

高中数学错题笔记

易错题型一:集合与常用逻辑用语

(一) 集合的概念与运算

【典型例题】

- **1**. 已知集合 M={y|y=x²+1,x∈R},N={y|y=x+1,x∈R},则 M∩N=()

 - A. (0, 1), (1, 2) B. { (0, 1), (1, 2) }
 - C. {y|y=1,或 y=2}
- D. $\{y|y \ge 1\}$

X【错解】

求 MON 及解方程组
$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases}$$
 得 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$...选 B

【易错分析】

在集合概念的理解上,仅注意了构成集合元素的共同属性,而忽视了集合的元素是什么.事 实上 M、N 的元素是数而不是实数对(x,y), 因此 M、N 是数集而不是点集, M、N 分别 表示函数 $y=x^2+1(x\in R)$, $y=x+1(x\in R)$ 的值域, 求 M \cap N 即求两函数值域的交集.

【正确答案】

 $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\} = \{y | y \ge 1\}, N = \{y | y = x + 1, x \in R\} = \{y | y \in R\}.$

 $\therefore M \cap N = \{y | y \ge 1\} \cap \{y | (y \in R)\} = \{y | y \ge 1\},$

∴应选 D。

注: 集合是由元素构成的, 认识集合要从认识元素开始, 要注意区分 $\{x|y=x^2+1\}$ 、 $\{y|y=x^2\}$

+ 1,x∈ R}、{ $(x,y)|y=x^2+1,x$ ∈ R},这三个集合是不同的。



【解析】

分别求解二次函数的值域和一次函数的值域化简集合 M 和集合 N, 然后直接利用交集的运算求解。

2. 已知 A={x|x² - 3x + 2=0},B={x|ax - 2=0}且 A∪B=A,求实数 a 组成的集合 C.

X【错解】

由 x^2 - 3x + 2=0 得 x=1 或 2。

当 x=1 时, a=2, 当 x=2 时, a=1。

【易错分析】

上述解答只注意了 B 为非空集合,实际上, $B=\Phi$ 时,仍满足 $A \cup B=A$ 。

当 a=0 时, $B=\Phi$,符合题设,应补上,故**正确答案为 C**= $\{0, 1, 2\}$ 。

✓【正确答案】

∴A ∪ B=A ∴B⊆A ∇ A={x| x^2 - 3x + 2=0}={1, 2}

∴B=中或{1}或{2} ∴C={0, 1, 2}

【解析】

解二次方程 x^2 - 5x+6 = 0 可以求出集合 A,根据 $A \cup B = A$ 可得 $B \subseteq A$,分 $B = \{2\}$ 、 $B = \{3\}$ 、 $B = \Phi$,三种情况分别求出对应的 a 值,即可求出实数 a 组成的集合 C。

已知集合 A={x|x² - 3x - 10≤0},集合 B={x|p+1≤x≤2p - 1}. 若 B⊆A,求实数 p 的取值范围。



X【错解】

由 x² - 3x - 10≤0 得 - 2≤x≤5.

欲使 B
$$\subseteq$$
A, 只须 $\begin{cases} -2 \le p+1 \\ 2p-1 \le 5 \end{cases} \Rightarrow -3 \le p \le 3$

∴ p 的取值范围是 - 3≤p≤3.

【易错分析】

上述解答忽略了"空集是任何集合的子集"这一结论,即 $B=\Phi$ 时,符合题设。

✓【正确答案】

①当 B≠^申时,即 p+1≤2p - 1⇒p≥2.

由 B⊆ A 得: - 2≤p+1 且 2p - 1≤5。

由 - 3≤p≤3。

∴ 2≤p≤3

②当 B=^中时,即 p+1>2p-1⇒p<2。

由①、②得: p≤3。

【解析】

化简集合 A, 由 B⊆A 可得 B=Ø 或 B≠Ø . 当 B=Ø 时, 由 p+1 > 2p-1, 求出

$$p$$
 的范围; 当 $B\neq\varnothing$ 时, 由
$$\begin{cases} -2\leq p+1\\ p+1\leq 2p-1 \text{ , }$$
 解得 p 的范围,再把这两个 p 的 $2p-1\leq 5$

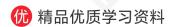
范围取并集即得所求。



【知识导学】

- ♣ 集合:一般地,一定范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个集合。
- → 元素:集合中的每一个对象称为该集合的元素,简称元。
- 子集: 如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素(若 $a \notin A$ 则 $a \in B$),则称集合 A 为集合 B 的子集,记为 A \subseteq B 或 B \supseteq A;如果 A \subseteq B,并且 A \ne B,这时集合 A 称为集合 B 的真子集,记为 A \subseteq B 或 B \supseteq A。
- **集合的相等**:如果集合 A、B 同时满足 A⊆B、B⊇A,则 A=B。
- → **补集**: 设 A \subseteq S,由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集,记为 C_sA
- ◆ 全集: 如果集合 S 包含所要研究的各个集合,这时 S 可以看做一个全集,全集通常记作 U。
- **交集**: 一般地,由所有属于集合 A 且属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 A \cap B。
- **并集:** 一般地,由所有属于集合 A 或者属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$ 。
- lacktriangle $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$. $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$ $oldsymbol{\circ}$
- 有限集: 含有有限个元素的集合称为有限集。
- ★ 无限集: 含有无限个元素的集合称为无限集。
- ▲ 集合的常用表示方法:列举法、描述法、图示法 (Venn图)。
- → 常用数集的记法: 自然数集记作 N, 正整数集记作 N+或 N^{*}, 整数集记作 Z, 有理数集记作 Q, 实数集记作 R。





(二) 常用逻辑用语

【典例分析】

1. 将下列命题改写成"若 p 则 q"的形式,并写出否命题: a > o 时,函数 y = ax + b 的值随 x 值的增加而增加。

| 【错解】

原命题改为: 若 a>o 时, x 的值增加, 则函数 y=ax+b 的值也随着增加。

【易错分析】

如果从字面上分析最简单的方法是将 a>o 看作条件,将"随着"看作结论,而 x 的值增加,y 的值也增加看作研究的对象,那么原命题改为若 a>o 时,则函数 y=ax+b 的值随着 x 的值增加而增加,其否命题为若 a≤o 时,则函数 y=ax+b 的值不随 x 值的增加而增加.此题错解在注意力集中在"增加"两个字上,将 x 值的增加当做条件,又不把 a>o 看作前提,就变成两个条件的命题,但写否命题时又没按两个条件的规则写,所以就错了。

✓【正确答案】

原命题改为: a>o时, 若 x 的值增加, 则函数 y=ax+b 的值也随着增加。

否命题为: a>o时, 若 x 的值不增加, 则函数 y=ax+b 的值也不增加。

原命题也可改为: 当 x 的值增加时, 若 a>o, , 则函数 y=ax+b 的值也随着增加。

否命题为: 当 x 增加时,若 a ≤ o,则函数 y=ax+b 的值不增加。

- 2. 已知 h>0,设命题甲为:两个实数 a、b 满足 |a-b| < 2h,命题乙为:两个实数 a、b 满足|a-1| < h 且|b-1| < h,那么
- A. 甲是乙的充分但不必要条件 B. 甲是乙的必要但不充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲是乙的既不充分也不必要条件



$$|a-b| < 2h \Leftrightarrow |(a-1)-(b-1)| < 2h = h+h \Leftrightarrow |a-1| < h, |b-1| < h$$

故本题应选 C.

【易错分析】

- (1) 对充分、必要、充要条件的概念分不清,无从判断,凭猜测产生错误;
- (2) 不能运用绝对值不等式性质作正确推理而产生错误。

【正确答案】

因为
$$\begin{cases} |a-1| < h \\ |b-1| < h \end{cases}$$
 所以
$$\begin{cases} -h < a-1 < h \\ -h < b-1 < h \end{cases}$$

两式相减得-2h < a-b < 2h, 故 $\left|a-b\right| < 2h$

即由命题甲成立推出命题乙成立,所以甲是乙的必要条件。

由于
$$\left\{ \begin{vmatrix} a-2 \end{vmatrix} < h \\ |b-2| < h \end{vmatrix} \right.$$

同理也可得|a-b| < 2h

因此, 命题甲成立不能确定命题乙一定成立, 所以甲不是乙的充分条件, 故应选 B。

【解析】

|a|+|b|≥|a+b|的合理运用,以及巧妙运用|a-1|+|1-b|的使用,是解答甲是乙

的必要条件的一个关键;充分条件的推导用的是特殊值否定法。



已知命题甲: a+b≠4, 命题乙:a≠1且b≠3, 则命题甲是命题乙的_____。

【错解】

由逆否命题与原命题同真同假知,若 a=1 且 b=3 则 a+b=4 成立,所以命题甲是命题 乙的充分不必要条件。

【易错分析】

对命题的否定不正确.a \neq 1且 b \neq 3的否定是 a=1 或 b=3。

✓【正确答案】

当 a+b≠4 时,可选取 a=1,b=5, 故此时 a≠1且 b≠3 不成立(∵a=1)。

同样, a≠1,且b≠3时,可选取 a=2,b=2,a+b=4, 故此时 a+b=4。

因此, 甲是乙的既不充分也不必要条件。

注: $a \neq 1$ 且 $b \neq 3$ 为真时,必须 $a \neq 1$, $b \neq 3$ 同时成立。

【知识导学】

- 曅 逻辑联结词:"且"、"或"、"非"分别用符号"^""∨"″,"¬"表示。
- → 命题: 能够判断真假的陈述句。
- 📥 简单命题:不含逻辑联结词的命题
- ♣ 复合命题:由简单命题和逻辑联结词构成的命题,复合命题的基本形式: p 或 q; p 且
 q; 非 p。
- ♣ 四种命题的构成:原命题:若p则q; 逆命题:若q则p; 否命题:若¬p则¬q;
 逆否命题:若¬q则¬p。
- 📥 原命题与逆否命题同真同假,是等价命题,即"若p则q" ⇔ "若¬q则¬p"。



→ 反证法: 欲证"若p则q",从"非q"出发,导出矛盾,从而知"若p则非q"为假,即"若p则q"为真。

→ 充分条件与必要条件:

① $p \Rightarrow q : p \neq q$ 的充分条件; $q \neq p$ 的必要条件;

②p⇔q:p是q的充要条件.

- 常用的全称量词: "对所有的"、"对任意一个""对一切""对每一个""任给"等;并用符号"∀"表示.含有全称量词的命题叫做全称命题。
- 常用的存在量词: "存在一个"、"至少有一个"、"有些"、"有一个"、"有的"、"对某个"; 并用符号"∃"表示.含有存在量词的命题叫做特称命题。

易错题型二:函数概念与基本初等函数

(一) 映射、函数与反函数

【典型例题】

1. 已知函数 f(x) 的定义域为[0, 1], 求函数 f(x+1) 的定义域。

| 【错解】

由于函数 f(x) 的定义域为[0, 1], 即 $0 \le x \le 1$, $\therefore 1 \le x + 1 \le 2$

 $\therefore f(x+1)$ 的定义域是[1, 2]

【易错分析】

对函数定义域理解不透,不明白 f(x) 与 f(u(x)) 定义域之间的区别与联系,其实在这里只要明白: f(x) 中x 取值的范围与 f(u(x)) 中式子u(x) 的取值范围一致就好了。

✓【正确答案】

由于函数 f(x) 的定义域为[0, 1], 即 $0 \le x \le 1$

$$\therefore f(x+1)$$
 满足

$$\therefore 0 \le x + 1 \le 1$$

$$-1 \le x \le 0$$

$$\therefore f(x+1)$$
 的定义域是[-1,0]

2. 已知:
$$x \in N^*$$
, $f(x) = \begin{cases} x-5 & (x \ge 6) \\ f(x+2) & (x < 6) \end{cases}$, 求 $f(3)$ 。

| 【错解】

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & (x \ge 6) \\ f(x+2) & (x < 6) \end{cases}, \quad f(x+2) = (x+2) - 5 = x - 3$$

故
$$f(x) = \begin{cases} x-5 & (x \ge 6) \\ x-3 & (x < 6) \end{cases}$$
, ∴ $f(3) = 3 - 3 = 0$.

