^n$为将$\Delta^0$中唯一的点映射到$\Delta^n$中$x,y$的映射。因而有下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} S_1(\Delta^1\times\Delta^1) & \xrightarrow{\partial_1} & S_0(\Delta^1\times\Delta^1) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \| & & \\ \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta^1)\otimes S_j(\Delta^1) & \xrightarrow{\partial_1'} & S_0(\Delta^1)\otimes S_0(\Delta^1) & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中$\rho: S_0(\Delta^1\times\Delta^1)\longrightarrow S_0(\Delta^1)\otimes S_0(\Delta^1)$已经给出。对于$\delta_1\in S_1(\Delta^1\times\Delta^1)$，用追图法发现

$$\varepsilon'\cdot\rho\cdot\partial_1(\delta_1)=\varepsilon\cdot\partial_1(\delta_1)=0$$

因而$\rho\cdot\partial_1(\delta_1)\in Ker\varepsilon'$。而由

$$H_j(S(\Delta^1)\otimes S(\Delta^1)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j=0 \\ 0 & j>0 \end{cases}$$

知下面的一行是正合的，因而$Ker\varepsilon' = Im\partial_1'$。存在$z \in \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta^1) \otimes S_j(\Delta^1)$使得$\partial_1'(z) = \rho \cdot \partial_1(\delta_1)$。定义$\rho(\delta_1) = z$，则$\partial_1' \cdot \rho(\delta_1) = \rho \cdot \partial_1(\delta)$。利用(4.5.7)扩张成

$$\rho : S_1(X \times Y) \longrightarrow \oplus_{i+j=1} S_i(X) \otimes S_j(Y)$$

其中ρ满足$\partial_1' \cdot \rho = \rho \cdot \partial_1$。

归纳地假设$\rho : S_{n-1}(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus\limits_{i+j=n-1} S_i(X) \otimes S_j(Y)$ 已经给出。考虑下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
S_n(\Delta^n \times \Delta^n) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, dotted, "\rho"] & S_{n-1}(\Delta^n \times \Delta^n) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\rho"] & S_{n-2}(\Delta^n \times \Delta^n) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \cdots \\
\bigoplus\limits_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) \arrow[r, "\partial_n'"] & \bigoplus\limits_{i+j=n-1} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) \arrow[r, "\partial_{n-1}'"] & \bigoplus\limits_{i+j=n-2} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

同样用追图法知$\partial_{n-1}' \cdot \rho \cdot \partial_n(\delta_n) = 0$，$\rho \cdot \partial_n(\delta_n) \in Ker\partial_{n-1}'$。而由

$$H_j(S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

知下面一行是正合的，$Ker\partial_{n-1}' = Im\partial_n'$。存在$z_n \in \oplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n)$使得$\partial_n'(z_n) = \rho \cdot \partial_n(\delta_n)$。定义$\rho(\delta_n) = z_n$，完成归纳。

为证明$\rho : S(X \times Y) \longrightarrow S(X) \otimes S(Y)$是自然的链复形的链同伦等价映射，我们还需要构做链映射

$$\varphi : S(X) \otimes S(Y) \longrightarrow S(X \times Y)$$

和链同伦H, G，使得$\varphi \cdot \rho \overset{H}{\simeq} 1$，$\rho \cdot \varphi \overset{G}{\simeq} 1$。

构做自然的链映射$\varphi_n : \bigoplus_{i+j=n} S_i(X) \otimes S_j(Y) \longrightarrow S_n(X \times Y)$ 的关键是给出直和项$S_i(\Delta^i) \otimes S_j(\Delta^j)$中生成元$\iota_i \otimes \iota_j$ 在$S_n(\Delta^i \times \Delta^j)$中的像。当知道

$$\varphi(\iota_i \otimes \iota_j) \in S_n(\Delta^i \times \Delta^j)$$

之后，对任何直和项$S_i(X) \otimes S_j(Y)$中的生成元$f \otimes g$，其中

$$f : \Delta^i \to X, \qquad g : \Delta^j \to Y$$

为奇异单形，考察f, g诱导的链映射$f_\# : S(\Delta^i) \to S(X)$和$g_\# : S(\Delta^j) \to S(Y)$ 发现

$$(f_\# \otimes g_\#)(\iota_i \otimes \iota_j) = f \otimes g.$$

由自然性

$$\begin{tikzcd}
S_i(\Delta^i) \otimes S_j(\Delta^j) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_\# \otimes g_\#"'] & S_n(\Delta^i \times \Delta^j) \arrow[d, "(f \times g)_\#"] \\
S_i(X) \otimes S_j(Y) \arrow[r, "\varphi"] & S_n(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

定义$\varphi(f\otimes g)=(f\times g)_\#\cdot\varphi(\iota_i\otimes\iota_j)$即可。链同伦 $H=\{H_n:S_n(X\times Y)\to S_{n+1}(X\times Y)\}$和$G=\{G_n:[S(X)\otimes S(Y)]_n\to[S(X)\otimes S(Y)]_{n+1}\}$的构做办法于此类似。

同样用归纳法假设$\varphi:\bigoplus\limits_{r+s=n-1}S_r(X)\otimes S_s(Y)$ 已经给出。由

$$H_n(\Delta^i\times\Delta^j)=\begin{cases}\mathbb{Z} & n=0\\ 0 & n>0\end{cases}$$

我们知道下面图表中的下面一行是正合的

$$\begin{tikzcd}
S_i(\Delta^i)\otimes S_j(\Delta^j) \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, dotted, "\varphi"] & \bigoplus\limits_{r+s=n-1}S_r(\Delta^i)\otimes S_s(\Delta^j) \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi"] & \bigoplus\limits_{r+s=n-2}S_r(\Delta^i)\otimes S_s(\Delta^j) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
S_n(\Delta^i\times\Delta^j) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(\Delta^i\times\Delta^j) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & S_{n-2}(\Delta^i\times\Delta^j) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由$\partial_{n-1}\cdot\varphi\cdot\partial'_n(\iota_i\otimes\iota_j)=0$ 知存在$z_n\in S_n(\Delta^i\times\Delta^j)$使得$\partial_n(z_n)=\varphi\cdot\partial'_n(\iota_i\otimes\iota_j)$。定义$\varphi(\iota_i\otimes\iota_j)=z_n$即可。

例2 求$S^1\times S^1$的整系数同调群

我们知道$H_i(S^1)=\begin{cases}\mathbb{Z} & i=0,1\text{时}\\ 0 & i>1\text{时}\end{cases}$. 由Künneth公式，有短正合序列

$$0\longrightarrow\big[H_*(S^1)\otimes H_*(S^1)\big]_n\longrightarrow H_n(S^1\times S^1)\longrightarrow\big[Tor(H_*(S^1),H_*(S^1))\big]_{n-1}\longrightarrow 0$$

由于$H_*(S^1)$都是自由$\mathbb{Z}$模，$Tor(H_i(S^1),H_j(S^1))=0$。

$$H_n(S^1\times S^1)\cong\oplus_{i+j=n}H_i(S^1)\otimes H_j(S^1)$$

因而

$H_0(S^1\times S^1)\cong H_0(S^1)\otimes H_0(S^1)=\mathbb{Z}$,

$H_1(S^1\times S^1)\cong\big(H_0(S^1)\otimes H_1(S^1)\big)\oplus\big(H_1(S^1)\otimes H_0(S^1)\big)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$,

$H_2(S^1\times S^1)\cong H_1(S^1)\otimes H_1(S^1)=\mathbb{Z}$,

当$n>2$时$H_n(S^1\times S^1)=0$。

习题4.5.1 利用Künneth公式求$S^m\times S^n$，$\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2$，$\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}P^m$的各维整系数同调群。

习题4.5.2 利用Künneth公式求$\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}P^m$的$\mathbb{Z}/2$ 系数同调群$H_i(\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}P^m,\mathbb{Z}/2)$。

习题4.5.3 证明：如果R是一个域，则$H_n(X\times Y,R)=\oplus_{i+j=n}H_i(X,R)\otimes H_j(Y,R)$。

第五章　奇异上同调

5.1　奇异上同调群 (模)

在介绍奇异上同调之前我们需要先介绍一下 Hom 这个函子。

定义 5.1.1: R 是一个环，A 和 G 是两个 R 模，$Hom_R(A,G)$ 定义为所有 A 到 G 的 R 模同态，在 $Hom_R(A,G)$ 中可以定义运算：
1. 加法：f+g:$A \to G$ 定义为 (f+g)(a)=f(a)+g(a)
2. 乘法（R 模结构）：$\forall r \in R$ 以及 $f \in Hom_R(A,G)$，定义 $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$

这样 $Hom_R(A,G)$ 成为一个 R 模，并且下面的命题说明 $Hom_R(-,G)$ 是反变函子，$Hom_R(-,G)$ 是共变函子

命题 5.1.1: 给定 R 模 G，则对任何 R 模 A、B 以及同态 $\varphi : A \to B$ 可导出同态 $\varphi^* : Hom_R(B,G) \to Hom_R(A,G)$ 满足：
1.$1^* = 1 : Hom_R(A,G) \to Hom_R(A,G)$；

2. 对 $\varphi : A \to B$，$\psi : B \to C$，$(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$：

$$\begin{tikzcd} Hom_R(C,G) \arrow[rr, "\psi^*"] \arrow[dr, "(\psi\varphi)^*"'] & & Hom_R(B,G) \arrow[dl, "\varphi^*"] \\ & Hom_R(A,G) & \end{tikzcd}$$

证明　对 $\varphi : A \to B$，定义 $\varphi^* : Hom_R(B,G) \to Hom_R(A,G), f \to \varphi^* f = f \circ \varphi$，容易验证 φ^* 就是满足要求的同态 ■

命题 5.1.2: 给定 R 模 A，则对任何 R 模 G、H 以及同态 $\varphi : G \to H$ 可导出同态 $\varphi_* : Hom_R(A,G) \to Hom_R(A,H)$ 满足：
1.$1_* = 1 : Hom_R(A,G) \to Hom_R(A,G)$；

2. 对 $\varphi : G \to H$，$\psi : H \to K$，$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$：

$$\begin{tikzcd} Hom_R(A,G) \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "(\psi\varphi)_*"'] & & Hom_R(A,H) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & Hom_R(A,H) & \end{tikzcd}$$

证明 对 $\varphi : G \to H$，定义 $\varphi_* : Hom_R(A,G) \to Hom_R(A,H), f \to \varphi_* f = \varphi \circ f$，容易验证 φ_* 就是满足要求的同态 ■

由上述两个命题可以得如下性质：

性质 5.1.3：

1. 若 $\varphi : A \to B$ 是同构，则 $\varphi^* : Hom_R(B,G) \to Hom_R(A,G)$
2. 若 $\varphi = 0 : A \to B$，则 $\varphi^* = 0 : Hom_R(B,G) \to Hom_R(A,G)$

例 5.1.1: R 是主理想整环，G 是 R 模，则 $Hom_R(R,G) \cong G$

$\varphi : G \to Hom_R(R,G), a \to f_a : f_a(r) = r \cdot a$，自己验证 φ 是同态，且是 1-1 对应

例 5.1.2: A 是有限生成自由 R 模，则 $Hom_R(A,R) \cong A$ 称为 A 的对偶，记为 A^*

证明 记 A 的生成元为 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$，A 中的元形如 $\sum r_i s_i$（其中 $r_i \in R$，$s_i \in S$，构作一族同态 s_i^* 为 $s_i^*(s_j) = \delta_i^j$,$s_i^*(\sum r_j s_j) = r_i$，$\forall f : A \to R$，记 $f(s_i) = r_i^0$，则对 $\forall a = \sum r_i s_i \in A$，有 $f(\sum r_i s_i) = \sum r_i r_i^0 = \sum r_i^0 s_i^*$，这样建立了从 $Hom_R(A,R) \cong A$ 到 A 的一一对应 ■

下面的命题说明 $Hom_R(-,G)$ 保持左正合

命题 5.1.3: 1. 若 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ 正合，则 $0 \to Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(A,G)$ 正合

2. 若 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ 裂正合，则 $0 \to Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(A,G) \to 0$ 裂正合

证明 1.$\psi^* : Hom_R(C,G) \to Hom_R(B,G)$ 是单同态：$\forall f \in Hom_R(C,G)$，$\psi^* f = 0$ 是指 $\psi^* f : B \to G$ 是零同态。要证 $f : C \to G$ 是零同态：$\forall x \in C$，因为 ψ 满同态，所以有 $b \in B$，使得 $\psi(b) = x$,$f(x) = f\psi(b) = (\psi^* f)(b) = 0$, 即 f 是零同态 ψ^* 是单同态；

在 $Hom_R(B,G)$ 正合：首先，$\varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^* = 0$，即 $Im\,\psi^* \subset ker\,\varphi^*$；若 $f \in ker\,\varphi^*$，即 $f : B \to G$ 满足 $f\varphi = 0$，则根据代数同态基本定理，$C = B/A$ 到 G 有自然的同态 $g : C \to G$ 使得 $g\psi = f$，即 $\psi^* g = f$

2. 当 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ 裂正合时，存在 $\varepsilon : B \to A$ 使得 $\varepsilon\varphi = 1$，则 $\varphi^*\varepsilon^* = (\varepsilon\varphi)^* = 1$，即 $0 \to Hom_R(C,G) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(B,G) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(A,G) \to 0$ 裂正合 ■

定理 5.1.4: $Hom_R(\oplus A_\alpha, G) \cong \prod Hom_R(A_\alpha, G)$;$Hom_R(A, \oplus G_\alpha) \cong \prod Hom_R(A, G_\alpha)$

有了 $Hom_R(-,G)$ 之后就可以定义奇异上链复形和奇异上同调群。当 R 明确时，$Hom_R(-,G)$ 也记为 $Hom(-,G)$

定义 5.1.2: 对任何拓扑空间 X 和环 R（R 的加法构成 Z 模），令 $S^n(X,R) = Hom_Z(S_n(X),R)$ 称为 X 的 R 系数 n 维奇异上链群，$\partial_{n+1}: S_{n+1}(X) \to S_n(X)$ 导出同态 $\delta_n = \partial^*_{n+1}: S^n(X,R) \to S^{n+1}(X,R)$ 满足 $\delta_n\delta_{n-1} = 0$，因而 $\{S^n(X,R),\delta_n\}$ 构成上链复形，δ_n 称为上边缘同态

定义：$Z^n(X,R) = ker\,\delta_n \subset S^n(X,R)$ 称为 n 维上闭链群
$B^n(X,R) = Im\,\delta_{n-1} \subset S^n(X,R)$ 称为 n 维上边缘链群
$H^n(X,R) = Z^n(X,R)/B^n(X,R)$ 称为 n 维上同调群

注: 1.$S^n(X,R) = Hom(S_n(X),R)$ 中的元 c^n 是同态 $c^n: S_n(X) \to R$，对于 $S_n(X)$ 中的元 $c = \sum k_i\sigma_i, k_i \in Z, \sigma_i: \Delta^n \to X$，$c^n$ 在 c 上的取值记为 $\langle c^n, c\rangle \in R$
2.$\forall \sigma_i: \Delta^n \to X$，由例 5.1.2，存在同态 σ_i^* 使得 $\sigma_i^*(\sigma_i) = 1, \sigma_i^*(\sigma) = 0 (\sigma \neq \sigma_i)$，但 σ_i^* 全体不能构成 $S^n(X,R)$ 的加法基；有限和 $\sum\limits_i k_i\sigma_i^*$ 不能表示所有的同态 $f: S_n(X) \to R$，但是无限和 $\sum\limits_{\sigma_i:\Delta^n\to X} k_i\sigma_i^*$ 可以
3.$c^n \in Z^n(X,R) = ker\,\delta_n$ 是指 $\forall c_{n+1} \in S_{n+1}(X)$，$\langle \delta_n(c^n), c_{n+1}\rangle = \langle c^n, \partial_{n+1}c_{n+1}\rangle = 0$，即 $c^n\partial_{n+1}: S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{c^n} R$ 是零同态
4.$b^n \in Z^n(X,R) = Im\,\delta_{n-1}$ 是指 $\exists f^{n-1}: S_{n-1}(X) \to R, b^n = f^{n-1}\partial_n: S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{f^{n-1}} R$
5.$S_n(X) = \bigoplus\limits_{\sigma:\Delta^n\to X} Z_\sigma$，其中每个 $Z_\sigma \cong Z$，由定理 5.1.4，$S^n(X,R) = Hom(S_n(X),R) \cong \prod\limits_{\sigma:\Delta^n\to X} Hom(Z_\sigma,R)$，$Hom(Z_\sigma,R)$ 作为 R 模是自由的，由 σ 的对偶 σ^* 生成

