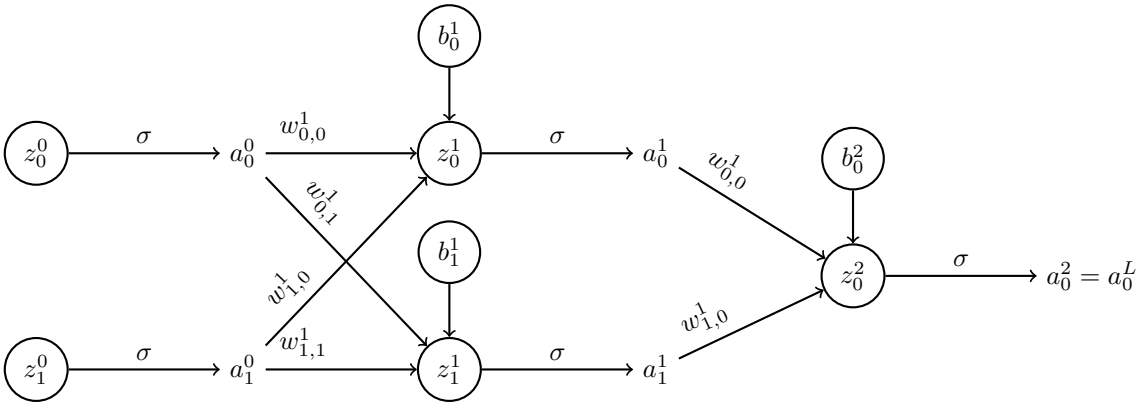
Matrizen in Neuronalen Netzwerken

Tim Zollner

17.02.2025

1 Feed-Forward

1.1 Grafik



1.2 Formeln

$$z_0^1 = a_0^0 \cdot w_{0,0} + a_1^0 \cdot w_{1,0} + b^1$$

allgemein:

$$z_0^1 = b^1 + \sum_{j=0}^{n^1} a_j^0 \cdot w_{j,0}$$

$$a_j^l = \sigma(z_j^l)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1.3 Berechnung als Vektor

$$\vec{z}^l = \begin{pmatrix} z_0^l \\ z_1^l \\ ... \\ z_j^l \end{pmatrix} \qquad \vec{a}^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ ... \\ a_j^l \end{pmatrix} \qquad \vec{b}^l = \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ ... \\ b_j^l \end{pmatrix} \qquad W^l = \begin{pmatrix} w_{0,0}^l & w_{1,0}^l & ... & w_{j,0}^l \\ w_{0,1}^l & w_{1,1}^l & ... & w_{j,1}^l \\ ... & ... & ... & ... \\ w_{0,i}^l & w_{1,i}^l & ... & w_{j,i}^l \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^l = W^l \cdot \vec{z}^{l-1} + \vec{b}^l$$

$$\begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ ... \\ a_j^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^{l-1} \\ z_1^{l-1} \\ ... \\ z_j^{l-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{0,0}^l & w_{1,0}^l & ... & w_{j,0}^l \\ w_{0,1}^l & w_{1,1}^l & ... & w_{j,1}^l \\ ... & ... & ... & ... \\ w_{0,i}^l & w_{1,i}^l & ... & w_{j,i}^l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ ... \\ b_j^l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ ... \\ a_j^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,0}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,0}^l \cdot z_1^{l-1} + ... + w_{j,0}^l \cdot z_j^{l-1} \\ w_{0,1}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,1}^l \cdot z_1^{l-1} + ... + w_{j,1}^l \cdot z_j^{l-1} \\ ... \\ w_{0,i}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,i}^l \cdot z_1^{l-1} + ... + w_{j,i}^l \cdot z_j^{l-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ ... \\ b_j^l \end{pmatrix}$$

2 Backpropagation

2.1 Verlustfunktion

$$E_j = \frac{1}{2}(y_j - a_j^L)^2$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_j (y_j - a_j^L)^2$$

$$\frac{dE_j}{da_j^L} = (a_j^L - y_j)$$

2.2 Lernvorgang

Anpassen der Gewichts- und BiasNeuronen:

$$w^l \to w^l - \frac{\eta}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial C^k}{\partial w^l}$$

