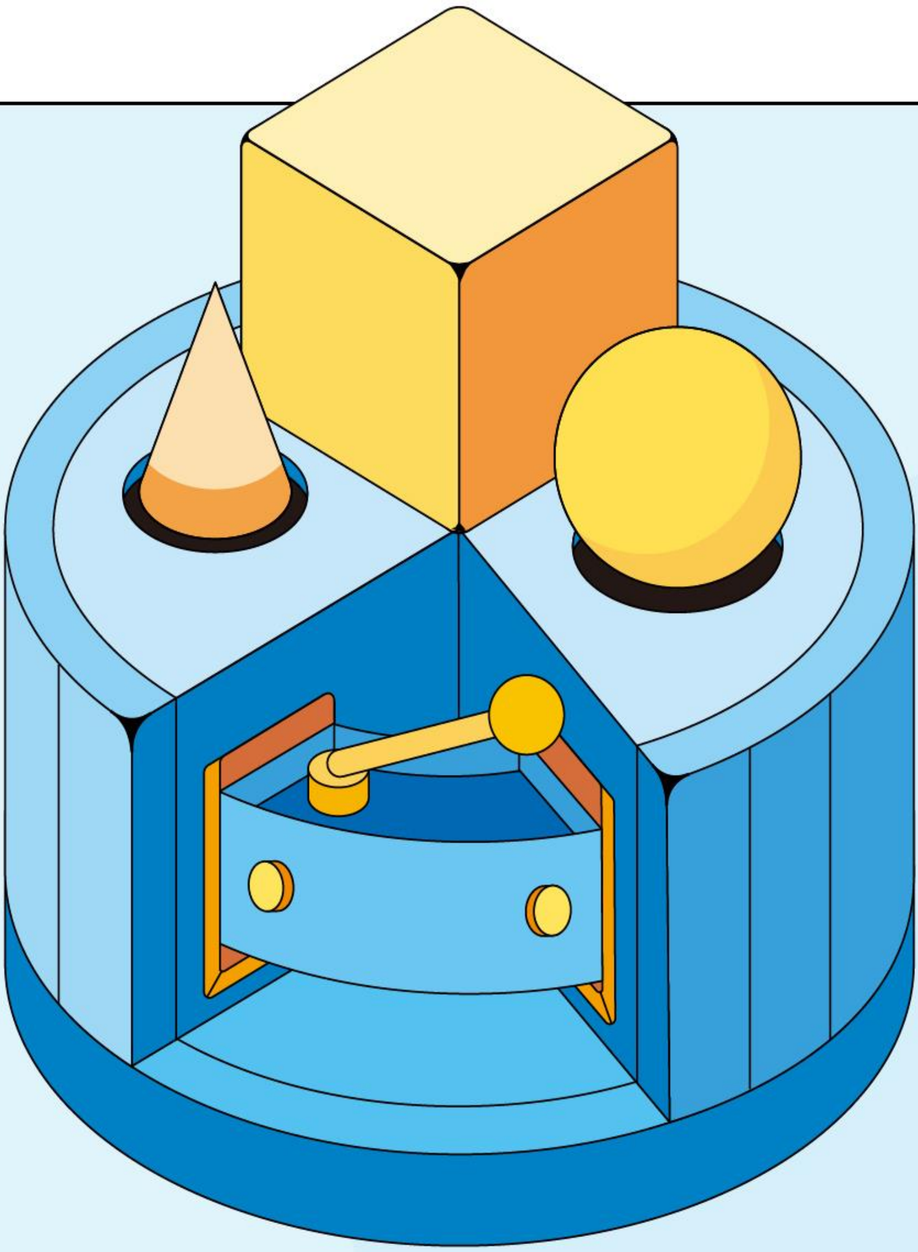
高中数学

知识通关宝典



— Math —

高中数学知识点与公式大全

第一章 集合与函数概念

1. 集合

1.1 集合的概念及其表示

⑴. 集合中元素的三个特征：

①. **确定性**：给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.

②. **互异性**：一个集合中的元素是互不相同的，即集合中的元素是不重复出现的.

③. **无序性**：即集合中的元素无顺序,可以任意排列、调换。

⑵. 元素与集合的关系有且只有两种：属于（用符号“$\in$”表示）和不属于（用符号“$\notin$”表示）.

⑶. 集合常用的表示方法有三种：列举法、Venn 图、描述法.

(4). 常见的数集及其表示符号

名称	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
表示符号	N	N^*或N_+	Z	Q	R

1.2 集合间的基本关系

	性质	符号表示
空集	空集是任何集合的子集	$\varnothing \subseteq A$
	空集是任何非空集合的真子集	$\varnothing \subsetneq A$（$A \neq \varnothing$）
相等	集合 A 与集合 B 所有元素相同	A=B
子集	集合 A 中的任何一个元素均是集合	$A \subseteq B$

	B 中的元素	
真 子 集	集合 A 中的任何一个元素均是集合 B 中的元素，且 B 中至少有一个元素在 A 中没有	

1.3 集合之间的基本运算

	符号表示	**集合表示**
并集	$A\cup B$	$\{x\mid x\in A或x\in B\}$
交集	$A\cap B$	$\{x\mid x\in A且x\in B\}$
补集	$C_U A$	$\{x\mid x\in U且x\notin A\}$

【重要提醒】

1．若有限集 A 中有 n 个元素，则集合 A 的子集个数为 2^n，真子集的个数为 2^n-1.

2．$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap(\complement_U B)=\varnothing\Leftrightarrow A\cup(\complement_U B)=U$.

3．奇数集：$\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=4n\pm1.n\in\mathbf{Z}\}$.

4． 德▪摩根定律：①并集的补集等于补集的交集，即 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

②交集的补集等于补集的并集，即 $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

2. 函数及其表示

2.1 **函数的相关概念**

	函数
两个集	设 A、B 是两个非空数集

合 A、B	
对应关系	按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应
名称	称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数
记法	$y=f(x)$，$x\in A$

注意：判断一个对应关系是否是函数关系，就看这个对应关系是否满足函数定义中“定义域内的任意一个自变量的值都有唯一确定的函数值”这个核心点.

(2)函数的定义域、值域

在函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域，与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

(3)构成函数的三要素：函数的三要素为定义域、值域、对应关系.

(4)函数的表示方法

函数的表示方法有三种：解析法、列表法、图象法.

解析法：一般情况下，必须注明函数的定义域；

列表法：选取的自变量要有代表性，应能反映定义域的特征；

图象法：注意定义域对图象的影响.

2.2 函数的三要素

（1）. **函数的定义域**

函数的定义域是使函数解析式有意义的自变量的取值范围，常见

基本初等函数定义域的要求为：

(1)分式函数中分母不等于零.(2)偶次根式函数的被开方式大于或等于 0.

(3)一次函数、二次函数的定义域均为 R.(4)$y=x^0$ 的定义域是 $\{x|x\neq 0\}$.

（2）．函数的解析式

(1)函数的解析式是表示函数的一种方式，对于不是 $y=f(x)$ 的形式，可根据题目的条件转化为该形式.

(2)求函数的解析式时，一定要注意函数定义域的变化，特别是利用换元法(或配凑法)求出的解析式，不注明定义域往往导致错误.

（3）．函数的值域

函数的值域就是函数值构成的集合，熟练掌握以下四种常见初等函数的值域：

(1)一次函数 $y=kx+b$(k 为常数且 $k\neq 0$)的值域为 R.

(2)反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ (k 为常数且 $k\neq 0$)的值域为$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$.

(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 为常数且 $a\neq 0$)，

当 $a>0$ 时，二次函数的值域为$[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$；当 $a<0$ 时，二次函数的值域为$(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}]$.

求 二 次 函 数 的 值 域 时 ， 应 掌 握 配 方 法

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

2.3 分段函数

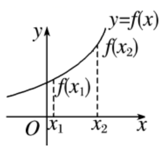
分段函数的概念

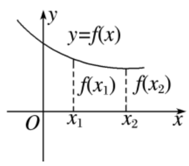
若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，则这种函数称为分段函数．分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数．

3.函数基本性质

3.1 函数的单调性

单调函数的定义

<table>
<tr><td></td><td>增函数</td><td>减函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">定义</td><td colspan="2">一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2</td></tr>
<tr><td>当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数</td><td>当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数</td></tr>
<tr><td>图象描述</td><td>

自左向右看图象是上升的</td><td>

自左向右看图象是下降的</td></tr>
</table>

单调区间的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足	
条件	（1）对于任意的 $x\in I$，都 $f(x)\le M$； （2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$	（3）对于任意的 $x\in I$，都 $f(x)\ge M$； （4）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$
结论	M 为最大值	M 为最小值

注意：（1）函数的值域一定存在，而函数的最值不一定存在；

（2）若函数的最值存在，则一定是值域中的元素；若函数的值域是开区间，则函数无最值，若函数的值域是闭区间，则闭区间的端点值就是函数的最值.

函数单调性的常用结论

（1）若 $f(x),g(x)$ 均为区间 A 上的增(减)函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是区间 A 上的增(减)函数；

（2）若 $k>0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同；若 $k<0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反；

（3）函数 $y=f(x)\left(f(x)>0\right)$ 在公共定义域内与 $y=-f(x)$，$y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的单调性相反；

（4）函数 $y=f(x)\left(f(x)\geq 0\right)$ 在公共定义域内与 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调性相同；

（5）一些重要函数的单调性：

① $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调性：在 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减；

② $y=ax+\dfrac{b}{x}$（$a>0$，$b>0$）的单调性：在 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right]$ 和 $\left[\sqrt{\dfrac{b}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{\dfrac{b}{a}},0\right)$ 和 $\left(0,\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ 上单调递减.