和奇异同调群一样，由定义可以计算的上同调群只有独点空间的上同调群和拓扑空间的 0 维上同调群

例 5.1.3: 对于独点空间，$H^n(x_0,R) = \begin{cases} R & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$

证明 $S_n(x_0)$ 由唯一确定的 $\sigma_n: \Delta^n \to x_0$ 生成，$S^n(x_0,R) = Hom(S_n(x_0),R)$ 由 σ_n^* 生成，$\langle \delta_n(\sigma_n^*), \sigma_{n+1}\rangle = \langle \sigma_n^*, \partial_{n+1}\sigma_{n+1}\rangle = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 2k+1 \end{cases}$，即 $\delta_n(\sigma_n^*) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \sigma_{n+1}^* & n = 2k+1 \end{cases}$，由此知结论成立 ■

例 5.1.4: 如 X 道路联通，则 $H^0(X,R) \cong R$

证明 $S_0(X)$ 中的单形 $\sigma: pt \to X$ 记为 x，$S^0(X,R) = Hom(S_n(S_0(X),R)$ 中的元 $f: S_0(X) \to R$ 满足 $\langle f, \sum k_ix_i\rangle = \sum k_i\langle f, x_i\rangle$，$S_0(X) = ker\,\delta_0$，$f \in ker\,\delta_0$ 是指 $\forall \sigma: \Delta^1 \to X$,$\langle \delta_0(f), \sigma\rangle = \langle f, \partial_1\sigma\rangle = 0$，由道路联通，对任何 $x, y \in X$，存在

$\sigma:\Delta^1\to X$ 使 $\sigma(1)=x,\sigma(0)=y$，则 $0=\langle\delta_0(f),\sigma\rangle=\langle f,\partial_1\sigma\rangle=\langle f,\sigma(1)-\sigma(0)\rangle=\langle f,x\rangle-\langle f,y\rangle$，即 $ker\,\delta_0$ 是 $S_0(X)\to R$ 的 R 值常值同态全体，从而与 R 同构 ■

例 5.1.5: 如 X 有 k 个道路联通分支，则 $H^0(X,R)\cong\prod_k R$

上同调群（模）同样满足同伦不变性、正合序列、切除定理等公理，只不过映射方向是反的

定义 5.1.3: $f:X\to Y$ 连续映射，则 f 导出 $f_\sharp:S_n(X)\to S_n(Y)$, 应用 $Hom(-,R)$ 函子导出 $f^\sharp:S^n(Y,R)\to S^n(X,R)$ 并且满足 $\delta_n f^\sharp=f^\sharp\delta_n$，因而 $f^\sharp$ 导出同态 $f^*:H^n(Y,R)\to H^n(X,R)$

注: 对 $[c^n]\in H^n(X,R)$ 以及 $c=\sum k_i\sigma_i\in S_n(X)$，$\langle f^\sharp c^n,\sum k_i\sigma_i\rangle=\langle c^n,\sum f_\sharp k_i\sigma_i\rangle=\langle c^n,\sum k_i f\sigma_i\rangle$，其中 $f\sigma_i:\Delta^n\to X\to Y$ 是 Y 中奇异单形

命题 5.1.5: 导出同态满足：
1.$1^*=1:H^n(X,R)\to H^n(X,R)$；

2. 对 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$(gf)^*=f^*g^*$：

$$\begin{tikzcd} H^n(Z,R) \arrow[rr, "g^*"] \arrow[dr, "(gf)^*"'] & & H^n(Y,R) \arrow[dl, "f^*"] \\ & H^n(X,R) & \end{tikzcd}$$

证明 首先，在下链水平上有对应的共变函子性质，应用 $Hom(-,R)$ 函子得到在奇异上链水平上命题成立，最后注意到导出同态保持上闭链和上边缘链 ■

定理 5.1.6: 1. 如 $f\simeq g:X\to Y$，则导出同态 $f^*=g^*:H^n(Y,R)\to H^n(X,R)$
2. 如 $f:X\to Y$ 同伦，则导出同态 $f^*=g^*:H^n(Y,R)\to H^n(X,R)$

证明 证明：在奇异同调中证明过，如果 $f\simeq g:X\to Y$，则存在链映射的链同伦 $H_n:S_n(X)\to S_{n+1}(X)$ 满足 $f_\sharp-g_\sharp=H_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}H_n$，应用 $Hom(-,R)$ 函子得 $f^\sharp-g^\sharp=\delta_{n-1}H^*_{n-1}+H^*_n\delta_n$。从而这里可以应用在证明奇异同调同伦不变性时的办法。2 是 1 的自然推论 ■

定理 5.1.7: 如 (X,A) 空间偶，则有上同调群的长正合序列 $\cdots\to H^n(X,A,R)\xrightarrow{j^*}H^n(X,R)\xrightarrow{i^*}H^n(A,R)\xrightarrow{\delta}H^{n+1}(X,A,R)\to\cdots$

证明 关于空间偶 (X,A) 有奇异链复形的短正合列 $0\to S_*(A)\to S_*(X)\to S_*(X,A)\to 0$，即对任何 n 都有正合序列 $0\to S_n(A)\xrightarrow{i}S_n(X)\xrightarrow{j}S_n(X,A)\to 0$，其中 $S_n(A),S_n(X),S_n(X,A)$ 是自由 Z 模，从而正合序列可裂。因此有上链复形的短正合列，它诱导上同调群的长正合列。

■

定理的解释:1.$S^n(X,A,R)$ 中的元:$c^n : S_n(X)/S_n(A) \to R$,$q : S_n(X) \to S_n(X)/S_n(A)$ 商映射，$j^*c^n = c^nq\ S_n(X) \to R$
2.i^*c^n 可看作 c^n 在 $S_n(A)$ 上的限制
3. 联系同态：$\forall [c^n] \in H^n(A,R)$，$c^n : S_n(A) \to R$ 是满足 $\delta_n c^n = 0$ 的同态，即 $\forall x_{n+1} \in S_n(A)$，$\langle \delta_n(c^n), x_{n+1}\rangle = \langle c^n, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = 0$，由奇异上链复形的短正合列，$i^* : S^n(X,R) \to S^n(A,R)$ 满射，从而有 $f^n : S_n(X) \to R$，根据之前一段的解释，c^n 是 f^n 在 $S_n(A)$ 上的限制。令 $g^{n+1} = \delta_n(f^n) \in S^{n+1}(X,R)$，则 $\forall x_{n+1} \in S_n(A)$，$\langle g^n, x_{n+1}\rangle = \langle \delta_n(f^n), x_{n+1}\rangle = \langle f^n, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = \langle c^n, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = 0$，从而 g^{n+1} 可看作 $S^{n+1}(X,A,R)$ 的元，联系同态即为 $\delta[c^n] = [g^{n+1}]$
至今我们仍未提到上同调群的切除定理，这是因为它的过程并不是简单的下同调群版本的对偶，因为如本节中间的注所说，σ_i^* 全体不能构成 $S^n(X,R)$ 的加法基；有限和 $\sum\limits_i k_i\sigma_i^*$ 不能表示所有的同态 $f : S_n(X) \to R$，从而重心重分的办法在上同调中不再有效。从而我们上同调群的泛系数定理

定义 5.1.4: 设 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是环 R 上的链复形。G 是一个 R 模，用 $Hom(-,G)$ 作用链复形 $\{C_n, \partial_n\}$ 得到一个上链复形，记为 $C^*(G)$，其上同调记为 $H^n(C,G)$，称为链复形 $C = \{C_n, \partial_n\}$G 系数上同调群

定义 5.1.5: kronecker 映射 $\kappa : H^n(C,G) \to Hom(H_n(C),G)$ 定义为 $\forall [z^n] \in H^n(C,G)$,$\kappa[z^n] = \langle z^n, -\rangle \in H_n(C) \to G$

定理 5.1.8: $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是环 R 上的自由链复形，G 是一个 R 模，则有自然的短正合序列 $0 \to Ext^1_R(H_{n-1}(C),G) \to H^n(C,G) \xrightarrow{\kappa} Hom_R(H_n(C),G) \to 0$ 且序列可裂（但不自然可裂）

证明 考虑链复形 $\{C_n, \partial_n\}$ 的闭链群 $Z_n(C) = ker\,\partial_n$ 以及边缘链群 $B_{n-1}(C) = Im\,\partial_n$，由链复形的短正合序列 $0 \to Z(C) \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\partial} B_{-1}(C) \to 0$，应用 $Hom(-,G)$，得上链复形的短正合列 $0 \to Hom(B_{-1}(C),G) \xrightarrow{\partial^*} Hom(C,G) \xrightarrow{i^*} Hom(Z(C),G) \to 0$,从而有上同调群的长正合序列 $\cdots \to H^n(B_{-1}(C),G) \xrightarrow{\partial^*} H^n(C,G) \xrightarrow{i^*} H^n(Z(C),G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B_{-1}(C),G) \to \cdots$。因为 $B_{-1}(C)$ 和 $Z(C)$ 的微分都是平凡的，所以有

$$H^n(B_{-1}(C),G) = Hom(B_{n-1}(C),G)，H^n(Z(C),G) = Hom(Z_n(C),G)$$

。现在需要计算联系同态：如上一节最后所分析的那样，$\forall g^n : Z_n(C) \to G$, 由上链复形的短正合序列，$i^* : Hom(C_n,G) \to Hom(Z_n(C),G)$ 满射，从而有 $f^n \in Hom(C_n,G)$ 使得 $i^*f^n = g^n$，联系同态 $\delta : H^n(Z(C),G) = Hom(Z_n(C),G) \to H^{n+1}(B_{-1}(C),G) = Hom(B_n(C),G)$ 的像 $[c^{n+1}] = \delta[g^n] \in H^{n+1}(B_{-1}(C),G) = Hom(B_n(C),G)$ 为满足方程 $\partial^*_{n+1}c^{n+1} = \delta_n f^n$ 的解。找 $c^{n+1} = g^n \circ j : B_n(C) \to$

$Z_n(C) \to G$（这里 $B_n(C)$ 是 $Z_n(C)$ 的子群），记得 $i^*f^n = g^n$ 的意义是 f^n 限制在 $Z_n(C)$ 上等于 g^n,所以 $\forall x_{n+1} \in C_{n+1}$ $\langle \partial^*_{n+1}c^{n+1}, x_{n+1}\rangle = \langle c^{n+1}, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = \langle g^n \circ j, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = \langle f^n, \partial_{n+1}x_{n+1}\rangle = \langle \delta_n f^n, x_{n+1}\rangle$,从而联系同态 $\delta = j^* : Hom(Z_n(C), G) \to Hom(B_n(C), G)$

将上同调群的长正合序列 $\cdots \to H^n(B_{-1}(C), G) \xrightarrow{\partial^*} H^n(C, G) \xrightarrow{i^*} H^n(Z(C), G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B_{-1}(C), G) \to \cdots$ 断成短正合序列 $0 \to ker\, i^* \to H^n(C, G) \to Im\, i^* \to 0$。由长正合序列，$Im\, i^* = ker\, \delta = ker\, j^*$。由定义，$g^n : Z_n(C) \to G$ 在 $ker\, j^*$ 中即为 $g^n \circ j : B_n(C) \to Z_n(C) \to G$ 为 0，从而 $ker\, j^* = Hom(Z_n(C)/B_n(C), G) = Hom(H_n(C), G)$

另一方面,,$ker\, i^* = ker\, \delta = Im\, \partial^* \cong H^n(B_{-1}(C), G)/Im\, \delta = Hom(B_{n-1}(C), G)/Im\, \delta = Hom(B_{n-1}(C), G)/Im\, j^*$,注意到短正合序列 $0 \to B_{n-1}(C) \xrightarrow{j} Z_{n-1}(C) \xrightarrow{\varepsilon} H_{n-1}(C) \to 0$ 是 $H_{n-1}(C)$,用 $Hom(-, G)$ 得上链复形 $0 \to Hom(Z_n(C), G) \xrightarrow{j^*} Hom(B_n(C), G) \to 0$，由 Ext 的定义，$Ext^1_R(H_{n-1}(C), G) = Hom(B_{n-1}(C), G)/Im\, j^*$

可裂：定义 $\varphi[g^n] = [f^n]$，则 φ 满足 $\kappa\varphi = 1$，从而可裂 ∎

推论 5.1.9: 如 (X, A) 空间偶，R 是环，则有以下正合序列：

$$0 \to Ext^1_Z(H_{n-1}(A), R) \to H^n(A, R) \xrightarrow{\kappa} Hom_Z(H_n(A), R) \to 0$$
$$0 \to Ext^1_Z(H_{n-1}(X), R) \to H^n(X, R) \xrightarrow{\kappa} Hom_Z(H_n(X), R) \to 0$$
$$0 \to Ext^1_Z(H_{n-1}(X, A), R) \to H^n(X, A, R) \xrightarrow{\kappa} Hom_Z(H_n(X, A), R) \to 0$$

推论 5.1.10: 上同调群有切除定理：当 $\overline{U} \subset \mathring{A}$ 时，$i^* : H^n(X, A, R) \to H^n(X - U, A - U, R)$ 是同构

5.2 同调与上同调的各种乘积

本节我们讨论上同调群的 cup 积，从而使上同调群具有反交换环结构。另外介绍同调群与上同调群的 cap 积、斜积、叉积等乘积。

定义 5.2.1: 若 $\sigma : \Delta^{p+q} \to X$ 是 X 的 p+q 维奇异单形，定义线性映射 $\lambda_p : \Delta^p \to \Delta^{p+q}, e_0e_1\cdots e_p \to e_0e_1\cdots e_p$，$\rho_q : \Delta^q \to \Delta^{p+q}, e_0e_1\cdots e_p \to e_pe_{p+1}\cdots e_{p+q}$。

定义 5.2.2: 若 $\varphi^p \in S^p(X, R)$ 是 X 的 p 维奇异上链，$\psi^q \in S^q(X, R)$ 是 X 的 q 维奇异上链。则上积 $\smile$ 定义为 $\langle \varphi^p \smile \psi^q, \sigma\rangle = \langle \varphi^p, \sigma\lambda_p\rangle\langle \psi^q, \sigma\rho_q\rangle$

命题 5.2.1: $\smile$: $S^*(X) \times S^*(X) \to S^*(X)$ 是双线性的，可结合的，且有乘积单位元 $1 \in S^0(X) : \Delta^0 \to X, \langle 1, \sigma\rangle = 1$

命题 5.2.2: cup 积的上边缘为 $\delta(\varphi^p \smile \psi^q) = \delta\, \varphi^p \smile \psi^q + (-1)^p\varphi^p \smile \delta\, \psi^q$

证明 $\sigma : \Delta^{p+q+1} \to X$ 是 X 的 p+q+1 维奇异单形，$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i\sigma\circ F^i$，其中 $F^i : \Delta^{p+q} \to \Delta^{p+q+1}, e_0e_1\cdots e_{p+q} \to e_0e_1\cdots\widehat{e_i}\cdots e_{p+q+1}$，$\langle\delta\varphi^p\smile\psi^q,\sigma\rangle = \langle\varphi^p,\partial(\sigma\lambda_{p+1})\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_q\rangle = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\langle\varphi^p,\sigma\lambda_{p+1}\circ F^i\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_q\rangle = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\langle\varphi^p,\sigma\circ F^i\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_q\rangle + (-1)^{p+1}\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_q\rangle$;
另一方面，

$$\begin{aligned}
\langle(-1)^p\varphi^p\smile\delta\psi^q,\sigma\rangle &= (-1)^p\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\partial(\sigma\rho_{q+1})\rangle \\
&= (-1)^p\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sum_{i=p}^{p+q+1}(-1)^{i-p}\sigma\rho_{q+1}\circ F^i\rangle \\
&= \sum_{i=p}^{p+q+1}(-1)^i\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_{q+1}\circ F^i\rangle \\
&= (-1)^p\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\rho_q\rangle + \sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i\langle\varphi^p,\sigma\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\circ F^i\rho_q\rangle
\end{aligned}$$

以上两式相加得 $\langle\delta\varphi^p\smile\psi^q,\sigma\rangle+\langle(-1)^p\varphi^p\smile\delta\psi^q,\sigma\rangle = \sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i\langle\varphi^p,\sigma\circ F^i\lambda_p\rangle\langle\psi^q,\sigma\circ F^i\rho_q\rangle = \langle\delta(\varphi^p\smile\psi^q),\sigma\rangle$ ■