η = Lernrate N = Anzahl der Trainingsbeispiele k = Trainingsbeispiel

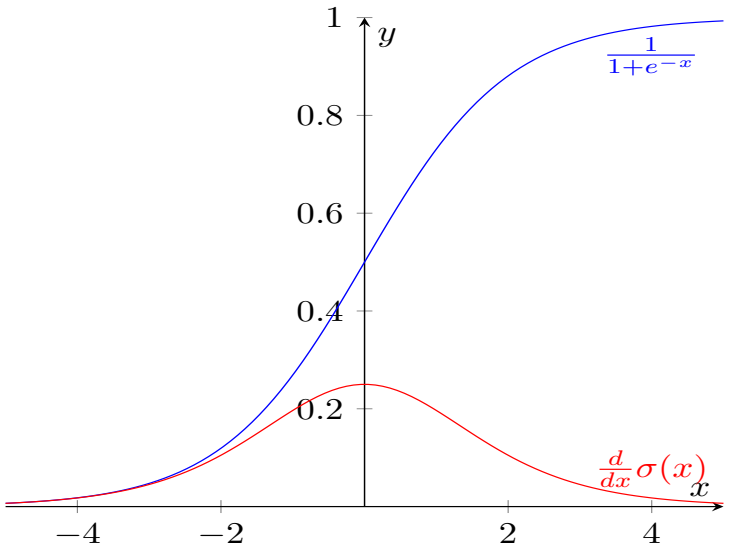
2.3 Ableitung der sigmoid Funktion

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{d}{dx}\sigma(x) = \frac{0(\cdot 1 + e^{-x}) - 1 \cdot e^{-x} \cdot -1}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1+e^{-x}-1}{(1+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{1}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot (1 - \frac{1}{1+e^{-x}}) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x))$$


1
y
0.8
0.6
0.4
0.2
$\frac{1}{1+e^{-x}}$
$\frac{d}{dx}\sigma(x)$
x
−4
−2
2
4

2.4 Fehler(δ)

Der sogenannte Fehler ist eine neue variable die zur berechnung der Änderungsraten der Gewichte und "Biases" benutzt wird. Der Fehlerterm berechnet jeweils die partielle Ableitung der Kostenfunktion E nach einem Rohinput z. Es gibt deshalb für jeden Rohinput einen Fehlerwert.

$$\delta_j^l = \frac{\partial E}{\partial z_j^l} \qquad \frac{\partial E}{\partial w_{j,i}^l} = \delta_i^l \cdot a_j^{l-1} \qquad \frac{\partial E}{\partial b_j^l} = \delta_j^l$$

Bei der Berechnung der Fehler wird zunächst die letzte Schicht berechnet und dann rekursiv die anderen Schichten. Für die Fehler der letzen Schicht ergibt sich durch die Kettenregel die folgende Formel:

$$\delta_j^L = \frac{\partial E}{\partial z_j^L} = \frac{\partial E}{\partial a_j^L} \cdot \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L}$$

Nach dem Einsetzen der Ableitungen:

$$= (a_j^L - y_j) \cdot \sigma(z_j^L) \cdot (1 - \sigma(z_j^L))$$

Die Formel für den Fehler der restlichen Schichten kann auf zwei Teile aufgeteilt werden:

$$\delta_j^l = \frac{\partial E}{\partial z_j^l} = \frac{\partial E}{\partial a_j^l} \cdot \frac{\partial a_j^l}{\partial z_j^l}$$

Die Ableitung der Aktivierung nach dem Rohinput entspricht einfach der Ableitung der Aktivierungsfunktion (hier sigmoid):

$$\frac{\partial a_j^l}{\partial z_j^l} = \sigma'(z_j^l)$$

Bei der Berechnung der Ableitung muss der jeweilige Einfluss auf die nachfolgenden Neuronen addiert werden:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j^l} = \sum_{i=0}^{n^{l+1}} \frac{\partial E}{\partial z_i^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_i^{l+1}}{\partial a_j^l} = \sum_{i=0}^{n^{l+1}} \delta_i^{l+1} \cdot \frac{\partial z_i^{l+1}}{\partial a_j^l}$$

$$\frac{\partial z_i^{l+1}}{\partial a_j^l} = \frac{\partial}{\partial a_j^l}\left(\sum_{p=0}^{n^{l+1}} a_p^l \cdot w_{p,i}^{l+1} + b_p^{l+1}\right) = w_{j,i}^{l+1}$$

Die Ableitung der Summe besteht hier aus einem einzigen Gewicht, da die Ableitung 0 ergibt wenn p $\neq$ j

$$\frac{\partial E}{\partial a_j^l} = \sum_{i=0}^{n^{l+1}} \delta_i^{l+1} \cdot w_{j,i}^{l+1}$$

Nach dem Zusammenführen der Einzelergebnisse ergibt sich die folgende Formel für die Berechnung der Fehlerterme der restlichen Schichten:

$$\delta_j^l = \left[\sum_{i=0}^{n^{l+1}} \delta_i^{l+1} \cdot w_{j,i}^{l+1}\right] \cdot \sigma'(z_j^l)$$

2.5 Berechnung des Fehlers als vektor

2.5.1 Fehler des letzten Layers

$$\delta_j^L = (z_j^L - y_j) \cdot \sigma'(a_j^L)$$

$$\vec{\delta^L} = \begin{pmatrix} \delta_0^L \\ \delta_1^L \\ ... \\ \delta_j^L \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_j \end{pmatrix} \qquad \vec{a^L} = \begin{pmatrix} a_0^L \\ a_1^L \\ ... \\ a_j^L \end{pmatrix} \qquad \vec{z^L} = \begin{pmatrix} z_0^L \\ z_1^L \\ ... \\ z_j^L \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta^L} = (\vec{z^L} - \vec{y^L}) \odot \sigma'(\vec{a^L})$$

2.5.2 Definition $\odot$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cdot b_0 \\ a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