3.2 函数的奇偶性

（1）．函数奇偶性的定义及图象特点

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是偶函数	图象关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是奇函数	图象关于原点对称

注意：由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$ 也在定义域内（即定义域关于原点对称）.

（2）．函数奇偶性的几个重要结论

（1）奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同，偶函数在关于

原点对称的区间上的单调性相反.

（2） $f(x)$， $g(x)$ 在它们的公共定义域上有下面的结论：

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)g(x)$	$f(g(x))$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	奇函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数

（3）若奇函数的定义域包括 0，则 $f(0)=0$.

（4）若函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

（5）定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以唯一表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

（6）若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数， $f(x)\cdot f(-x)$ 为偶函数.

重难点 复合函数的单调性①奇函数+奇函数=奇函数，偶函数+偶函数=偶函数；

②奇函数×奇函数=偶函数，奇函数×偶函数=奇函数，偶函数×偶函数=偶函数；

第二章 基本初等函数

2.1 指数与指数函数

（1）根式

概念：式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，其中n叫做根指数，a叫做被开方数.

性质：$(\sqrt[n]{a})^{n}=a$（a使$\sqrt[n]{a}$有意义）；

当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^{n}}=a$，当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^{n}}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

（2）分数指数幂

规定：正数的正分数指数幂的意义是$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$（$a>0$，$m$，$n\in N^{*}$，且

$n>1$）；正数的负分数指数幂的意义是$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}$（$a>0$，$m$，$n\in N^{*}$，且

$n>1$）；0 的正分数指数幂等于 0；0 的负分数 指数幂没有意义.

有理指数幂的运算性质：$a^{r}a^{s}=a^{r+s}$；$(a^{r})^{s}=a^{rs}$；$(ab)^{r}=a^{r}b^{r}$，其中

$a>0$，$b>0$，r，$s\in Q$.

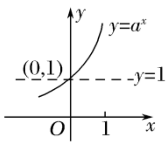
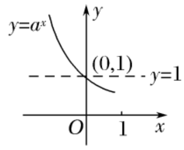
（3）指数函数及其性质

概念：函数$y=a^{x}$（$a>0$且$a\neq 1$）叫做指数函数，x是自变量，函数的

定义域是R，a是底数.

指数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$

图象		
定义域	R	
值域	(0，+∞)	
性质	过定点(0，1)，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x<0$ 时，$y>1$； 当 $x>0$ 时，$0<y<1$
	在(−∞，+∞)上是增函数	在(−∞，+∞)上是减函数

2.2 对数与对数函数

（1）对数的概念

如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

（2）对数的性质、换底公式与运算性质

(1)对数的性质：①$a^{\log_a N}=N$；②$\log_a a^b=b(a>0$，且 $a\neq1)$.

(2)对数的运算法则；如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；　　②$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

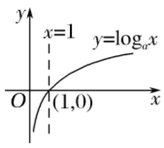
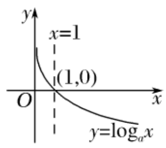
③$\log_a M^n=n\log_a M$（$n\in$R）；　　④$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$.

(3)换底公式：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（$a$，$b$ 均大于零且不等于 1）.

（3）对数函数及其性质

(1)概念：$y=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq1$)叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域是(0，+∞).

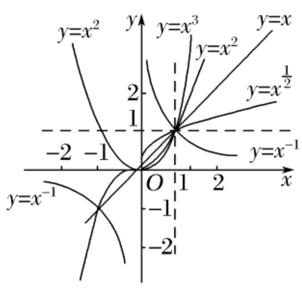
(2)对数函数的图象与性质

<table>
<tr><td></td><td>$a>1$</td><td colspan="2">$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="3">定义域：(0，+∞)</td></tr>
<tr><td colspan="3">值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="3">当 $x=1$ 时，$y=0$，即过定点(1，0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">当 $x>1$ 时，$y>0$；
当 $0<x<1$ 时，$y<0$</td><td>当 $x>1$ 时，$y<0$；
当 $0<x<1$ 时，$y>0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">在(0，+∞)上是增函数</td><td>在(0，+∞)上是减函数</td></tr>
</table>

2.3 幂函数

(1)幂函数的定义：一般地，形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数称为幂函数，其中 x 是自变量， α 为常数.

(2)常见的 5 种幂函数的图象



(3)幂函数的性质

①幂函数在(0，＋∞)上都有定义；

②当 $\alpha>0$ 时，幂函数的图象都过点(1，1)和(0，0)，且在(0，＋∞)上单调递增；

③当 $\alpha<0$ 时，幂函数的图象都过点(1，1)，且在(0，＋∞)上单调递减.

第三章 函数的应用

1. 函数零点的定义

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在实数 α 处的值等于零，即 $f(\alpha)=0$，则 α 叫做这个函数的**零点**.

重点强调：零点不是点，是一个实数；

2. 零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间（a, b）内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

3. 二分法

二分法求零点：对于在区间 $[a，b]$ 上连续不断，且满足 $f(a)$ • $f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做**二分法**.

给定精度 ε，用二分法求函数 $f(x)$ 的零点近似值的步骤如下：

（1）确定区间$[a，b]$，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精度ε；

（2）求区间$(a，b)$的中点x_1；

（3）计算 $f(x_1)$：①若 $f(x_1)=0$，则x_1就是函数的零点；

②若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令$b=x_1$（此时零点$x_0\in(a,x_1)$）；

③若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令$a=x_1$（此时零点$x_0\in(x_1,b)$）；

（4）判断是否达到精度ε；

即若$|a-b|<\varepsilon$，则得到零点零点值a（或b）；否则重复步骤 2~4.

注意： 二分法的条件 $f(a)\cdot f(b)<0$表明用二分法求函数的近似零点都是指变号零点.

第四章 三角函数

1. 角的概念

1．角的定义

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

2．角的分类

- 按旋转方向不同分类
  - 正角：按逆时针方向旋转形成的角
  - 负角：按顺时针方向旋转形成的角
  - 零角：射线没有旋转
- 按终边位置不同分类
  - 象限角：角的终边在第几象限，这个角就是第几象限角
  - 轴线角：角的终边落在坐标轴上

3．终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合：$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,\ k\in Z\}$.

2. 弧度制及应用

1．弧度制的定义

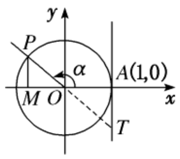
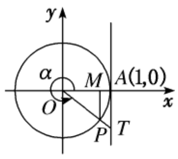
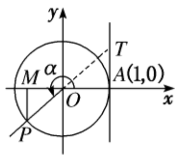
把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，弧度记作 rad.

2．弧度制下的有关公式

角 α 的弧度数公式	$\lvert\alpha\rvert=\frac{l}{r}$(弧长用 l 表示)
角度与弧度的换算	①$1°=\frac{\pi}{180}$ rad；②1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$
弧长公式	弧长 $l=\lvert\alpha\rvert r$
扇形面积公式	$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\lvert\alpha\rvert r^2$

3. 任意角的三角函数

<table>
<tr><td colspan="2">三角函数</td><td>正弦</td><td>余弦</td><td>正切</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">定义</td><td colspan="3">设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，那么</td></tr>
<tr><td>y叫做 α 的正弦，记 sin α</td><td>x叫做 α 的余弦，记 cos α</td><td>$\frac{y}{x}$叫做 α 的正切，记 tan α</td></tr>
<tr><td rowspan="3">各象限</td><td>I</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>II</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td></tr>
<tr><td>III</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr>
</table>

符号	Ⅳ	−	+	−
三角函数线		 有向线段 MP 为正弦线	 有向线段 OM 为余弦线	 有向线段 AT 为正切线

4. 同角三角函数的基本关系

1．同角三角函数的基本关系

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1(\alpha\in R)$．(2)商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

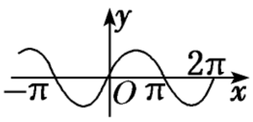
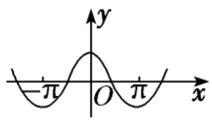
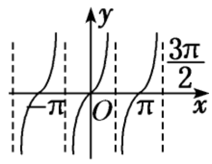
2．同角三角函数基本关系式的应用技巧

5. 三角函数的诱导公式

组数	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi+\alpha(k\in Z)$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
正弦	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
余弦	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$

正切	tan α	tan α	－tan α	－tan α		

6. 正弦、余弦、正切函数的图象与性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	错误!
值域	[－1，1]	[－1，1]	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在错误!(k∈Z)上是递增函数，错误!(k∈Z)上是递减函数	在[$2k\pi-\pi$ $2k\pi$](k∈Z)上是递增函数，在[$2k\pi$，$2k\pi+\pi$](k∈Z)上是递减函数	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi，\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$($k$∈Z)上是递增函数
周期性	周期是$2k\pi$(k∈Z且$k\neq0$)，最小正周期是2π	周期是$2k\pi$(k∈Z且$k\neq0$)，最小正周期是2π	周期是$k\pi$(k∈Z且$k\neq0$)，最小正周期是π
对称性	对称轴是$x=\frac{\pi}{2}+$	对称轴是$x=$	对称中心是$\left(\frac{k\pi}{2}，0\right)$($k$

