

Geogebra - algebra

Vladimir Filipović

vladaf@matf.bg.ac.rs

ABC Tekst

Ovim alatom se na površinu za crtanje postavljaju statički i dinamički tekstovi ili LaTeX formule.

Prvo treba da zadate lokaciju teksta na jedan od načina:

- Klikom na površinu za crtanje se postavlja novi tekst na toj lokaciji.
- Klikom na tačku se postavlja novi tekst koji je vezan za nju.

Nakon toga se pojavljuje prozor u koji se unosi tekst.

Statički tekst ne zavisi od matematičkih objekata i na njega obično ne utiču izmene u konstrukciji.

Dinamički tekst sadrži vrednosti objekata koje se automatski menjaju istovremeno sa promenom tih objekata.

Mešoviti tekst je kombinacija statičkog i dinamičkog teksta.

Da biste napravili dinamički tekst, možete prvo da unesete statički deo teksta preko tastature (na primer, Tačka A =). Zatim kliknite na objekat čiju vrednost želite da prikazete u tekstu i GeoGebra automatski dodaje sintaksu ("Tačka A = " + A) potrebnu za generisanje dinamičkog teksta.

LaTeX formule

Da biste napisali formulu , uključite opciju 'LaTeX formula' u prozoru alata Tekst i unesite tekst u LaTeX sintaksi.

Iz padajućeg menija možete da odaberete sledeće naredbe:

LaTeX unos	Rezultat
<code>a \cdot b</code>	$a \cdot b$
<code>\frac{a}{b}</code>	$\frac{a}{b}$
<code>\sqrt{x}</code>	\sqrt{x}
<code>\sqrt[n]{x}</code>	$\sqrt[n]{x}$
<code>\vec{v}</code>	\vec{v}
<code>\overline{AB}</code>	\overline{AB}
<code>x^{2}</code>	x^2
<code>a_{1}</code>	a_1
<code>\sin\alpha + \cos\beta</code>	$\sin \alpha + \cos \beta$
<code>\int_a^b x \, dx</code>	$\int_a^b x dx$
<code>\sum_{i=1}^n i^2</code>	$\sum_{i=1}^n i^2$

Algebarski unos

Algebarska reprezentacija matematičkih objekata (na primer, vrednosti, koordinata, jednačina) se prikazuje u *Algebarskom prikazu*. Objekti se mogu kreirati i menjati korišćenjem *polja za unos* u dnu prozora GeoGebre.

Imenovanje objekata

Objektu možete da dodelite konkretno ime kada ga kreirate pomoću *polja za unos*:

- **Tačke:** Upišete ime (uvek velikim slovima: A , P) i znak jednakosti ispred koordinata.

Primeri: $C = (2, 4)$, $P = (1; 180^\circ)$, $\text{Complex} = 2 + i$

- **Vektori:** Upišete ime (malim slovima: v , u) i znak jednakosti ispred koordinata vektora.

Primeri: $v = (1, 3)$, $u = (3; 90^\circ)$, $\text{complex} = 1 - 2i$

- **Prave, kružnice i konusni preseci:** Ovi objekti se imenuju upisivanjem imena i dvotačke ispred svojih jednačina.

Primeri: $g: y = x + 3$, $c: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $\text{hyp}: x^2 - y^2 = 2$

- **Funkcije:** Funkcije možete da imenujete upisivanjem, na primer, $f(x) =$ ili $g(x) =$ ispred formule funkcije.

Primeri: $h(x) = 2x + 4$, $q(x) = x^2$, $\text{trig}(x) = \sin(x)$

Izmena vrednosti

Postoje dva načina za izmenu vrednosti nezavisnog objekta:

- **Unos nove preko stare** vrednosti objekta tako što se u *polju za unos* unese ime objekta i nova vrednost.
- **Izmena** algebarske reprezentacije: aktivirajte alat *Pomeranje* i dvostrukim klikom na objekat u *algebarskom prikazu* otvorite polje za unos u kojem možete da izmenite njegovu vrednost.