【易错分析】

没有理解分段函数的意义,f(3) 的自变量是 3, 应代入 f(x+2) 中去, 而不是代入 x

5中,只有将自变量化为不小于6的数才能代入解析式求解。

✓【正确答案】

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & (x \ge 6) \\ f(x+2) & (x < 6) \end{cases}$$

$$f(3) = f(3+2) = f(5) = f(5+2) = f(7) = 7-5 = 2$$



3. 求函数 $y = f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in [1,5)$ 的值域.

X【错解】

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 6 = 3, f(5) = 5^2 - 4 \times 5 + 6 = 11$$

又
$$x \in [1,5)$$
, $\therefore f(x)$ 的值域是 $[3,11)$

【易错分析】

对函数定义中,输入定义域中每一个 x 值都有唯一的 y 值与之对应,错误地理解为 x 的两端点时函数值就是 y 的取值范围了。

✓【正确答案】

配方, 得
$$y = f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$$

 $x \in [1,5)$, 对称轴是 x = 2 : x = 2 时, 函数取最小值为 f(2) = 2,

$$f(x) < f(5) = 11$$

 $\therefore f(x)$ 的值域是 [2,11]

【知识导学】

- **➡ 映射**: 一般地,设 A、B 两个集合,如果按照某种对应法则 f ,对于集合 A 中的任何 一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,那么这样的单值对应叫做集合 A 到 集合 B 的映射,记作 f: A→B.(包括集合 A、B 及 A 到 B 的对应法则)
- ▲ 函数: 设 A, B 都是非空的数集,如果按某种对应法则 f,对于集合 A 中每一个元素 x, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,且 B 中每一个元素都的原象,这样的对应 叫做从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 y = f(x).

其中所有的输入值 x 组成的集合 A 称为函数 y = f(x) 定义域,对于 A 中的每一个 x ,都有一个输出值 y 与之对应,我们将所有输出值 y 组成的集合称为函数的值域.

★ 反函数: 一般地,设函数 y=f(x)(x∈A)的值域是 C,根据这个函数中 x,y的关系,用 y 把 x 表示出来,得到 x=f⁻¹(y). 若对于 y 在 C 中的任何一个值,通过 x 在 A 中都有唯一的值和它对应,那么 x=f⁻¹(y)就表示 y 是自变量,x 是自变量 y 的函数,这样的函数叫做函数 y=f(x)(x∈A)的反函数,记作 x=f⁻¹(y). 我们一般用 x 表示自变量,用 y 表示函数,为此我们常常对调函数 x=f⁻¹(y)中的字母 x,y,把它改写成 y=f⁻¹(x) 反函数 y=f⁻¹(x)的定义域、值域分别是函数 y=f(x)的值域、定义域。

(二) 函数的性质

【典型例题】

1. 判断 $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性。

X【错解】

$$f(-x) = \log_2(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \log_2(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\therefore f(-x) \neq f(x) \boxtimes f(-x) \neq -f(x)$$

所以该函数既不是奇函数也不是偶函数。

【易错分析】

对数运算公式不熟悉,或者说**奇偶性的判别方法**不灵活.定义中 f(-x)=-f(x) f(-x)=f(x),也可改为研究 f(-x)+f(x)=0 , f(-x)-f(x)=0 是否成立。

✓【正确答案】

方法一:
$$f(-x) = \log_2(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \log_2(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

= $\log_2 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$

∴ *f*(*x*) 是奇函数

方法二:
$$\because f(x) + f(-x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \log_2(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

= $\log_2[(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log_2 1 = 0$
 $f(-x) = -f(x)$ $\therefore f(x)$ 是奇函数

2. 函数 $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ 的单调增区间是______。

X【错解】

因为函数 $g(x)=5-4x-x^2$ 的对称轴是 x=-2 ,图像是抛物线,开口向下,由图可知 $g(x)=5-4x-x^2$ 在 $(-\infty,-2]$ 上是增函数,所以 $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ 的增区间是 $(-\infty,-2]$

【易错分析】

在求单调性的过程中注意到了复合函数的单调性研究方法,但没有考虑到**函数的单调性** 只能在函数的定义域内来讨论,从而**忽视了函数的定义域**,导致了解题的错误.

✔【正确答案】

 $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ 的定义域是[-5,1],又 $g(x)=5-4x-x^2$ 在区间[-5,-2] 上增函数,在区间[-2,1] 是减函数,所以 $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ 的增区间是[-5,-2]



3. 已知奇函数 f(x)是定义在(-3,3)上的减函数,且满足不等式 $f(x-3)+f(x^2-3)<0$,求 x的取值范围。

| 【错解】

:: f(x) 是奇函数, $:: f(x-3) < -f(x^2-3) = f(3-x^2)$,又 f(x)在(-3,3)上是减函数,

解得 x>2 或 x< -3

又 f(x)是定义在(-3,3)上的函数,

所以 2 < x < 3

【易错分析】

只考虑到奇函数与单调性,而没有正确理解函数的定义域。

/【正确答案】

曲
$$\begin{cases} -3 < x - 3 < 3 \\ -3 < x^2 - 3 < 3 \end{cases}$$
 得
$$\begin{cases} 0 < x < 6 \\ -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{cases}$$
 , 故 $0 < x < \sqrt{6}$,

又: f(x)是奇函数,: $f(x-3) < -f(x^2-3) = f(3-x^2)$,又 f(x)在(-3,3)上是减函数,

 $\therefore x - 3 > 3 - x^2$,即 $x^2 + x - 6 > 0$,解得 x > 2 或 x < - 3,综上得 $2 < x < \sqrt{6}$,即 $A = \{x \mid 2 < x < \sqrt{6}\}$,

【解析】

我们要求 x 的范围只能运用函数的单调性先脱去 "f" 号, 然后根据 f (x) 是减函数, 求出 x 的范围。



【知识导学】

▲ 函数的单调性:

- (1) **增函数**: 一般地,设函数 y = f(x) 的定义域为 I,如果定义域 I 内某个区间上任意两个自变量的值 $x_1, x_2, \exists x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就说 f(x) 在这个区间上是增函数.
- (2) **减函数**: 一般地,设函数 y = f(x) 的定义域为 I,如果定义域 I 内某个区间上任意两个自变量的值 $x_1, x_2, \exists x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,那么就说 f(x)在这个区间上是减函数.
- (3) 单调性(单调区间)如 y=f(x)在某个区间上是增函数或减函数,那么就说函数 f(x)在这区间上具有单调性,这一区间叫做函数 y=f(x)的单调区间.

▲ 函数的奇偶性:

- (1) **奇函数**: 一般地,如果对于函数 f(x)的定义域内的任意一个 x,都有 f(-x) = -f(x),那么函数 f(x)就叫做奇函数.
- (2) **偶函数**: 一般地,如果对于函数 f(x)的定义域内的任意一个 x,都有 f(-x)=f(x),那么函数 f(x)就叫做偶函数.
 - (3) 如果函数 f(x)是奇函数或偶函数,那么就说 f(x)具有奇偶性.
- → 函数的图像:将自变量的一个值 x₀ 作为横坐标,相应的函数值 f(x₀)作为纵坐标,就得到平面内的一个点 (x₀,f(x₀)),当自变量取遍函数定义域内的每一个值时,就得到一系列这样的点,所有这些点的集合 (点集) 组成的图形就是函数 y=f(x)的图像.





(二) 基本初等函数

【典型例题】

1. 分析方程 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (a > 0) 的两个根都大于 1 的充要条件.

X【错解】

由于方程 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (a > 0) 对应的二次函数为 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的 图像与 x 轴交点的横坐标都大于 1 即可.

故需满足
$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 1 \end{cases}, \quad \text{所以充要条件是} \begin{cases} f(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 1 \end{cases}$$

【易错分析】

上述解法中, 只考虑到二次函数与 x 轴交点坐标要大于 1, 却忽视了最基本的的前题条 件,应让二次函数图像与 x 轴有交点才行,即满足△≥0,故上述解法得到的不是充要 条件, 而是必要不充分条件.

【正确答案】

充要条件是
$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 1 \\ \Delta = b^2 - 4ac \ge 0 \end{cases}$$



2. 求函数 $y = 36^x - 12 \cdot 6^x - 5$ 的单调区间.

| 【错解】

∴当 t≥6,即 x≥1 时, y 为关于 t 的增函数,

当 t≤6,即 x≤1 时, y 为关于 t 的减函数

: 函数 $y = 36^x - 12 \cdot 6^x - 5$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 6]$,单调递增区间为 $[6, +\infty)$

【易错分析】

本题为复合函数,该解法未考虑中间变量的取值范围.

【正确答案】

令 $6^x = t$, 则 $t = 6^x$ 为增函数, $y = 36^x - 12 \cdot 6^x - 5 = t^2 - 12 \cdot t - 5 = (t - 6)^2 - 41$

∴当 t≥6,即 x≥1 时, y 为关于 t 的增函数,

当 t≤6,即 x≤1 时, y 为关于 t 的减函数

∴函数 $y = 36^x - 12 \cdot 6^x - 5$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 1]$,单调递增区间为 $[1, +\infty)$

3. 已知 $y = \log_a (2 - ax)$ 在[0, 1]上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是______

X【错解】

$$y = \log_a (2 - ax)$$
 是由 $y = \log_a u$, $u = 2 - ax$ 复合而成, 又 $a > 0$

 $\therefore u = 2 - ax$ 在[0, 1]上是 x 的减函数, 由复合函数关系知

 $y = \log_a u$ 应为增函数, $\therefore a > 1$

【易错分析】

解题中虽然考虑了对数函数与一次函数复合关系,却忽视了数定义域的限制,单调区间应是定义域的某个子区间,即函数应在[0,1]上有意义.

✔【正确答案】

$$y = \log_a (2 - ax)$$
 是由 $y = \log_a u$, $u = 2 - ax$ 复合而成,又 $a > 0$

$$\therefore u = 2 - ax$$
 在[0, 1]上是 x 的减函数, 由复合函数关系知

$$y = \log_a u$$
 应为增函数, $\therefore a > 1$

又由于x 在[0, 1]上时 $y = \log_a(2-ax)$ 有意义, u = 2-ax又是减函数,

$$\therefore x = 1$$
 时, $u = 2 - ax$ 取最小值是 $u_{\min} = 2 - a > 0$ 即可, $\therefore a < 2$

综上可知所求的取值范围是 1 < a < 2

【知识导学】

- ▲ 二次函数的概念、图像和性质.
 - (1) 注意解题中灵活运用二次函数的一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
 - 二次函数的顶点式 $f(x) = a(x-m)^2 + n$ $(a \neq 0)$
 - 二次函数的坐标式 $f(x) = a(x x_1)(x x_2)$ $(a \neq 0)$
- (2)解二次函数的问题(如单调性、最值、值域、二次三项式的恒正恒负、二次方程根的范围等)要充分利用好两种方法:配方、图像,很多二次函数都用数形结合的思想去解。

①
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
 $(a \neq 0)$, 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时图像与 x 轴有两个交点.