	$k\pi$ $(k\in Z)$，对称中心是$(k\pi，0)(k\in Z)$	$k\pi$ $(k\in Z)$，对称中心是$\left(k\pi+\frac{\pi}{2}，0\right)$ $(k\in Z)$	$\in Z)$

6. 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$的图象

1．用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

(1)“五点法”作图原理：

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象上，五点是：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2}，1\right)$，$(\pi，0)$，$\left(\frac{3\pi}{2}，-1\right)$，$(2\pi，0)$．

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图象上，五点是：$(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2}，0\right)$，$(\pi，-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}，0\right)$，$(2\pi，1)$．

(2)五点法作图的三步骤：列表、描点、连线(注意光滑)．

2．函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$的有关概念

$y=A\sin(\omega x+\phi)$	振幅	周期	频率	相位	初相
$(A>0,\omega>0)$	A	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$	**错误!**	ϕ

3.用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\phi)$一个周期内的简图

用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\phi)$一个周期内的简图时，要找五个关键

点，如下表所示：

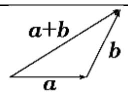
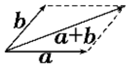
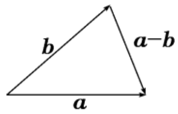
x	$-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\phi}{\omega}$	错误!	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\phi}{\omega}$	错误!
$\omega x+\phi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=A\sin(\omega x+\phi)$	0	A	0	$-A$	0

第五章 平面向量

1. 向量的有关概念

名称	定义	备注
向量	既有大小又有方向的量；向量的大小叫做向量的长度(或称模)	平面向量是自由向量
零向量	长度为 0 的向量	记作 0，其方向是任意的
单位向量	长度等于 1 个单位的向量	非零向量 a 的单位向量为 $\pm\frac{a}{\vert a\vert}$
平行向量	方向相同或相反的非零向量(又叫做共线向量)	0 与任一向量平行或共线
相等向量	长度相等且方向相同的向量	两向量只有相等或不相等，不能比较大小
相反向量	长度相等且方向相反的向量	0 的相反向量为 0

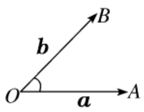
2. 向量的线性运算

向量运算	定义	法则(或几何意义)	运算律
加法	求两个向量和的运算	 三角形法则  平行四边形法则	(1)交换律：$a+b=b+a$； (2)结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$
减法	求 a 与 b 的相反向量－b 的和的运算叫做 a 与 b 的差	 三角形法则	$a-b=a+(-b)$
数乘	求实数 λ 与向量 a 的积的运算	$\|\lambda a\|=\|\lambda\|\|a\|$，当 $\lambda>0$ 时，λa 的方向与 a 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，λa 的方向与 a 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda a=0$	$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$；$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$；$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

3. 平面向量的坐标运算

运算	坐标表示
和(差)	$a=(x_1, y_1)$，$b=(x_2, y_2)$，$a+b=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，$a-b=(x_1-x_2, y_1-y_2)$
数乘	已知 $a=(x_1, y_1)$，则 $\lambda a=(\lambda x_1, \lambda y_1)$，其中 λ 是实数
任一向量的坐标	已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

4. 向量的夹角

定义	图示	范围	共线与垂直
已知两个非零向量 a 和 b，作 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，则 $\angle AOB$ 就是 a 与 b 的夹角		设 θ 是 a 与 b 的夹角，则 θ 的取值范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$	$\theta=0°$ 或 $\theta=180°\Leftrightarrow a/\!/b$，$\theta=90°\Leftrightarrow a\perp b$

5. 平面向量的数量积

定义	设两个非零向量 a，b 的夹角为 θ，则数量|a||b|cos θ 叫做 a 与 b 的数量积，记作 a • b
投影	|a|cos θ 叫做向量 a 在 b 方向上的投影， |b|cos θ 叫做向量 b 在 a 方向上的投影
几何意义	数量积 a • b 等于 a 的长度|a|与 b 在 a 的方向上的投影|b|cos θ 的乘积

6. 向量数量积的运算律

交换律	a • b＝b • a
分配律	(a＋b) • c＝a • c＋b • c
数乘结合律	(λa) • b＝ λ (a • b) ＝a • (λb)

第六章 三角恒等变换

1、同角三角函数的基本关系式 ： ①$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，②$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，

2、正弦、余弦的诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）

3、和角与差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$$

4、二倍角公式及降幂公式

$$\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

第七章 解三角形

【正弦定理】 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（R 为$\Delta ABC$外接圆的半径）.

【正弦定理的变形】①$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

②$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$

【三角形常用结论 】

（1）$\boldsymbol{a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow \sin A>\sin B\Leftrightarrow \cos A<\cos B}$

（2）在△ABC 中，有 $A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)\Leftrightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$.

（3)面积公式：

①$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$， ②$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

第八章 数列

2.1 等差数列

（1）.等差数列的定义---------（证明或判断等差数列）

①$a_{n+1}-a_n=d(d为常数)$或②$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geq 2)$

（2）. 等差数列的通项公式：

$a_n=a_1+(n-1)d$ 或 $a_n=a_m+(n-m)d$

①当$d\neq 0$时，等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$是关于n的一次函数，且斜率为公差d；

（3）. 等差数列的前n和： $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$， $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

①前n和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ 是关于n的二次函数且常数项为 0.

（4）、等差中项：

⑴若 a,A,b 成等差数列，则 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $A=\frac{a+b}{2}$ 。

⑵当 $m+n=p+q$ 时，则有 $a_m+a_n=a_p+a_q$

5、若 $\{a_n\}$ 是等差数列 ， $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ ， …也成等差数列.

2.2 等比数列

（1）等比数列的定义---------（证明或判断等比数列）

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q$为常数），

（2）等比数列的通项公式： $a_n=a_1q^{n-1}$ 或 $a_n=a_mq^{n-m}$ 。

（3）等比数列的前 n 和： ①当 $q=1$ 时， $S_n=na_1$ ；

②当 $q\neq1$ 时， $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 。

（4）等比中项：

⑴若 a,A,b 成等比数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等比中项， $A^2=ab$。

⑵当 $m+n=p+q$ 时，则有 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$。

第九章 不等式

1. 一元二次不等式的概念及形式

(1). 概念：把只含有一个未知数，并且知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式.

(2). 形式：① $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$； ② $ax^2+bx+c\geq0(a\neq0)$；

③ $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$； ④ $ax^2+bx+c\leq0(a\neq0)$.

2. 一元二次不等式的解集的概念及三个“二次”之间的关系

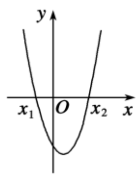
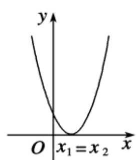
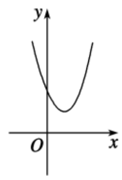
(1)一元二次不等式的解集的概念：

一般地，使某个一元二次不等式成立的 x 的值叫做这个不等式的解，一元二次不等式的所有解组成的集合叫做这个一元二次不等式的解集.

(2)关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解集；

若二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，则一元二次不等式 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 的解集，就是分别使二次函数 $f(x)$ 的函数值为正值或负值时自变量 x 的取值的集合.

(3)三个“二次”之间的关系：

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$				
	判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
解不等式 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 的步骤	求方程 $f(x)=0$ 的解	有两个不等的实数解 x_1，x_2	有两个相等的实数解 $x_1=x_2$	没有实数解
	画函数 $y=f(x)$ 的示意图			
得不等式	$f(x)>0$	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	R

的解集	$f(x)<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

3. 分式不等式的解法

<u>定义</u>：分母中含有未知数，且分子、分母都是关于 x 的多项式的不等式称为分式不等式.

解法：等价转化法解分式不等式

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

4. 简单的高次不等式的解法

解法：穿根法

①将 $f(x)$ 最高次项系数化为正数；

②将 $f(x)$ 分解为若干个一次因式的积或二次不可分因式的积；

③将每一个一次因式的根标在数轴上，自上而下，从右向左依次通过每一点画曲线(注意重根情况，偶次方根穿而不过，奇次方根穿过)；

④观察曲线显现出的 $f(x)$ 的值的符号变化规律,写出不等式的解集.

5. 二元一次不等式(组)

(1)定义：我们把含有两个未知数，并且未知数的次数是 1 的不等式称为二元一次不等式;把由几个二元一次不等式组成的不等式组称为二元一次不等式组.

(2)解集:满足二元一次不等式(组)的 x 和 y 的取值构成有序数对 (x, y)，所有这样的有序数对 (x, y) 构成的集合称为二元一次不等式(组)的解集. 有序数对可以看成是直角坐标平面内点的坐标. 于是，二元一次不等式(组)的解集就可以看成直角坐标内的点构成的集合.

9. 基本不等式(或)均值不等式：$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

10. 基本不等式的变形与拓展

1．(1)若$a,b \in R$，则$a^2+b^2 \geq 2ab$；

(2)若$a,b \in R$，则$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$（当且仅当$a=b$时取“=”）.

2．(1)若$a>0,b>0$，则$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$；(2)若$a>0,b>0$，则$a+b \geq 2\sqrt{ab}$（当且仅当$a=b$时取“=”）；

(3)若$a>0,b>0$，则$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（当且仅当$a=b$时取“=”）.