Prikaz istorije polja za unos

Kada postavite kurzor u *polje za unos* možete pomoću tipki sa strelicama ↑ ‘gore’ i ↓ ‘dole’ da se krećete kroz prethodne unose, jedan po jedan.

Ubacivanje imena, vrednosti ili definicije objekta u polje za unos

Ubacivanje imena objekta: Aktivirajte alat *Move* i odaberite objekat čije ime želite da upišete u *polje za unos*. Zatim pritisnite tipku *F5* na tastaturi.

Ubacivanje definicije objekta: Postoje dva načina za ubacivanje definicije objekta (na primer, $A = (4, 2)$, $c = \text{Kružnica}[A, B]$) u *polje za unos*:

- Kliknite na objekat držeći tipku *Alt*
- Aktivirajte alat *Move* i odaberite objekat čiju definiciju želite da ubacite u *polje za unos*. Zatim pritisnite tipku *F3* na tastaturi.

Direktan unos

GeoGebra radi sa brojevima, uglovima, tačkama, vektorima, dužima, pravama, konusnim presecima, funkcijama i parametarskim krivama. Ovi objekti se unose u *polje za unos* pomoću svojih koordinata ili jednačina.

Brojevi i uglovi

Brojevi

Brojeve možete da uneste u *polju za unos*. Ako unesete samo broj (na primer 3), GeoGebra će mu dodeliti malo slovo kao ime. Ako želite da broju dodelite neko posebno ime, možete da upišete to ime praćeno znakom jednakosti i zatim broj .

Konstanta π i Ojlerova konstanta e se mogu koristiti u izrazima i računanju tako što se odaberu u padajućoj listi pored *polja za unos*.

Uglovi

Uglovi se zadaju u *stepenima* ($^{\circ}$) ili *radijanima* (rad). Konstanta π je korisna za vrednosti u radijanima, a može se uneti i kao pi.

Napomena: Simbol za stepene $^{\circ}$ i simbol za broj pi π se mogu uneti pomoću sledećih

prečica na tastaturi:

- *Alt-O* (MacOS: *Ctrl-O*) za simbol za stepene $^{\circ}$
- *Alt-P* (MacOS: *Ctrl-P*) za simbol za broj π

Klizači

Nezavisni brojevi i uglovi mogu da se prikažu kao klizači u *geometrijskom prikazu* (alat Klizač).

Ograničenje vrednosti na interval

Nezavisni brojevi i uglovi mogu da se ograniče na interval $[min, max]$ na kartici 'Klizač' prozora za Osobine (alat Klizač).

Tačke i vektori

Tačke i vektori se zadaju u *Dekartovim* ili *polarnim koordinatama*.

Primeri: $P = (1; 0^\circ)$, $v = (5; 90^\circ)$.

Prave i koordinatne ose

Prave

Prave se predstavljaju pomoću jednačina po x i y ili u parametarskom obliku. U oba slučaja se u jednačinama prave mogu upotrebiti prethodno definisane vrednosti (npr. brojevi, tačke, vektori).

Primer: $g : 3x + 4y = 2$, $t = 3$, $g: X = (-5, 5) + t(4, -3)$

Konusni presek

Konusni preseki se zadaju kvadratnom jednačinom po x i y . Pri tome se mogu upotrebiti ranije definisane promenljive (npr. brojevi, tačke, vektori).

Primeri:

- Elipsa *el*: $el: 9x^2 + 16y^2 = 144$
- Hiperbola *hip*: $hip: 9x^2 - 16y^2 = 144$
- Parabola *par*: $par: y^2 = 4x$
- Kružnica *k1*: $k1: x^2 + y^2 = 25$
- Kružnica *k2*: $k2: (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Funkcija po x

Prilikom definisanja funkcija možete da koristite već definisane promenljive (npr. brojeve, tačke, vektore) i druge funkcije.