M (x₁,0) N(x₂,0),|MN|=| x₁- x₂|=
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$
.

- ② 二次函数在闭区间上必有最大值和最小值,它只能在区间的端点或二次函数的顶点处取得.
- 指数函数 $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$ 和对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \ne 1)$ 的概念和性质.



(1) 有理指数幂的意义、幂的运算法则:

①
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
; ② $(a^m)^n = a^{mn}$; ③ $(ab)^n = a^n b^n$ (这时 m,n 是有理数)

对数的概念及其运算性质、换底公式.

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N; \qquad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n \log_a M; \qquad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M; \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) 指数函数的图像、单调性与特殊点,对数函数的图像、单调性与特殊点.

- ①指数函数图像永远在 x 轴上方, 当 a > 1 时, 图像越接近 y 轴, 底数 a 越大; 当 0 < a < 1 时, 图像越接近 y 轴, 底数 a 越小。
- ②对数函数的符号常受到底数和真数的范围的制约,注意对底数 a 的讨论。
- ③当 a>1 时,图像越接近 x 轴,底数 a 越大; 当 0<a<1 时,图像越接近 x 轴,底数 a 越小。

\blacksquare 幂函数 $y = x^{\alpha}$ 的概念、图像和性质。

结合函数 $y=x,y=x^2$ $y=x^3,y=y=x^{-1},y=x^{-2},y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像,了解它们的变化情况.

① α > 0 时, 图像都过 (0,0) 、 (1,1) 点, 在区间 (0, +∞) 上是增函数;

注意 $\alpha > 1$ 与 $0 < \alpha < 1$ 的图像与性质的区别。

② α < 0 时,图像都过(1,1)点,在区间(0,+ ∞)上是减函数;在第一象限内,图像向上无限接近 y 轴,向右无限接近 x 轴。

③当 x>1 时,指数大的图像在上方。

定义域不关于原点对称,幂函数为非奇非偶函数。



(三)函数与方程

【典型例题】

1. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3 - a$ 若 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) \ge 0$ 恒成立,求 a 的取值范围。

X【错解】

(一)
$$:: f(x) \ge 0$$
 恒成立, $:: \triangle = a^2 - 4(3-a) \le 0$ 恒成立

解得 a 的取值范围为 $-6 \le a \le 2$

(二)
$$:: f(x) = x^2 + ax + 3 - a$$
 若 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) \ge 0$ 恒成立

解得 a 的取值范围为 $-7 \le a \le \frac{7}{3}$

【易错分析】

对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 当 $x \in R \perp f(x) \ge 0$ 恒成立时, $\triangle \le 0$

片面理解为, $ax^2 + bx + c \ge 0$, $x \in [-2,2]$ 恒成立时, $\triangle \le 0$; 或者理解为 $\begin{cases} f(-2) \ge 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases}$

这都是由于函数性质掌握得不透彻而导致的错误.二次函数最值问题中"轴变区间定"

要对对称轴进行分类讨论;"轴定区间变"要对区间进行讨论。

✔【正确答案】

设 f(x) 的最小值为 g(a)

(1) 当
$$-\frac{a}{2}$$
< -2 即 $a>4$ 时, $g(a)=f(-2)=7-3$ $a\ge0$,得 $a\le\frac{7}{3}$ 故此时 a 不存在;

又-4≤ a ≤4, 故-4≤ a ≤2;

(3)
$$-\frac{a}{2} > 2$$
即 $a < -4$ 时, $g(a) = f(2) = 7 + a \ge 0$,得 $a \ge -7$,又 $a < -4$ 故 $-7 \le a < -4$

综上, 得 - 7≤*a* ≤2

2. 已知 $mx^2 + x + 1 = 0$ 有且只有一根在区间 (0,1) 内, 求 m 的取值范围。

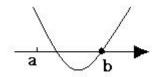
| 【错解】

设
$$f(x) = mx^2 + x + 1$$
 : $mx^2 + x + 1 = 0$ 有且只有一根在区间 (0,1) 内 : $f(0) \cdot f(1) < 0$ 得 $m < -2$

【易错分析】

对于一般 f(x) ,若 $f(a) \cdot f(b) < 0$,那么,函数 y = f(x) 在区间(a,b)上至少有一个零点,但不一定唯一.对于二次函数 f(x) ,若 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 则在区间(a,b)上存在唯一的零点,一次函数有同样的结论成立。

但方程 f(x)=0 在区间(a,b)上有且只有一根时,不仅是 $f(a)\cdot f(b)<0$,也有可能 $f(a)\cdot f(b)\leq 0 \,.$ 如二次函数图像是下列这种情况时,就是这种情况。



由图可知 f(x) = 0 在区间 (a,b) 上有且只有一根,但是

$$f(a) \cdot f(b) \le 0$$

【正确答案】

设
$$f(x) = mx^2 + x + 1$$
,

(1) 当m = 0 时方程的根为 - 1,不满足条件.

优 精品优质学习资料

(2) 当 $m \neq 0$ ∵ $mx^2 + x + 1 = 0$ 有且只有一根在区间 (0,1) 内

又
$$f(0) = 1 > 0$$

: 有两种可能情形① f(1) < 0 得 m < -2

或者②
$$f(1) = 0$$
且 $0 < -\frac{1}{2m} < 1$ 得 m 不存在

综上所得, m < -2

3. 是否存在这样的实数 k,使得关于 x 的方程 x^2 + (2k - 3) x - (3k - 1) = 0 有两个实数根,且两根都在 0 与 2 之间?如果有,试确定 k 的取值范围;如果没有,试说明理由。

X【错解】

令
$$f(x) = x^2 + (2k-3)x - (3k-1)$$
 那么由条件得到

$$\begin{cases} \Delta = (2k-3)^2 + 4(3k-1) \ge 0 \\ f(0) = 1 - 3k > 0 \end{cases}$$
 即此不等式无解
$$f(2) = 4 + 2(2k-3) - (3k-1) > 0$$

即不存在满足条件的k值。

【易错分析】

方程两根都在 0 与 2 之间,根据图像,可知除满足上述条件外,还要考虑二次函数的 对称轴在区间 (0,2) 内。

✓【正确答案】

$$\begin{cases} \Delta = (2k-3)^2 + 4(3k-1) \ge 0 \\ f(0) = 1 - 3k > 0 \\ f(2) = 4 + 2(2k-3) - (3k-1) > 0 \\ 0 < \frac{2k-3}{2} < 2 \end{cases}$$
即此不等式无解
$$\begin{cases} 4k^2 + 5 \ge 0 \\ k < \frac{1}{3} \\ k > 1 \\ \frac{3}{2} < k < \frac{7}{2} \end{cases}$$

即不存在满足条件的 k 值。



【知识导学】

▲ 函数的零点与方程的根的关系:

一般地,对于函数 y = f(x) $(x \in D)$ 我们称方程 f(x) = 0 的实数根 x 也叫做函数的零点,即**函数的零点就是使函数值为零的自变量的值**. 求综合方程 f(x) = g(x)的根或根的个数就是求函数 y = f(x) - g(x)的零点。

函数的图像与方程的根的关系:

一般地,函数 y = f(x) ($x \in D$)的图像与 x 轴交点的横坐标就是 f(x) = 0 的根.综合方程 f(x) = g(x)的根,就是求函数 y = f(x)与 y = g(x)的图像的交点或**交点个数**,或求方程 y = f(x) - g(x)的图像与 x 轴交点的横坐标。

判断一个函数是否有零点的方法:

如果函数 y=f(x) 在区间[a,b]上图像是连续不断的曲线,并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$,那么,函数 y=f(x) 在区间(a,b)上至少有一个零点,即至少存在一个数 $c\in(a,b)$ 使得 f(c)=0,这个 c 也就是方程 f(x)=0 的一个根。对于我们学习的简单函数,可以借助 y=f(x) 图像判断解的个数,或者把 f(x) 写成 g(x)-h(x),然后借助 y=g(x)、y=h(x) 的图像的交点去判断函数 f(x) 的零点情况。

▲ 二次函数、一元二次方程、二次函数图像之间的关系:

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的零点,就是二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根,也是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交点的横坐标。

→ 二分法:

对于区间[a,b]上的连续不断,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 y = f(x) ,通过不断地把函数 的零点所在的区间一分为二,使区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的 方法叫做二分法。



(四) 函数的综合应用

【典型例题】

1. 将进价为 8 元的商品,按每件 10 元售出,每天可销售 200 件,若每件售价涨价 0.5 元, 其销售量就减少 10 件,问应将售价定为多少时,才能使所赚利润最大,并求出这个最大利润。

່★【错解】

设每件售价提高 x 元, 利润为 y 元,

则
$$y = (8+x)(200-20x) = 20[-(x-1)^2+81]$$
 : $x = 1$ 时, $y_{max} = 1620$ (元)

【易错分析】

没理解题意,每天销售 200 件是在定价 10 元时的情况下,所设的应理解为在定价目 10 元的基础上,再每件售价提高 x 元,故利润每件应为(2+x)元,此时的销售量为(200-20x)元。

✔【正确答案】

设每件售价提高 x 元,利润为 y 元,则 y= $(2+x)(200-20x)=-20(x-4)^2+720$ 故当 x=4,即定价为 14 元时,每天可获得最大利润为 720 元。

【解析】

本题考查的知识点是函数模型的选择与应用,其中根据已知求出函数的解析式是解答的关键。

2. 某工厂改进了设备,在两年内生产的月增长率都是 m,则这两年内第二年三月份的产值 比第一年三月份的产值的增长率是多少?



🗶 【错解】

设第一年三月份的产值为 a,则经过二年,三月份的产值是 a $(1+m)^{11}$,则所求增长率为 $\frac{a(1+m)^{11}-a}{a}=(1+m)^{11}-1$,或把第二年三月份的产值写为 a $(1+m)^{13}$.