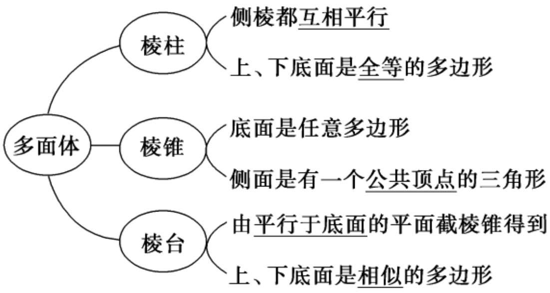
3．若$x>0$，则$x+\frac{1}{x} \geq 2$（当且仅当$x=1$时取“=”）；若$x<0$，则$x+\frac{1}{x} \leq -2$（当且仅当$x=-1$时取“=”）；若$x \neq 0$，则$\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$，即$x+\frac{1}{x} \geq 2$或$x+\frac{1}{x} \leq -2$（当且仅当$a=b$时取“=”）.

4．若$ab>0$，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$（当且仅当$a=b$时取“=”）；若$ab \neq 0$，则$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right| \geq 2$，即$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$或$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$（当且仅当$a=b$时取“=”）.

5．一个重要的不等式链：$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

第十章 空间几何体

1．多面体的结构特征



2．旋转体的形成

几何体	旋转图形	旋转轴
圆柱	矩形	任一边所在的直线
圆锥	直角三角形	任一直角边所在的直线
圆台	直角梯形	垂直于底边的腰所在的直线
球	半圆	直径所在的直线

3．空间几何体的直观图

空间几何体的直观图常用斜二测画法来画，其规则是：

(1)原图形中 x 轴、y 轴、z 轴两两垂直，直观图中，x' 轴，y' 轴的夹角为 45°或 135°，z' 轴与 x' 轴和 y' 轴所在平面垂直.

(2)原图形中平行于坐标轴的线段，直观图中仍平行于坐标轴；平行于 x 轴和 z 轴的线段在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段在直观图中长度变为原来的一半.

$$\text{“三变”}\begin{cases}\text{坐标轴的夹角改变} \\ \text{与}y\text{轴平行的线段的长度变为原来的一半} \\ \text{图形改变}\end{cases}$$

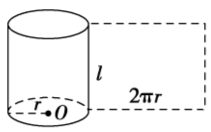
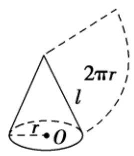
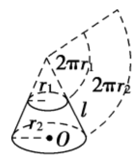
“三不变”$\begin{cases}\text{平行性不改变}\\ \text{与}x\text{，}z\text{轴平行的线段的长度不改变}\\ \text{相对位置不改变}\end{cases}$

(3)平面图形的直观图与原图形面积的关系：$S_{\text{直观图}}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{\text{原图}}$.

4．多面体的表面积、侧面积

因为多面体的各个面都是平面，所以多面体的侧面积就是所有侧面的面积之和，表面积是侧面积与底面面积之和.

5．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{\text{圆柱侧}}=2\pi rl$	$S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl$	$S_{\text{圆台侧}}=\pi(r_1+r_2)l$

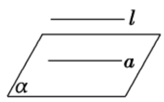
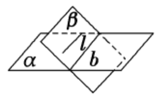
6．柱、锥、台和球的表面积和体积

名称 几何体	表面积	体积
柱体 (棱柱和圆柱)	$S_{\text{表面积}}=S_{\text{侧}}+2S_{\text{底}}$	$V=Sh$
锥体 (棱锥和圆锥)	$S_{\text{表面积}}=S_{\text{侧}}+S_{\text{底}}$	$V=\frac{1}{3}Sh$
台体 (棱台和圆台)	$S_{\text{表面积}}=S_{\text{侧}}+S_{\text{上}}+S_{\text{下}}$	$V=\frac{1}{3}(S_{\text{上}}+S_{\text{下}}+\sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h$

球	$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

第十一章 点线面之间的位置关系

1．直线与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行(线线平行⇒线面平行)		$l\parallel a$，$a\subset\alpha$，$l\not\subset\alpha\Rightarrow l\parallel\alpha$
性质定理	一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行(线面平行⇒线线平行)		$l\parallel\alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow l\parallel b$

2．判断或证明线面平行的常用方法

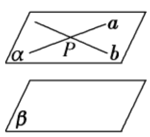
(1)利用线面平行的定义(无公共点)．

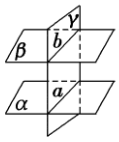
(2)利用线面平行的判定定理($a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\parallel b\Rightarrow a\parallel\alpha$)．

(3)利用面面平行的性质定理($\alpha\parallel\beta$，$a\subset\alpha\Rightarrow a\parallel\beta$)．

(4)利用面面平行的性质($\alpha\parallel\beta$，$a\not\subset\alpha$，$a\not\subset\beta$，$a\parallel\alpha\Rightarrow a\parallel\beta$)．

3.平面与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行(线面平行⇒面面平行)		$a\parallel\beta$，$b\parallel\beta$，$a\cap b=P$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

性质定理	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行		$\alpha // \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b \Rightarrow a // b$

4. 重要结论

(1)垂直于同一条直线的两个平面平行，即若 $a \perp \alpha$，$a \perp \beta$，则 $\alpha // \beta$.

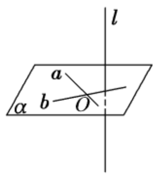
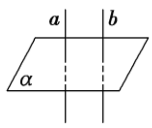
(2)垂直于同一个平面的两条直线平行，即若 $a \perp \alpha$，$b \perp \alpha$，则 $a // b$.

(3)平行于同一个平面的两个平面平行，即若 $\alpha // \beta$，$\beta // \gamma$，则 $\alpha // \gamma$.

5．直线与平面垂直

(1)直线和平面垂直的定义：直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，就说直线 l 与平面 α 互相垂直.

(2)直线与平面垂直的判定定理与性质定理：

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直		$\left.\begin{matrix} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = O \\ l \perp a \\ l \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow l \perp \alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // b$

6．证明线面垂直的常用方法

(1)利用线面垂直的判定定理.

(2)利用“两平行线中的一条与平面垂直，则另一条也与这个平

面垂直”.

(3)利用“一条直线垂直于两个平行平面中的一个，则与另一个也垂直”.

(4)利用面面垂直的性质定理.

7．证明线线垂直的常用方法

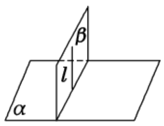
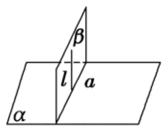
(1)利用特殊图形中的垂直关系.(2)利用等腰三角形底边中线的性质.

(3)利用勾股定理的逆定理. (4)利用直线与平面垂直的性质.

8．平面与平面垂直

(1)平面与平面垂直的定义：两个平面相交， 如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

(2)平面与平面垂直的判定定理与性质定理：

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的<u>垂线</u>，则这两个平面垂直		$\left.\begin{array}{l} l\subset\beta \\ l\perp\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面垂直，则一个平面内垂直于<u>交线</u>的直线与另一个平面垂直		错误!$\Rightarrow l\perp\alpha$

9.面面垂直的两种证明方法

(1)定义法：利用面面垂直的定义，即判定两平面所成的二面角为直二面角，将证明面面垂直问题转化为证明平面角为直角的问题.

(2)定理法：利用面面垂直的判定定理，即证明其中一个平面经过另一个平面的一条垂线，把问题转化成证明线线垂直加以解决.

第十二章 直线与方程

1．直线的倾斜角

(1)定义：当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角叫做直线 l 的倾斜角．

(2)规定：当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0．

(3)范围：直线 l 倾斜角的取值范围是 $[0,\ \pi)$．

2．斜率公式

(1)定义式：直线 l 的倾斜角为 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，则斜率 $k=\tan\ \alpha$．

(2)坐标式：$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 在直线 l 上，且 $x_1\neq x_2$，则 l 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$．

3．直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不含垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式	$Ax+By+C=0$，$A^2+B^2\neq0$	平面内所有直线都适用

4．求直线方程的两种方法

(1)直接法：根据已知条件，选择适当的直线方程形式，直接写出直线方程，选择时，应注意各种形式的方程的适用范围，必要时要分类讨论．

(2)待定系数法，即设定含有参数的直线方程，由条件列出方程(组)，再求出参数，最后将其代入直线方程.

5．两条直线平行与垂直的判定

(1)两条直线平行

①对于两条不重合的直线 l_1，l_2，若其斜率分别为 k_1，k_2，则有 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \underline{k_1=k_2}$.

②当直线 l_1，l_2 不重合且斜率都不存在时，$l_1 /\!/ l_2$.

(2)两条直线垂直

①如果两条直线 l_1，l_2 的斜率存在，设为 k_1，k_2，则有 $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \underline{k_1\cdot k_2=-1}$.

②当其中一条直线的斜率不存在，而另一条直线的斜率为 0 时，$l_1\perp l_2$.

6．两直线平行或重合的充要条件

直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 平行的充要条件是 $A_1B_2-A_2B_1=0$，$A_1C_2\neq A_2C_1$. 重合的充要条件是 $A_1B_2-A_2B_1=0$，$A_1C_2=A_2C_1$.

7．两直线垂直的充要条件

直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

8．三种距离

$P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$两点之间的距离 $\lvert P_1P_2\rvert$	$d=\underline{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$
点 $P_0(x_0，y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

平行线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离	$d=\frac{\lvert C_1-C_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

9．直线系方程

(1)与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+m=0$($m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq C$)．

(2)与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+n=0$($n\in\mathbf{R}$)．

(3)过直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0(\lambda\in\mathbf{R})$，但不包括 l_2.