Primeri:

- Funkcija *f*: $f(x) = 3x^3 - x^2$
- Funkcija *g*: $g(x) = \tan(f(x))$
- Funkcija bez imena $\sin(3x) + \tan(x)$

Ugrađene funkcije i aritmetičke operacije

Operacija	Unos
sabiranje	+
oduzimanje	-
množenje	* ili <i>razmak</i>
skalarni proizvod	* ili <i>razmak</i>
deljenje	/
stepenovanje	^ ili 2
faktorijel	!
gama funkcija	gamma ()
zagrade	()
x koordinata	x ()
y koordinata	y ()
apsolutna vrednost	abs ()
signum	sgn ()
kvadratni koren	sqrt ()
kubni koren	cbrt ()
slučajan broj između 0 i 1	random ()
eksponencijalna funkcija	exp () ili e^x
logaritam (prirodni, baza e)	ln () ili log ()

Operacija	Unos
logaritam sa bazom 2	ld()
logaritam sa bazom 10	lg()
kosinus	cos()
sinus	sin()
tangens	tan()
arkus kosinus	acos()
arkus sinus	asin()
arkus tangens	atan()
kosinus hiperbolični	cosh()
sinus hiperbolični	sinh()
tangens hiperbolični	tanh()
arkus kosinus hiperbolični	acosh()
arkus sinus hiperbolični	asinh()
arkus tangens hiperbolični	atanh()
najveći ceo broj manji od	floor()
najmanji ceo broj veći od	ceil()
zaokruživanje	round()

Zadatak

- Nacrtati grafik funkcije $s(x) = \sin(x^2 + 3)$
- Odrediti tačku Z sa grafika čija prva koordinata iznosi 1.15
- Koliko iznosi $\sin(1.15^2 + 3)$
- Nacrtati kružnicu p sa centrom u tački Z poluprečnika 2

Rešenje

- U polje za unos uneti $s(x)=\sin(x^2+3)$
- U polje za unos uneti $Z=(1.15, s(1.15))$
- U algebarskom prikazu data je tačka Z zajedno sa svojim koordinatama. Druga koordinata je tražena vrednost $s(1.15)$
- U polje za unos uneti p: $(x-1.15)^2 + (y+0.92)^2 = 4$

Zadatak

- Kreirati 5 slajdera a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 (sa vrednostima izmedju 0 i 30), koji predstavljaju broj učenika koji su na kontrolnom zadatku dobili redom jedinice, dvojke, trojke, cetvorke i petice. Kreirati bar chart (trakasti dijagram) koji prikazuje rezultate graficki. Na grafiku dodati jednu uspravnu pravu koja predstavlja prosek.

Logičke promenljive i operacije

Logičke vrednosti “true” and “false” (tačno i netačno) se mogu koristiti u GeoGebri.

Logičke operacije

	Operacija	Primer	Tipovi
jednako	\cong ili $==$	$a \cong b$ ili $a == b$	brojevi, tačke, prave, konusni preseki a, b
nejednako	\neq ili $!=$	$a \neq b$ ili $a != b$	brojevi, tačke, prave, konusni preseki a, b
manje	$<$	$a < b$	brojevi a, b
veće	$>$	$a > b$	brojevi a, b
manje ili jednako	\leq ili $<=$	$a \leq b$ ili $a <= b$	brojevi a, b
veće ili jednako	\geq ili $>=$	$a \geq b$ ili $a >= b$	brojevi a, b
i	\wedge	$a \wedge b$	logičke vrednosti a, b
ili	\vee	$a \vee b$	logičke vrednosti a, b
ne	\neg ili $!$	$\neg a$ ili $!a$	logičke vrednosti a
paralelno	\parallel	$a \parallel b$	prave a, b
normalno	\perp	$a \perp b$	prave a, b

Liste objekata i operacije nad listama

Liste objekata (npr. tačka, duži, kružnica) se zadaju pomoću vitičastih zagrada.

Primeri:

- $L = \{A, B, C\}$ daje listu koja sadrži tri ranije definisane tačke A , B i C .
- $L = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ kreira listu koja se sastoji od bezimenih tačaka, kao i same te tačke.

Poređenje listi objekata

Možete da poredite dve liste objekata:

- $list1 == list2$: Proverava da li su dve liste jednake i vraća true ili false kao rezultat.
- $list1 != list2$: Proverava da li su dve liste različite i vraća true ili false kao rezultat.

