3.4　卫星空间位置的计算

利用星历参数计算出 GPS 卫星在某一时刻的空间位置是 GPS 接收机为实现定位而必须完成的重要一步，而本节将通过一个实际例子来详细解释这一计算方法和步骤。尽管这一计算通常需要双精度浮点运算，但是因限于篇幅，我们只显示各个参数和变量小数点后的若干位数字。另外，因为星历中的角度参数对卫星位置的计算值非常敏感，所以《GPS 界面控制文件》规定π的值统一取为 3.141 592 653 589 8。

【例 3.1】　以下是一颗卫星（PRN 1）在某日播发的一组星历参数：

(1) $t_{oe} = 244\ 800$

(2) $\sqrt{a_s} = 5153.655\ 31$

(3) $e_s = 0.005\ 912\ 038\ 265$

(4) $i_0 = 0.984\ 840\ 794\ 3$

(5) $\Omega_0 = 1.038\ 062\ 244$

(6) $\omega = -1.717\ 457\ 876$

(7) $M_0 = -1.064\ 739\ 758$

(8) $\Delta n = 4.249\ 105\ 564\times10^{-9}$

(9) $\dot{i} = 7.422\ 851\ 197\times10^{-51}$

(10) $\dot{\Omega} = -8.151\ 768\ 125\times10^{-9}$

(11) $C_{uc} = 3.054\ 738\ 045\times10^{-7}$

(12) $C_{us} = 2.237\ 036\ 824\times10^{-6}$

(13) $C_{rc} = 350.531\ 25$

(14) $C_{rs} = 2.531\ 25$

(15) $C_{ic} = -8.381\ 903\ 172\times10^{-8}$

(16) $C_{is} = 8.940\ 696\ 716\times10^{-8}$

以上这些参数值完全是按照《GPS 界面控制文件》的规则编译出来的，它们均有常规、默认的单位和比例[6]。试根据这套星历参数，计算此卫星在信号发射时刻 t（GPS 时间）为 239 050.722 3 s 时的空间位置。

解：参照由文献[6]提供的计算方法，我们将这一计算过程分解成以下几步。

第 1 步：计算规化时间 t_k

卫星星历给出的轨道参数是以星历参考时间 t_{oe} 作为基准的。为了得到各个轨道参数在 t 时刻的值，我们必须先求出 t 时刻与参考时间 t_{oe} 之间的差异，即

$$t_k = t - t_{oe} \tag{3.51}$$

上式得到的 t_k 称为相对于 t_{oe} 的规化时间。

对于一个有效星历而言，t 值应当在 t_{oe} 前后的两小时之间，即 t_k 的绝对值必须小于 7200 s。因为 GPS 时间在每周六午夜零时重新置零，所以由上式计算得到的 t_k 值有时会引入 604 800 s 的偏差。当由式(3.51)计算得到的 t_k 大于 302 400 s 时，则 t_k 应减去 604 800 s；否则，当 t_k 小于 −302 400 s 时，则 t_k 应加上 604 800 s。如果星历的星期数不等于当前的星期数，比如这套星历是接收机很久以前所保存的，那么两者的星期数之差必须转换成秒数后加到由式(3.51)计算所得的 t_k 上。正如 3.3.3 节所指出的那样，我们需要同时检查星历的参考时间和星期数才能决定它是否

仍在当前星期和当前 t 时刻有效。

假定星历的星期数与当前的星期数相等，那么将 t 和由星历给出的 t_{oe} 代入式(3.51)，可得 $t_k=-5749.277\ 700$ s。该规化时间值已在±302 400 s 的范围之内，同时它的绝对值也小于 7200 s。在 GPS 和 GPS 接收机均正常运行的情况下，t_k 值一般应该是个负数。

有了规化时间 t_k，那么我们下一步可以根据模型求得在信号发射时刻 t（即在规化时间 t_k）的各个轨道参数。我们将在各个星历参数后面添加一个下标“k”，以此代表它们在这一规化时间 t_k 时的值。