推论 5.2.3: cup 积导出 $H^*(X,R)$ 的乘积，因而 $H^*(X,R)$ 成为 R 上的分次代数

证明 $S^*(X,R)$ 是 R 上的环，$Z^*(X,R) = \bigoplus_{q\geq 0} Z^q(X,R)$ 是 $S^*(X,R)$ 的子环，只要验证 $B^*(X,R)$ 是 $Z^*(X,R)$ 的双边理想。取 $\varphi^{q+1} = \delta_q\varphi^q \in B^{q+1}(X,R)$ 以及 $\psi^p \in Z^p(X,R)$，由上积的上边缘公式，$\varphi^{q+1}\smile\psi^p = \delta(\varphi^q\smile\psi^p) \in B^*(X,R)$，$\psi^p\smile\varphi^{q+1} = \delta((-1)^p\psi^p\smile\varphi^q) \in B^*(X,R)$，从而 $B^*(X,R)$ 确是 $Z^*(X,R)$ 的双边理想 ■

推论 5.2.4: 若 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的映射，导出同态 $f^* : H^*(Y,R) \to H^*(X,R)$ 和 $f^* : S^*(Y,R) \to S^*(X,R)$ 是环同态

定理 5.2.5: cup 积在同调水平上满足反交换性,即若 $\psi^p \in H^p(X,R), \varphi^q \in H^q(X,R)$，则 $\psi^p\smile\varphi^q = (-1)^{pq}\varphi^q\smile\psi^p$

为证明这个定理，我们先引入零调承载子的技术

定义 5.2.3: $\varphi : S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链映射，若对 $S_*(X)$ 中每个奇异单形 σ，都有 $S_*(Y)$ 的一个零调子复形 $C(\sigma)$，使得 $\varphi(\sigma) \in C(\sigma)$，且对于 σ 的每个面 $\sigma^i = \sigma\circ F^i$，$C(\sigma^i) \subset C(\sigma)$，则称 C 是 φ 的零调承载子

引理 5.2.1: 若 $\varphi|_{S_0(X)} = 0$，且 φ 有零调承载子，则 φ 链同伦于 0

证明 我们用归纳法构造链同伦 $H:S_p(X)\to S_{p+1}(Y)$。当 p=0 时，令 H=0. 若 $k<p$ 时 H 已经构造出,并且对 $k<p$ 的任意单形 τ,$H(\tau)\in C(\tau)$。则需要对 p 维单形 σ 定义 H 并验证满足链同伦的等式。$H\partial\sigma=H(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^i)\in\bigcup_i C(\sigma^i)\subset C(\sigma)$，由零调承载子的定义，$\varphi(\sigma)\in C(\sigma)$。而 $\varphi(\sigma)-H\partial\sigma$ 是一闭链：$\partial(\varphi(\sigma)-H\partial\sigma)=\varphi\partial\sigma-\partial H\partial\sigma=(\varphi-\partial H)\partial\sigma$，由归纳假设，$(\varphi-\partial H)\partial\sigma=H\partial\partial\sigma=0$。而之前证明 $\varphi(\sigma)-H\partial\sigma$ 在零调承载子中，所以存在 $z\in C(\sigma)$，使得 $\partial z=\varphi(\sigma)-H\partial\sigma$，定义 $H\sigma=z$ 即可。

■

现在分以下五个步骤证明定理 5.2.5

1. 若 $i_0,\cdots,i_q$ 是 0 与 p 之间的（q+1）个整数,则对于每个 p 维单形 σ,$\sigma(i_0,\cdots,i_q):\Delta^q\xrightarrow{p}\Delta^p\xrightarrow{\sigma}X$ 是 q 维单形，其中 $p:\Delta^q\to\Delta^p,e_0e_1\cdots e_q\to e_{i_0}e_{i_1}\cdots e_{i_q}$。由所有 $\sigma(i_0,\cdots,i_q)$ 生成的 $S_q(X)$ 的子模记为 $C(\sigma)_q$。$\partial_qC(\sigma)_q\subset C(\sigma)_{q-1}$，因此 $C(\sigma)=\{C(\sigma)_q,\partial_q\}$ 成一链复形。

2.$C(\sigma)$ 是零调的：构造 $J:C(\sigma)_q\to C(\sigma)_{q+1}$ 为 $\sigma(i_0,\cdots,i_q)\to\sigma(0,i_0,\cdots,i_q)$。直接的计算可以验证 $\partial J+J\partial=Id$。从而 $C(\sigma)$ 恒等映射与零映射同伦，即 $C(\sigma)$ 零调。

3. 在奇异链群上定义置换同态 $S_q(X)\to S_q(X),\sigma\to\overline{\sigma}:\Delta^q\xrightarrow{T}\Delta^q\xrightarrow{\sigma}X$，其中 $T:\Delta^q\to\Delta^q,e_0e_1\cdots e_q\to e_qe_{q-1}\cdots e_0$，定义分次模 $S_*(X)$ 的自同态 θ 为：对任何 $\sigma\in S_q(X)$，$\theta_q\sigma=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\overline{\sigma}$。

4.θ 是一个链映射：$\theta\partial\sigma=\theta_{q-1}(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma^i)=(-1)^{\frac{(q-1)(q-2)}{2}}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\overline{\sigma^i}$，$\partial\theta\sigma=\partial((-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\overline{\sigma})=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{q-i}\overline{\sigma^i}$，从而 $\theta\partial=\partial\theta$，即 θ 是链映射；注意到对于任意的 q 维奇异单形 σ，σ 和 $\theta\sigma$ 都在零调承载子 $C(\sigma)$ 中，由引理 5.3.1，θ 作为链映射与 $S_*(X)$ 上的恒等映射同伦，从而 θ 导出的上同调群同态 θ^* 等于恒等映射。

5. 最后我们来计算 θ^* 在 cup 积上的作用：容易验证 $\overline{\sigma}\lambda_p=\overline{\sigma\rho_p},\overline{\sigma}\rho_q=\overline{\sigma\lambda_q}$，所以

$$\begin{aligned}\langle\theta^*(\psi^p\smile\varphi^q),\sigma\rangle &= \langle\psi^p\smile\varphi^q,\theta\sigma\rangle\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}\langle\psi^p\smile\varphi^q,\overline{\sigma}\rangle\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}\langle\psi^p,\overline{\sigma}\lambda_p\rangle\langle\varphi^q,\overline{\sigma}\rho_q\rangle\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}\langle\psi^p,\overline{\sigma\rho_p}\rangle\langle\varphi^q,\overline{\sigma\lambda_q}\rangle\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\langle\psi^p,\theta(\sigma\rho_p)\rangle\langle\varphi^q,\theta(\sigma\lambda_q)\rangle\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\langle\theta^*(\varphi^q)\smile\theta^*(\psi^p),\sigma\rangle\end{aligned}$$

因此 $\psi^p\smile\varphi^q=\theta^*(\psi^p\smile\varphi^q)=-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\theta^*(\varphi^q)\smile\theta^*(\psi^p)=$

$(-1)^{pq}\varphi^q \smile \psi^p$.
下面我们介绍 cap 积 $\frown$：对 p 维奇异上链 c 以及 p+q 维奇异单形 z，$z \frown c$ 是唯一的 q 维奇异单形，满足对任意的 q 维上链 d，$\langle c \smile d, z\rangle = \langle d, z \frown c\rangle$。cap 积一个显式的构造是 $z \frown c = \langle c, z\lambda_p\rangle z\rho_q$

命题 5.2.6: 若 X 道路连通，$c \in S^p(X)$，$z \in S_p(X)$，$z \frown c = \langle c, z\rangle$

证明 考虑 cup 积的单位元 1，$\langle 1, z \frown c\rangle = \langle c \smile 1, z\rangle = \langle c, z\rangle$，从而 $z \frown c = \langle c, z\rangle$ ■

命题 5.2.7: 若 $c \in S^p(X)$，$d \in S^q(X)$，$z \in S_r(X)$，$(z \frown c) \frown d = z \frown (c \smile d)$

证明 $\langle \varphi, z \frown (c \smile d)\rangle = \langle c \smile d \smile \varphi, z\rangle = \langle d \smile \varphi, z \frown c\rangle = \langle \varphi, z \frown c) \frown d\rangle$ ■

由上积的上边缘公式（命题 5.2.2），我们可以推导出如下 cap 积的边缘公式：

命题 5.2.8: cap 积的边缘为 $\partial(z \frown c) = (-1)^p(\partial z \frown c - z \frown \delta c)$

证明 $\langle d, \partial z \frown c\rangle = \langle c \smile d, \partial z\rangle = \langle \delta(c \smile d), z\rangle = \langle \delta c \smile d + (-1)^p c \smile \delta d, z\rangle = \langle d, z \frown \delta c\rangle + (-1)^p\langle \delta d, z \frown c\rangle = \langle d, z \frown \delta c\rangle + (-1)^p\langle d, \partial(z \frown c)\rangle$，移项整理即得结论 ■

推论 5.2.9: cap 积诱导了同调和上同调的双线性配对 $\frown$: $H_{p+q}(X, R) \otimes H^p(X, R) \to H_q(X, R)$

证明 双线性性易，唯一需要验证的是配对良定义，即若 $z \in H_{p+q}(X, R)$，$c \in H^p(X, R)$，则 $(z + \partial z') \frown (c + \delta c')$ 与 $z \frown c$ 代表同一个同调类。$(z + \partial z') \frown (c + \delta c') = z \frown c + \partial z' \frown c + z \frown \delta c' + \partial z' \frown \delta c'$。由 cap 积的边缘公式，$\partial(z' \frown c) = (-1)^p(\partial z' \frown c - z' \frown \delta c) = (-1)^p\partial z' \frown c$，$\partial(z \frown c') = (-1)^{p-1}(\partial z \frown c' - z \frown \delta c') = (-1)^p z \frown \delta c'$，$\partial(z \frown \delta c') = (-1)^{p-1}\partial z' \frown \delta c'$，所以 $= z \frown c + \partial z' \frown c + z \frown \delta c' + \partial z' \frown \delta c' = (-1)^p\partial(z' \frown c + z \frown c' - z \frown \delta c')$。从而 $(z + \partial z') \frown (c + \delta c')$ 与 $z \frown c$ 代表同一个同调类。 ■

相对 cap 积：cap 积也可以定义在相对同调上 $H_{p+q}(X, A, R) \otimes H^p(X, A, R) \to H_q(X, R)$：$S_{p+q}(X, A, R)$ 中的元 z 为 0 是指 z 的像在 A 中，$c \in S^p(X, A, R)$ 是奇异上链是指 $c : S_q(X, R) \to R$ 限制在 $S_q(A, R)$ 上为 0，所以按照 $z \frown c = \langle c, z\lambda_p\rangle z\rho_q$，相对奇异闭链和相对奇异上闭链做 cap 积会得到 X 中的闭链，而不是相对闭链。
叉积：为了介绍叉积，我们需要先回顾乘积空间的奇异链复形与相应奇异链复形的张量积的同伦等价。
回忆我们之前构造过链同伦等价 $A : S_*(X \times Y) \to S_*(X) \otimes S_*(Y)$，其中 $S_*(X \times Y)$ 的 q 维奇异单形 σ 可以写成（f，g）的形式，$f = p_X\sigma \in S_q(X), g = p_Y\sigma \in S_q(Y)$

（p_X 和 p_Y 分别是 $X\times Y$ 到 X 和 Y 的投射所诱导的同态），$S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 的 q 维链群为 $\bigoplus\limits_{i+j=q} S_i(X)\otimes S_j(Y)$，边缘算子为 $\partial(z\otimes z')=\partial z\otimes z'+(-1)^{deg\,z}z\otimes\partial z'$。A 的链同伦逆为 $B:S_*(X)\otimes S_*(Y)\to S_*(X\times Y)$。对于 $u\in S_p(X),v\in S_q(Y)$，同调叉积定义为 $u\times v=B(u\otimes v)$；对于 $x\in S^p(X),y\in S^q(Y)$，上同调叉积定义为 $x\times y=A^*(x\otimes y)$

命题 5.2.10: 上同调叉积与同调叉积的配值为 $\langle x\times y,u\times v\rangle=\langle x,u\rangle\langle y,v\rangle$

命题 5.2.11: 同调叉积的边缘为 $\partial(u\times v)=\partial u\times v+(-1)^{deg\,u}u\times\partial v$；
上同调叉积的上边缘为 $\delta(x\times y)=\delta\,x\times y+(-1)^p x\times\delta\,y$

证明 这两个式子都可由张量积复形的边缘公式直接得到。以第一个式子为例，$\partial(u\times v)=\partial(B(u\otimes v))=B\partial(u\otimes v)=B(\partial u\otimes v+(-1)^{deg\,u}u\otimes\partial v)=\partial u\times v+(-1)^{deg\,u}u\times\partial v$ ■

命题 5.2.12: 上同调叉积与 cup 积的基本关系为：对于 $c,d\in S^*(X)$，$c\smile d=\Delta^*c\times d$，其中 $\Delta:X\to X\times X$ 为对角映射

证明 $\langle\Delta^*c\times d,\sigma\rangle=\langle c\times d,\Delta_*\sigma\rangle=\langle A^*(c\otimes d),\Delta_*\sigma\rangle=\langle c\otimes d,A(\sigma,\sigma)\rangle=\langle c\otimes d,\sum\limits_{i+j|c|+|d|}\sigma\lambda_i\otimes\sigma\rho_j\rangle=\langle c,\sigma\lambda_{|c|}\rangle\langle d,\sigma\rho_{|d|}\rangle$ ■

命题 5.2.13: 对于 $c\in S^*(X),d\in S^*(Y)$，$c\times d=p_X^*c\smile p_Y^*d$

证明 $\langle c\times d,(\sigma,\tau)\rangle=\langle c\otimes d,A(\sigma,\tau)\rangle=\langle c\otimes d,\sum\limits_{i+j=|c|+|d|}\sigma\lambda_i\otimes\tau\rho_j\rangle=\langle c,\sigma\lambda_{|c|}\rangle\langle d,\tau\rho_{|d|}\rangle$；
$\langle p_X^*c\smile p_Y^*d,(\sigma,\tau)\rangle=\langle p_X^*c,(\sigma,\tau)\lambda_{|c|}\rangle\langle p_Y^*d,(\sigma,\tau)\rho_{|d|}\rangle=\langle c,p_X(\sigma,\tau)\lambda_{|c|}\rangle\langle d,p_Y(\sigma,\tau)\rho_{|d|}\rangle=\langle c,\sigma\lambda_{|c|}\rangle\langle d,\tau\rho_{|d|}\rangle$ ■

命题 5.2.14: 乘积空间中的上同调叉积和 cup 积满足 $(a\smile b)\times(c\smile d)=(-1)^{|b||c|}(a\times c)\smile(b\times d)$，其中 $a,b\in H^*(X),c,d\in H^*(Y)$

证明 $(a\smile b)\times(c\smile d)=p_X^*(a\smile b)\smile p_Y^*(c\smile d)=p_X^*a\smile p_X^*b\smile p_Y^*c\smile p_Y^*d=(-1)^{|b||c|}p_X^*a\smile p_Y^*c\smile p_X^*b\smile p_Y^*d=(-1)^{|b||c|}(a\times c)\smile(b\times d)$ ■

乘积空间 $X\times Y$ 上另一个重要的乘积是斜积 $/:H^{p+q}(X\times Y)\times H_p(X)\to H^q(Y),\gamma\otimes\alpha\to\gamma/\alpha$，其中 γ/α 是对所有 $\beta\in H_q(Y)$ 满足 $\langle\gamma/\alpha,\beta\rangle=\langle\gamma/,\alpha\times\beta\rangle$ 的解

命题 5.2.15: 斜积的上边缘为 $\delta(\gamma/\alpha)=(-1)^p(\delta\gamma/\alpha-\gamma/\partial\alpha)$

为了证明更多的关于乘积的等式，我们引入零调模型定理

定义 5.2.4: $\mathcal{AB}$ 是阿贝尔群范畴，$\mathcal{K}$ 是任意一个范畴，F 是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{AB}$ 的共变函子，称 F 有一组基，如果存在一族 $\{m_j \in FM_j | M_j \in \mathcal{K}\}_{j\in J}$ 满足对任意 $X \in \mathcal{K}$，FX 是由所有 $\{(F\sigma)m_j\}_{j\in J}$ 自由生成，其中 $\sigma : M_j \to X$ 跑遍所有 M_j 到 X 的态射。若 F 有一组基 $\{m_j \in FM_j\}_{j\in J}$，$\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{K}$ 中包含所有 M_j 的满子范畴（所谓满子范畴，就是指对于子范畴中任意两个对象，它们在原范畴中的态射都包含在子范畴中），F 也称在 $\mathcal{M}$ 上自由，$\{M_j\}$ 称为 F 的模型。

下文中函子若不明确指出，都默认是共变函子。

例 5.2.1: 若 $\mathcal{K}$ 是拓扑空间范畴，函子 F 是取 n 维奇异链群，则 F 的模型为 n 维标准单形 Δ^n

命题 5.2.16: F 是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{AB}$ 自由的函子，有一组基 $\{m_j \in FM_j\}_{j\in J}$，W 是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{AB}$ 另一个任意的函子，则对任何一族 $\{\omega_j \in WM_j\}_{j\in J}$，都有唯一的自然变换 $\Phi : F \to W$ 满足 $\Phi(m_j) = \omega_j$