【易错分析】

对增长率问题的公式 $y = N(1+p)^x$ 未透彻理解而造成错解,或者是由于审题不细致而造成题意的理解错误。若某月的产值是 a,则此后第 x 月的产值为 $a(1+m)^x$,指数 x 是基数所在时间后所跨过的时间间隔数。

【正确答案】

设第一年三月份的产值为 a, 则第四个月的产值为 a(1+m), 五月份的产值为 a(1+m)², 从此类推,则第二年的三月份是第一年三月份后的第 12 个月,故第二年的三月份的产值是 a(1+m)¹²,又由增长率的概念知,这两年的第二年的三月份的产值比第一年的三月份的产值的增长率为 $\frac{a(1+m)^{12}-a}{a}=(1+m)^{12}-1$

3. 在一个交通拥挤及事故易发生路段,为了确保交通安全,交通部门规定,在此路段内的车速 v (单位: km/h) 的平方和车身长 l (单位: m) 的乘积与车距 d 成正比,且最小车距不得少于半个车身长.假定车身长均为 l (单位: m) 且当车速为 50 (km/h) 时,车距恰为车身长,问交通繁忙时,应规定怎样的车速,才能使在此路段的车流量 Q 最大? $(车流量=\frac{x_{2}}{x_{2}+x_{2}+x_{3}})$

X【错解】

$$d = kv^2l$$
 , 将 $v = 50$, $d = l$ 代入得
$$k = \frac{1}{2500} \text{ , } \therefore d = \frac{1}{2500}v^2l \text{ , } 又将 d = \frac{1}{2}l$$
 代入得 $v = 25\sqrt{2}$,



由题意得
$$d = \frac{1}{2500} v^2 l$$
 ($v \ge 25\sqrt{2}$)

将 Q=
$$\frac{1000v}{d+l}$$
= $\frac{1000v}{l(1+\frac{v^2}{2500})}$ ($v \ge 25\sqrt{2}$)

$$\frac{1000v}{l(1+\frac{v^2}{2500})} = \frac{1000}{l(\frac{1}{v} + \frac{v}{2500})} \le \frac{1000}{l \cdot 2\sqrt{\frac{1}{v} \cdot \frac{v}{2500}}} = \frac{25000}{l}$$

∴当且仅当
$$v = 50$$
 时, $Q_{\text{max}} = \frac{25000}{I}$

综上所知, v = 50 (km/h) 时, 车流量Q取得最大值。

【易错分析】

上述解法中结果虽然正确,但解题过程中是错误的,即虽然车速要求 $v \ge 25\sqrt{2}$,但在行驶过程中车速**有可能低于 25** $\sqrt{2}$ (km/h),所以解题材中应分两类情形求解,得分段函数。

✓【正确答案】

(1) 依题意,
$$d = \begin{cases} \frac{1}{2500} v^2 l(v > 25\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} l & (v \le 25\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$Q = \frac{1000 \, v}{d+l} = \begin{cases} \frac{1000 \, v}{l(1 + \frac{v^2}{2500})} & (v > 25\sqrt{2}) \\ \frac{1000 \, v}{3l} & (v \le 25\sqrt{2}) \end{cases}$$

显然当 $v \le 25\sqrt{2}$ 时, Q 是关于 v 的增函数, \therefore 当 $v = 25\sqrt{2}$ 时,

$$Q_{\text{max}} = \frac{1000v}{\frac{3l}{2}} \frac{50000\sqrt{2}}{3l}$$

当
$$v > 25\sqrt{2}$$
 时,Q= $\frac{1000v}{d+l} = \frac{1000v}{l(1+\frac{v^2}{2500})} = \frac{1000}{l(\frac{1}{v}+\frac{v}{2500})} \le \frac{1000}{l \cdot 2\sqrt{\frac{1}{v} \cdot \frac{v}{2500}}} = \frac{25000}{l}$

当且仅当v = 50时,上式等号成立。

综上所述, 当且仅当v = 50时, 车流量Q取得最大值。

易错题型一:数列

(一) 等差数列的通项与求和

【典型例题】

- 1. 已知数列 1, 4, 7, 10, ..., 3n+7,其中后一项比前一项大 3
- (1) 指出这个数列的通项公式;
- (2) 指出 1+4+...+ (3n 5) 是该数列的前几项之和。

X【错解】

- (1) $a_n = 3n + 7$
- (2) 1+4+...+ (3n 5) 是该数列的前 n 项之和

【易错分析】

误把最后一项 (含 n 的代数式) 看成了数列的通项. (1) 若令 n=1,a₁=10≠1,显然 3n+7

不是它的通项。

✓【正确答案】

- (1) an=3n 2
- (2) 1+4+...+ (3n-5) 是该数列的前 n-1 项的和

【解析】

- (1) a1=1 d=3 所以通项为 an=1+(n-1)*3=3n-2
- (2) 1+4+7+.+3n-5=1+4+7+...+3(n-1)-2 所以是前 n-1 项的和

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和为① $S_n = 2n^2 - n$ ② $S_n = n^2 + n + 1$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

X【错解】

(1)
$$a_n = 2n^2 - n - 2(n-1)^2 + (n-1) = 4n - 3$$

②
$$a_n = n^2 + n + 1 - (n-1)^2 - (n-1) - 1 = 2n$$

【易错分析】

在对数列概念的理解上,仅注意了 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 的关系,没注意 $a_1 = S_1$.

✔【正确答案】

①当
$$n=1$$
时, $a_1=S_1=1$

经检验
$$n=1$$
时 $a_1=1$ 也适合, $a_n=4n-3$

②当
$$n=1$$
时, $a_1=S_1=3$

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2n & (n \ge 2) \end{cases}$$

【知识导学】

- ♣ 数列:按一定次序排成的一列数叫做数列。
- ↓ 项:数列中的每一个数都叫做这个数列的项,各项依次叫做这个数列的第1项(或首项),第2项,…,第n项,…
- ▲ 通项公式: 一般地, 如果数列 {an} 的第n项与序号n之间的关系可以用一个公式来



→ 表示,那么这个公式叫做这个数列的通项公式。

♣ 有穷数列: 项数有限的数列叫做有穷数列。

★ 无穷数列: 项数无限的数列叫做无穷数列。

- → 数列的递推公式: 如果已知数列的第一项(或前几项)及相邻两项(或几项)间关系可以用一个公式来表示,则这个公式就叫做这个数列的递推公式.递推公式是给出数列的一种重要方法,其关健是先求出 a1,a2,然后用递推关系逐一写出数列中的项。
- ♣ 等差数列: 一般地,如果一个数列从第二项起,每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做等差数列,这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用d表示。

(二) 等比数列的通项与求和

【典型例题】

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n=aq^n$ ($a\neq 0, q\neq 1, q$ 为非零常数) ,则 $\{a_n\}$ 为()。

A.等差数列

B.等比数列

C.既不是等差数列,也不是等比数列

D.既是等差数列,又是等比数列

X【错解】

$$: a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = aq^{n+1} - aq^n = aq^n(q-1)$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$
 (常数)

 $\therefore {a_n}$ 为等比数列,即 B。

【易错分析】

忽略了 $: a_n = S_n - S_{n-1}$ 中隐含条件 n > 1.

✔【正确答案】

当n=1时, a1=S1=aq;

当 n>1 时,
$$a_n = S_n - S_{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$
 (常数)

$$\because \frac{a_2}{a_1} = q - 1 \neq q$$

 $\therefore {a_n}$ 既不是等差数列,也不是等比数列,选 C。

【解析】

根据题意, 由数列 an}的前 n 项和公式计算可得数列{an}的通项公式, 结合等差数列、

等比数列的定义分析可得答案. 本题考查等比数列、等差数列的判定, 关键是求出数列

{an}的通项公式. 求出数列的前两项



2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 Sn,S10=10 ,S30=70,则 S40 等于.

X【错解】

S30= S10·q 2.
$$\therefore$$
 q 2=7, q= $\pm \sqrt{7}$, \therefore S40= S30·q= $\pm 70\sqrt{7}$.

【易错分析】

是将等比数列中 S_m , S_{2m} - S_m , S_{3m} - S_{2m} 成等比数列**误解为 S_m, S_{2m}**, S_{3m} 成等比数

列.

✓【正确答案】

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = 10\\ \frac{a_1(1-q^{30})}{1-q} = 70\\ \vdots \end{cases} = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = -10\\ q^{10} = 2\vec{\boxtimes}q^{10} = -3(\hat{\Xi}) \end{cases}$$

由题意:

$$\therefore \text{S40=} \frac{a_1}{1-q} (1-q^{40}) = 200$$

【解析】

由题意易得公比 $q \ne 1$,由求和公式可得和 $\frac{a1}{1-q}$ q10 的方程组,解得代入求和公式可

得 S40=200

3. 求和: a+a2+a3+...+an.

X【错解】

$$a+a2+a3+...+an = \frac{1-a^n}{1-a}$$

【易错分析】

- (1) 数列 {an} 不一定是等比数列,不能直接套用等比数列前 n 项和公式
- (2) 用等比数列前 n 项和公式应讨论 q 是否等于 1.

✓【正确答案】

当a=0时, a+a2+a3+...+an=0;

当a=1时, a+a2+a3+...+an=n;

当 a ≠ 1 时, a+a2+a3+...+an = $\frac{1-a^n}{1-a}$.

【知识导学】

- ◆ 等比数列: 一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的比都等于 同一个常数,那么这个数列就叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母q表示。
- ♣ 等比中项: 若a, G, b成等比数列, 则称G 为a 和b 的等比中项。

$$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1 & (q = 1) \\ \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

♣ 等比数列的前 n 项和公式:

(三) 数列的综合应用

【典型例题】

1. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,Sn 是其前 n 项和.证明:

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} S_n + \log_{\frac{1}{2}} S_{n+2}}{2} > \log_{\frac{1}{2}} S_{n+1}$$

X【错解】

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}S_{n} + \log_{\frac{1}{2}}S_{n+2}}{2} > \log_{\frac{1}{2}}S_{n+1}$$
 欲证

即证:
$$\log_{\frac{1}{2}}(S_n \cdot S_{n+2}) \quad \log_{\frac{1}{2}}S_{n+1}^2$$

由对数函数的单调性,只需证 $(S_n \cdot S_{n+2}) < S_{n+1}^2$

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = \frac{a_1^2 (1 - q^n) (1 - q^{n+2})}{(1 - q)^2} - \frac{a_1^2 (1 - q^{n+1})^2}{(1 - q)^2}$$

$$= -a_1^2 q^n < 0$$

$$\therefore S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$$

: 原不等式成立.

【易错分析】

在利用等比数列前 n 项和公式时,忽视了 q=1 的情况。

✓【正确答案】

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}S_{n} + \log_{\frac{1}{2}}S_{n+2}}{2} > \log_{\frac{1}{2}}S_{n+1}$$
 欲证

$$\log_{\frac{1}{2}} S_n + \log_{\frac{1}{2}} S_{n+2} \qquad \log_{\frac{1}{2}} S_{n+1}$$
 只需证
$$> 2$$

しい证:
$$\log_{\frac{1}{2}}(S_n \cdot S_{n+2}) > \log_{\frac{1}{2}}S_{n+1}^2$$

由对数函数的单调性,只需证 $(S_n \cdot S_{n+2}) < S_{n+1}^2$

由已知数列 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,

$$\therefore q_{>0}, a_1 > 0.$$

$$\| \| S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = na_1(n+2)a_1 - [(n+1)a_1]^2 = -a_1^2 < 0$$

若
$$q \neq 1$$
, $S_n \cdot S_{n+2}$ - $S_{n+1}^2 = \frac{a_1^2 (1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2} - \frac{a_1^2 (1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2} = -a_1^2 q^n < 0$

$$\therefore S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$$

: 原不等式成立.

【解析】

设数列的公比为 q,当 q=1 时则 $S_n=na_1$,代入 S_n , S_{n+2} , S_{n+1} ,再根据对数函数的单调性得证,当 $q\neq 1$ 时把等比数列 $S_n=\frac{a1(1-qn)}{1-q}$ 代入 S_n , S_{n+2} , S_{n+1} ,再根据**对数函数**的单调性得证.