第十三章 圆的方程

1．圆的定义及方程

定义	平面内与定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)	
标准方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$	圆心(a, b)，半径 r
一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，$(D^2+E^2-4F>0)$	圆心$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

2．点与圆的位置关系

点 $M(x_0, y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：

(1)若 $M(x_0, y_0)$在圆外，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$.

(2)若 $M(x_0, y_0)$在圆上，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$.

(3)若 $M(x_0, y_0)$在圆内，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$.

3. 确定圆心的方法

求圆的标准方程，其关键是确定圆心，确定圆心的主要方法有：

(1)当题目条件中出现直线与圆相切时，可利用圆心在过切点且与切线垂直的直线上来确定圆心位置；

(2)当题目条件中出现直线与圆相交，可考虑圆心在弦的垂直平分线上；

(3)当题目条件出现两圆相切时，可考虑切点与两圆的圆心共线.

4. 求圆的方程的两种方法

(1)直接法：直接求出圆心坐标和半径，写出方程.

(2)待定系数法：

①若已知条件与圆心(a, b)和半径r有关，则设圆的标准方程，求出a，b，r的值；

②选择圆的一般方程，依据已知条件列出关于D，E，F的方程组，进而求出D，E，F的值.

5. 与圆有关的最值问题的常见解法

(1)形如$\mu=\frac{y-b}{x-a}$形式的最值问题,可转化为动直线斜率的最值问题.

(2)形如$t=ax+by$形式的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题.

(3)形如$(x-a)^2+(y-b)^2$形式的最值问题,可转化为动点到定点的距离的平方的最值问题.

第十四章 算法初步

1、算法

(1)算法通常是指按照一定规则解决某一类问题的明确和有限的步骤.

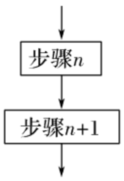
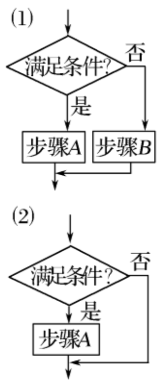
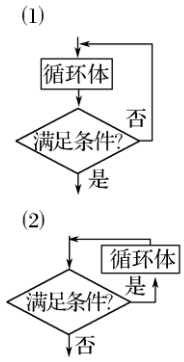
(2)应用：算法通常可以编成计算机程序，让计算机执行并解决问题.

2、程序框图

定义：程序框图又称流程图，是一种用程序框、流程线及文字说明来表示算法的图形.

3、三种基本逻辑结构

名称 / 内容	顺序结构	条件结构	循环结构
定义	由若干个按先后顺序执行的步骤组成，这是任何一个算法都离不开的基本结构	算法的流程根据条件是否成立而选择执行不同的流向的结构形式	从某处开始，按照一定的条件反复执行某些步骤的情况，反复执行的步骤称为循环体

程序框图			

第十五章 统计

1. 简单随机抽样

(1)定义：设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本($n\leqslant N$)，如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做**简单随机抽样**.

(2)最常用的简单随机抽样的方法：**抽签法和随机数法**.

2. 分层抽样

(1)定义：在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法叫做**分层抽样**.

(2)应用范围：当总体是**由差异明显的几个部分**组成时，往往选用分层抽样.

3. 系统抽样

(1)定义：当总体中的个体数目较多时，可将总体分成均衡的几个部分，然后按照事先定出的规则，从每一部分抽取一个个体得到所需要的样本，这种抽样方法叫做**系统抽样**.

(2)系统抽样的操作步骤：假设要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本.

①先将总体的 N 个个体编号；

②确定分段间隔 k，对编号进行分段，当 $\frac{N}{n}$(n 是样本容量)是整数时，取 $k=\frac{N}{n}$；

③在第 1 段用简单随机抽样确定第一个个体编号 $l(l\leq k)$；

④按照一定的规则抽取样本，通常是将 l 加上间隔 k 得到第 2 个个体编号($l+k$)，再加 k 得到第 3 个个体编号($l+2k$)，依次进行下去，直到获取整个样本.

4. 用样本的频率估计总体的频率

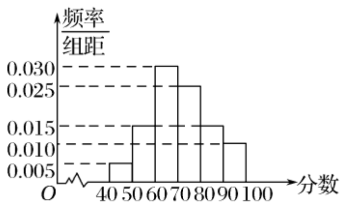
(1)频率分布表的画法：

第一步：求极差，决定组数和组距，组距 $=\frac{极差}{组数}$；

第二步：分组，通常对组内数值所在区间取左闭右开区间，最后一组取闭区间；

第三步：登记频数，计算频率，列出频率分布表.

(2)频率分布直方图：反映样本频率分布的直方图(如图)



横轴表示样本数据，纵轴表示 $\frac{频率}{组距}$，每个小矩形的面积表示样本落在该组内的频率.

1.频率分布直方图与众数、中位数与平均数的关系

(1)最高的小长方形底边中点的横坐标即是众数.

(2)中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的.

(3)平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和.

5.用样本的数字特征估计总体的数字特征

(1)众数：一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的众数.

(2)中位数：把 n 个数据按大小顺序排列，处于最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数.

(3)平均数：把$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$称为 a_1，a_2，…，a_n这 n 个数的平均数.

(4)标准差与方差：设一组数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n的平均数为$\overline{x}$，则这组数据的标准差和方差分别是

$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$，$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

6. 线性回归分析

1、 相关关系与回归分析

回归分析是对具有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法；判断相关性的常用统计图是：散点图；统计量有相关系数与相关指数.

(1)在散点图中，点散布在从左下角到右上角的区域，对于两个变量的这种相关关系，我们将它称为正相关.

(2)在散点图中，点散布在从左上角到右下角的区域，两个变量的这种相关关系称为负相关.

(3)如果散点图中点的分布从整体上看大致在一条直线附近，称两个变量具有线性相关关系.

2、线性回归方程

（1）最小二乘法：使样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小的方法叫做最小二乘法.

（2）回归方程：两个具有线性相关关系的变量的一组数据：

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归方程为$\hat{y}=bx+a$，则

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}, \\ a=\overline{y}-b\overline{x}. \end{cases}$$

注意：线性回归直线经过定点$(\overline{x},\overline{y})$.

（3）相关系数：

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}.$$

3、回归分析

(1)定义：对具有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法.

(2)样本点的中心：对于一组具有线性相关关系的数据(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，

其中$(\bar{x}, \bar{y})$称为样本点的中心.

(3)相关系数

当$r>0$时，表明两个变量正相关；当$r<0$时，表明两个变量负相关.

r的绝对值越接近于1，表明两个变量的线性相关性越强.

r的绝对值越接近于0，表明两个变量之间几乎不存在线性相关关系.通常$|r|$大于0.75时，认为两个变量有很强的线性相关性.

(4)相关指数：$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$.其中$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$是残差平方和，其值越小，则$R^2$越大(接近1)，模型的拟合效果越好.

第十六章 概率

1.有关随机事件的概率

(1)任何两个基本事件是互斥的.

(2)任何事件(除不可能事件)都可以表示成基本事件的和.

2.有关古典概型的概率

1.古典概型-具有以下两个特征的概率模型称为古典的概率模型，简称古典概型.

(1)试验的所有可能结果只有有限个，每次试验只出现其中的一个结果.

(2)每一个试验结果出现的可能性相同.

2.如果一次试验中可能出现的结果有n个，而且所有结果出现的可

能性都相等，那么每一个基本事件的概率都是$\frac{1}{n}$；如果某个事件 A 包括的结果有 m 个，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

3. 古典概型的概率公式-$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的可能结果数}}{\text{试验的所有可能结果数}}$.

3. 有关长度的几何概率

1.几何概型的定义

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型.

2. 几何概型的两个基本特点

(1)无限性：在一次试验中，可能出现的结果有无限多个；

(2)等可能性：每个结果的发生具有等可能性.

3.几何概型的概率公式：$P(A)=$

$\frac{\text{构成事件}A\text{的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}}$.

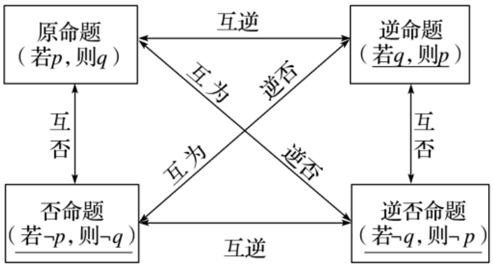
第十七章 常用逻辑用语

1. 命题

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题，其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题.

2. 四种命题及其相互关系

(1)四种命题间的相互关系



(2)四种命题的真假关系

①两个命题互为逆否命题，它们具有相同的真假性；

②两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

3．充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件	
p 是 q 的充分不必要条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$
p 是 q 的必要不充分条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的充要条件	$p\Leftrightarrow q$
p 是 q 的既不充分也不必要条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$

【特别提醒】

若条件 p，q 以集合的形式出现，即 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，则由 $A\subseteq B$ 可得，p 是 q 的充分条件，请写出集合 A，B 的其他关系对应的条件 p，q 的关系.