证明 因为 $\{(F\sigma)m_j\}_{j\in J}$ 生成 FX，所以 Φ 如果存在则一定是唯一的。令 Φ 把生成元 $(F\sigma)m_j$ 映成 $(W\sigma)\omega_j$，唯一需要验证的是自然性：若 $g : X \to X'$ 是一个 $\mathcal{K}$ 中态射，则 $\Phi \circ Fg((F\sigma)m_j) = \Phi(F(g\sigma)m_j) = W(g\sigma)\omega_j = Wg \circ \Phi((F\sigma)m_j)$ ■

推论 5.2.17: 若 F 在 $\mathcal{M}$ 上自由，则对于任何 $F|_{\mathcal{M}} \to W|_{\mathcal{M}}$ 的自然变换都可以唯一扩充为自然变换 $F \to W$

命题 5.2.18: $F_1 \xrightarrow{\rho} F_0 \xrightarrow{\pi} G \to 0$ 是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{AB}$ 的函子的正合序列，F_0 在 $\mathcal{M}_0$ 上自由，F_1 在 $\mathcal{M}_1$ 上自由，$W : \mathcal{K} \to \mathcal{AB}$ 满足 $\forall 0 \neq \omega' \in W\,M'(M' \in \mathcal{M}_1)$，存在态射 $g : M' \to M(M \in \mathcal{M}_0)$ 满足 $Wg(\omega') \neq 0$，则任何 $\psi : G|_{\mathcal{M}_0} \to W|_{\mathcal{M}_0}$ 都可以唯一扩充为 $\Psi : G \to W$

证明 存在性：令 $\varphi = \psi(\pi|_{\mathcal{M}_0})$，则 φ 可以唯一扩充成 $\Phi : F_0 \to W$。令 $\Psi : G \to W$ 由 $\Psi\pi = \Phi$ 确定，它显然是 $\psi : G|_{\mathcal{M}_0} \to W|_{\mathcal{M}_0}$ 的一个扩充。为使 Ψ 良定义，需要验证 $\Phi\rho = 0$。由自然性，$(Wg)(\Phi\rho) = (\Phi\rho)(F_1 g)$，而由构造可以知道 $(\Phi\rho)$ 限制在 $\mathcal{M}_0$ 上为 0，因此对所有态射 $g : M' \to M(M \in \mathcal{M}_0)$ 以及 $m' \in M'(M' \in \mathcal{M}_1)$，$Wg$ 零化 $(\Phi\rho)m'$，由已知条件可得 $(\Phi\rho)m'$，从而 $\Phi\rho$ 在 $\mathcal{M}_1$ 上为 0，由推论 5.2.17，$\Phi\rho = 0$
唯一性：若存在两个满足条件的扩充 Ψ_1 和 Ψ_2，则 $\Psi_1\pi$ 和 $\Psi_2\pi$ 限制在 $\mathcal{M}_0$ 上相同，由推论 5.2.17，$\Psi_1\pi = \Psi_2\pi$，再由 π 是满射，$\Psi_1 = \Psi_2$ ■

命题 5.2.19:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\tau_1} & W_0 & \xrightarrow{\tau_0} & W_{-1} \\ & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_{-1} \downarrow \\ W_1' & \xrightarrow{\tau_1'} & W_0' & \xrightarrow{\tau_0'} & W_1' \end{array}$$

是一个关于函子的交换图，每个函子都是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{AB}$ 的，F 在 $\mathcal{M}$ 上自由，下面一行在 $\mathcal{M}$ 上正合，$\tau_0\tau_1 = 0$，则存在 $\varphi : F \to W_1'$ 完成交换图

证明 只要在基上定义 φ 即可。在基上，有 $\tau_0'\varphi_0\tau_1 = \varphi_{-1}\tau_0\tau_1 = 0$，因此由正合性，对于基元 $m_j \in FM_j$，存在 $\omega_j \in WM_j$ 使得 $\varphi_0\tau_1(m_j) = \tau_1'(\omega_j)$。定义 $\varphi(m_j) = \omega_j$ 即可。 ■

定理 5.2.20: $\partial\mathcal{AB}$ 是链复形范畴，F 和 V 都是从 $\mathcal{K}$ 到 $\partial\mathcal{AB}$ 的函子，F_q 和 V_q 是链复形对应的 q 维分支，并且满足：

1.$F_i = V_i = 0 (i < 0)$

2.$k \geq 0$ 时，F_k 在 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{K}$ 上自由

3.$k > 0$ 时，对所有 $M \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{M}_{k+1}$，$H_k(VM) = 0$

则 $\pi[F, V] \cong [H_0F, H_0V]$，这里 $\pi[F, V]$ 是链映射的同伦类集（成一个群），$[H_0F, H_0V]$ 是自然变换群

证明 这里的证明思路和证明导出函子与自由分解无关是一样的。链复形 F 和 V 的边缘算子分别记为 ∂ 和 ∂'，$\varepsilon' : V_0 \to H_0V$ 和 $\varepsilon : F_0 \to H_0F$ 是增广。对于给定的自然变换 $\varphi : H_0F \to H_0V$ 以及基元 $m_0 \in F_0M_0$，因为 $V_0 \to H_0V$ 是满射，所以存在 $\nu_0 \in V_0M_0$ 使得 $\varepsilon'\nu_0 = \varphi\varepsilon(m_0)$，令 f_0 把 m_0 映到 ν_0，则 $\varepsilon' f_0 = \varphi\varepsilon$，从而做出了 f_0。若 $f_k : F_k \to V_k$ 已作出，由 H_kV 在 $\mathcal{M}_{k+1}$ 上为 0 以及 5.2.19 可以做出 f_{k+1}. 综上，$\varphi : H_0F \to H_0V$ 可以由一个链映射 $f : F \to V$ 诱导。

若链映射 $f : F \to V$ 满足 $H_0f = 0$，则需要找到一个同伦 $\{s_k : F_k \to V_{k+1}\}$，满足 $\partial' s_k + s_{k-1}\partial = f_k$，k=0 时，$\varepsilon' f_0 = H_0f\varepsilon = 0$，即对于基元 $m_0 \in F_0M_0$，f_0m_0 在 $\partial' : V_1 \to V_0$ 的像中，所以可以由 $f_0 = \partial' s_0$ 确定 s_0。若 $s_{k-1} : F_{k-1} \to V_k$ 已经确定，即 $\partial' s_{k-1} + s_{k-2}\partial = f_{k-1}$，则 $\partial'(f_{k-1} - \partial' s_{k-1}) = 0$，即对于基元 $m_k \in F_kM_k$，$f_{k-1} - \partial' s_{k-1}(m_k)$ 在 ∂' 的核中，由 H_kV 在 $\mathcal{M}_k$ 上为 0，可以做出 s_k ■

推论 5.2.21: 条件同 5.2.20，若 $\forall 0 \neq v \in H_0VM'(M' \in \mathcal{M}_1)$，存在态射 $g : M' \to M(M \in \mathcal{M}_0)$ 满足 $H_0Vg(v) \neq 0$，则 $\pi[F, V] \cong [H_0F|_{\mathcal{M}_0}, H_0V|_{\mathcal{M}_0}]$. 换言之，链映射 $f : F \to V$ 在同伦的意义下完全由 H_0f 在 $\mathcal{M}_0$ 上的取值确定

应用 5.2.21，我们可以证明 Eilenberg-Zilber 引理

定理 5.2.22: F 和 F' 都是从乘积空间范畴到链复形范畴的函子。对于任意一个乘积空间 $X\times Y$，$F(X\times Y)=S(X\times Y)$，$F'(X\times Y)=S(X)\otimes S(Y)$，则在同伦意义下存在唯一的链映射 $\Phi:F\to F'$ 和 $\Psi:F'\to F$ 满足 $\Phi\Psi\sim 1$，$\Psi\Phi\sim 1$，且对于 X 和 Y 的 0 维单形 σ 和 τ，$\Phi_0(\sigma\otimes\tau)=\sigma\times\tau$，$\Psi_0(\sigma\times\tau)=\sigma\otimes\tau$

证明 证: F 和 F' 都是自由的: F_k 的模型为 $\{\Delta_p\times\Delta_q\}_{p+q=k}$, F'_k 的模型为 $\Delta_k\times\Delta_k$, H_kF 和 H_kF' 在模型 $\{\Delta_p\times\Delta_q\}_{p+q=k}(k>0)$ 上都为 0, 并且 $g:\Delta_p\times\Delta_q\to\Delta_0\times\Delta_0$ 导出同构 H_0Fg 和 $H_0F'g$，因此可以应用 5.1.6. 因为 $\mathcal{M}_0$ 只有 1 个元 $\Delta_0\times\Delta_0$，所以只要找链映射 Φ 和 Ψ，使得 $H_0\Phi$ 和 $H_0\Psi$ 限制在这个元上满足条件。记 $\tau_0:\Delta_0\to\Delta_0$ 为 0 维标准单形，令 $H_0\Phi(\tau_0\otimes\tau_0)=\tau_0\times\tau_0, H_0\Psi(\tau_0\times\tau_0)=\tau_0\otimes\tau_0$，从而在 $\mathcal{M}_0$ 上有 $\Phi\Psi=1$，$\Psi\Phi=1$，应用 5.1.6 得有链映射 $\Phi\Psi\sim 1$，$\Psi\Phi\sim 1$。最后，由自然性以及 $\Phi(\tau_0\otimes\tau_0)=\tau_0\times\tau_0$ 得对于 0 维单形 σ 和 τ，$\Phi_0(\sigma\otimes\tau)=\sigma\times\tau$。同理 $\Psi_0(\sigma\times\tau)=\sigma\otimes\tau$ ■

例 5.2.2: $i:X\times Y\to Y\times X,(x,y)\to(y,x)$ 是乘积空间的映射，$a\in H_p(X), b\in H_q(Y)$，则同调叉积满足 $i_*(a\times b)=(-1)^{pq}b\times a$

证明 应用零调模型定理，只需要考察下面的图在 $X\times Y=\Delta_0\times\Delta_0$ 处严格交换

$$\begin{tikzcd} S(X\times Y) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "A"'] & S(Y\times X) \arrow[d, "A"'] \\ S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "T"] & S(Y)\otimes S(X) \end{tikzcd}$$

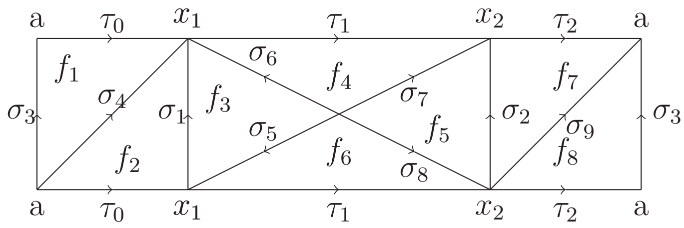
其中 $T:S(X)\otimes S(Y)\to S(Y)\otimes S(X), T(a\otimes b)=(-1)^{pq}b\otimes a$ ■

例 5.2.3: 另一个例子是验证叉积和 cap 积的联系公式 $(a\times b)\frown(c\times d)=(-1)^{(|d|-|b|)|a|}(a\frown c)\times(b\frown d)$，其中 $a\in H_*(X), b\in H_*(Y), c\in H^*(X), d\in H^*(Y)$

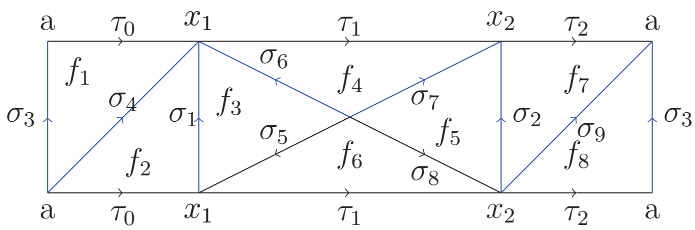
证明 对于任意的拓扑空间 X，定义 $E:S^r(X)\otimes S_r(X)\otimes S_t(X)\to S_t(X), u\otimes a\otimes b\to\langle u,a\rangle b$，以及对角映射 $D:S_*(X)\xrightarrow{\Delta}S_*(X\times X)\xrightarrow{A}S_*(X)\otimes S_*(X)$，对于固定的 $d\in S^*(Y)$ 以及 $b\in S_*(Y)$，定义 $F,G:S(X)\to S(X\times Y)$ 为 $F(a)=E(dp_Y\otimes DB(a\otimes b))$，$G(a)=B(a\otimes E(d\otimes Db))$，前者代表 $(a\times b)\frown p_Y^*d$，后者代表 $a\times(b\frown d)$。F 和 G 不满足零调模型定理的条件，$S(X\times Y)$ 在 $S(X)$ 的模型上不零调，但是当 X 取值为一点时，$F=(-1)^{(|d|-|b|)|a|}G$，从而由自然性 $p_YF=(-1)^{(|d|-|b|)|a|}p_YG$，$F-(-1)^{(|d|-|b|)|a|}G$ 属于 $S(X\times Y)$ 的子复形 $ker(p_Y:S(X\times Y)\to S(Y))$，并且 $ker(p_Y:S(X\times Y)\to S(Y))$ 在 $S(X)$ 的模型上零调，即可以对 $F-(-1)^{(|d|-|b|)|a|}G:S(X)\to ker(p_Y:S(X\times Y)\to S(Y))$ 应用零调模型定理，从而在同调水平上，$(a\times b)\frown p_Y^*d=(-1)^{(|d|-|b|)|a|}a\times(b\frown d)$，对 $Y\times X$ 应用这个等式并利用上一个例子的结论，有 $(a\times b)\frown p_X^*c=(a\frown c)\times b$，从而

$(a\times b)\frown(c\times d)=(a\times b)\frown(p_X^*c\smile p_Y^*d)=(a\times b\frown p_X^*c)\frown p_Y^*d=((a\frown c)\times b)\frown p_Y^*d=(-1)^{(|d|-|b|)|a|}(a\frown c)\times(b\frown d)$ ■

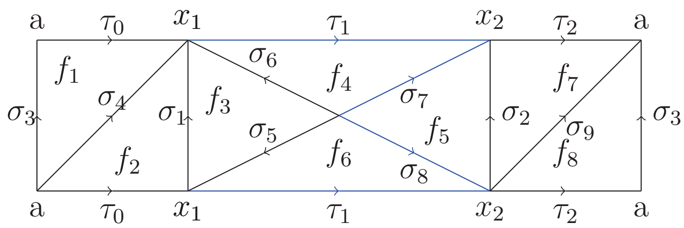
最后我们用定义计算一个拓扑空间的 cup 积。下图是环面 $X=T^2$ 的一个剖分



$H_0(X)=Z$ 由 $[a]$ 生成
$H_1(X)=Z\oplus Z$ 由 $z_1=[\sigma_1]$ 和 $z_2=[\tau_0+\tau_1+\tau_2]$ 生成
$H_2(X)=Z$ 由 $z_3=[f_1-f_2+f_3+f_4+f_5-f_6-f_7-f_8]$ 生成
由范系数定理，$H^n(X)\cong Hom_Z(H_n(X),Z)$，因此可以清晰描述出各维上同调群生成元
1.$H^0(X)\cong Hom_Z(H_0(X),Z)$，$H^0(X)$ 由 $g^0:H_0(X)\to Z,g^0([a])=1$ 生成，并将 g^0 扩充成一个上闭链 e_0，由 $\langle\delta_0e_0,\tau_0\rangle=\langle e_0,\partial\tau_0\rangle=\langle e_0,x_1-a\rangle=0$，$\langle e_0,x_1\rangle=1$
2.$H^1(X)\cong Hom_Z(H_1(X),Z)$ 由 $g^1:H_1(X)\to Z,g^1([\sigma_1])=1,g^1([\tau_0+\tau_1+\tau_2])=0$ 和 $g^2:H_1(X)\to Z,g^2([\sigma_1])=0,g^2([\tau_0+\tau_1+\tau_2])=1$ 生成。分别将 g^1 和 g^2 扩充成上闭链 l^1 和 l^2，$\langle l^1,\sigma_1\rangle=1,\langle l^1,\tau_i\rangle=0,\langle l^2,\sigma_1\rangle=0,\langle l^2,\tau_0\rangle=\langle l^2,\tau_1\rangle=0,\langle l^2,\tau_2\rangle=1$。由 $\langle\delta l^i,f_j\rangle=\langle l^i,\partial f_j\rangle=0$ 可以推算出未写出的各种配值
3.$H^2(X)\cong Hom_Z(H_2(X),Z)$ 由 $g^3:H_2(X)\to Z,g^3([f_1-f_2+f_3+f_4+f_5-f_6-f_7-f_8])=1$ 生成，将 g^3 扩充成上闭链 σ，$\langle\sigma,f_4\rangle=1,\langle\sigma,f_i\rangle=0(i\neq4)$
现在需要计算 l^1 和 l^2 的其他配值
l^1 的其他配值：$\langle\delta l^1,f_2\rangle=\langle l^1,\partial f_2\rangle=0$
$\partial f_2=\sigma_1-\sigma_4+\tau_0$；$\langle l^1,\sigma_1-\sigma_4+\tau_0\rangle=\langle l^1,\sigma_1\rangle-\langle l^1,\sigma_4\rangle+\langle l^1,\tau_0\rangle=1-\langle l^1,\sigma_4\rangle=0$，从而 $\langle l^1,\sigma_4\rangle$
在 $\langle\delta l^1,f_j\rangle=\langle l^1,\partial f_j\rangle=0$ 依次代入 j=1，j=8，j=7 得 $\langle l^1,\sigma_3\rangle=\langle l^1,\sigma_9\rangle=\langle l^1,\sigma_2\rangle=1$；再在 $\langle\delta l^1,f_j\rangle=\langle l^1,\partial f_j\rangle=0$ 依次代入 j=5，j=4，j=3 得 $\langle l^1,\sigma_7\rangle-\langle l^1,\sigma_8\rangle=1,\langle l^1,\sigma_6\rangle-\langle l^1,\sigma_7\rangle=0,\langle l^1,\sigma_6\rangle-\langle l^1,\sigma_5\rangle=1$。所以得到 l^1 的所有配值如下图所示，其中在标蓝线的单形上 l^1 取值为 1，在没有标蓝线的单形上取值为 0