2. 一个球从 100 米高处自由落下,每次着地后又跳回至原高度的一半落下,当它第 10 次着地时,共经过了多少米? (精确到 1 米)

X【错解】

因球每次着地后又跳回至原高度的一半,从而每次着地之间经过的路程形成了一公比为

1/2 的等比数列,又第一次着地时经过了 100 米,故当它第 10 次着地时,共经过的路程应为前 10 项之和。



$$S_{10} = \frac{100[1 - (\frac{1}{2})^{10}]}{1 - \frac{1}{2}} = 199 \text{ (*)}$$

【易错分析】

忽视了球落地一次的路程有往有返的情况.



球第一次着地时经过了 100 米,从这时到球第二次着地时,一上一下共经过了 $2 \times \frac{100}{2}$

= 100 (米) ...因此到球第 10 次着地时共经过的路程为

$$100 + 100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{2^2} + \frac{100}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^8}$$

$$100 + \frac{100[1 - (\frac{1}{2})^{9}]}{1 - \frac{1}{2}} \approx 300 \text{ (**)}$$

答: 共经过 300 米。

【解析】

第 n 次球从最高点到着地点的距离是 an,数列{an}是首项为 100,公比为 1/2

的等比数列,由于球弹起又落下,则球经过的路程是 2S10-100.

【知识导学】

- ullet 当 $\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$ (\mathbf{m} 、 \mathbf{n} 、 \mathbf{p} 、 $\mathbf{q}\in ^{N_{+}}$) 时,对等差数列 {an} 有: $\mathbf{a}_{\mathbf{m}}+\mathbf{a}_{\mathbf{n}}=\mathbf{a}_{\mathbf{p}}+\mathbf{a}_{\mathbf{q}}$; 对等比数列 {an} 有: $\mathbf{a}_{\mathbf{m}}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}=\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\mathbf{a}_{\mathbf{q}}$;
- 🖶 若{an}、{bn}是**等差**数列,则{**ka_n+bb_n}(k、b 是非零常数)是等差数列**;若{an}、{bn}



- 是等比数列,则 {kan} 、{anbn}等也是等比数列;
- 对等差数列 {an},当项数为 2n 时, S 偶-S 奇 = nd; 项数为 2n 1 时, S 奇 S 偶 = a_{\pm} (n \in $^{N+}$);
- 若一阶线性递推数列 $a_n=ka_n-1+b$ $(k\neq 0, k\neq 1)$,则总可以将其改写变形成如下形

式:
$$a_n + \frac{b}{k-1} = k(a_{n-1} + \frac{b}{k-1})$$
 (n \geq 2),于是可依据等比数列的定义求出其通项公式。

易错题型二:不等式

(一) 不等式的解法

【典型例题】

- 1. 已如果 kx²+2kx (k+2)<0 恒成立,则实数 k 的取值范围是(
- A. -1≤k≤0 B. -1≤k<0 C. -1<k≤0 D. -1<k<0

່★【错解】

自题意:
$$\begin{cases} k < 0 \\ (2k)^2 - 4k \cdot [-(k+2)] < 0 \end{cases}$$

解得: -1<k<0

【易错分析】

将 $kx^2+2kx-(k+2)<0$ 看成了一定是一元二次不等式,忽略了 k=0 的情况。

✓【正确答案】

当 k = 0 时,原不等式等价于 - 2 < 0,显然恒成立, ∴ k = 0 符合题意.

当
$$k \neq 0$$
 时,由题意:
$$\begin{cases} k < 0 \\ (2k)^2 - 4k \cdot [-(k+2)] < 0 \end{cases}$$

解得: -1<k<0

 $\therefore -1 < k \le 0$,故选 C

2. 命题 A:|x-1| < 3,命题 B:(x+2)(x+a) < 0,若 A 是 B 的充分不必要条件,则 a 的取值范围是()

A.
$$(4,+\infty)$$
 B. $[4,+\infty)$ C. $(-\infty,-4)$ D. $(-\infty,-4]$

່★【错解】

由 | x - 1 | < 3 得: - 2 < x < 4,

又由 (x+2) (x+a)=0 得 x=-2 或 x=-a,

A 是 B 的充分不必要条件

$$\therefore \{x | -2 < x < 4\} \subset \{x | -2 < x < -a\}$$

∴ - a>4 故选 D。

【易错分析】

忽略了 a = -4 时, $\{x \mid -2 < x < 4\} = \{x \mid -2 < x < -a\}$,此时 $A \neq B$ 的充要条件,不是充分不必要条件。

✓【正确答案】

由 | x - 1 | < 3 得: - 2 < x < 4,

又由 (x+2) (x+a)=0 得 x=-2 或 x=-a,

: A 是 B 的充分不必要条件,

$$\therefore \{x | -2 < x < 4\} \subset \{x | -2 < x < -a\}$$

∴ - a>4 故选 C。

【解析】

解不等式我们可以求出命题 A 与命题 B 中 x 的取值范围,然后根据"谁小谁充分,谁

大谁必要"的原则,结合 A 是 B 的充分不必要条件,则 A GB , 将问题转化为一个集合关系

问题, 分析参数 a 的取值后, 即可得到结论。

【知识导学】

$$x > \frac{b}{a}$$
 (1)当 a>0 时,解为

$$x < \frac{b}{a}$$
 (2)当 a < 0 时,解为

(3)当 a=0, b≥0 时无解; 当 a=0, b<0 时, 解为 R。

且 x1 < x2

类型 解集	ax ² +bx+c > 0	ax²+bx+c≥0	ax²+bx+c<0	ax²+bx+c≤0
Δ > 0	{x x < x1 或 x > x2}	{x x≤x1或x≥x2}	$\{x \mid x1 < x < x2^{\}}$	{x x1≤x≤x2}
Δ = 0	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}, x \in R\}$	R	Ф	$\{x \mid x=-\frac{b}{2a}\}$
Δ < 0	R	R	Ф	Ф

- 简单的一元高次不等式: 可用区间法(或称根轴法)求解, 其步骤是:
 - ①将 f(x)的最高次项的系数化为正数;
 - ②将 f(x)分解为若干个一次因式的积;
 - ③将每一个一次因式的根标在数轴上,从右上方依次通过每一点画曲线;
 - ④根据曲线显示出的 f(x)值的符号变化规律,写出不等式的解集。

$$f(x)$$
 $f(x)$

f(x) f(x) g(x) g(x)

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \stackrel{\text{iff}}{\Rightarrow} f(x) \cdot g(x) > 0$$

然后用"根轴法"或化为不等式组求解。

(二) 简单的线性规划

【典型例题】

1. 已知 1≤x - y≤2,且 2≤x+y≤4,求 4x - 2y 的范围.

X【错解】

由于 1≤x-y≤2 ①,

$$2 \le x + y \le 4$$
 ②

【易错分析】

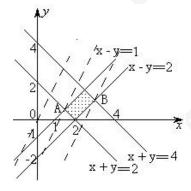
本题在计算过程中, 错将可行域范围扩大了。

✓【正确答案】

$$\begin{cases} 1 \le x - y \le 2 \\ 2 \le x + y \le 4 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow z = 4x - 2y$

画出可行域如右图所示,



$$\begin{cases} x-y=1 \\ a \end{cases}$$
 由 $\begin{cases} x+y=2 \end{cases}$ 得 A 点坐标(1.5, 0.5)此时 $z=4\times1.5-2\times0.5=5$.

$$\begin{cases} x-y=2 \\ \pm \end{cases}$$
 由 $\begin{cases} x+y=4 \\ 4 \end{cases}$ 得 B 点坐标(3,1)此时 $z=4\times3-2\times1=10$.

$$\therefore \quad 5 \le 4x - 2y \le 10$$

【解析】

作出不等式组对应的平面区域,利用目标函数的几何意义,利用平移法进行求解即可

2. 已知
$$\begin{cases} 7x - 5y - 23 \le 0 \\ x + 7y - 11 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
,求 $x^2 + y^2$ 的最值。

X【错解】

$$\begin{cases} 7x-5y-23 \leq 0 \\ x+7y-11 \leq 0 \end{cases}$$
不等式组 表示的平面区域如右图所示 Δ ABC 的内部(包括边界),

$$\Leftrightarrow z = x^2 + y^2$$

由
$$\begin{cases} 7x - 5y - 23 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
 得 A 点坐标(4, 1),

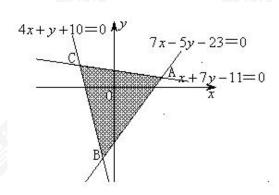
此时
$$z = x^2 + y^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$
,

由
$$\begin{cases} 7x - 5y - 23 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
 得 B 点坐标 $(-1, -6)$,

此时
$$z = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-6)^2 = 37$$
,

由
$$\begin{cases} x + 7y - 11 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
得 C 点坐标 (-3, 2),

此时
$$z = x^2 + y^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$$
,



$$\therefore \quad \exists \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases} \text{ 时 } x^2 + y^2$$
 取得最大值 37,当
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 时 } x^2 + y^2$$
 取得最小值 13。

【易错分析】

误将求可行域内的点到原点的距离的平方的最值误认为是求三点 A、B、C 到原点的距 离的平方的最值。

✓【正确答案】

不等式组
$$\begin{cases} 7x-5y-23 \leq 0 \\ x+7y-11 \leq 0 \end{cases}$$
 表示的平面区域如图所示 Δ ABC 的内部(包括边界),
$$4x+y+10 \geq 0$$

令 $z=x^2+y^2$,则 z 即为点 (x, y) 到原点的距离的平方。

由
$$\begin{cases} 7x - 5y - 23 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
 得 A 点坐标(4, 1),

此时
$$z = x^2 + y^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$
,

由
$$\begin{cases} 7x - 5y - 23 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
 得 B 点坐标 $(-1, -6)$,

此时
$$z = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-6)^2 = 37$$
,

由
$$\begin{cases} x + 7y - 11 \le 0 \\ 4x + y + 10 \ge 0 \end{cases}$$
 得 C 点坐标 (- 3, 2) ,

此时
$$z = x^2 + y^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$$
,

而在原点处,
$$\begin{cases} x=0\\ y=0 \end{cases}$$
 此时 $z=x^2+y^2=0^2+0^2=0$,
$$\therefore \exists \begin{cases} x=-1\\ y=-6 \end{cases}$$
 时 x^2+y^2 取得最大值 37, 当
$$\begin{cases} x=0\\ y=0 \end{cases}$$
 时 x^2+y^2 取得最小值 0。

【解析】

本题主要考查线性规划的基本应用,利用目标函数的几何意义是解决问题的

关键,利用数形结合是解决问题的基本方法。作出不等式组对应的平面区域,

利用目标函数的几何意义,进行求最值即可。

【知识导学】

- 📥 目标函数: P = 2 x + y 是一个含有两个变 量 x 和 y 的 函数,称为目标函数.
- ➡ 可行域:约束条件所表示的平面区域称为可行域。
- 整点:坐标为整数的点叫做整点。



- ◆ 线性规划问题:求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题,通常称为 线性规划问题.只含有两个变量的简单线性规划问题可用图解法来解决。
- → 整数线性规划:要求量取整数的线性规划称为整数线性规划。

(三) 基本不等式的证明

【典型例题】

1. 已知: a>0, b>0, a+b=1, $\bar{x}(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值。

X【错解】

$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4 \ge 2ab + \frac{2}{ab} + 4 \ge 4\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{ab} + 4 = 8,$$

$$\therefore (a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \text{ 的最小值是 8.}$$

【易错分析】

上面的解答中,两次用到了基本不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$,第一次等号成立的条件是 $a=b=\frac{1}{2}$,第二次等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{ab}$,显然,这两个条件是**不能同时成立**的.因此,8 不是最小值。

/【正确答案】

原式=
$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4=(a^2+b^2)+(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})+4=[(a+b)^2-2ab]+[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2-\frac{2}{ab}]+4=(1-2ab)(1+\frac{1}{a^2b^2})+4,$$

曲 ab≤
$$(\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}$$
 得: 1 - 2ab≥1 - $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 且 $\frac{1}{a^2b^2}$ ≥16, 1+ $\frac{1}{a^2b^2}$ ≥17,
∴原式≥ $\frac{1}{2}$ ×17+4= $\frac{25}{2}$ (当且仅当 a=b= $\frac{1}{2}$ 时,等号成立),

∴
$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2$$
 的最小值是 $\frac{25}{2}$.