第 2 步：计算卫星的平均角速度 n

我们将卫星星历给出的 a_s 值代入式(3.36)，可得那颗在圆周轨道上运行的假想卫星的（平均）角速度 $n_0=1.458\ 555\times10^{-4}$。校正后的卫星平均角速度 n 为

$$n=n_0+\Delta n \tag{3.52}$$

而将星历提供的平均角速度校正值 Δn 代入上式，得 $n=1.458\ 598\times10^{-4}$ rad/s。

第 3 步：计算信号发射时刻的平近点角 M_k

将星历给出的 M_0 代入以下的线性模型公式：

$$M_k=M_0+nt_k \tag{3.53}$$

可得 t_k 时的平近点角 $M_k=-1.903\ 328$ rad。由于此 M_k 值不在 0 与 2π之间，故可将 M_k 值加上 2π 后变成 4.379 857 rad。事实上，式(3.53)只是式(3.37)的另一种表达形式。

第 4 步：计算信号发射时刻的偏近点角 E_k

给出了平近点角 M_k 和星历参数 e_s，我们通常可以运用迭代法将偏近点角 E_k 从开普勒方程(3.38)中求解出来。E_k 的迭代初始值 E_0 可置为 M_k，而根据式(3.39)所计算出的前两次迭代结果依次为 4.374 269 与 4.374 280。在这一步，我们解得 $E_k=4.374\ 280$ rad。

第 5 步：计算信号发射时刻的真近点角 ν_k

将 E_k 和 e_s 代入式(3.44)、式(3.45)和式(3.46)，得 $\cos\nu_k=-0.336\ 955\ 0$ 和 $\sin\nu_k=-0.941\ 520\ 8$，从而求得值在(−π, +π]之间的真近点角 $\nu_k=-1.914\ 477$ rad。

第 6 步：计算信号发射时刻的升交点角距 Φ_k

将卫星星历给出的 ω 代入下式：

$$\Phi_k=\nu_k+\omega \tag{3.54}$$

得到升交点角距 $\Phi_k=-3.631\ 935$ rad。如图 3.8 所示，升交点角距 Φ_k 是卫星当前位置点 S 与升交点相对于地心 O 的夹角。

第 7 步：计算信号发射时刻的摄动校正项 δu_k, δr_k 和 δi_k

将星历参数 C_{uc}，C_{us}，C_{rc}，C_{rs}，C_{ic}，C_{is} 和由上一步得到的升交点角距 Φ_k 代入以下各式：

$$\delta u_k=C_{us}\sin(2\Phi_k)+C_{uc}\cos(2\Phi_k) \tag{3.55}$$

$$\delta r_k=C_{rs}\sin(2\Phi_k)+C_{rc}\cos(2\Phi_k) \tag{3.56}$$

$$\delta i_k=C_{is}\sin(2\Phi_k)+C_{ic}\cos(2\Phi_k) \tag{3.57}$$

可得二次谐波摄动校正量 $\delta u_k=-1.688\ 724\times10^{-6}$，$\delta r_k=192.951\ 246$ 和 $\delta i_k=-1.209\ 277\times10^{-7}$。

第 8 步：计算摄动校正后的升交点角距 u_k、卫星矢径长度 r_k 和轨道倾角 i_k

将上一步计算得到的摄动校正量代入以下各式：

$$u_k=\Phi_k+\delta u_k \tag{3.58}$$

$$r_k=a_s\left(1-e_s\cos E_k\right)+\delta r_k \tag{3.59}$$

$$i_k = i_0 + \dot{i} \cdot t_k + \delta i_k \tag{3.60}$$

可得 $u_k = -3.631\,937$，$r_k = 26\,612\,441.68$ 和 $i_k = 0.9\,848\,407$，其中参数 a_s，e_s，i_0 和 $\dot{i}$ 均由卫星星历给出。

第 9 步：计算信号发射时刻卫星在轨道平面的位置(x_k'，y_k')