同理可得 l^2 的所有配值如下



下面可以来计算 $H^*(X) \cong Hom_Z(H_n(X), Z)$ 的环结构

1.e_0 是乘法单位元：由定义可以直接得出

2.$l^1 \smile l^1 = l^2 \smile l^2 = 0$：由 cup 积的反交换性得出

3.$l^1 \smile l^2 = \sigma$：即需要验证 $\langle l^1 \smile l^2, f_i\rangle = \langle l^1, f_i\lambda_1\rangle\langle l^2, f_i\rho_1\rangle$，$\lambda_1 : e_0e_1 \to e_0e_1$，$\rho_1 : e_0e_1 \to e_1e_2$。现在只需将之前得到的配值代入，例如：

$\langle l^1 \smile l^2, f_1\rangle = \langle l^1, f_1\lambda_1\rangle\langle l^2, f_1\rho_1\rangle = \langle l^1, \sigma_3\rangle\langle l^2, \tau_0\rangle = 0$

$\langle l^1 \smile l^2, f_4\rangle = \langle l^1, f_4\lambda_1\rangle\langle l^2, f_4\rho_1\rangle = \langle l^1, \sigma_6\rangle\langle l^2, \tau_1\rangle = 1$

同样的办法可以验证对所有其它的 i，$\langle l^1 \smile l^2, f_i\rangle = 0$。因而 $l^1 \smile l^2 = \sigma$

第六章　流形及对偶定理

6.1　流形的定向与向量丛的定向

设 T 是一个曲面，在 T 上一点 x 处的一个定向可以认为是选定曲面在 x 点法向量的一个方向，由右手系法则也可以认为是选取了以 x 为起点的一条闭路，这条闭路代表了一个一维的同调类 $[\sigma] \in H_1(T-x)$。由于 T 是流形，局部有坐标领域 U 同胚于 D^2，(T,U) 满足切除定理的条件，从而 $H_2(T,T-x) \cong H_2(U,U-x) \cong H_2(D^2,D^2-x) \cong Z$。考虑空间偶 $(T,T-x)$ 的同调长正合序列，$[\sigma]$ 在长正合序列中有原像 $\alpha_x \in H_2(T,T-x)$。选定 T 在 x 处的一个定向可认为是选定 $H_2(T,T-x)$。对于更高维的流形，定向的定义就是把这个思路推广到高维上

定义 6.1.1: 设 x 是 n 维流形 M 上一点，则 $H_n(M,M-x)$ 选定的一个生成元 α_x 称为 M 在 x 处的定向

注: 1. 之所以不取 $H_{n-1}(M-x)$ 中的元素来定义定向是因为对于一般流形，$H_{n-1}(M-x)$ 更复杂
2. 给定 M 在 x 处的定向之后，可以在 x 点附近将此定向延拓，方法如下：选定 x 附近一点 y 使得 x 和 y 都包含在坐标领域 U 中，选一个包含在 U 中的 n 维圆盘 B 使得 x 和 y 都包含在其中，则 M 在 y 处的定向是 M 在 x 处的定向在复合映射 $H_n(M,M-x) \xleftarrow{j_x} H_n(M,M-B) \xrightarrow{j_y} H_n(M,M-y)$ 下的像，其中 j_x 和 j_y 是同构。

上面的构造说明在一点处的定向可以扩展到局部，为了使得扩展到整体上，就必须要求一定相容性条件。于是就有了如下整体定向的定义：

定义 6.1.2: 流形 M 的一个整体定向包括：
1.M 的一个开球体覆盖 $\{B_i\}$
2. 对每个 B_i，有 M 沿 B_i 的局部定向 α_{B_i} 是 $H_n(M,M-B_i)$ 的一个生成元，且对任何 $x \in B_i$，有 $j_x^{B_i} : H_n(M,M-B_i) \xrightarrow{\cong} H_n(M,M-x)$，$j_x^{B_i}\alpha_{B_i} = \alpha_x$ 是 $H_n(M,M-x)$ 的一个生成元
3.（整体相容）如 $x \in B_i \bigcap B_j$，则 $j_x^{B_i}\alpha_{B_i} = j_x^{B_j}\alpha_{B_j} = \alpha_x$

注意到这里是对 Z 系数同调定义的定向，实际上这个定义也可以推广到一般的 R 系数同调上去，只要把定义中的 Z 系数同调对应换成 R 系数同调就可以了，此时的整体定向称为 R-定向，$\{\alpha_{B_i}\}$ 称为 M 的 R-定向系。当流形 M 存在（R）定向时，称 M 可（R）定向。

命题 6.1.1: 流形 M 若可 Z-定向，则它也可 R-定向

证：由万有系数定理，$H_n(M, M-x, R) \cong H_n(M, M-x) \otimes R$。所以若 $\{\alpha_{B_i}\}$ 是 M 的 Z-定向系，则 $\{\alpha_{B_i} \otimes 1\}$ 是 M 的 R-定向系

命题 6.1.2: 任何流形 M 都可 Z_2-定向

证明 只要验证对于 Z_2 系数，局部定向一定满足整体相容条件。对 $x \in B_i \bigcap B_j$，$j_x^{B_i}\alpha_{B_i} = j_x^{B_j}\alpha_{B_j} = \alpha_x$ 必然成立，因为如若不然，由于 Z_2 系数同调群非零元唯一，$j_x^{B_j}\alpha_{B_j} = 0$，这与 $j_x^{B_j}$ 为同构矛盾 ■

命题 6.1.3: 1. 可定向流形的开子集可定向
2. 流形 M 可定向当且仅当 M 的每个连通分支可定向

证明 证：因为连通分支是开子集，只需证 1. 所以设大流形 M 的定向系为 $\{\alpha_{B_i}\}$，开子集为 V，取开球体 V_i 足够小使得 $V_i \subset V \bigcap B_i$，下面的交换图说明 α_{B_i} 在切除同构 $H_n(M, M-B_i) \xrightarrow{\cong} H_n(V, V-V_i)$ 下的像成为 V 的定向系

$$\begin{tikzcd}
H_n(M, M-B_i) \arrow[r, "j_x^{B_i}"] \arrow[d] & H_n(M, M-x) \arrow[dd, "\cong"'] & H_n(M, M-B_j) \arrow[l, "j_x^{B_i}"'] \arrow[d] \\
H_n(M, M-V_i) \arrow[ur] \arrow[d, "\cong"'] & & H_n(M, M-V_j) \arrow[ul] \arrow[d, "\cong"'] \\
H_n(V, V-V_i) \arrow[r, "j_x^{V_i}"] & H_n(V, V-x) & H_n(V, V-V_j) \arrow[l, "j_x^{V_j}"']
\end{tikzcd}$$

■

命题 6.1.4: 连通流形 M 的两个在一点处相同的定向是相等的定向

证明 记两个定向系为 α_{B_i} 和 β_{V_j}。令 A 是 M 中满足在该点两个定向取值相等的点全体构成的集合，我们可以证明 A 是开集：即对于任何两个定向取值相等的点，都能找到一个该点的邻域，使得两个定向在这个邻域上取值相等。由于一点处的定向可以扩展到局部，我们自然可以找到这样的邻域（比如找一个比覆盖那个点的 $B_i \bigcap V_j$ 小一点的球体）。设 $x_0 \in A$，对于 M 中任意一点 x，可以找到从 x_0 到 x 的一条道路 $\sigma : I \to M$。这条道路可以被一族邻域覆盖，这些邻域满足在这些邻

域上两个定向取值相等；特别地，由于单位区间是紧的，这个覆盖可以是有限覆盖。所以经过有限个这种邻域的传递，两个定向取值相等在 x 处依然成立 ■

推论 6.1.5: 连通定向流形上仅有两个不同的定向

定向覆盖：$\{\alpha_x\}$ 是一个连通流形 M 的局部定向，则 M 有一个二重覆盖 $\widehat{M} = \{(x,\alpha_x)|x\in M\}\bigcup\{(x,-\alpha_x)|x\in M\}$,即 M 中一个点 x 对应 $\widehat{M}$ 中两个点 $(x,\alpha_x),(x,-\alpha_x)$。直接观察 $\widehat{M}$ 有以下几个性质：
1. 若 M 可定向，则 $\widehat{M}$ 有两个连通分支，每个连通分支都和 M 同胚
2.$\widehat{M}$ 是流形
3.$\widehat{M}$ 可定向：指定 (x,α_x) 处的定向为 α_x，$(x,-\alpha_x)$ 处的定向为 $-\alpha_x$

命题 6.1.6: 连通流形 M 可定向充要条件是定向覆盖 $\widehat{M}$ 有两个连通分支

证明 只要证 M 不可定向 $\Rightarrow$ $\widehat{M}$ 连通。否则，若 $\widehat{M}$ 不连通，因为每个连通分支与 M 同胚，所以每个连通分支都不可定向。但是 $\widehat{M}$ 可定向，从而它的连通分支可定向。所以证 M 不可定向 $\Rightarrow$ $\widehat{M}$ 连通 ■

推论 6.1.7: 若 M 的基本群不含指数为 2 的子群，则 M 可定向；特别地，单连通流形可定向

证明 定向覆盖诱导了基本群的长正合序列 $0=\pi_1(Z_2)\to\pi_1(\widehat{M})\to\pi_1(M)\to\pi_0(Z_2)\to\pi_0(\widehat{M})\to\pi_0(M)=0$。若 M 的基本群不含指数为 2 的子群，则 $\pi_1(M)\to\pi_0(Z_2)=Z_2$ 只能是零映射，从而 $0\to\pi_0(Z_2)\to\pi_0(\widehat{M})\to 0$，正合，从而 $\pi_0(\widehat{M})=Z_2$，即 $\widehat{M}$ 有两个连通分支，从而 M 可定向 ■

定向覆盖可以嵌入到一个更大的覆盖空间 $M_Z\to M$ 中，$M_Z=\bigcup\limits_{x\in M}H_n(M,M-x)$，由于定向可以局部延拓，所以可以赋 M_Z 拓扑基。按照 $\alpha_x\in H_n(M,M-x)\cong Z$ 所代表的的同调类，可以把 M_Z 写成 $\bigcup\limits_r M_r(r\in Z)$，对于 $r\neq 0$ 的每个 r，M_r 同胚于 M 的定向覆盖的一个连通分支。当 M 可定向时，对于不同的 r，M_r 都是彼此不交的；当 M 不可定向时，对于绝对值不同的 r，M_r 都是彼此不交的，$M_r=M_{-r}$
$p:M_Z\to M$ 投射是把 $H_n(M,M-x)$ 中的元全部映到 x，因此这是个无穷重覆盖。截口 $s:M\to M_Z$ 是指满足 $ps=id$ 的映射 s，它可以看成为每一点分配一个局部定向，在这种观点下，M 可定向是指 M 有一个处处不为 0 的截口。全体截口按普通的函数加法和数乘构成一个 Z 模，记为 $\Gamma(M)$
在以下的定理和引理中，M 是 n 维流形，x 是 M 中一点，K 是 M 中包含 x 的一个紧子集，$j_x^K:H_n(M,M-K)\to H_n(M,M-x)$ 是包含映射

引理 6.1.1: 1. 当 i 大于 n 时，$H_i(M,M-K)=0$；2.j_x^K 是单射

证明 这个引理的证明较复杂，分以下几步

1. 若 $K=K_1\bigcup K_2$，且假设 K_1、K_2、$K_1\bigcap K_2$ 上引理都成立，则在 K 上引理也成立：考虑切除三元组 $(M,M-K_1,M-K_2)$ 的相对 M-V 序列 $\cdots\to H_{i+1}(M,M-(K_1\bigcap K_2))\to H_i(M,M-K)\to H_i(M,M-K_1)\oplus H_i(M,M-K_2)\to\cdots$。当 i 大于 n 时，$H_{i+1}(M,M-(K_1\bigcap K_2))$、$H_i(M,M-K_1)$、$H_i(M,M-K_2$ 都是零，所以由正合性 $H_i(M,M-K)=0$; 若有不为 0 的 $\alpha\in H_n(M,M-K)$ 使得 $j_x^K\alpha=0$，则 α 在 $H_i(M,M-K)\to H_i(M,M-K_j)$ 下的像 α_j 也满足 $j_x^{K_j}\alpha_j=0$，从而由假设，$\alpha_j=0$。取 i=n 时的 M-V 序列，得 $\cdots 0\to H_n(M,M-K)\to H_n(M,M-K_1)\oplus H_n(M,M-K_2)\to\cdots$，从而 $_n(M,M-K)\to H_n(M,M-K_1)\oplus H_n(M,M-K_2)$ 单射，这说明 $\alpha=0$，j_x^K 是单射。

2. 若 $M=R^n$，K 是凸的紧子集。注意到此时 M-K 和 M-x 都能形变收缩到一个球面上，所以引理自然成立；进一步，当 $M=R^n$，K 是有限个凸的紧子集的并，因为凸集的交仍是凸集，反复应用第一步可知引理成立

3. 若 $M=R^n$，K 是任意一个紧子集。设 $\alpha\in H_i(M,M-K)$ 由链 c 代表，由定义，$\partial c\bigcap K=\varnothing$，因为 ∂c 紧的，所以可以找一些有限凸的紧子集 $\{V_i\}$ 覆盖 K，记这些凸的紧子集的并为 L，并且可以找到满足 $\partial c\bigcap L=\varnothing$ 的 L。这样 α 定义了 $H_i(M,M-L)$ 中的一个元 α_L，并且 $H_i(M,M-L)\to H_i(M,M-K),\alpha_L\to\alpha$，应用第 2 步，i 大于 n 时 $H_i(M,M-L)=0$，从而 $\alpha=0$，因为 α 是任取的，所以 $H_i(M,M-K)=0$。为了说明 j_x^K 单射，设 $x\in K\bigcap V_i$，任取 $y\in V_i$，考察下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
& H_n(M,M-y) & \\
H_n(M,M-L) \arrow[ur, "j_x^L"] \arrow[rr] \arrow[d] & & H_n(M,M-V_i) \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"'] \\
H_n(M,M-K) \arrow[rr, "j_x^K"] & & H_n(M,M-x)
\end{tikzcd}$$

由交换图中标明的两个同构以及之前的构造知道如果 $\alpha\in H_n(M,M-K)$ 使得 $j_x^K\alpha=0$，则可以找到 $\alpha_L\in H_n(M,M-L)$ 使得 $j_y^L\alpha_L=0$，其中 $H_n(M,M-L)\to H_n(M,M-K)$ 把 α_L 映到 α。由第 2 步，j_y^L 单射，$\alpha_L=0$，从而 $\alpha=0$，j_x^K 单射

4.M 任意，K 包含在 M 的坐标邻域 U 中。此时有切除同构 $H_i(M,M-K)\xrightarrow{\cong}H_i(U,U-K)$，从而由第 3 步知此时引理成立

5.M 任意，K 任意。此时 K 可以写成有限个紧子集的并，并且满足每个紧子集都在坐标邻域中，应用第 4 步即得 ■

定理 6.1.8: $s:M\to M_Z,x\to\alpha_x$ 是覆盖映射 $M_Z\to M$ 的截口，则存在唯一的

同调类 $\alpha_K \in H_n(M, M-K)$ 使得 $j_x^K \alpha_K = \alpha_x$，$\alpha_K$ 称为 M 沿 K 的基本类，当 M=K 时称为 M 的基本类