2. 当 a、b 为两个不相等的正实数时,下列各式中最小的是(

A.
$$\frac{a+b}{2}$$

$$\mathsf{B.}\,\sqrt{ab}$$

C.
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

A.
$$\frac{a+b}{2}$$
 B. \sqrt{ab} C. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ D. $(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2})^{-1}$

X【错解】

$$\frac{a+b}{2}$$
 、 \sqrt{ab} 、 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 中很容易确定 \sqrt{ab} 最小,所以选 B。

【易错分析】

事实上三者中最小者,并不一定是四者中最小者,要得到正确的结论,就需要全面比较,

不可遗漏
$$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}$$
 与前三者的大小比较。



【正确答案】

由均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 及 $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \geq 2a\mathbf{b}$,可知选项 A、B、C 中, \sqrt{ab} 最小,而 $(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2})^{-1} = \frac{2ab}{a+b}$,由当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ 时, $\mathbf{a} + \mathbf{b} > 2\sqrt{ab}$,两端同乘以 \sqrt{ab} ,可得 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \sqrt{ab}$ $\mathbf{a} > 2a\mathbf{b}$,∴ $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$,因此选 D。

【解析】

本题主要考查了基本**不等式的大小比较以及特值法**的应用,在时间限制的情况下考试可应用**特值法**进行作答。

【知识导学】

- ★ 比较法: 比较法是证明不等式的最基本、最重要的方法之一,它是两个实数大小顺序和运算性质的直接应用,比较法可分为差值比较法(简称为求差法)和商值比较法(简称为求商法)。
- **差值比较法**的理论依据是不等式的基本性质: "a-b≥0 ⇔ a≥b; a-b≤0 ⇔ a≤b; b".其一般步骤为:
 - ①作差:考察不等式左右两边构成的差式,将其看作一个整体;
 - ②**变形**: 把不等式两边的差进行变形,或变形为一个常数,或变形为若干个因式的积,或变形为一个或几个平方的和等等,其中变形是求差法的关键,配方和因式分解是经常使用的变形手段;
 - ③判断:根据已知条件与上述变形结果,判断不等式两边差的正负号,最后肯定所求证



不等式成立的结论.应用范围: 当被证的不等式两端是多项式、分式或对数式时一般使用差值比较法。

①作商:将左右两端作商;

②变形: 化简商式到最简形式;

- ③判断商与 1 的大小关系,就是判定商大于 1 或小于 1.应用范围: 当被证的不等式两端含有幂、指数式时,一般使用商值比较法.
- → 综合法: 利用已知事实(已知条件、重要不等式或已证明的不等式)作为基础,借助不等式的性质和有关定理,经过逐步的逻辑推理,最后推出所要证明的不等式,其特点和思路是"由因导果",从"已知"看"需知",逐步推出"结论".即从已知A逐步推演不等式成立的必要条件从而得出结论 B。
- → 分析法:是指从需证的不等式出发,分析这个不等式成立的充分条件,进而转化为判定那个条件是否具备,其特点和思路是"执果索因",即从"未知"看"需知",逐步靠拢"已知".用分析法证明书写的模式是:为了证明命题 B 成立,只需证明命题 B 1 为真,从而有...,这只需证明 B 2 为真,从而又有...,这只需证明 A 为真,而已知 A 为真,故 B 必为真.这种证题模式告诉我们,分析法证题是步步寻求上一步成立的充分条件。
- ↓ 反证法:有些不等式的证明,从正面证不好说清楚,可以从正难则反的角度考虑,即要证明不等式A>B,先假设A≤B,由题设及其它性质,推出矛盾,从而肯定A>B.凡涉及到的证明不等式为否定命题、惟一性命题或含有"至多"、"至少"、"不存在"、"不可能"等词语时,可以考虑用反证法。

- ★ 換元法: 换元法是对一些结构比较复杂,变量较多,变量之间的关系不甚明了的不等式可引入一个或多个变量进行代换,以便简化原有的结构或实现某种转化与变通,给证明带来新的启迪和方法.主要有两种换元形式。
 - (1)**三角代換法**: 多用于条件不等式的证明, 当所给条件较复杂, 一个变量不易用另一个变量表示, 这时可考虑三角代换, 将两个变量都有同一个参数表示.此法如果运用恰当, 可沟通三角与代数的联系, 将复杂的代数问题转化为三角问题;
 - (2)增量換元法:在对称式(任意交换两个字母,代数式不变)和给定字母顺序(如 a > b > c 等)的不等式,考虑用增量法进行换元,其目的是通过换元达到减元,使问题化难为易,化繁为简.如 a + b = 1,可以用 a = 1-t, b = t 或 a = 1/2+t, b = 1/2-t 进行换元。

易错题型三:三角函数

(一) 任意角三角函数

【典型例题】

- ①. $\sin A < \sin C$ ②. $\cot A < \cot C$ ③. $\tan A < \tan C$ ④. $\cos A < \cos C$
- A. 1 B.2 C.3 D.4

X【错解】

:: A < C $:: \sin A < \sin C$, $\tan A < \tan C$ 故选 B



【易错分析】

三角形中大角对大边定理不熟悉,对函数单调性理解不到位导致应用错误。

✓【正确答案】

法 1: A < C 在 $\triangle ABC$ 中,在大角对大边,C > a, $\sin C > \sin A$

法 2: 考虑特殊情形, A 为锐角, C 为钝角, 故排除 B、C、D, 所以选 A.

【解析】

当角 C 是锐角时,根据正弦函数在第一象限单增的性质,一定成立,当角 C 是钝角时,因为 三角形内角和的限制,角 C 与π的差别一定大于角 A 与 0 的差别,仍有 C 的正弦值大于 A 的正弦值.

2. 已知 α , β 角的终边关于 γ 轴对称,则 α 与 β 的关系为______

X【错解】

$$:: \alpha, \beta$$
 角的终边关于 y 轴对称, $:: \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in z)$

【易错分析】

把关于y轴对称片认为关于y轴的正半轴对称。

✓【正确答案】

 $:: \alpha, \beta$ 角的终边关于y 轴对称

$$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \boxtimes \alpha + \beta = \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

说明: (1) 若 α , β 角的终边**关于 x 轴对**称,则 α 与 β 的关系为 α + β = $2k\pi$, $(k \in Z)$

(2) 若 α , β 角的终边**关于原点轴对**称,则 α 与 β 的关系为 $\alpha = \beta + (2k+1)\pi, (k \in Z)$

(3) 若 α , β 角的终边**在同一条直线上**,则 α 与 β 的关系为 $\beta = \alpha + k\pi$, $(k \in Z)$

【知识导学】

- ♣ 角:角可以看成由一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的几何图形.角的三要素是:顶点、始边、终边.角可以任意大小,按旋转的方向分类有正角、负角、零角。
- **弧度制**: 任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$,其中 l 是以 α 作为圆心角时所对圆弧的长,r 为圆的半径.规定:正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零.用"弧度"做单位来度量角的制度叫做弧度制。
- **↓** 弧 度 与 角 度 的 换 算 : $360^{\circ} = 2\pi rad$; $1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 0.1745 rad$; $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.30^{\circ}.$ 用弧度为单位表示角的大小时,弧度 (rad) 可以省略不写. $\mathbb{E}\left(\frac{\pi}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.30^{\circ}.$
- **弧长公式、扇形面积公式**: $l=|\alpha|r$, $S_{\mbox{\tiny BR}}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$,其中1为弧长,r为圆的半径.圆的周长、面积公式是弧长公式和扇形面积公式中当 $|\alpha|=2\pi$ 时的情形。
- 任意角的三角函数定义:设 α 是一个任意大小的角,角 α 终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y),它与原点的距离是 r(r>0) ,那么角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余 割分别是 $\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x},\cot\alpha=\frac{x}{y},\sec\alpha=\frac{r}{x},\csc\alpha=\frac{r}{y}$.这六个 函数统称为三角函数。

▲ 三角函数的定义域

三角函数	定义域
$y = \sin x$	R

$y = \cos x$	R
$y = \tan x$	$\left\{ x \middle x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$
$y = \cot x$	$\{x x \neq k\pi, k \in Z\}$
$y = \sec x$	$\left\{ x \middle x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$
$y = \csc x$	$\{x x\neq k\pi, k\in Z\}$

三角函数值的符号:各三角函数值在第个象限的符号如图所示(各象限注明的函数为正,

其余为负值)可以简记为"一全、二正、三切、四余"为正。

易错题型一:导数及其应用

(一) 导数及其运算

【典型例题】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+1)(x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x+1)(x > 1) \end{cases}$ 判断 f(x)在 x=1 处是否可导?

X【错解】

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}[(1 + \Delta x)^2 + 1] - \frac{1}{2}(1^2 + 1)}{\Delta x} = 1, \therefore f'(1) = 1.$$

【易错分析】

分段函数在"分界点"处的导数,须根据定义来判断是否可导。

✓【正确答案】

$$\lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{\frac{1}{2} [(1 + \Delta x)^{2} + 1] - \frac{1}{2} (1^{2} + 1)}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\frac{1}{2} (1 + \Delta x + 1) - \frac{1}{2} (1^{2} + 1)}{\Delta x} = \frac{1}{2},$$



∴ f(x)在 x=1 处不可导.

注: $\Delta x \to 0^+$, 指 Δx 逐渐减小趋近于 0; $\Delta x \to 0^-$, 指 Δx 逐渐增大趋近于 0。

【解析】

函数在某一点的导数,是一个极限值,即
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
 , $\triangle x \to 0$, 包括

 $\Delta x \to 0^+$,与 $\Delta x \to 0^-$,因此,在判定分段函数在"分界点"处的导数是否存在时,要验证其左、右极限是否存在且相等,如果都存在且相等,才能判定这点存在导数,否则不存在导数。

2. 求 $y = 2x^2 + 3$ 在点 P(1,5)和 Q(2,9) 处的切线方程。

X【错解】

y = 4x + 1

【易错分析】

直接将P,Q看作曲线上的点用导数求解。

✓【正确答案】

$$y = 2x^2 + 3, \therefore y' = 4x. \therefore y'|_{x=1} = 4$$

即过点 P 的切线的斜率为 4, 故切线为: y = 4x + 1.