①若 $A \subsetneq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件；②若 $A \supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；

③若 $A \supsetneq B$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

④若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；

⑤若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件．

4．全称量词和存在量词

(1)全称量词有：所有的，任意一个，任给，用符号“$\underline{\forall}$”表示；存在量词有：存在一个，至少有一个，有些，用符号“$\underline{\exists}$”表示．

(2)含有全称量词的命题，叫做全称命题．**“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”**用符号简记为：**$\underline{\forall x \in M，p(x)．}$**

(3)含有存在量词的命题，叫做特称命题．**“存在 M 中元素 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”**用符号简记为：**$\underline{\exists x_0 \in M，p(x_0)．}$**

第十八章　圆锥曲线与方程

1．椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距．

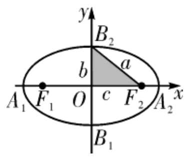
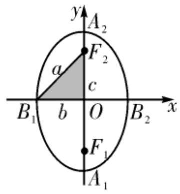
集合 $P=\{M|\,|MF_1|+|MF_2|=2a\}$，$|F_1F_2|=2c$，其中 $a>0$，$c>0$，且 a，c 为常数．

(1)若 $a>c$，则集合 P 为椭圆；

(2)若 $a=c$，则集合 P 为线段；

(3)若 $a<c$，则集合 P 为空集．

2. 椭圆的标准方程和几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">性质</td><td>范围</td><td>$-a\leqslant x\leqslant a$,
$-b\leqslant y\leqslant b$</td><td>$-b\leqslant x\leqslant b$,
$-a\leqslant y\leqslant a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称轴：坐标轴，对称中心：(0, 0)</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$，
$B_1(0,-b)$，$B_2(0, b)$</td><td>$A_1(0,-a)$，$A_2(0, a)$，
$B_1(-b, 0)$，$B_2(b, 0)$</td></tr>
<tr><td>轴</td><td colspan="2">长轴 A_1A_2 的长为 $2a$，短轴 B_1B_2 的长为 $2b$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">$|F_1F_2|=2c$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}$, $e\in(0, 1)$</td></tr>
<tr><td>a，b，c 的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2-b^2$</td></tr>
</table>

3. 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线．这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点间的距离叫做双曲线的焦距．

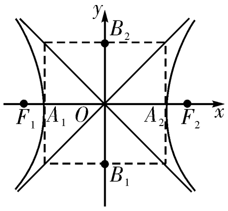
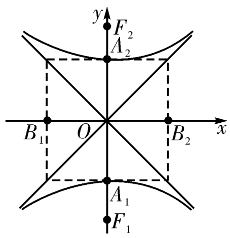
集合 $P=\{M \mid ||MF_1|-|MF_2||=2a\}$，$|F_1F_2|=2c$，其中 a，c 为常数，且 $a>0$，$c>0$.

(1)当 $a<c$ 时，点 P 的轨迹是双曲线；

(2)当 $a=c$ 时，点 P 的轨迹是两条射线；

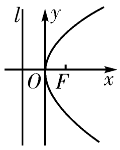
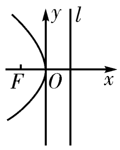
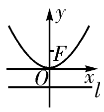
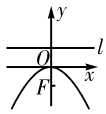
(3)当 $a>c$ 时，点 P 不存在．

4. 双曲线的标准方程和几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>范围</td><td>$x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$，$y\in\mathbf{R}$</td><td>$y\leqslant -a$ 或 $y\geqslant a$，$x\in\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称轴：坐标轴，对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$</td><td>$A_1(0，-a)$，$A_2(0，a)$</td></tr>
<tr><td>渐近线</td><td colspan="2">$y=\pm\frac{b}{a}x$
$y=\pm\frac{a}{b}x$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}$，$e\in(1，+\infty)$</td></tr>
</table>

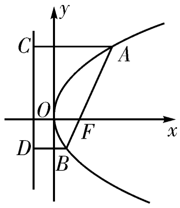
	a，b，c 的关系	$c^2=a^2+b^2$
	实虚轴	线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长 $\lvert A_1A_2\rvert=2a$；线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚轴，它的长 $\lvert B_1B_2\rvert=2b$；a 叫做双曲线的实半轴长，b 叫做双曲线的虚半轴长

5．抛物线的标准方程与几何性质

标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
	p 的几何意义：焦点 F 到准线 l 的距离			
图形				
顶点	$O(0,0)$			
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}，0\right)$	$F\left(0，\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0，-\frac{p}{2}\right)$
离心率	$e=1$			
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\geqslant0$，$y\in R$	$x\leqslant0$，$y\in R$	$y\geqslant0$，$x\in R$	$y\leqslant0$，$x\in R$
开口方向	向右	向左	向上	向下
焦半径（其	$\lvert PF\rvert=$	$\lvert PF\rvert=$	$\lvert PF\rvert=$	$\lvert PF\rvert=$

中 $P(x_0,y_0)$)	$x_0+\frac{p}{2}$	$-x_0+\frac{p}{2}$	$y_0+\frac{p}{2}$	$-y_0+\frac{p}{2}$

6. 与焦点弦有关的常用结论



设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$.

(1) $y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；(2) $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\theta}$(θ 为 AB 的倾斜角).

(3) $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$为定值$\frac{2}{p}$；(4) 以 AB 为直径的圆与准线相切.

(5) 以 AF 或 BF 为直径的圆与 y 轴相切.

第十九章空间向量与立体几何

1．空间向量

(1) 定义：空间中既有大小又有方向的量称为空间向量.

(2) 模(或长度)：向量的大小.

(3) 表示方法：①几何表示法：可以用有向线段来直观的表示向量，如始点为 A 终点为 B 的向量，记为$\overrightarrow{AB}$，模为$|\overrightarrow{AB}|$.

②字母表示法：可以用字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$表示，模为$|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{c}|, \cdots$.

【几类特殊的向量】

(1) 零向量：始点和终点相同的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$.

(2) 单位向量：模等于 1 的向量称为单位向量.

(3) 相等向量：大小相等、方向相同的向量称为相等向量.

(4) 相反向量：方向相反，大小相等的向量称为相反向量.

(5)平行向量：方向相同或者相反的两个非零向量互相平行，此时表示这两个非零向量的有向线段所在的直线平行或重合．通常规定零向量与任意向量平行．

(6)共面向量：一般地，空间中的多个向量，如果表示它们的有向线段通过平移后，都能在同一平面内，则称这些向量共面．

2．空间向量的线性运算

类似于平面向量，可以定义空间向量的加法、减法及数乘运算．

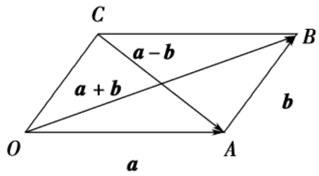


图 1

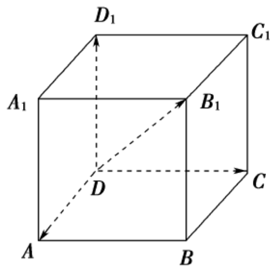


图 2

(1)如图 1，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(2)如图 2，$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DB_1}$.

即三个不共面向量的和，等于以这三个向量为邻边的平行六面体中，与这三个向量有共同始点的对角线所表示的向量.

(3)给定一个实数 λ 与任意一个空间向量 $\boldsymbol{a}$，则实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算称为数乘向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 其中：

①当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：

（i）当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；（ii）当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

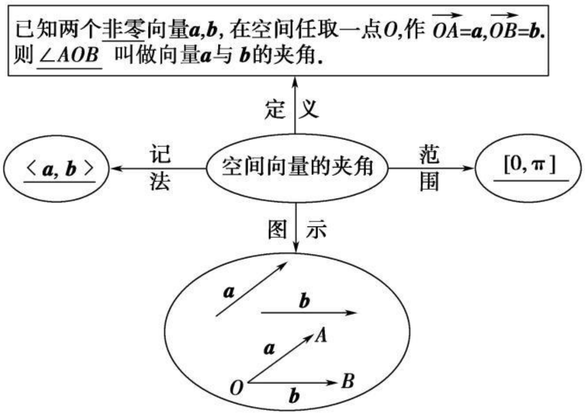
②当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(4)空间向量的线性运算满足如下运算律：

对于实数 λ 与 μ，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有① $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$；② $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3．空间向量的数量积

(1)空间向量的夹角



如果 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，那么向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

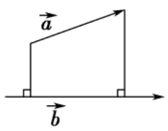
(2)空间向量数量积的定义：

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(3)数量积的几何意义

①向量的投影

如图所示， 过向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别向 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线作垂线，即可得到向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$.



②数量积的几何意义：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$ 的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的长度的乘积，特别地，$\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$ 的数量．规定零向量与任意向量的数量积为 0.

(4)空间向量数量积的性质：

①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$；③$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；④$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；⑤$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

5．共面向量定理

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在唯一的实数对$(x，y)$，使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

6．空间向量基本定理

如果空间中的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组$(x，y，z)$，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

特别地，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，可知 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，$x=y=z=0$.

7．空间中向量的坐标

一般地，如果空间向量的基底$\{\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2，\boldsymbol{e}_3\}$中，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 都是单位向量，而且这三个向量两两垂直，就称这组基底为单位正交基底，在单位正交基底下向量的分解称为向量的单位正交分解，而且，如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则称有序实数组$(x，y，z)$为向量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{p}=(x，y，z)$．其中 x，y，z 都称为 p 的坐标分量.