证明 证：引理 6.1.1 中的结论说明了唯一性，我们在此构造出 α_K：首先，如果 K 在 x 点的一个充分小邻域中，则由定向的局部延拓性，x 处的定向可以延拓到 K 上；其次，如果 K 是两个紧子集的并，其中每个紧子集包含在一个定向可以局部延拓上去的充分小邻域，此时应用相对 M-V 序列 $\cdots \to H_{n+1}(M, M-(K_1 \bigcap K_2)) \to H_n(M, M-K) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_n(M, M-K_1) \oplus H_n(M, M-K_2) \xrightarrow{j_1-j_2} H_n(M, M-(K_1 \bigcap K_2)) \to \cdots$，此时存在 α_{K_1}、α_{K_2}、$\alpha_{K_1 \bigcap K_2}$，且由 $\alpha_{K_1 \bigcap K_2}$ 的唯一性，$j_1 \alpha_{K_1} = j_2 \alpha_{K_2} = \alpha_{K_1 \bigcap K_2}$，从而 $(\alpha_{K_1}, \alpha_{K_2})$ 在 ψ 的核中，由正合性，存在 α_K 使得 $(i_1, i_2)\alpha_K = (\alpha_{K_1}, \alpha_{K_2})$，它就是满足条件的 α_K；对于一般的情形，K 可分成有限个紧子集的并，每个紧子集包含在一个定向可以局部延拓上去的充分小邻域，从而归结为两个紧子集的并时的情形。 ■

若 M 是紧流形，取 K=M，于是有

推论 6.1.9: 对于 n 维紧连通流形 M，$H_n(M) \cong \Gamma(M) = \begin{cases} Z & \text{M 可定向} \\ 0 & \text{M 不可定向} \end{cases}$

证明 因为 M 连通，每个截口都由它在一点处的取值唯一确定，从而每个截口都与 M_Z 的一个连通分支对应，利用之前对 M_Z 的分析立得结论。特别地，对于一般 R 系数同调群，紧连通不可定向流形的最高维同调是 R 的 2 阶元全体构成的子群。 ■

定理 6.1.10: 对于非紧流形 M，$H_i(M) = 0 (i \geq n)$

证明 设 $\alpha \in H_i(M)$ 由链 c 代表，因为 c 是紧的，所以可以找 M 中的开集 U 包含 c 并且满足 U 的闭包是紧的，令 $V = M - \overline{U}$，V 和 $U \bigcup V$ 都是 M 中紧子集的补。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_{i+1}(M, U\bigcup V) & \longrightarrow & H_i(U\bigcup V, V) & \longrightarrow & H_i(M, V) \\ & & \cong\uparrow & & \uparrow \\ & & H_i(U) & \longrightarrow & H_i(M) \end{array}$$

当 $i > n$ 时，由引理 6.1.1 得出上 $H_{i+1}(M, U\bigcup V)$ 和 $H_i(M, V)$ 都是 0，从而 $H_i(U) \cong H_i(U\bigcup V, V) = 0$，从而 α 在 $H_i(M)$ 中为 0. 因为 α 是任取的，所以 $H_i(M) = 0$

当 $i = n$ 时，α 决定了一个局部定向 α_x，即一个截口 $s : M \to M_Z, x \to \alpha_x = j_x^M \alpha$。因为 α 的代表链 c 是紧的，而 M 非紧，所以存在 M 中一点，使得截口 s 在 x 的取值为 0，又 M 连通，所以 s 是零截口。应用定理 6.1.8，α 在 $H_n(M, V)$ 中为 0，

再由 6.1.1，$H_{n+1}(M, U\bigcup V)=0$，所以 α 在 $H_n(U)$ 中为 0，从而在 $H_n(M)$ 中为 0，即 $H_n(M)=0$ ■

最后，我们来介绍向量丛的定向与 Thom 同构定理。先介绍一些概念 M 是一个流形. M 上的 n 维实向量丛 $\pi: E\to B$ 是一族 n 维实向量空间 $\{E_x\}_{x\in B}$, 满足 $E:=\sqcup_{x\in M}E_x$ 且 $\pi: E\to B$ 把 E_x 映到 x, 并且满足如下的局部平凡性:
对于任意 $x\in B$ 存在 x 的邻域 U 以及保持纤维的同胚

$$t: E|_U := \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$$

所谓保持纤维，是指对 $x\in B$ ，t 在 E_x 的限制是一个到 $\mathbb{R}^n$ 上的向量空间同构
E 称为向量丛的全空间, B 称为底空间。π 称为投射，E_x 称为 x 点的纤维. 向量丛的截口 $s: B\to E$ 是指满足 $\pi s=1$ 的连续映射。记向量丛的零截口为 σ 以及 $E_0=E\backslash Im\,\sigma$.
诸如平凡丛 $B\times\mathbb{R}^k$ 以及切丛 $T_M=\sqcup_{x\in M}T_xM$ 都是向量丛。流形上另一个重要的向量丛是法丛：设 S 是 M 的子流形，任取 S 中一点 x，S 的法丛在 x 的纤维为 $T_{i(x)}M/T_xS$，其中 $i: S\to M$ 是子流形的嵌入
一个向量丛在 $x\in B$ 的局部定向是一个生成元 $\mu_x\in H^n(E_x,\ E_x\backslash 0)$. 一个向量丛称为可定向的，若对于每个 $x\in B$, 存在邻域 $x\in U\subset B$ 满足有唯一上同调类 $\mu_U\in H^n(\pi^{-1}(U),\ \pi^{-1}(U)_0)$ 满足 $\mu_U|_{E_x}=\mu_x$.
关于流形和向量丛，有一些几何上的定理：
1）袖口邻域定理：带边流形 M 的边界（在 M 中）可以找到一个邻域（微分）同胚于 $\partial M\times[0,1)$。袖口邻域满足以下性质：
1.M 的内部同伦等价于 M
2.$g:\partial M\times[0,1)\to N$ 是同胚，$V_t=g(\partial M\times[0,t))$，则 ∂M 是 V_t 的形变收缩
3. 令 $K_t=M-V_t$，则 K_t 全体按包含关系成一 M 的内部中的共尾紧子集族
2）管状邻域定理：如果紧流形 M 可以嵌入到一个黎曼流形 A，则它在 A 中有一个邻域 N 同胚于法丛的全空间
Thom 同构定理: 1）设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维实向量丛，则存在唯一上同调类 $U_2(\xi)\in H^n(E,E^0;Z_2)$ 满足 $\forall b, i_b^*U_2(\xi)$ 是 $H^n(E_b,E_b-0;Z_2)$ 生成元，称为模 2 Thom 类（$i_b:(E_b,E_b-0)\to(E,E^0)$ 是内射）
2）$\forall r,\Phi: H^r(M;Z_2)\to H^{n+r}(E,E^0;Z_2), x\to\pi^*(x)\smile U_2(\xi)$ 是同构（这里之所以取模 2 系数，是因为能够保证可定向性；对于整系数，Thom 同构定理要求向量丛可定向）
Thom 同构定理证明的思路归结为以下引理

引理 6.1.2: 1）对于平凡丛，定理成立

2）若定理对两个开集成立，则对它们的并也成立

证明 1）的证明：由 kunneth 公式（相对版本）以及 $(E,E^0)=M\times(R^n,R^n-0)$，得 $H^n(M\times(R^n,R^n-0))=H^0(M)\otimes H^n(R^n,R^n-0)$，张量积中两部分的生成元都能够确定，故 $H^n(M\times(R^n,R^n-0))$ 的生成元能够确定，即 $1_M\otimes\omega$，取 $U_2(\xi)=1_M\otimes\omega$，则显然它满足 $i_b^*U_2(\xi)$ 是 $H^n(E_b,E_b-0;Z_2)$ 生成元；进一步 $H^{n+r}(M\times(R^n,R^n-0))=H^r(M)\otimes H^n(R^n,R^n-0)$，从而其中的上同调类可以唯一地写成 $x\otimes\omega$ 的形式，而 $x\otimes\omega=\ x\otimes 1_{R^n}\ \smile\ 1_M\otimes\omega\ =\pi^*(x)\smile U_2(\xi)$

■

在证明第 2 部分之前，我们观察到有如下的性质：
设定理对于 $\xi=(E,\pi,M)$ 成立，N 是 M 的子空间且 $\xi\mid_N$ 平凡，则 $U_2(\xi\mid_N)=\bar{i}^*U_2(\xi)$：这是因为引理 1 中的唯一性以及下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & (E_a,E_a-0) \arrow[dl, "i_a"'] \arrow[d, "j_a"] \\
(E\mid_N,(E\mid_N)^0) \arrow[r, "\bar{i}"'] & (E,E^0)
\end{tikzcd}$$

引理 2 的证明：我们知道向量丛（的底空间）有标准覆盖，使得大丛限制在每个开集上平凡，由于假设紧，从而我们对标准覆盖中开集的个数 n 进行归纳：n=2 时，$M=M_1\cup M_2$，记 $E_i=\pi^{-1}(M_i)(i=1,2)$,$\xi_i=\xi\mid_{M_i}\ (i=1,2)$,$E_3=E_1\cap E_2$,$M_3=M_1\cap M_2$. 由 M-V 序列，有 $\cdots\to H^{n-1}(E_3,E_3^0)\to H^n(E,E^0)\xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} H^n(E_1,E_1^0)\oplus H^n(E_2,E_2^0)\xrightarrow{i_1^*-i_2^*} H^n(E_3,E_3^0)\to\cdots$ 正合，由之前我们观察到的性质 $i_1^*-i_2^*=0$ 以及 $H^{n-1}(E_3,E_3^0)=0$ 知有唯一的 $U\in H^n(E,E^0)$, 使得 $(j_1^*(U),j_2^*(U))=(U_2(\xi_1),U_2(\xi_2))$，
从而 i_b^*U 是 $H^n(E_b,E_b-0;Z_2)$ 生成元，进一步，由五项引理以及下面的图表得出 Φ 同构（横行是从 M-V 序列截取）

$$\begin{tikzcd}
H^{n+r-1}(E_1,E_1^0)\oplus H^{n+r-1}(E_2,E_2^0) \arrow[r] & H^{n+r-1}(E_3,E_3^0) \arrow[r] & H^{n+r}(E,E^0) \arrow[r] & H^{n+r}(E_1,E_1^0)\oplus H^{n+r}(E_2,E_2^0) \\
H^{r-1}(M_1)\oplus H^{r-1}(M_2) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_1\oplus\Phi_2"'] & H^{r-1}(M_3) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_3"'] & H^{r}(M) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"'] & H^{r}(M_1)\oplus H^{r}(M_2) \arrow[u, "\Phi_1\oplus\Phi_2"']
\end{tikzcd}$$

（续上图）

$$\begin{tikzcd}
H^{n+r}(E_1,E_1^0)\oplus H^{n+r}(E_2,E_2^0) \arrow[r] & H^{n+r}(E_3,E_3^0) \arrow[r] & \cdots \\
H^{r}(M_1)\oplus H^{r}(M_2) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_1\oplus\Phi_2"'] & H^{r}(M_3) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_3"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

假设 n-1 时成立，由归纳假设以及以上的论证可以得出 n 时成立

6.2　庞加莱对偶与相交子流形

为了介绍庞加莱对偶，我们先介绍代数极限

定义 6.2.1: 一个正向系统是指一个偏序集 A 以及以 A 为下标集的一族阿贝尔群 $\{G_a\}_{a\in A}$ 满足：

1. $\forall a,b\in A,\exists c\in A$满足$a\leq c,b\leq c$.

2. $\forall a\leq b,\exists f_{ab}:G_a\to G_b$满足$f_{aa}=id$, 且当$a\leq b\leq c,f_{ac}=f_{bc}\circ f_{ab}$.

回忆一个偏序集是指一个集合 A 以及二元关系 $\leq$ 满足自反性、对称性和传递性

1. 自反性: $a\leq a$;

2. 对称性: $a\leq b$ 且 $b\leq a$, 则 $a=b$;

3. 传递性: 若 $a\leq b$ ，$b\leq c$, 则 $a\leq c$.

满足定义 5.2.1 中第 1 条的偏序集称为正向集。下面是几个正向集的例子

例 6.2.1: K 是集合 X 的子集，A 是 X 中所有包含 K 的集合，偏序关系为 $V\leq V'\Leftrightarrow V\supset V'$

例 6.2.2: A 是自然数集，偏序关系为 $a\leq a'\Leftrightarrow a|a'$

例 6.2.3: X 是一个阿贝尔群，A 是 X 中所有有限生成子群的集合，偏序关系为 $G_a\leq G_{a'}\Leftrightarrow G_a\leq G_{a'}$

定义 6.2.2: 给定正向系统 $\{G_a\}_{a\in A}$, 正向极限定义为

$$\lim_{\to}G_a:=(\oplus_{a\in A}G_a)/N$$

$N\subset\oplus_{a\in A}G_a$ 是由 $x-f_{ab}(x)$ 生成的子群，其中 $x\in G_a$ ，$a\leq b$.

正向极限满足下面的泛性质

命题 6.2.1: 对任意群 H，若同态 $\phi_a:G_a\to H$ 满足 $\phi_a=\phi_b\circ f_{ab}$ 对任何 $a\leq b$ 都成立，则存在唯一同态 $\phi:\lim\limits_{\to}G_a\to H$ 满足对任何 $a\in A$，$\phi\circ f_a=\phi_a$ 。（$f_a:G_a\to\lim\limits_{\to}G_a$ 是包含映射）

证明 对任何 $g \in G_a$, 记 $f_a(g) = [g]$. 令 $\phi : \phi([g]) = \phi_a(g)$. 它显然满足所要求的等式，但需要验证领定义. 若 $g_1 \in G_a$ 和 $g_2 \in G_b$ 满足 $[g_1] = [g_2]$. 则存在 $k \geq a, b$ 满足 $f_{ak}(g_1) = f_{bk}(g_2)$. 从而

$$\phi_a(g_1) = \phi_k \circ f_{ak}(g_1) = \phi_k \circ f_{bk}(g_2) = \phi_b(g_2)\ .$$

下面来说明唯一性。若有另一个 $\phi' : \varinjlim G_a \to H$ 满足 $\phi' \circ f_a = \phi_a$ 对任何 $a \in A$ 成立，则

$$\phi'([g]) = \phi' \circ f_a(g) = \phi_a(g) = \phi([g])\ .$$

■

例 6.2.4: 考虑两个群同态 $A \xrightarrow{f} B, A \xrightarrow{g} B$，推出对象是一个群 L 以及同态 α 和 β 满足如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C & \xrightarrow{\beta} & L \end{array}$$

且对任何阿贝尔群 D 以及 $\alpha' : C \to D$ 和 $\beta' : B \to D$, 有唯一的 $\theta : L \to D$ with $\alpha' = \theta \circ \alpha, \beta' = \theta \circ \beta$. L 就是一个正向极限：令 $I = 1, 2, 3$ ，偏序如例 6.2.2 中定义。即 $1 \leq 2$ 且 $1 \leq 3$, 但 $2 \nleq 3$. 令 $A = A_1, B = A_2, C = A_3$. 由给出的 f 和 g, 我们得到了一个正向集。令 $L = \varinjlim A_i$. 正向极限的泛性质恰好是我们要证的等式

泛性质说明正向极限是唯一的，从而可以用另外一种方式定义正向极限（这种定义在代数几何中很常用）：$\{G_a, f_{ab}\}$ 是一个正向系统. 考虑偶 (G_a, g_a) ，$g_a \in G_a$. 在这样的偶上定义等价关系为 $(G_a, g_a) \sim (G_b, g_b)$ 当且仅当存在 $k \geq a, b$ 满足 $f_{ak}(g_a) = f_{bk}(g_b)$. 请自行验证这是一个等价关系. 记 $\langle G_a, g_a\rangle$ 为 (G_a, g_a) 的等价类. G 是所有等价类的集合, 在 G 上定义加法运算为

$$\langle G_a, g_a\rangle + \langle (G_b, g_b)\rangle = \langle G_k, f_{ak}(g_a) + f_{bk}(g_b)\rangle,$$

其中 k 是一个满足 $k \geq i, j$ 的指标. G 在这种运算下成一个群。$\sigma_a : G_a \to G, \sigma_a(g) = \langle G_a, g\rangle$ 是一个群同态，并且由 $\sigma_b(f_{ab}(g)) = \langle G_b, f_{ab}(g)\rangle = \langle G_a, g\rangle$, $\sigma_a = \sigma_b \circ f_{ab}$ 对任何 $a \leq b$ 都成立。

