

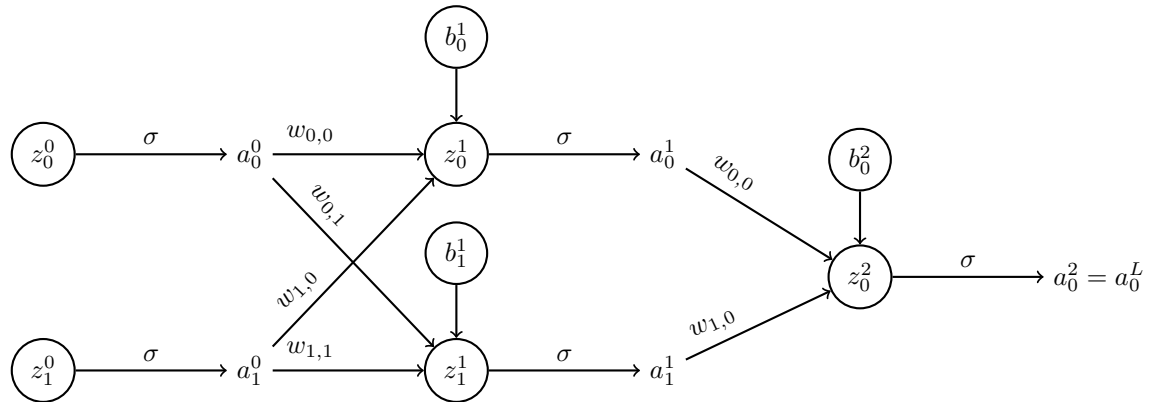
# Matrizen in Neuronalen Netzwerken

Tim Zollner

17.02.2025

## 1 Feed-Forward

### 1.1 Grafik



### 1.2 Formeln

$$z_0^1 = a_0^0 \cdot w_{0,0} + a_1^0 \cdot w_{1,0} + b^1$$

allgemein:

$$z_0^1 = b^1 + \sum_{j=0}^n a_j^0 \cdot w_{j,0}$$

$$a_j^l = \sigma(z_j^l)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

### 1.3 Matrizendarstellung

$$\vec{z}^l = \begin{pmatrix} z_0^l \\ z_1^l \\ \dots \\ z_j^l \end{pmatrix} \quad \vec{a}^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \dots \\ a_j^l \end{pmatrix} \quad \vec{b}^l = \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ \dots \\ b_j^l \end{pmatrix} \quad W^l = \begin{pmatrix} w_{0,0}^l & w_{1,0}^l & \dots & w_{j,0}^l \\ w_{0,1}^l & w_{1,1}^l & \dots & w_{j,1}^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{0,i}^l & w_{1,i}^l & \dots & w_{j,i}^l \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^l = \vec{z}^{l-1} \cdot W^l + \vec{b}^l$$

$$\begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \dots \\ a_j^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^{l-1} \\ z_1^{l-1} \\ \dots \\ z_j^{l-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{0,0}^l & w_{1,0}^l & \dots & w_{j,0}^l \\ w_{0,1}^l & w_{1,1}^l & \dots & w_{j,1}^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{0,i}^l & w_{1,i}^l & \dots & w_{j,i}^l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ \dots \\ b_j^l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \dots \\ a_j^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,0}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,0}^l \cdot z_1^{l-1} + \dots + w_{j,0}^l \cdot z_j^{l-1} \\ w_{0,1}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,1}^l \cdot z_1^{l-1} + \dots + w_{j,1}^l \cdot z_j^{l-1} \\ \dots \\ w_{0,i}^l \cdot z_0^{l-1} + w_{1,i}^l \cdot z_1^{l-1} + \dots + w_{j,i}^l \cdot z_j^{l-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0^l \\ b_1^l \\ \dots \\ b_j^l \end{pmatrix}$$

## 2 Backpropagation

### 2.1 Verlustfunktion

$$E_j = \frac{1}{2}(y_j - a_j^L)^2$$

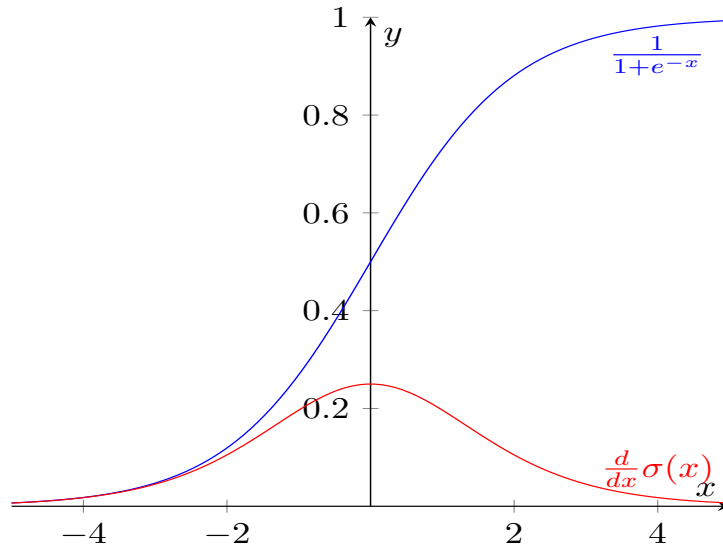
$$E = \frac{1}{2} \sum_j (y_j - a_j^L)^2$$

$$\frac{dE_j}{da_j^L} = (a_j^L - y_j)$$

### 2.2 Ableitung der sigmoid Funktion

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sigma(x) &= \frac{0 \cdot (1 + e^{-x}) - 1 \cdot e^{-x} \cdot -1}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{1 + e^{-x} - 1}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} - \frac{1}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x)) \end{aligned}$$



## 2.3 Fehler( $\delta$ )

-Zwischenwert zur leichteren Berechnung des Gradienten

$$\delta_j^l = \frac{\partial E_j}{\partial z_j^l} \quad \frac{\partial E}{\partial w_{j,i}^l} = \delta_j^l \cdot a_i^{l-1} \quad \frac{\partial E}{\partial b_j^l} = \delta_j^l$$

Berechnung des Fehlers des letzten Layers durch Anwendung der Kettenregel:

$$\delta_j^L = \frac{\partial E}{\partial z_j^L} = \frac{\partial E}{\partial a_j^L} \cdot \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L}$$

Einsetzen der Ableitungen:

$$= \frac{\partial E}{\partial a_j^L} \cdot \sigma(z_j^L) \cdot (1 - \sigma(z_j^L))$$

$$= (a_j^L - y_j) \cdot \sigma(z_j^L) \cdot (1 - \sigma(z_j^L))$$

Berechnung des Fehlers des vorletzten Layers:

$$\delta_j^{L-1} = \frac{\partial E}{\partial z_j^{L-1}}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial a_j^{L-1}} \cdot \frac{\partial a_j^{L-1}}{\partial z_j^{L-1}} = \frac{\partial E}{\partial a_j^{L-1}} \cdot \sigma'(z_j^{L-1})$$