通过以下公式将极坐标(r_k，u_k)转换成在轨道平面直角坐标系(X', Y')中的坐标(x_k'，y_k')：

$$x_k' = r_k \cos u_k \tag{3.61A}$$

$$y_k' = r_k \sin u_k \tag{3.61B}$$

得 $x_k' = -23\,476\,720.79$ m 和 y_k'=12 532 582.86 m，同时 z_k'=0。如图 3.8 所示，这里的直角坐标系的 X'轴是由地心指向卫星升交点，而不是指向近地点，这正是式(3.48)与式(3.61)的不同之处。

第 10 步：计算信号发射时刻的升交点赤经 Ω_k

升交点赤经的线性模型如下：

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe} \tag{3.62}$$

由此可得 $\Omega_k = -16.393\,745$ rad，这等价于值在 0 至 2π之间的 2.455 811 rad。在式(3.62)中，Ω_0 和 $\dot{\Omega}$ 由卫星星历给出，而表 3.1 给出了地球自转角速度常数 $\dot{\Omega}_e$ 的值。注意，式(3.62)已经考虑了地球自转对卫星升交点与格林尼治子午面之间相对位置关系的影响，也就是说，由上式得到的 Ω_k 值直接是 t 时刻的卫星升交点在 t 时刻的 WGS-84 大地坐标系中的经度，这便于下一步将卫星位置从轨道平面直角坐标转换到 WGS-84 地心地固直角坐标。

第 11 步：计算卫星在 WGS-84 地心地固直角坐标系(X_T, Y_T, Z_T)中的坐标(x_k，y_k；z_k)

如图 3.8 所示，轨道平面直角坐标系(X', Y', Z')先绕 X'轴旋转($-i_k$)，再绕旋转后的 Z'轴旋转($-\Omega_k$)，由此转变成 WGS-84 地心地固直角坐标系(X_T, Y_T, Z_T)。先后利用坐标变换公式(3.11)和式(3.10)，得

$$x_k = x_k' \cos\Omega_k - y_k' \cos i_k \sin\Omega_k \tag{3.63A}$$

$$y_k = x_k' \sin\Omega_k + y_k' \cos i_k \cos\Omega_k \tag{3.63B}$$

$$z_k = y_k' \sin i_k \tag{3.63C}$$

代入数值后，最终得到了 t 时刻该卫星在 WGS-84 地心地固直角坐标系中以米为单位的坐标值，即(13 780 293.30, -20 230 949.12, 10 441 947.44)。

3.5　卫星运行速度的计算

如果我们只要求用户 GPS 接收机实现定位，那么一般来说计算出各颗可见卫星的空间位置应当就足够了。如果我们还要求确定用户的运动速度，那么接收机还需要计算出各颗卫星的运行速度。这一节将继续上一节中的例子，从而详细讲解如何利用卫星星历参数来计算卫星运行速度的方法和步骤。

简单地讲，卫星的运行速度等于卫星的空间位置对时间的变化率。卫星无摄运动的速度公式(3.49)是通过对位置公式(3.48)求导得到的，那么类似地，我们可通过对式(3.63)求导来推导出以下用星历参数表达的卫星速度公式[16, 30]：

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= (\dot{x}_k' - y_k'\dot{\Omega}_k \cos i_k)\cos\Omega_k - (x_k'\dot{\Omega}_k + \dot{y}_k' \cos i_k - y_k'\dot{i}_k \sin i_k)\sin\Omega_k \\ &= -y_k\dot{\Omega}_k - (\dot{y}_k' \cos i_k - z_k\dot{i}_k)\sin\Omega_k + \dot{x}_k' \cos\Omega_k\end{aligned} \tag{3.64A}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_k &= (\dot{x}_k' - y_k'\dot{\Omega}_k \cos i_k)\sin\Omega_k + (x_k'\dot{\Omega}_k + \dot{y}_k' \cos i_k - y_k'\dot{i}_k \sin i_k)\cos\Omega_k \\ &= x_k\dot{\Omega}_k + (\dot{y}_k' \cos i_k - z_k\dot{i}_k)\cos\Omega_k + \dot{x}_k' \sin\Omega_k\end{aligned} \tag{3.64B}$$

$$\dot{z}_k = \dot{y}_k' \sin i_k + y_k'\dot{i}_k \cos i_k \tag{3.64C}$$