定理 6.2.2: G 是正向系统 $\{G_a, f_{ab}\}$ 的正向极限

证明 我们要证明 G 满足正向极限的泛性质. 任取 B 是一个阿贝尔群，满足对每一个 $a \in A$ ，有同态 $\tau_a : G_a \to B$ 使得 $\tau_a = \tau_b \circ \varphi_{ab}$ 对任何 $a \leq b$ 成立. 定义

$\tau : G \to B$ 为 $\tau(\langle G_a, g\rangle) = \tau_a(g)$. 需要验证 τ 良定义：若 $\langle G_a, g_a\rangle = \langle G_b, g_b\rangle$, 则存在 $k \geq a, b$ 满足 $f_{ak}(g_a) = f_{bk}(g_b)$ ，因此

$$\tau_a(g_a) = \tau_k(f_{ak}(g_a)) = \tau_k(\varphi_{bk}(g_b)) = \tau_b(g_b)\ .$$

由 τ 的定义，显然有 $\tau_a = \tau \circ \sigma_a$ 对任何 $a \in A$ 成立。若 $\tau' : G \to B$ 是另一个满足 $\tau_a = \tau' \circ \sigma_a$ 的同态, 则 $\tau'(\langle G_a, g_a\rangle) = \tau'(\sigma_a(g_a)) = \tau_a(g_a) = \tau(\langle G_a, g_a\rangle)$. 从而 $\tau' = \tau$. 这说明 G 满足正向极限的泛性质，从而是正向极限。 ■

由上述定义方式，容易验证以下引理

引理 6.2.1: 1.$\varinjlim G_a = \bigcup\limits_{a\in A} f_a(G_a)$
2.$x \in G_a$ 且 $f_a(x) = 0$，则存在 b满足$a \leq b$使得$f_{ab}(x) = 0$

定义 6.2.3: 一个正向集 A 的子集 I 称为共尾的，若 I 在 A 的序下成一正向集，且 $\forall a \in A, \exists i \in I,$ 使$a \leq i$

由正向极限的泛性质，$f_i : G_i \to \varinjlim G_a$ 导出同态 $f : \varinjlim G_i \to \varinjlim G_a$

推论 6.2.3: $f : \varinjlim G_i \to \varinjlim G_a$ 是同构

证明 记 $f_i' : G_i \to \varinjlim G_i$ 是包含映射，显然有 $ff_i' = f_i$。由上面的引理，$\forall x \in \varinjlim G_a$，$\exists a$使得$x = f_a(x_a)$，由于 I 是共尾的，$\exists i \in I,$ 使$a \leq i$，取 $x_i = f_{ai}x_a$，则 $x = f(f_i' x_i)$，从而 f 满射
为证 f 单射，任取 $x \in \varinjlim G_i$ 满足 $f(x) = 0$。设 $x = f_i' x_i$，$f(x) = 0$ 是指 $f_i(x_i) = 0$. 由引理，存在 $j \geq i$ 使得 $f_{ij}(x_i) = 0$。又 I 是共尾的，$\exists i' \in I,$ 使$i \leq i'$，从而 $f_{ii'}(x_i) = 0$，$x = x = f_{i'}'(f_i' x_i) = 0$ ■

推论 6.2.4: 若指标集 A 有极大元 k，则 $\varinjlim G_a \cong G_k$

证明 证：对每个 a，我们有典范映射 $f_{ak} : G_a \to G_k$, 且满足 $f_{ak} = f_{bk} \circ f_{ab}$ 对任何 $a \leq b$ 成立, 由正向极限的万有性质，有唯一的同态 $\sigma : \varinjlim G_a \to G_k$ 满足 $\sigma \circ f_a = f_{ak}$ 。取 $a = k$, 则有 $\sigma \circ f_k = f_{k,k} = \mathrm{id}_{A_k}$. 这说明 σ 是个满射。为说明单射, 取 $g \in \varinjlim G_a$ with $\sigma(g) = 0$. 记 $g = f_a(g_a)$ 。则 $0 = \sigma(g) = \sigma(f_a(g_a)) = f_{ak}(g_a)$. 由正向系统的定义, 有 $0 = f_k(f_{ak}(g_a)) = f_a(g_a) = g$. 因此, σ 也是单射, 所以 $\varinjlim G_a \cong G_k$. ■

M 是个 n 维可定向流形，考虑 M 的所有紧子集按包含关系构成的偏序集 Λ 以及 $\{H^n(M, M-K)\}_{K\in\Lambda}$，它构成一正向系统。因为 M 可定向，由上一节的的结论知道，对每个 K 都存在基本类 α_K 以及同态 $D_k = \alpha_K \frown : H^q(M, M-K) \to H_{n-q}(M)$，且当 $K \subset L$ 时满足交换图

$$\begin{tikzcd} & H_{n-q}(M) \\ H^q(M,M-K) \arrow[ur, "\alpha_K"] \arrow[r, "j"'] & H^q(M,M-L) \arrow[u, "\alpha_L"'] \end{tikzcd}$$

由正向极限的泛性质，$\{D_k\}_{K\in\Lambda}$ 可以过渡到正向极限上得到一个唯一满足相容条件的同态 $D:\varinjlim H^q(M,M-K)\to H_{n-q}(M)$，也记 $\varinjlim H^q(M,M-K)$ 为 $H_c^q(M)$，称为 M 的带紧支集上同调

命题 6.2.5: M 非紧流形，则 $H_c^0(M)=0$

例 6.2.5: （R^n 的带紧支集上同调）我们来计算 $H_c^*(\mathbb{R}^n)$. 因为每个 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集都包含在一个闭球 $D_R(0)$ 中（其中半径 $R\in\mathbb{N}$）, 由推论 6.2.3

$$\varinjlim H^p(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash D_R(0))=\varinjlim H^p(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash K)\ .$$

对于任何 $R>0,\mathbb{R}^n\backslash D_R(0)$ 同伦等价于 S^{n-1} 。因此有偶 $(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash D_R(0))$ 的长正合序列，有

$H^m(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash D_R(0))=\begin{cases}Z & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$ 因为包含映射 $H^n(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash D_R(0))\to H^n(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\backslash D_{R+1}(0))$ 导出同构, 我们有 $H_c^m(\mathbb{R}^n)=\begin{cases}Z & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

定理 6.2.6: 若 M 可定向，则 $D:H_c^q(M)\to H_{n-q}(M)$ 是同构

证明 证：1. 若 $M=U\bigcup V$，U 和 V 都是 M 中的开子集，且在 U、V、$U\bigcap V$ 上庞加莱对偶都成立，则在 M 上庞加莱对偶成立：我们要验证如下的交换图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_c^k(U\bigcap V) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & H_c^k(U)\oplus H_c^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & H_c^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & H_c^{k+1}(U\bigcap V) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n-k}(U\bigcap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U)\oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k}(U\bigcap V) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

取 U 中的紧集 K 以及 V 中的紧集 L，要想得到上面的交换图，我们需要下面的交换图

$$\begin{tikzcd} H^k(M,M-(K\bigcap L)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^k(M,M-K)\oplus H^k(M,M-L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^k(M,M-(U\bigcup V)) \arrow[d, equal] \\ H^k(U\bigcap V,U\bigcap V-(K\bigcap L)) \arrow[d, "D"'] & H^k(U,U-K)\oplus H^k(V,V-L) \arrow[d, "D"'] & H^k(M,M-(U\bigcup V)) \arrow[d, "D"'] \\ H_{n-k}(U\bigcap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U)\oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \end{tikzcd}$$

其中最上一行和最下一行都是 M-V 序列，图中标出的同构是切除同构。这个图的交换性验证并不平凡，尽管图中画出的两个方块的交换性可由 cap 积的自然性得出，难点在于验证下图交换（至多相差符号），它涉及到 M-V 序列的边缘同态计算

$$\begin{array}{ccc}
H^k(M,M-(U\bigcup V)) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(M,M-(K\bigcap L)) \\
\| & & \downarrow\cong \\
H^k(M,M-(U\bigcup V)) & & H^{k+1}(U\bigcap V,U\bigcap V-(K\bigcap L)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{n-k}(M) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-k-1}(U\bigcap V)
\end{array}$$

为了计算边缘同态,考察上链复形的短正合列 $0\to S^*(M,M-(A\bigcup B))\to S^*(M,M-A)\oplus S^*(M,M-B)\xrightarrow{i_A^*-i_B^*}S^*(M,M-(A\bigcap B))\to 0$，其中 $A=M-K,B=M-L$，任取 $(M,M-(A\bigcap B))$ 的相对上闭链 φ，由于 $S^*(M,M-A)\oplus S^*(M,M-B)\xrightarrow{i_A^*,i_B^*}S^*(M,M-(A\bigcap B))$ 是满射，所以存在 $(\varphi_A,\varphi_B)\in S^*(M,M-A)\oplus S^*(M,M-B)$ 使得 $i_A^*-i_B^*(\varphi_A,\varphi_B)=\varphi$。记 $i_A^*\varphi_A=\psi_A,i_B^*\varphi_B=\psi_B$,因为 $\delta\varphi=0$,所以 $\delta\psi_A=\delta\psi_B$ 都代表 $\delta\varphi$。同理，若 σ 是 M 的奇异闭链，则可以找到 U 和 V 中的奇异闭链 z_U 和 z_V 使得它们的 M-V 边缘都代表 $\partial\sigma$
另一方面，任取 M 中的同调类，若有若干开集覆盖 M，则这个同调类可以表示成这若干开集中的单形的和。具体到这里，$U-L$、$V-K$、$U\bigcap V$ 是 M 的覆盖，从而 M 中的同调类可以由这三个开集中的单形的和代表；特别地，有 $\alpha_{K\bigcup L}=\mu_{U-L}+\mu_{U\bigcap V}+\mu_{V-K}$。又 $\alpha_{K\bigcap L}\in H_n(M,M-(K\bigcap L))$，因为 $U-L$ 和 $V-K$ 都包含在 $M-(K\bigcap L)$ 中，所以 $\alpha_{K\bigcap L}$ 在 $U-L$ 和 $V-K$ 上的分量在 $H_n(M,M-(K\bigcap L))$ 中代表 0，即 $\mu_{U\bigcap V}$ 代表 $\alpha_{K\bigcap L}$；同理 $\mu_{U\bigcap V}+\mu_{U-L}$ 代表 α_K，$\mu_{U\bigcap V}+\mu_{V-K}$ 代表 α_K
记切除同构 $H^k(M,M-(K\bigcap L))\to H^k(U\bigcap V,U\bigcap V-(K\bigcap L))$ 为 j^*,我们要证的交换图是等式 $\alpha_{K\bigcap L}\frown j^*\delta\varphi=\partial(\alpha_{K\bigcup L}\frown\varphi)$，由 cap 积的边缘公式知 $\partial\mu_{U\bigcap V}\frown j^*\psi_B$ 和 $\mu_{U\bigcap V}\frown j^*\delta\psi_B$ 代表同一个同调类，而 $\delta\psi_B$ 代表 $\delta\varphi$，从而我们搞清了等式的一边；对于另一边，$\partial((\mu_{U-L}+\mu_{U\bigcap V}+\mu_{V-K})\frown\varphi)=\partial((\mu_{U-L}+\mu_{U\bigcap V})\frown\varphi)+\partial(\mu_{V-K}\frown\varphi)$，由之前的分析，$\partial(\mu_{U-L}+\mu_{U\bigcap V})$ 是 $U-K$ 中的链，从而前一项为 0，同理 $\partial(\mu_{V-K}+\mu_{U\bigcap V})\frown\varphi=\partial(\mu_{V-K}+\mu_{U\bigcap V})\frown j^*\psi_B=0$. 而由 cap 积的边缘公式，$\partial(\mu_{V-K}\frown\varphi)=\partial\mu_{V-K}\frown\varphi=\partial\mu_{V-K}\frown j^*\psi_B=-\partial\mu_{U\bigcap V}\frown j^*\psi_B$。至此我们完成了第一步
2. 若 M 有一族包含映射全序化的开覆盖，并且对偶定理对开覆盖中的每个开集都

成立，则对偶定理在 M 上成立：这是因为全序的条件使得以下的交换图成立

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_c^q(U_i) & \xrightarrow{\cong} & H_c^q(M) \\ \cong\big\downarrow & & \cong\big\downarrow \\ \varinjlim H_{n-q}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-q}(M) \end{array}$$

3. 由之前的例子，当 $M = R^n$ 或开球时定理成立；若 U 是包含在 M 的坐标邻域内的开集，则定理在 U 上成立：首先，若 U 是一个凸子集，则 U 同胚于 R^n。一般地，U 可以写成可数个凸开集的并，由前两步知定理成立
4. 对于一般的 M，由 2 和 3，存在 M 的极大开子空间 U 使得定理成立，但是 U 并上任一个坐标邻域内的开集上定理也成立，所以定理在 M 上成立 ■

下面考虑带边流形。回忆带边流形 M 边界 ∂M 的袖口邻域是一个 ∂M 在 M 中的开邻域 N，满足 N 同胚于 $\partial M \times [0,1)$。

命题 6.2.7: 对于 n 维带边紧流形 M，若 M 的内部可定向，则 M 的边界也可定向；因此我们说一个带边紧流形可定向，是指它的内部可定向

证明 任取 $x \in \partial M$，考虑边界上一点的坐标卡 U . U 同胚于一个半平面 $\mathbb{H}^n$. 令 $V = \partial U = U \cap \partial M$ ，任取一点 $y \in \mathring{U} = U - V$. 则有以下一系列同构

$$\begin{aligned} H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - \mathring{U}) &\cong H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - y) \\ &\cong H_n(M,\ M - y) \\ &\cong H_n(M,\ M - \mathring{U}) \\ &\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(M - \mathring{U},\ M - U) \\ &\cong H_{n-1}(M - \mathring{U},\ (M - \mathring{U}) - x) \\ &\cong H_{n-1}(\partial M,\ \partial M - x) \\ &\cong H_{n-1}(\partial M,\ \partial M - V)\ . \end{aligned}$$

第一个、第三个和最后一个同构都是限制映射。第二个同构是因为 M 的内部同伦等价于 M。联系同态是同构是因为 M-U 与 M 同伦等价，从而 $H_*(M,\ M - U) \cong H_*(M,\ M) = 0$。第五个同构是因为 $(M - \mathring{U}) - x \to M - U$ 是同伦等价, 第六个同构是切除. ■

命题 6.2.8: 对于 n 维带边可定向紧流形 M，$\alpha_{\partial M}$ 是 ∂M 由 M 的内部诱导出的定向的基本类，则存在唯一 $z \in H_q(M, \partial M)$ 满足 $\partial z = \alpha_{\partial M}$

证明 因为 $\mathring{M}$ 是一个非紧无边可定向流形，$\mathring{M} \to M$ 是同伦等价, $H_n(M) \cong H_n(\mathring{M}) = 0$ 。从而 $\partial : H_n(M,\ \partial M) \to H_{n-1}(\partial M)$ 是单射，这说明了唯一性。令 V 为边界的袖口邻域，$N = M - V$。则 N 与 $\mathring{M}$ 同伦等价, 从而

$$H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - N) \cong H_n(M,\ M - \mathring{M}) = H_n(M,\ \partial M)\ .$$

因为 M 是紧的, N 是 $\mathring{M}$ 的紧子集. $\mathring{M}$ 的定向决定了 $H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - N)$ 中的基本类. 令 z 是这个基本类在 $H_n(M,\ \partial M)$ 中的像。对任意 $y \in \mathring{M}$，z 在同构 $H_n(M,\ M - y) \cong H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - y)$ 下映到 $H_n(M,\ M - y)$ 的生成元。由上一段证明中的一系列同构以及种种自然性, ∂z 是 ∂M 上导出定向的基本类 ■

推论 6.2.9: 对于 n 维带边紧流形 M，若 M 的内部可定向，则 $\frown z : H^q(M, \partial M) \to H_{n-q}(M)$ 是同构

证明 $K_t = M - V_t$ 是之前提到的共尾紧子集族，则由之前一系列同伦等价，包含映射导出同构 $H^q(\mathring{M}, \mathring{M} - K_t) \xrightarrow{\cong} H^q(M, M - K_t) \xleftarrow{\cong} H^q(M, M - \partial M)$，对 M 的内部应用庞加莱对偶得 $H^q(M, M - \partial M) \cong H_{n-q}(\mathring{M})$，再由 M 的内部同伦等价于 M，$H^q(M, M - \partial M) \cong H_{n-q}(M)$。现在要说明这个同构就是 $\frown z$，这由下面的交换图给出

$$\begin{array}{ccccc}
H^q(M, \partial M) & \otimes & H_n(M, \partial M) & \longrightarrow & H_{n-q}(M) \\
\cong\uparrow & & \cong\downarrow & & \| \\
H^q(M, M - K_t) & \otimes & H_n(M, M - K_t) & \longrightarrow & H_{n-q}(M) \\
\cong\downarrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\
H^q(\mathring{M}, \mathring{M} - K_t) & \otimes & H_n(\mathring{M}, \mathring{M} - K_t) & \longrightarrow & H_{n-q}(\mathring{M})
\end{array}$$