2.5.3 Fehler eines beliebigen Layers

$$\delta_j^l = [\sum_{i=0}^{n^{l+1}} \delta_i^{l+1} \cdot w_{j,i}^{l+1}] \cdot \sigma'(z_j^l)$$

$$\delta_0^l = (\delta_0^{l+1} \cdot w_{0,0}^{l+1} + \delta_1^{l+1} \cdot w_{0,1}^{l+1} + ... + \delta_i^{l+1} \cdot w_{0,i}^{l+1}) \cdot \sigma'(z_0^l)$$

$$\delta_1^l = (\delta_0^{l+1} \cdot w_{1,0}^{l+1} + \delta_1^{l+1} \cdot w_{1,1}^{l+1} + ... + \delta_i^{l+1} \cdot w_{1,i}^{l+1}) \cdot \sigma'(z_1^l)$$

$$W^{l+1} = \begin{pmatrix} w_{0,0}^{l+1} & w_{1,0}^{l+1} & ... & w_{j,0}^{l+1} \\ w_{0,1}^{l+1} & w_{1,1}^{l+1} & ... & w_{j,1}^{l+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_{0,i}^{l+1} & w_{1,i}^{l+1} & ... & w_{j,i}^{l+1} \end{pmatrix} \qquad (W^{l+1})^T = \begin{pmatrix} w_{0,0}^{l+1} & w_{0,1}^{l+1} & ... & w_{0,i}^{l+1} \\ w_{1,0}^{l+1} & w_{1,1}^{l+1} & ... & w_{1,i}^{l+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_{j,0}^{l+1} & w_{j,1}^{l+1} & ... & w_{j,i}^{l+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta^l} = (W^{l+1})^T \cdot \vec{\delta^{l+1}} \odot \sigma'(\vec{z^l})$$

2.6 Feed-Forward Berechnung als Matrix

$$A^l = \begin{pmatrix} a_0^{l,0} & a_0^{l,1} & ... & a_0^{l,k} \\ a_1^{l,0} & a_1^{l,1} & ... & a_1^{l,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_j^{l,0} & a_j^{l,1} & ... & a_j^{l,k} \end{pmatrix}$$

$$A^l = \sigma(W^l \cdot A^{[l-1]} + \vec{b^l})$$

Erklärung Matrix + vektor

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + d & a_1 + d & a_2 + d \\ b_0 + e & b_1 + e & b_2 + e \\ c_0 + f & c_1 + f & c_2 + f \end{pmatrix}$$

2.7 Backpropagation als Matrix

2.7.1 Fehlerberechnung

$$[\delta^l] = \begin{pmatrix} \delta_0^{l,0} & \delta_0^{l,1} & ... & \delta_0^{l,k} \\ \delta_1^{l,0} & \delta_1^{l,1} & ... & \delta_1^{l,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_j^{l,0} & \delta_j^{l,1} & ... & \delta_j^{l,k} \end{pmatrix}$$

$$[\delta^L] = (Z^L - Y^L) \odot \sigma'(A^L)$$

$$[\delta^l] = (W^{l+1})^T \cdot [\delta^{l+1}] \odot \sigma'(A^l)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{B^l} = [\delta^l]$$

2.7.2 Berechnung der Gradienten der Gewichte

$$[\delta^l] = \begin{pmatrix} \delta_0^{l,0} & \delta_0^{l,1} & \dots & \delta_0^{l,k} \\ \delta_1^{l,0} & \delta_1^{l,1} & \dots & \delta_1^{l,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_j^{l,0} & \delta_j^{l,1} & \dots & \delta_j^{l,k} \end{pmatrix} \qquad Z^{l-1} = \begin{pmatrix} z_0^{l-1,0} & z_0^{l-1,1} & \dots & z_0^{l-1,k} \\ z_1^{l-1,0} & z_1^{l-1,1} & \dots & z_1^{l-1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_j^{l-1,0} & z_j^{l-1,1} & \dots & z_j^{l-1,k} \end{pmatrix}$$

$$W^l = \begin{pmatrix} w_{0,0}^l & w_{1,0}^l & \dots & w_{j,0}^l \\ w_{0,1}^l & w_{1,1}^l & \dots & w_{j,1}^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{0,i}^l & w_{1,i}^l & \dots & w_{j,i}^l \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial E^k}{\partial w_{j,i}^{l,k}} = \delta_i^{l,k} \cdot z_j^{l-1,k}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{0,0}^l} = \sum_{k=0}^{N} \delta_0^{l,k} \cdot z_0^{l-1,k}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{1,0}^l} = \sum_{k=0}^{N} \delta_0^{l,k} \cdot z_1^{l-1,k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{W^l} = [\delta^l] \cdot (A^{l-1})^T$$

3 Quellen

Michael Nielsen - Neural Networks and Deep Learning(Algorithmus)
Michael Kipp - Neurale Netze und Deep Learning (Algorithmus)
Sudeep Raja - A Derivation of Backpropagation in Matrix Form (Prüfen der Matrizenformeln)