设过点 Q 的切线的切点为 $T(x_0,y_0)$,则切线的斜率为 $4x_0$,又 $k_{PQ}=\frac{y_0-9}{x_0-2}$,

故
$$\frac{2x_0^2 - 6}{x_0 - 2} = 4x_0$$
, $\therefore 2x_0^2 - 8x_0 + 6 = 0$. $\therefore x_0 = 1.3$.

即切线QT的斜率为 4 或 12,从而过点Q的切线为:

$$y = 4x - 1, y = 12x - 15$$



【解析】

点 P 在函数的曲线上,因此过点 P 的切线的斜率就是 y' 在 x=1 处的函数值;点 Q 不 **在函数曲线上**,因此不能够直接用导数求值,要通过**设切点**的方法求切线,要注意所给 的点是否是切点.若是,可以直接采用求导数的方法求;不是则需设出切点坐标.=。

【知识导学】

- 瞬时变化率: 设函数 y=f(x)在 x_0 附近有定义,当自变量在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时,函数值相应地改变 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$,如果当 Δx 趋近于 0 时,平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 c (也就是说平均变化率与某个常数 c 的差的绝对值越来越小,可以小于任意小的正数),那么常数 c 称为函数 f(x) 在点 x_0 的瞬时变化率。
- **导数**: 当 Δx 趋近于零时, $\frac{f(x_0 + \Delta x) f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于常数 c。可用符号 " \rightarrow " 记作: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x_0 + \Delta x) f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow c$ 或记作 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) f(x_0)}{\Delta x} = c$,符号 " \rightarrow " 读作 "趋近于"。函数在 x_0 的瞬时变化率,通常称作 f(x) 在 $x = x_0$ 处的导数,并记作 $f'(x_0)$ 。
- 导函数: 如果 f(x) 在开区间 (a,b) 内每一点 x 都是可导的,则称 f(x) 在区间 (a,b) 可导。这样,对开区间 (a,b) 内每个值 x ,都对应一个确定的导数 f'(x) 。于是,在区间

(a,b)内,f'(x)构成一个新的函数,我们把这个函数称为函数 y=f(x)的导函数。记为 f'(x) 或 y' (或 y'_x)。

♣ 导数的四则运算法则:

- (1) 函数和 (或差) 的求导法则: 设 f(x), g(x)是可导的,则 $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ 即,两个函数的和 (或差)的导数,等于这两个函数的导数的和(或差)。
- (2) 函数积的求导法则:设 f(x), g(x)是可导的,则 [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)即,两个函数的积的导数,等于第一个函数的导数乘上第二个函数,加上第一个函数乘第二个函数的导数。
- **▲ 函数的商的求导法则**:设 f(x), g(x) 是可导的, $g(x) \neq 0$, 则

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

复合函数的导数:设函数 $u=\psi(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x=\psi'(x)$,函数 y=f(u) 在点 x 的对应点 u 处有导数 $y'_u=f'(u)$,则复合函数 $y=f\left[\psi(x)\right]$ 在点 x 处有导数,且 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

▲ 几种常见函数的导数:

$$(1)$$
 $C' = 0$ $(C$ 为常数)

$$(2)(x^n)' = nx^{n-1}(n \in Q)$$

$$(3)(\sin x)' = \cos x$$

$$(4)(\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(6)
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(7)(e^x)'=e^x$$

$$(8) (a^x)' = a^x \ln a$$

(二) 导数的应用

【典型例题】

1. 已知曲线 $S: y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x$ 及点 P(0,0) , 求过点 P 的曲线 S 的切线方程

X【错解】

 $y'=-2x^2+2x+4$, .: 过点 P 的切线斜率 $k=y'\big|_{x=0}=4$, .: 过点 P 的曲线 S 的切线 方程为 y=4x

【易错分析】

曲线在某点处的切线斜率是该曲线对应的函数在该点处的导数值,这是导数的几何意义。 在此题中,点P凑巧在曲线S上,求过点P的切线方程,却并非说切点就是点P,上述解法对求过点P的切线方程和求曲线在点P处的切线方程,认识不到位,发生了混淆。

✔【正确答案】

设过点P的切线与曲线S切于点 $Q(x_0,y_0)$,则过点P的曲线S的切线斜率

曲线 S上,

$$\therefore y_0 = -\frac{2}{3}x_0^3 + x_0^2 + 4x_0.②, ②代入①得 - 2x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{-\frac{2}{3}x_0^3 + x_0^2 + 4x_0}{x_0}$$

化简,得 $\frac{4}{3}x_0^3-x_0^2=0$, $\therefore x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{4}$.若 $x_0=0$,则 k=4 ,过点 P 的切线 方程为 y=4x ;若 $x_0=\frac{3}{4}$,则 $k=\frac{35}{8}$,过点 P 的切线方程为 $y=\frac{35}{8}x$. ∴过点 P 的曲线 S 的切线方程为 y=4x 或 $y=\frac{35}{8}x$.

【解析】

导 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线数 y=f(x) 在某点 x_0 处切线的斜率. 所以求切线的方程可通过**求导数先得到斜率**, 再由切点利用**点斜式方程**得到, 求过点



 $p(x_0, y_0)$ 的切线方程时,一要注意 $p(x_0, y_0)$ **是否在曲线上**,二要注意 该点可能是切点,也可能不是切点,因而所求的切线方程可能**不只有1条。**

2. 已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$ 在 R 上是减函数,求 a 的取值范围。

X【错解】

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$$
, :: $f(x)$ 在 R 上是减函数, :: $f'(x) < 0$ 在 R 上恒成立,

$$\therefore 3ax^2 + 6x - 1 < 0$$
 对一切 $x \in R$ 恒成立, $\therefore \Delta < 0$,即 $36 + 12a < 0$, $\therefore a < -3$.

【易错分析】

在导数恒成立问题上,当函数是单调函数时,不能忘记f(x) = 0的情况。

✓【正确答案】

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$$
, : $f(x)$ 在 R 上是减函数,

 $\therefore f'(x) \leq 0$ 在 R 上恒成立,

 $\therefore \Delta \le 0 \coprod a < 0$, $\coprod 36 + 12a \le 0 \coprod a < 0$, $\therefore a \le -3$.

【解析】

由先求函数 f(x)的导数,然后令导函数小于 0 在 R上恒成立求出 a 的范围.

【知识导学】

★ 求可导函数 f(x) 极值的步骤:

- ①求导数 f'(x) 。求方程 f'(x) = 0的根.
- ②求方程 f'(x) = 0 的根.
- ③检验 f'(x) 在方程 f'(x) = 0 的根的左右的符号,如果在根的左侧附近为正,右侧附



近为负,那么函数 y = f(x) 在这个根处取得极大值;如果在根的右侧附近为正,左侧附近为负,那么函数 y = f(x) 在这个根处取得极小值。

函数的最大值和最小值

- (1) 设 y = f(x) 是定义在区间 [a,b] 上的函数, y = f(x) 在 (a,b) 内有导数,求函数 y = f(x) 在 [a,b] 上的最大值与最小值,可分两步进行。
- ①求y = f(x)在(a,b)内的极值。
- ②将 y = f(x) 在各极值点的极值与f(a)、f(b)比较,其中最大的一个为最大值,最小的一个为最小值。
- (2) 若函数 f(x) 在 [a,b] 上单调增加,则 f(a) 为函数的最小值, f(b) 为函数的最大值; 若函数 f(x) 在 [a,b] 上单调递减,则 f(a) 为函数的最大值, f(b) 为函数的最小值。

(三) 定积分与微积分基本定理

【典型例题】

1. 求曲线 $y = \sin x$ 与 x 轴在区间 $[0,2\pi]$ 上所围成阴影部分的面积 S.

X【错解】

分两部分,在 $[0,\pi]$ $\int_0^\pi \sin x dx = 2$,在 $[\pi,2\pi]$ $\int_\pi^{2\pi} \sin x = -2$,因此所求面积 S 为 2+(-2)=0。

【易错分析】

面积应为各部分积分的代数和,也就是第二部分的积分不是阴影部分的面积,而是面积的相反数。所以不应该将两部分直接相加。

✓【正确答案】

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = 2 + 2 = 4$$

【解析】

由积分的几何意义可得, $S=2\int_0^\pi \sin x \, dx$,即可得出结论.

【知识导学】

- 可微: 若函数 y = f(x) 在 x_0 的增量 Δx 可以表示为 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ (A 是常数) 与较 Δx 高阶的无穷小量之和: $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ (1),则称函数 f 在点 x_0 可微,(1)中的 $A\Delta x$ 称为函数 f 在点 x_0 的微分,记作 $dy|x = x_0 = A\Delta x$ 或 $df(x)|x = x_0 = A\Delta x$ 。 函数 f(x) 在点 x_0 可微的充要条件是函数 f(x) 在 x_0 可以的充要条件是函数 f(x) 为 f(x) 和 等于 $f'(x_0)$ 在 f(x) 和 是 的 f(x) 和 是 f(x) 和 是

易错题型二:平面向量与空间向量

(一) 不等式的解法

【典型例题】

1. 已知 A (2, 1) , B (3, 2) , C (-1, 4) , 若 A、B、C 是平行四边形的三个顶点, 求第

四个顶点 D 的坐标。

| 【错解】

设 D 的坐标为(x, y),则有 x-2=-1-3, y-1=4-2,即 x=-2, y=3。故所求 D 的坐标为 (-2, 3)。

【易错分析】

思维定势。习惯上,我们认为平行四边形的四个顶点是按照 ABCD 的顺序。其实,在这个题目中,根本就没有指出四边形 ABCD。因此,还需要分类讨论。

✓【正确答案】

设 D 的坐标为(x, y)

当四边形为**平行四边形 ABCD** 时,有 x-2=-1-3, y-1= 4-2 ,即 x= -2, y= 3。解得 D 的坐标为 (-2, 3);

当四边形为**平行四边形 ADBC** 时,有 x-2=3- (-1) , y-1= 2-4 ,即 x= 6,y= -1。

解得 D 的坐标为 (6, -1);

当四边形为平行四边形 ABDC 时,有 x-3=-1-2, y-2= 4-1 ,即 x= 0, y= 5。解得 D 的坐标为 (0, 5)。

故第四个顶点 D 的坐标为 (-2, 3) 或 (6, -1) 或 (0, 5) 。



2. 已知 P₁(3,2), P₂ (8, 3), 若点 P 在直线 P₁P₂上, 且满足|P₁P|=2|PP₂|, 求点 P 的坐标。

X【错解】

由 $|P_1P|=2|PP_2|$ 得,点 P 分 P_1P_2 所成的比为 2,代入定比分点坐标公式得 P ($\frac{19}{3}$, $\frac{8}{3}$)

【易错分析】

对于 $|P_1P|=2|PP_2|$ 这个等式,它所包含的不仅是点 P 为 P_1 , P_2 的**内分点**这一种情况,还有点 P 是 P_1 , P_2 的**外分点**。故须分情况讨论。

✓【正确答案】

当点 P 为 P₁, P₂ 的**内分点**时,P 分 P₁P₂所成的比为 2,此时解得 P $(\frac{19}{3}, \frac{8}{3})$; 当点 P 为 P₁, P₂ 的**外分点**时,P 分 P₁P₂所成的比为-2,此时解得 P (13, 4) 。 则所求点 P 的坐标为 $(\frac{19}{3}, \frac{8}{3})$ 或 (13, 4) 。