第二行和第三行是庞加莱对偶，再由 cap 积的自然性可以计算出第一行 ■

推论 6.2.10: 条件同上一个推论，则 $\frown z : H^q(M) \to H_{n-q}(M, \partial M)$ 是同构

证明 下面的图在相差符号的意义下交换

$$\begin{array}{ccccccc}
H^q(M, \partial M) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(\partial M) & \longrightarrow & H^{q+1}(M, \partial M) \\
{\scriptstyle \frown z}\downarrow & & {\scriptstyle \frown z}\downarrow & & {\scriptstyle \frown \alpha_{\partial M}}\downarrow & & {\scriptstyle \frown z}\downarrow \\
H_{n-q}(M) & \longrightarrow & H_{n-q}(M, \partial M) & \longrightarrow & H_{n-q}(\partial M) & \longrightarrow & H_{n-q-1}(M)
\end{array}$$

从而由五项引理得结论 ■

下面我们将会说明，cup 积庞加莱对偶于横截相交子流形的交

定义 6.2.4: A 和 B 是 n 维紧可定向流形 M 中的横截相交子流形，并且 A 和 B 都可定向，A 是（n-i）维的，B 是（n-j）维的。定义相交乘积 $\cap: H_{n-i}(M)\otimes H_{n-j}(M)\to H_{n-i-j}(M)$ 为 $\alpha\cap\beta=D(D^{-1}\alpha\smile D^{-1}\beta)$，其中 D 是庞加莱对偶；当 $i+j=n$ 时称相交乘积在增广 $H_0(M)\to Z$ 下的像为相交数。相交乘积赋予可定向流形环结构，称为相交环。这个环同构于上同调环

记 $[A]$、$[B]$、$[A\bigcap B]$ 分别为 A、B、$A\bigcap B$ 的基本类，j_A^M 代表子空间的内射 $A\to M$。

定理 6.2.11: $j_A^M[A]\cap j_A^M[B]=j_{A\cap B}^M[A\bigcap B]$

先来做一些说明。N 是 A 的管状邻域，$\mu_A\in H^i(N,N-A)$ 是 A 的法从的 Thom 类，通过切除同构把它看成 $H^i(M,M-A)$ 中的元，μ_A^M 是 $H^i(M,M-A)\to H^i(M)$ 下的像。

引理 6.2.2: $D(j_A^M[A])=\mu_A^M$

证明 这等价于证明 $j_A^M[A]=[M]\frown\mu_A^M$。注意到对于 j_N^M、j_A^M 以及收缩 $r:N\to A$ 满足关系 $j_A^Mr=j_N^M$，从而 $[M]\frown\mu_A^M=[M,M-A]\frown\mu_A=j_N^M[N,N-A]\frown\mu_A=j_A^M(r([N,N-A]\frown j_N^M\mu_A))$，这说明 $[M]\frown\mu_A^M$ 是 j_A^M 的像，从而 $[M]\frown\mu_A^M$ 是 $[A]$ 的整数倍，记这个倍数为 t，我们要证明 t=1. 设 U 是 A 中的同胚于 R^{n-i} 的开集使得 A 的法从限制在 U 上为平凡丛，记这个平凡丛的全空间为 V。由基本类的定义，$[M]$ 和 $[A]$ 分别限制到 V 和 U 上得到 V 和 U 上的基本类 ν_0 和 μ_0，由 Thom 类的自然性，μ_A^M 拉回到这个平凡丛得到的是它的 Thom 类在 M 中的像 u_0，记 $g:V\to N$ 包含映射，从而 $[A]=g_*\mu_0=g_*(\nu_0\frown g^*\mu_A^M)=g_*\nu_0\frown\mu_A^M=[M]\frown\mu_A^M=t[A]$，从而 $t=1$ ■

定理 6.2.8 的证明：

$$\begin{aligned}
[M]\frown\mu_{A\cap B}^M &= (j_{A\cap B}^M)[A\cap B]\\
&= (j_A^M)(j_{A\cap B}^A)[A\cap B]\\
&= (j_A^M)([A]\frown\mu_{A\cap B}^A)\\
&= (j_A^M)([A]\frown j_A^M\mu_B^M)\\
&= ((j_A^M[A])\frown\mu_B^M\\
&= ([M]\frown\mu_A^M)\frown\mu_B^M\\
&= [M]\frown(\mu_A^M\frown\mu_B^M).
\end{aligned}$$

应用：带边流形的符号定理

定理 6.2.12: M 是一个可定向 4n 维紧流形，并且是一个（4n+1）维流形 X 的边界，同调取有理系数，根据庞加莱对偶，相交乘积 $H_{2n}(M)\otimes H_{2n}(M)\to H_0(M)\xrightarrow{\varepsilon}Q$

是个非退化的二次型，则这个二次型的符号等于 0（所谓一个非退化二次型的符号，是指它的正特征值个数减去负特征值个数）

引理 6.2.3: W 是一个 $2n$-维实线性空间 V 的 n 维子空间。$B: V \times V \to \mathbb{R}$ 是一个非退化双线性型且 $\phi: W \times W \to \mathbb{R}$ 恒等于 0。则 B 的符号为 0

证明 对 n 做归纳。当 n=1 时，取 $0 \neq e_1 \in W$，由 B 非退化，存在 $f_1 \in V$ 满足 $B(e_1, f_1) = 1$。把 f_1 加上一个 e_1 的倍数，可要求 $B(f_1, f_1) = 0$。e_1, f_1 是 V 的基，所以引理在 n=1 时成立。假设 n-1 时引理成立，令 V_1 是 e_1, f_1 在双线性型 B 下的正交补，由 B 非退化 $V = \mathbb{R}e_1, f_1 \oplus V_1$.。令 $W_1 := W \cap V_1 \subset V_1$，它满足 ϕ : $W \times W \to \mathbb{R}$ 恒等于 0 且 $2\dim W_1 = \dim V_1$。由归纳假设以及 n=1 时的结果知引理在 V 上成立。 ■

定理 6.2.12 的证明：根据对偶定理，有如下交换图表（垂直的箭头是庞加莱对偶和 Lefschetz 对偶）

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2n}(X;Q) & \xrightarrow{j^*} & H^{2n}(M;Q) & \longrightarrow & H^{2n+1}(X,M;Q) \\
\downarrow & & D\downarrow & & \downarrow \\
H_{2n+1}(X,M;Q) & \longrightarrow & H_{2n}(M;Q) & \xrightarrow{j_*} & H_{2n}(X;Q)
\end{array}$$

记 $A = Im\ j^*$，$K = Ker\ j_*$，由正合交换图得 $a \in A \Leftrightarrow D(a) \in K$，从而 $dim\ K = dim\ A$

j^* 和 j_* 相互对偶，从而有维数的等式 $dim\ K = dim\ A = dim\ H_{2n}(M;Q) - dim\ K$，从而 $dim\ A = \frac{1}{2} dim\ H_{2n}(M;Q)$；另一方面，$\forall \alpha, \beta \in H^{2n}(X;Q)$, $\langle j^*\alpha \smile j^*\alpha, [M]\rangle = \langle j^*\alpha \smile j^*\alpha, \partial z\rangle = \langle \alpha \smile \alpha, j_*\partial z\rangle = 0$，从而根据上面的引理得结论

例 6.2.6:（环面的上同调代数）已知环面的同调群为 $H_n(T^2) = \begin{cases} Z & n = 0 \\ Z \bigoplus Z & n = 1 \\ Z & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$

它的 1 维同调群由经圆 A 和纬圆 B 生成,0 维同调群由 $p = A \bigcap B$ 生成，由 7.2.4，A 和 B 的对偶上闭链的 cup 积庞加莱对偶于 $p = A \bigcap B$

例 6.2.7:（复射影空间的上同调代数）已知复射影空间 CP^n 的同调群为 $H_k(CP^n) = \begin{cases} Z & k\text{为偶数} \\ 0 & k\text{为奇数} \end{cases}$ 它的基本类记为 $[CP^n]$，$H^2(CP^n)$ 的生成元为 α。可以归纳地证明 CP^n 的上同调环由 α 生成：首先，n=2 时，由庞加莱对偶，$[CP^n] \frown \alpha$ 是 $H_2(CP^n)$ 的生成元，而配值 $H_2(CP^n) \times H^2(CP^n) \to Z$ 是非退化的，$1 = \langle \alpha, [CP^n] \frown \alpha\rangle =$

$\langle\alpha\smile\alpha,[CP^n]\rangle$，从而 α^2 生成 $H^4(CP^n)$；若当 n-1 时结论已经证出，则内射 $CP^{n-1}\to CP^n$ 在 $i\leq 2n-2$ 时导出 i 维上同调群的同构，从而 $H^{2n-2}(CP^n)$ 生成元为 α^{n-1}，$\langle\alpha^n,[CP^n]\rangle=\langle\alpha\smile\alpha^{n-1},[CP^n]\rangle=\langle\alpha,[CP^n]\frown\alpha^{n-1}\rangle=1$，从而 α^n 生成 $H^{2n}(CP^n)$，CP^n 的上同调代数为 $\dfrac{Z[\alpha]}{\alpha^{n+1}}$

类似可得 $\mathbb{R}P^n$ 的模 2 上同调代数为 $\dfrac{Z_2[x]}{x^{n+1}}(|x|=1)$

引理 6.2.4: 若有映射 $f:\mathbb{R}P^m\to\mathbb{R}P^n$ 满足 $f_*\neq 0:H_1(\mathbb{R}P^m;\mathrm{Z}_2)\to H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$, 则 $m\leq n$.

证明 由上同调的万有系数定理，可知 $f^*\neq 0:H^1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)\to H^1(\mathbb{R}P^m;\mathrm{Z}_2)$. 取 $\xi\neq 0\in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$, 则 $\eta=f^*(\xi)\neq 0\in H^1(\mathbb{R}P^m;\mathrm{Z}_2)$. 由上同调环结构, 可知 $\eta^m=f^*(\xi^m)\neq 0$. 所以 $\xi^m\neq 0\in H^m(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$, 这说明 $m\leq n$. ■

引理 6.2.5: σ 是 S^n 中一条连接对径点的道路. 在商映射 $\pi: S^n\to\mathbb{R}P^n$ 下它成为一个 $\mathbb{R}P^n$ 中 1 维奇异闭链 $\pi_*(\sigma)$ ，$\pi_*(\sigma)$ 代表 $H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$ 中非零元.

证明 对 n 作归纳法。不妨设 σ 是连接 S^0 两个点的道路. 当 $n=1,\pi_*(\sigma)$ 绕 g $\mathbb{R}P^1=S^1$ 奇数圈，所以是 $H_1(\mathbb{R}P^1;\mathrm{Z}_2)$ 非零元。当 $n>1$ 时, 取 $S^1\subset S^n$ 中和 σ 的端点相同的一条道路 τ . 由归纳假设, $\pi_*(\tau)$ 是 $H_1(\mathbb{R}P^1;\mathrm{Z}_2)$ 非零元。因为包含映射 $H_1(\mathbb{R}P^1;\mathrm{Z}_2)\to H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$ 是一个同构，所有 $\pi_*(\tau)$ 在 $H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$ 中也是非零元。另一方面, $\sigma-\tau$ 是 S^n 1 维奇异闭链, 所以是边缘链。因此 $\pi_*(\sigma)$ 是 $H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$ 非零元。 ■

定理 6.2.13: 不存在连续映射 $f: S^{n+1}\to S^n$ 满足 $f(-x)=-f(x)$.

证明 否则, 存在 g: $\mathbb{R}P^{n+1}\to\mathbb{R}P^n$. 取 σ 为 S^{n+1} 中一条连接对径点的道路, 它通过 f 映到 S^n 中一条连接对径点的道路 $f_*(\sigma)$ 。由引理 6.2.5，$g_*\neq 0: H_1(\mathbb{R}P^{n+1};\mathrm{Z}_2)\to H_1(\mathbb{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$. 再由引理 6.2.4 得结论 ■

推论 6.2.14: (Borsuk-Ulam) $f:S^n\to R^n$ 连续映射. 则存在 $x\in S^n$ 满足 $f(x)=f(-x)$.

证明 否则, 构造

$$g:S^n\to S^{n-1},\ g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}.$$

则有 $g(-x)=-g(x)$, 与定理 6.2.13 矛盾 ■

推论 6.2.15: (**火腿-三明治定理**). $A_1,\cdots,A_m$ 是 m 个 $\mathbb{R}^m$ 可测集。则可以找到一个超平面 P，它把每个 A_i 二等分

证明 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中考虑. 取定一点 $x_0 \notin \mathbb{R}^m$. 对于所有单位向量 $v \in S^m$, 做一个垂直于 v 的且过 x_0 的超平面. 它把 $\mathbb{R}^{m+1}$ 分成两部分，因此也罢 $\mathbb{R}^m$ 分成两部分。我们记 $A_i \subset \mathbb{R}^m$ 与 v 所指向的一侧的交集的测度为 $f_i(v)$. 因此得到一个连续映射

$$f : S^m \to \mathbb{R}^m,\ v- \to (f_1(v),\ \cdots,\ f_m(v))\ .$$

由上面的推论，存在 v 满足 $f(v) = f(-v)$. 从而这个超平面平分每个 A_i. ■

引理 6.2.6: $D(j_A^M[A]) = \mu_A^M$

应用：Lefschetz 迹公式

定义 6.2.5: X 是可定向闭流形，f 是 X 上的自映射，Δ 是 $X \times X$ 中的对角子流形，$\Gamma(f) = \{(x, f(x))|x \in X\}$ 是 f 的图像，若 $\Gamma(f)$ 和 Δ 横截相交，定义 Lefschetz 数为 $\Lambda_f = j_\Delta^X[\Delta] \cap j_{\Gamma(f)}^X[\Gamma(f)]$

可以验证以下的引理。

引理 6.2.7: （1）$D_{X\times Y}(\xi \times \eta) = (-1)^{|\xi|(n-|\eta|)} D_X\xi \times D_Y\eta, \xi \in H^*(X), \eta \in H^*(Y)$
（2）$(a \cap b) \times (c \cap d) = (-1)^{|b||c|}(a \cap c) \smile (b \cap d)$，其中 $a, b \in H_*(X), c, d \in H_*(Y)$

证明 （1）应用例 5.2.2，取 $a = [X], b = [Y], c = \xi, d = \eta$；
（2）应用（1）和命题 5.2.14，令 $a = D_X\xi_1, b = D_Y\eta_1, c = D_X\xi_1, d = D_Y\eta_2$ ■

最后，我们需要确定 $j_\Delta^X[\Delta]$。令同调取域系数，记 $\{x_k\}$ 为 $H_*(X)$ 的一组基，$\{x_k'\}$ 为 $\{x_k\}$ 在相交乘积下的对偶基，即 $x_i \cap x_j' = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$。令 $x_i = D_X\xi_i, x_k' = D_X\xi_i'$，根据 kunneth 公式，$\xi_i \times \xi_j'$ 是 $H^*(X \times X)$ 的一组基，验证配值可以得如下的命题

命题 6.2.16: $[\Delta] = \sum x_k \times x_k'$

令 (F_{ik}) 为 f 导出的同态 $f_* : H_*(X) \to H_*(X)$ 的矩阵，即 $f_*(x_i) = \sum F_{ik}x_k$

定理 6.2.17: $\Lambda_f = \sum(-1)^i Tr\, f_i$

证明

$$
\begin{aligned}
\Lambda_f &= \sum_k (-1)^{|x'_k||x_k|}(x'_k \times x_k) \cap \sum_i ((f \times id_*)(x_i \times x'_i)) \\
&= \sum_{i,k} (-1)^{|x'_k||x_k|}(x'_k \times x_k) \cap (f_* x_i \times x'_i) \\
&= \sum_{i,k,s} (-1)^{|x'_k||x_k|} F_{is}(x'_k \times x_k) \cap (x_s \times x'_i) \\
&= \sum_{i,k,s} (-1)^{|x'_k||x_k|+|x_s||x_k|} F_{is}(x'_k \cap x_s)(x_k \times x'_i) \\
&= \sum_{i,k,s} (-1)^{|x'_k||x_k|+|x_s||x_k|+|x'_k||x_s|} F_{is}\delta_{ks}\delta_{ki} \\
&= \sum_i (-1)^{|x_i} F_{ii}
\end{aligned}
$$

■

推论 6.2.18: 若 f 为恒等映射，Lefschetz 数为 X 的欧拉示性数