思考 1：若 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标一定是$(x，y，z)$吗？

8．空间向量的运算与坐标的关系

假设空间中两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1，z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2，z_2)$，则有以下结论：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2，y_1+y_2，z_1+z_2)$；

(2) 若 u，v 是两个实数，$u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}=(ux_1+vx_2，uy_1+vy_2，uz_1+vz_2)$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；(4) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$；

(5) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

9．空间向量的坐标与空间向量的平行、垂直

(1) 当 $a\neq 0$ 时，$a/\!/b \Leftrightarrow b=\lambda a \Leftrightarrow (x_2, y_2, z_2)=\lambda(x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\lambda x_1 \\ y_2=\lambda y_1 \\ z_2=\lambda z_1 \end{cases}$，当 a 的每一个坐标分量都不为零时，有 $a/\!/b \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$.

(2) $a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

10．空间直角坐标系

(1)在空间中任意选定一点 O 作为坐标原点，选择合适的平面先建立平面直角坐标系 xOy，然后过 O 作一条与 xOy 平面垂直的数轴 z 轴．这样建立的空间直角坐标系记作 $Oxyz$.

(2)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，x 轴、y 轴、z 轴是两两垂直的，它们都称为坐标轴，通过每两个坐标轴的平面都称为坐标平面.

(3) z 轴正方向的确定：在 z 轴的正半轴看 xOy 平面，x 轴的正半轴绕 O 点沿逆时针方向旋转 90° 能与 y 轴的正半轴重合.

(4)空间直角坐标系的画法：在平面内画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般把 x 轴、y 轴画成水平放置，x 轴正方向与 y 轴正方向夹角为 135°（或 45°），z 轴与 y 轴(或 x 轴)垂直.

(5)空间中一点的坐标：空间一点 M 的坐标可用有序实数组 (x, y, z) 来表示，有序实数组 (x, y, z) 叫做点 M 在此空间直角坐标系中的坐标，其中 x 叫做点 M 的横坐标(或 x 坐标)，y 叫做点 M 的纵坐标(或 y 坐标)，z 叫做点 M 的竖坐标(或 z 坐标).

(6)三个坐标平面将不在坐标平面内的点分成了八个部分，每一部分都称为一个卦限，按逆时针方向，在坐标平面 xOy 的上方，分别是第Ⅰ卦限，第Ⅱ卦限，第Ⅲ卦限，第Ⅳ卦限，在平面 xOy 的下方，分别是第Ⅴ卦限，第Ⅵ卦限，第Ⅶ卦限，第Ⅷ卦限，根据点的坐标的

特征，第Ⅰ卦限的点集用集合可表示为$\underline{\{(x, y, z) \mid x>0, y>0, z>0\}}$.

11．空间向量坐标的应用

(1)点 $P(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离 $OP=\underline{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(2)任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离 $P_1P_2=\underline{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$.

第二十章 导数及其应用

一、平均变化率

1.变化率

事物的变化率是相关的两个量的“增量的比值”。如气球的平均膨胀率是半径的增量与体积增量的比值；

2.平均变化率

一般地，函数 f(x)在区间$[x_1,x_2]$上的平均变化率为：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

3.如何求函数的平均变化率

求函数的平均变化率通常用“两步”法：

①作差：求出$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$和$\Delta x=x_2-x_1$

②作商：对所求得的差作商，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$。

二、导数的概念

定义：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处瞬时变化率是

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导

数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ 即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

三、求导数的方法：

求导数值的一般步骤：

① 求函数的增量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

② 求平均变化率：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

③ 求极限，得导数：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

也可称为三步法求导数。

第二十一章 复数

1．复数的有关概念及分类

(1)代数形式为 $z=a+b\mathrm{i}$(a，$b\in\mathbf{R}$)，其中实部为 $\underline{a}$，虚部为 $\underline{b}$；

(2)共轭复数为 $z=a-b\mathrm{i}$(a，$b\in\mathbf{R}$)．

(3)复数的分类

复数 $a+b\mathrm{i}$　(a，$b\in\mathbf{R}$)

$$\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数}\end{cases}\text{，}\\ \text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}\\ \text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

①若 $z=a+b\mathrm{i}$(a，$b\in\mathbf{R}$)是实数，则 z 与 $\bar{z}$ 的关系为 $z=\bar{z}$．

②若 $z=a+b\mathrm{i}$(a，$b\in\mathbf{R}$)是纯虚数，则 z 与 $\bar{z}$ 的关系为 $z+\bar{z}=0$($z\neq 0$)．

2．与复数运算有关的问题

(1)复数相等的充要条件

$a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{a=c,}\\\underline{b=d}\end{cases}$　$(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R})$.

(2)复数的模

复数 $z=a+bi$ 的模$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，且 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=\underline{a^2+b^2}$.

(3)复数的四则运算，若两个复数 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2\in\mathbf{R})$

①加法：$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$；

②减法：$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$；

③乘法：$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$；

④除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i(z_2\neq0)$；

3．复数的几何意义

(1)任何一个复数 $z=a+bi$ 一一对应着复平面内一个点$\underline{Z(a,b)}$，也一一对应着一个从原点出发的向量$\overrightarrow{OZ}$.

(2)复数加法的几何意义

若复数 z_1、z_2对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$不共线，则复数 z_1+z_2是以$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$为两邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OZ}$所对应的复数.

(3)复数减法的几何意义

复数 z_1-z_2是连接向量$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$的终点，并指向 Z_1的向量所对应的复数.

第二十二章 计数原理

1.分类加法计数原理：

做一件事情，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法

2. 分步乘法计数原理：

做一件事情，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法 .

【排列】

1．排列的概念：

从 n 个不同元素中，任取 m（$m\le n$）个元素（这里的被取元素各不相同）按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.A_n^m

说明：（1）排列的定义包括两个方面：①取出元素，②按一定的顺序排列；

（2）两个排列相同的条件：①元素完全相同，②元素的排列顺序也相同.

2．排列数的定义：

从 n 个不同元素中，任取 m（$m\le n$）个元素的所有排列的个数叫

做从 n 个元素中取出 m 元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.注意区别排列和排列数的不同：“一个排列”是指：从 n 个不同元素中，任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列，不是数；“排列数”是指从 n 个不同元素中，任取 m（$m\le n$）个元素的所有排列的个数，是一个数.所以符号 A_n^m 只表示排列数，而不表示具体的排列.

3．排列数公式及其推导：

由 A_n^2 的意义：假定有排好顺序的 2 个空位，从 n 个元素 $a_1,a_2,\ldots a_n$ 中任取 2 个元素去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列，反过来，任一个排列总可以由这样的一种填法得到，因此，所有不同的填法的种数就是排列数 A_n^2． 由分步计数原理完成上述填空共有 $n(n-1)$ 种填法，∴ $A_n^2=n(n-1)$.

由此，求 A_n^3 可以按依次填 3 个空位来考虑，∴ $A_n^3=n(n-1)(n-2)$，求 A_n^m 以按依次填 m 个空位来考虑 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$，

排列数公式：$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

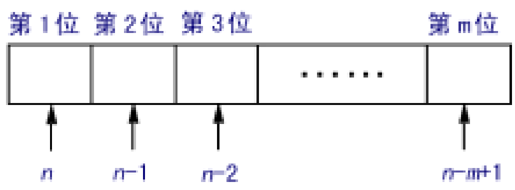


图 10-5

（$m,n\in N^*,m\le n$）

说明：（1）公式特征：第一个因数是 n，后面每一个因数比它前面一个少 1，最后一个因数是 $n-m+1$，共有 m 个因数；

（2）全排列：当 $n=m$ 时即 n 个不同元素全部取出的一个排列.

全排列数：$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$（叫做 n 的阶乘）. 另外，我们规

定 0! =1 .

1.组合的概念：一般地，从n个不同元素中取出m $(m\le n)$个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合.

说明：(1)不同元素；(2)“只取不排”——无序性；(3)相同组合：元素相同.

1．两个重要公式

(1)排列数公式

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\ (n,\ m\in N^*,\ 且\ m\leqslant n).$$

(2)组合数公式

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\ (n,m\in N^*,且\ m\leqslant n).$$

2．三个重要性质和定理

(1)组合数性质

①$C_n^m=C_n^{n-m}(n,\ m\in N^*,\ 且\ m\leqslant n)$；

②$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}(n,\ m\in N^*,\ 且\ m\leqslant n)$；

③$C_n^0=1$.

(2)二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}\cdot b^k+\cdots+C_n^nb^n$，其中通项 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$.

(3)二项式系数的性质

①$C_n^0=C_n^n$，$C_n^1=C_n^{n-1}$，…，$C_n^r=C_n^{n-r}$；

②$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$；

③$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$.

第二十三章 随机变量及其分布

1．随机变量：如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量.常用希腊字母 ξ、η 等表示.

2．离散型随机变量：对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

3．连续型随机变量：对于随机变量可能取的值，可以取某一区间内的一切值，这样的变量就叫做连续型随机变量.

4．分布列：设离散型随机变量 ξ 可能取得值为 x_1，x_2，…，x_3，…，ξ 取每一个值 x_i（i=1，2，…）的概率为$P(\xi=x_i)=p_i$，则称表

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	P_1	P_2	…	P_i	…

为随机变量 ξ 的概率分布，简称 ξ 的分布列.

5．分布列的两个性质：任何随机事件发生的概率都满足：$0\le P(A)\le 1$，并且不可能事件的概率为 0，必然事件的概率为 1．由此你可以得出离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质：(1) $P_i\ge 0, i=1,2,\cdots$;

(2) $P_1+P_1+\cdots P_i=1, i=1,2,\cdots$.

