

南京大学数学系试卷

姓名 _____ 学号 _____ 院系 _____

考试科目 复变函数 任课教师 张高飞 考试时间 2016.4.22

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					

一、填空题 (4×4=16 分)

1. $|z| = \operatorname{Re}(z) + 1$ 表示的点 z 的轨迹图形为_____;
2. $z = 1 + i\sqrt{3}$ 的三次方根是_____;
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) z^n$ 的收敛半径 $R =$ _____;
4. 设 $z = x + iy$, Γ 为连接 $-i$ 到 i 的直线段, 则 $\int_{\Gamma} (x - y + ix^2) dz =$ _____。

二、选择题 (4×4=16 分)

1. 函数 $f(z) = x^3 - iy^3$ 在复平面内 ()
A) 处处可导 B) 处处不可导
C) 仅在 $z = 0$ 处解析 D) 处处不解析
2. $z = 0$ 是函数 $\frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$ 的 ()
A) 非孤立奇点 B) 极点
C) 可去奇点 D) 本性奇点
3. 级数 $\sum z^n/n$ 在单位圆周上 ()
A) 处处收敛 B) 除了 $z = 1$ 处处收敛
C) 除了 $z = -1$ 处处收敛 D) 处处不收敛

4. 方程 $z^8 - 5z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 内 (根的个数计算重数) ()

A) 没有根

B) 有 8 个根

C) 有 2 个根

D) 有 5 个根

三、计算题 (6×3=18 分)

1. 已知函数 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 在复平面上解析, 求 l, m, n 的值。

2. 写出函数 $e^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $1 < |z| < 2$ 内的罗伦展开式。

3. 计算 $\int_{|z|=1} \frac{e^z + 1}{z} dz$ 。

四、证明题 (10×5=50 分)

1. 设 $a \in \mathbb{C}$ 是一固定复数, 且 $|z| = 1$, $|1 - \bar{a}z| \neq 0$. 证明: $\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$.

2. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $f'(z) = 0, \forall z \in D$, 证明 $f(z)$ 在 D 内恒为常数。

3. 设 D 是围线 C 的内部, $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 其模 $|f(z)|$ 在 C 上是常数. 证明: 若 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点。

4. 设 $f(z)$ 在复平面上解析, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 1$. 证明: $f(z)$ 必有一个零点。

5. 假设函数 f 在正向简单闭曲线 C 内和 C 上解析, 且在 C 上没有零点, 证明: 若 f 在 C 内有 n 个零点 $z_k (k=1, 2, \dots, n)$, 其中每一个 z_k 的

重数为 m_k , 则 $\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n m_k z_k$ 。