Primena operacija i funkcija na liste

Prilikom primene operacija i ugrađenih funkcija na liste, uvek se kao rezultat dobija nova lista.

Primeri sabiranja i oduzimanja:

- $\text{Lista1} + \text{Lista2}$: Sabira odgovarajuće elemente iz dve liste.

Napomena: Dve liste moraju biti iste dužine.

- $\text{Lista} + \text{Broj}$: Dodaje broj svakom elementu liste.

- $\text{Lista1} - \text{Lista2}$: Oduzima elemente druge liste od odgovarajućih elemenata prve liste.

Napomena: Dve liste moraju biti iste dužine.

- $\text{Lista} - \text{Broj}$: Oduzima broj od svakog elementa liste.

Primeri množenja i deljenja:

- $\text{Lista1} * \text{Lista2}$: Množi odgovarajuće elemente iz dve liste.

Napomena: Dve liste moraju biti iste dužine. Ako su dve liste kompatibilne matrice, primenjuje se matrično množenje.

- $\text{Lista} * \text{Broj}$: Množi svaki element liste brojem.
- $\text{Lista1} / \text{Lista2}$: Deli elemente prve liste odgovarajućim elementima druge liste.

Napomena: Dve liste moraju biti iste dužine.

- $\text{Lista} / \text{Broj}$: Deli svaki element liste brojem.
- $\text{Broj} / \text{Lista}$: Deli broj svakim elementom liste.

Ostali primeri:

- Lista^2 : Kvadrira sve elemente liste.
- $\sin(\text{Lista})$: Primenjuje funkciju sinus na svaki element liste.

Matrične Operacije

Primeri sabiranja i oduzimanja:

- Matrica + Matrica: Sabira odgovarajuće elemente dve kompatibilne matrice.
- Matrica – Matrica: Oduzima odgovarajuće elemente dve kompatibilne matrice.

Primeri množenja:

- Matrica * Broj: Množi sve elemente matrice datim brojem.
- Matrica * Matrica: Množi matrice i kao rezultat daje matricu.

Napomena: Vrste prve matrice i kolone druge matrice moraju imati isti broj elemenata.

Primer: $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\} * \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ daje rezultujuću matricu $\{\{9, 12, 15\}, \{19, 26, 33\}, \{29, 40, 51\}\}$.

Zadatak

- Odrediti proizvod lista $L=\{\{3,1,-2\},\{3,-2,4\},\{-3,5,-1\}\}$ i $M=\{\{2,1,0\},\{1,1,2\},\{-1,2,1\}\}$
- Kakva je matrica $(L*M)/9$?
- Možemo li listu $N=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ pomnožiti tačkom $A=(3,4)$?
- Možemo li listu $P=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ pomnožiti tačkom $A=(3,4)$?

Rešenje

- U polje za unos uneti $L = \{\{3, 1, -2\}, \{3, -2, 4\}, \{-3, 5, -1\}\}$, zatim $M = \{\{2, 1, 0\}, \{1, 1, 2\}, \{-1, 2, 1\}\}$ i na kraju uneti $L * M$
- $(L * M) / 9$ je jedinična matrica
- Geogebra tačku A posmatra kao matricu tipa 2×1 , sa elementima 3 i 4, pa je množenje moguće
- Možemo, ali samo u varijanti $P * A$

Kompleksni brojevi i operacije

GeoGebra ne podržava kompleksne brojeve direktno, ali se tačke mogu koristiti za simuliranje operacija nad kompleksnim brojevima.

Primer: Ako u *polju* za unos upišete kompleksan broj $3 + 4i$, dobićete tačku $(3, 4)$ u grafičkom prikazu. Koordinate te tačke će u algebarskom prikazu biti prikazane kao $3 + 4i$.

Ako je promenljiva i nedefinisana, ona se tumači kao uređeni par $i = (0, 1)$ odnosno kao kompleksan broj $0 + 1i$. To takođe znači da se promenljiva i može koristiti za unos kompleksnih brojeva u *polju* za unos (na primer, $q = 3 + 4i$).