6．独立重复试验：在同样的条件下重复做的n次试验称为n次独立重复试验，每一次试验只有发生与不发

生的结果，即某事件要么发生，要么不发生，并且任何一次试验中发

生的概率都是一样的. 如果在一次试验

中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率计算公式：$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}(k=0,1,2\cdots n)$.

7．常见离散型随机变量的分布列

(1)两点分布：

X	0	1
P	$1-P$	P

(2)二项分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是 $P_n(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，（$k$＝0, 1, 2, …，$n$，$q=1-p$）．称随机变量 ξ 服从二项分布.

记作 $\xi\sim B(n，p)$，其中 n，p 为参数，并记 $C_n^k p^k q^{n-k}＝b(k；n，p)$.

(3)超几何分布：在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,\cdots m,m=\min\{M,n\}$, 其中，$n\le N,M\le N$.

称分布列

X	0	1	…	m
P	$\dfrac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

为超几何分布列， 称 X 服从超几何分布.

离散型随机变量：如果对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量. 若 ξ 是一个随机变

量，a，b 是常数. 则 $\eta=a\xi+b$ 也是一个随机变量. 一般地，若 ξ 是随机变量，$f(x)$ 是连续函数或单调函数，则 $f(\xi)$ 也是随机变量. 也就是说，随机变量的某些函数也是随机变量.

设离散型随机变量 ξ 可能取的值为：$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$

ξ 取每一个值 $x_1(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$，则表称为随机变量 ξ 的概率分布，简称 ξ 的分布列.

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

有性质① $p_1\geq 0, i=1,2,\cdots$；　② $p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots=1$.

注意：若随机变量可以取某一区间内的一切值，这样的变量叫做<u>连续型随机变量</u>. 例如：$\xi\in[0,5]$ 即 ξ 可以取 0～5 之间的一切数，包括整数、小数、无理数.

1. ⑴二项分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是：$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ [其中 $k=0,1,\cdots,n, q=1-p$]

于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下：我们称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 ξ～B（n·p），其中 n，p 为参数，并记 $C_n^k p^k q^{n-k}=b(k;n\cdot p)$.

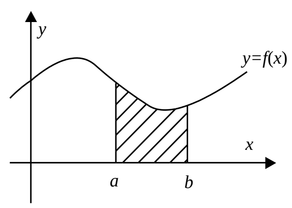
⑵二项分布的判断与应用.

① 二项分布，实际是对 n 次独立重复试验. 关键是看某一事件是否是进行 n 次独立重复，且每次试验只有两种结果，如果不满足此两条件，随机变量就不服从二项分布.

② 当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小，而每次抽取时又只有两种试验结果，此时可以把它看作独立重复试验，利用二项分布求其分布列.

③ 判断一个随机变量是否服从二项分布，要看两点：①是否为 n 次独立重复试验，在每次试验中事件 A 发生的概率是否均为 p；②随机变量是否为在这 n 次独立重复试验中某事件发生的次数，且 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 表示在独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率.

2. 密度曲线与密度函数：对于连续型随机变量 ξ，位于 x 轴上方，ξ 落在任一区间 $[a,b)$ 内的概率等于它与 x 轴. 直线 $x=a$ 与直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积（如图阴影部分）的曲线叫 ξ 的密度曲线，以其作为图像的函数 $f(x)$ 叫做 ξ 的密度函数，由于“$x\in(-\infty,+\infty)$”是必然事件，故密度曲线与 x 轴所夹部分面积等于 1.



1. 期望的含义：一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望或平均数、均值. 数学期望又简称期望. 数学期望反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2. (1)随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的数学期望：$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$

①当 $a=0$ 时，$E(b)=b$，即常数的数学期望就是这个常数本身.

②当$a=1$时，$E(\xi+b)=E\xi+b$，即随机变量ξ与常数之和的期望等于ξ的期望与这个常数的和.

③当$b=0$时，$E(a\xi)=aE\xi$，即常数与随机变量乘积的期望等于这个常数与随机变量期望的乘积.

(2)单点分布：$E\xi=c\times1=c$其分布列为：$P(\xi=1)=c$.

(3)两点分布：$E\xi=0\times q+1\times p=p$，其分布列为：

ξ	0	1
P	q	p

（p ＋ q ＝ 1）

(4)二项分布：$E\xi=\sum k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}=np$ 其分布列为$\xi\sim B(n,p)$.（P为发生ξ的概率）

(5)几何分布：$E\xi=\frac{1}{p}$ 其分布列为$\xi\sim q(k,p)$.（P为发生ξ的概率）

3. 方差、标准差的定义：当已知随机变量ξ的分布列为$P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$时，则称$D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$为ξ的方差. 显然$D\xi\geq0$，故$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$. $\sigma\xi$为ξ的根方差或标准差.随机变量ξ的方差与标准差都反映了随机变量ξ取值的稳定与波动，集中与离散的程度.$D\xi$越小，稳定性越高，波动越小.

4. 方差的性质.

(1)随机变量$\eta=a\xi+b$的方差$D(\eta)=D(a\xi+b)=a^2D\xi$.（a、b均为常数）

(2)单点分布：$D\xi=0$ 其分布列为$P(\xi=1)=p$

(3)两点分布：$D\xi=pq$ 其分布列为：（p ＋ q ＝ 1）

ξ	0	1
P	q	p

(4)二项分布：$D\xi=npq$

(5)几何分布：$D\xi=\frac{q}{p^2}$

5．期望与方差的关系.

(1)如果$E\xi$和$E\eta$都存在，则$E(\xi\pm\eta)=E\xi\pm E\eta$

(2)设ξ和η是互相独立的两个随机变量，则$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta, D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

(3)期望与方差的转化：$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$　　(4)$E(\xi-E\xi)=E(\xi)-E(E\xi)$（因为$E\xi$为一常数）$=E\xi-E\xi=0$.

【温馨提示】离散型随机变量的均值和方差的求解，一般分两步：一是定型，即先判断随机变量的分布是特殊类型，还是一般类型，如两点分布、二项分布、超几何分布等属于特殊类型；二是定性，对于特殊类型的均值和方差可以直接代入相应公式求解，而对于一般类型的随机变量，应先求其概率分布然后代入相应公式计算，注意离散型随机变量的取值与概率间的对应.

求离散型随机变量概率分布列及数学期望是理科高考数学的必考题型．求离散型随机变量概率分布列问题时，首先要清楚离散型随机变量的所有可能取值，及随机变量取这些值时所对应的事件的概率，计算出概率值后即可列出离散型随机变量的概率分布列，最后按照数学期望的公式计算出数学期望.

1．(1)正态分布与正态曲线：如果随机变量ξ的概率密度为：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$．（$x\in R,\mu,\sigma$为常数，且$\sigma>0$），称ξ服从参数为$\mu,\sigma$的正态分布，用$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$表示．$f(x)$的表达式可简记为$N(\mu,\sigma^2)$，它的密度曲线简称为正态曲线.

⑵正态分布的期望与方差：若$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 ξ 的期望与方差分别为：$E\xi=\mu, D\xi=\sigma^2$.

⑶正态曲线的性质.

① 曲线在 x 轴上方，与 x 轴不相交.

② 曲线关于直线$x=\mu$对称.

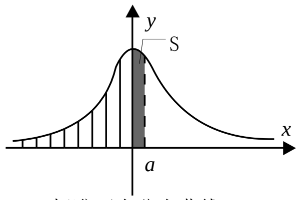
③ 当$x=\mu$时曲线处于最高点，当 x 向左、向右远离时，曲线不断地降低，呈现出“中间高、两边低”的钟形曲线.

④当$x<\mu$时，曲线上升；当$x>\mu$时，曲线下降，并且当曲线向左、向右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线，向 x 轴无限的靠近.

⑤当μ一定时，曲线的形状由σ确定，σ越大，曲线越“矮胖”. 表示总体的分布越分散；σ越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中.

2. ⑴标准正态分布：如果随机变量 ξ 的概率函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x\in(-\infty,+\infty)\right)$，则称 ξ 服从标准正态分布. 即$\xi \sim N(0,1)$有 $\varphi(x)=P(\xi\le x)$， $\varphi(x)=1-\varphi(-x)$ 求出，而 P（a＜ξ≤b）的计算则是 $P(a\prec\xi\le b)=\varphi(b)-\varphi(a)$.

注意：当标准正态分布的$\Phi(x)$的 X 取 0 时，有$\Phi(x)=0.5$当$\Phi(x)$的 X 取大于 0 的数时，有$\Phi(x)\succ 0.5$. 比如$\Phi(\frac{0.5-\mu}{\sigma})=0.0793\prec 0.5$则$\frac{0.5-\mu}{\sigma}$必然小于 0，如图.



标准正态分布曲线

$S_{阴}$=0.5　S_a=0.5+S

⑵正态分布与标准正态分布间的关系：若$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$则 ξ 的分布函数通常用$F(x)$表示，且有$P(\xi\le x)=F(x)=\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

3.⑴“3σ”原则.

假设检验是就正态总体而言的，进行假设检验可归结为如下三步：①提出统计假设，统计假设里的变量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$.②确定一次试验中的取值a是否落入范围$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$.③做出判断：如果$a\in(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，接受统计假设. 如果$a\notin(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，由于这是小概率事件，就拒绝统计假设.

⑵“3σ”原则的应用：若随机变量 ξ 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$则 ξ 落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$内的概率为 99.7% 亦即落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的概率为 0.3%，此为小概率事件，如果此事件发生了，就说明此种产品不合格（即 ξ 不服从正态分布）.