【解析】

在运用定比分点坐标公式时,要审清题意,注意内外分点的情况。也就是分类讨论的数学思想。

【知识导学】

- $\stackrel{\clubsuit}{=}$ 模 (长度): 向量 $\stackrel{\longrightarrow}{AB}$ 的大小,记作 $\stackrel{\longrightarrow}{AB}$ |。长度为 0 的向量称为零向量,长度等于 1 个单位长度的向量,叫做单位向量。
- 实数与向量的积的运算律:设λ、μ为实数,则

 $(1)\lambda(\mu\,\vec{a}\,)=(\lambda\mu)\,\vec{a}$

②
$$(\lambda + \mu)$$
 $\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$
③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

- **向量共线的充分条件**: 向量 \vec{b} 与非零向量 \vec{a} 共线的充要条件是有且只有一个**实数**λ,使 得 \vec{b} = λ \vec{a} 。另外,设 \vec{a} = (x₁,y₁), \vec{b} = (x₂,y₂),则 \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x₁y₂ x₂y₁=0
- 平面向量基本定理: 如果 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 是同一平面内的两个不共线向量,那么对于这一平面内的任一向量 \vec{a} ,有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$,其中不共线向量 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。
- ・ 运算律: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交換律) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{b} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- ▲ 平面向量垂直的坐标表示的充要条件:

设
$$\vec{a}=(\mathsf{x}_1\,,\mathsf{y}_1)$$
 , $\vec{b}=(\mathsf{x}_2,\mathsf{y}_2)$, 则
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\mathsf{cos}90^\circ=0$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2+\mathsf{y}_1\mathsf{y}_2=0$$



▲ 平移公式:

设 P(x, y) 是图形 F 上的任意一点,它在平移后图形 F' 上对应点为 P'(x', y') ,且 设 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h, k) ,则由 $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}$,得: (x', y') = (x, y) + (h, k)

(二) 平面向量与代数、几何的综合应用

【典型例题】

2. 在 \triangle ABC 中,已知 $a \cos A = b \cos B$,试判别其形状。

X【错解】

等腰三角形。

【易错分析】

忽视了两角互补,正弦值也相等的情形。直接由 $a\cos A = b\cos B$ 得, $\sin A\cos A = \sin B\cos B$,即 $\sin 2A = \sin 2B$,则 2A = 2B。接着下结论,所求三角形为等腰三角形。

✓【正确答案】

由 $a\cos A = b\cos B$ 得, $\sin A\cos A = \sin B\cos B$,即 $\sin 2A = \sin 2B$ 则 2A = 2B或 $2A + 2B = 180^0$,故三角形为直角三角形或等腰三角形。

2. 在 ΔABC 中 $\angle C=30^\circ$, $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,试求 ΔABC 周长的最大值。并判断此时三角形的形状。

່Ҳ【错解】

由于题目中出现了角和对边,故使用余弦定理,进一步想使用不等式或二次函数求最值

【易错分析】



其实这种思路从表面上看是可行的,实际上处理过程中回遇到无法进行下去的困难。



由正弦定理,得 $a=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin A$, $b=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin B$.

$$a+b=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sin A+\sin B)=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin \frac{A+B}{2}\cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin \frac{A+B}{2}=\sin 75^{\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$a+b=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{2}\cos \frac{A-B}{2}\leq (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{2}=8+4\sqrt{3}.$$

当 a=b 时,三角形周长最大,最大值为 $8+4\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$. 此时三角形为等腰三角形

【知识导学】

★ 余弦定理: 三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和,减去这两边与它们夹角的余弦的积的 2 倍,即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

▲ 正弦定理: 在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, 并且都等于外接圆的直

$$\frac{a}{\text{径, }} \text{ prior} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(三) 空间向量及其运算



【典型例题】

2. 设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 且 $\vec{a} \neq \vec{b}$, 记 $|\vec{a} - \vec{b}| = m$, 求 $\vec{a} - \vec{b}$ 与x 轴正方向的 夹角的余弦值。

X【错解】

取 x 轴上的任一向量 $\vec{c} = (x,0,0)$, 设所求夹角为 α ,

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \cdot (x, 0, 0) = (a_1 - b_1)x$$

$$\therefore \pm \cos \alpha = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{(a_1 - b_1)x}{mx} = \frac{a_1 - b_1}{m},$$

即余弦值为
$$\pm \frac{a_1-b_1}{m}$$

【易错分析】

审题不清。没有看清 "x轴正方向" , 并不是 x 轴

✓【正确答案】

取 x 轴正方向的任一向量 $\vec{c} = (x,0,0)$, 设所求夹角为 α ,

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \cdot (x, 0, 0) = (a_1 - b_1)x$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{(a_1 - b_1)x}{mx} = \frac{a_1 - b_1}{m}, \quad 即为所求•$$

【解析】

运用对应思想;分析法;平面向量及应用,根据平面向量数量积的定义,运算

性质,模长公式,夹角公式等知识进行判断。

2. 已知点 A(-3,-1,1), 点 B(-2,2,3), 在 Ox、Oy、Oz 轴上分别取点 L、M、N,使它们与 A、B 两点等距离。





无法对应出正确的 LMN 的未知点

【易错分析】

对于坐标轴上点的坐标特征不明;使用方程解题的思想意识不够。

✓【正确答案】

设 L、M、N 的坐标分别为(x, 0, 0)、(0, y, 0)、(0, 0, z).

由题意,得

$$(x+3)^2+1+1=(x+2)^2+4+9$$
,

$$9 + (y + 1)^2 + 1 = 4 + (y - 2)^2 + 9$$
,

$$9+1+(z-1)^2=4+4+(z-3)^2$$
.

分别解得
$$x = 3.y = 1, z = \frac{3}{2}$$
,

故
$$L(3,0,0), M(0,1,0), N(0,0,\frac{3}{2})$$

评注:空间两点的距离公式是平面内两点的距离公式的推广: 若点 P、Q 的坐标分别为

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),$$
则 P、Q 的距离为 $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

【解析】

设 Ox 轴上的点 L 的坐标为(x, 0, 0), 由题意可得关于 \mathbf{x} 的一元方程, 从而解得 \mathbf{x} 的

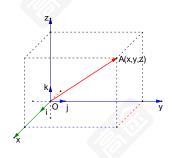
值. 类似可求得点 M、N 的坐标。

【知识导学】

→ 空间直角坐标系:

- (1) 若空间的一个基底的三个基向量互相垂直,且长为1,这个基底叫单位**正交基底**,用 $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 表示;
- (2) 在空间选定一点O和一个单位正交基底 $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$,以点O为原点,分别以 \vec{i},\vec{j},\vec{k} 的方向为正方向建立三条数轴:x 轴、y 轴、z 轴,它们都叫坐标轴.我们称建立了一个

空间直角坐标系 O-xyz ,点 O 叫原点,向量 \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} 都叫坐标向量 . 通过每两个坐标轴的平面叫坐标平面,分别称为 xOy 平面,yOz 平面,zOx 平面;



- 全间直角坐标系中的坐标: 在空间直角坐标系 O-xyz 中,对空间任一点 A ,存在唯一的有序实数组 (x,y,z) ,使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$,有序实数组 (x,y,z) 叫作向量 A 在空间直角坐标系 O-xyz 中的坐标,记作 A(x,y,z) , x 叫横坐标, y 叫纵坐标, z 叫竖坐标。
- ▲ 空间向量的直角坐标运算律:

(1) 若
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
,
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$
,
$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)(\lambda \in R)$$
,
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
,

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3 (\lambda \in R) ,$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

 模长公式: 若
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
 , 则 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

李角公式:
$$\cos\langle \vec{a} \cdot \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$
.

易错题型三: 立体几何

(一) 任意角三角函数

【典型例题】

- 1. 如图,已知在空间四边形 ABCD 中,E,F 分别是 AB,AD 的中点,G,H 分别是 BC,CD 上的
- 点,且 $\frac{BG}{GC} = \frac{DH}{HC} = 2$,求证:直线 EG,FH,AC 相交于一点。



证明: $:: E \setminus F$ 分别是 AB,AD 的中点,

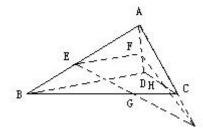
$$\therefore EF \parallel \mathsf{BD}_{\mathsf{r}}\mathsf{EF} = \frac{1}{2} \; \mathsf{BD}_{\mathsf{r}}$$

$$abla \frac{BG}{GC} = \frac{DH}{HC} = 2$$
,... GH || BD,GH = $\frac{1}{3}$ BD,

- ∴四边形 EFGH 是梯形,设两腰 EG,FH 相交于一点 T,
- $\therefore \frac{DH}{HC} = 2$, F 分别是 AD... AC 与 FH 交于一点.
- :. 直线 EG,FH,AC 相交于一点。

【易错分析】

对于公理未熟练掌握,如果两个平面有一个公共点,那么它们还有**其他公共点**,且所有 这些**公共点的集合**是一条过这个**公共点的直线**。



✓【正确答案】

证明: $: E \setminus F$ 分别是 AB,AD 的中点,

$$\therefore EF \qquad \text{||BD,EF} = \frac{1}{2} \text{ BD,}$$

$$abla \frac{BG}{GC} = \frac{DH}{HC} = 2,$$

∴ GH || BD,GH =
$$\frac{1}{3}$$
 BD,

- ∴四边形 EFGH 是梯形,设两腰 EG,FH 相交于一点 T,
- $:: EG \subset$ 平面 ABC,FH \subset 平面 ACD,
- ∴T∈面 ABC,且T∈面 ACD,又平面 ABC ∩ 平面 ACD=AC,
- $\therefore T \in AC$, \therefore 直线 EG,FH,AC 相交于一点 T.

【解析】

由题意连接 EF、HG、GE、FH、AC, 根据比例关系和中位线证明出四边形 EFHG

是梯形,则由公理二得到直线 EG, FH, AC 相交于同一点 P

- 2. 在正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁中,O 是底面 ABCD 的中心, M、N 分别是棱 DD₁、D₁C₁的中点,则直线 OM()。
- A.是 AC和 MN的公垂线. B.垂直于 AC但不垂直于 MN.
- C.垂直于 MN, 但不垂直于 AC. D.与 AC、MN 都不垂直.

| 【错解】

В

B₁ B₂

【易错分析】

找不出三垂线定理中的射影.





Α

【解析】

此题的条件使得建立空间坐标系方便,且选项中研究的位置关系也适合用空间向量来证明其垂直关系,故应先**建立坐标系**,设出边长,据**几何特征**,给出各点的坐标,**验证向量内积是否为零**

【知识导学】

- ★ 公理 1: 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内。
- ★ 公理 2: 如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的 集合是一条过这个公共点的直线。
- 曅 🗠 🛈 3:经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面。
 - 推论 1: 经过一条直线和这条直线外的一点, , 有且只有一个平面。
 - 推论 2: 经过两条相交直线,有且只有一个平面。
 - 推论 3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面。
- ★ 公理 4: 平行于同一条直线的两条直线平行。

定理:如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等。

推论:如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等。

◆ 空间两条直线的位置关系,包括:相交、平行、异面。