Primeri sabiranja i oduzimanja:

- $(2 + 1i) + (1 - 2i)$ daje kompleksan broj $3 - 1i$.
- $(2 + 1i) - (1 - 2i)$ daje kompleksan broj $1 + 3i$.

Primeri množenja i deljenja:

- $(2 + 1i) * (1 - 2i)$ daje kompleksan broj $4 - 3i$.
- $(2 + 1i) / (1 - 2i)$ daje kompleksan broj $0 + 1i$.

Zadatak

Ako je $Z=2+2i$, $Y=3-3i$, odrediti:

- $Z+Y$
- $Z*Y$
- Z/Y
- $7+Z$
- $6-Y$

Rešenje

- $Z+Y=5-i$
- $Z*Y=12$
- $Z/Y=0.67i$
- $7+Z=9+2i$
- $6-Y=3+3i$






GeoGebra kao alat za prezentaciju

Upotreba trake za korake konstrukcije

- *Desni klik -> Navigation bar*

Omogućava kretanje kroz korake konstrukcije u gotovoj datoteci sa crtežom u GeoGebri.

Traka za korake konstrukcije sadrži:

-  dugme: 'vрати se na prvi korak'
-  dugme: 'idi nazad korak po korak'
-  dugme: 'idi napred korak po korak'
-  dugme: 'idi na poslednji korak'
-  'Play': 'automatski izvedi konstrukciju korak po korak'

Napomena: Brzina se menja u tekstualnom polju desno od dugmeta 'Kreni'.

-  'Pause': 'zaustavi automatsko prikazivanje konstrukcije'

Napomena: Ovo dugme se pojavljuje tek kada se klikne na dugme 'Kreni'.

-  dugme: Ovo dugme otvara *opis konstrukcije*.

Upotreba opisa konstrukcije

View -> Construction protocol

- Tabela koja sadrži sve korake konstrukcije I omogućava ponovno izvođenje konstrukcije korak po korak

Kretanje kroz i izmena opisa konstrukcije

- Pomoću tastature:
 - korišćenjem odgovarajuće tipke sa tastature (↑, ↓, *Home*, *End*, *Delete*)
- Pomoću miša:
 - Dvostruki klik na vrstu odabira korak konstrukcije
 - Dvostruki klik na naslov bilo koje kolone - početak *opisa konstrukcije*
 - Prevlačenje menja redosled koraka konstrukcije u *opisu konstrukcije*
 - Desni klik na vrstu otvara se kontekstni meni za objekte iz odabranog koraka
- Možete da ubacite novi korak konstrukcije na bilo koju poziciju:
 - Odaberite korak konstrukcije iznad kojeg želite da ubacite novi korak konstrukcije. Ostavite prozor sa *opisom konstrukcije* otvoren i napravite novi objekat.

Mogućnosti za štampanje

Štampanje grafičkog prikaza

- *File -> Print Preview*

U ovom prozoru možete da zadate 'Naslov', 'Autora' i 'Datum' za konstrukciju, 'Razmeru u cm' i orijentaciju papira (pejzaž ili portret) za štampanje.

Štampanje opisa konstrukcije

- Ako želite da odštampate, prvo otvorite prozor za *construction protocol* iz menija *View*. Zatim iz zaglavlja tog prozora odaberite stavku *Print*.

Snimanje grafičkog prikaza kao slike

- Ceo grafički prikaz se snima kao slika. Ako želite samo deo grafičkog prikaza, upotrebite pravougaonik za odabir.
- U meniju *File* odaberite stavku 'export' a zatim 'Graphics view as a picture'.
Pojaviće se prozor u kojem možete da odaberete 'Format', 'Razmeru u cm' i 'Rezoluciju u dpi' slike koja će biti snimljena.

Zahvalnica

Sadržaj koji je uključen u ovu prezentaciju je preuzet iz nastavnih materijala za predmet **Obrazovni softver 1** na PMF Kragujevac, autori dr Tatjana Tomović i Aleksandar Milenković

Ovaj sadržaj je drtaljno obrađen u knjizi Geogebra pomoć, autora Hohenwarter M. i Hohenwarter J. (prevod prof. dr Đorđe Herceg)