FOI2023 " 简单" 数学

张志心

Zhejiang University

2023 年 7 月 14 日

写在前面

关于今天的上课大纲：
排列组合、卡特兰数、斐波那契数、快速幂、欧几里得算法同余式、线性筛、欧拉定理与欧拉函数、费马小定理

快速幂

若 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}, k_1 < k_2 < \cdots < k_m$;

快速幂

若 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}, k_1 < k_2 < \cdots < k_m$;
$x^n = \prod_{i=1}^{m} x^{2^{k_i}}$.

快速幂

若 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}, k_1 < k_2 < \cdots < k_m$；
$x^n = \prod_{i=1}^{m} x^{2^{k_i}}$.
把 x 不断变成 x^2，得到 x^{2^k} 的形式，把需要的项乘入答案中。

快速幂

直接看代码:

```
const int Mod = 1e9+7;
int Mul(int x, int y) {return (1ll * x * y) % Mod;}
int Add(int x, int y) {return (x + y) % Mod;}
int qpow(int x, long long y) {
    int ret = 1;
    for(;y;y>>=1, x=Mul(x,x))
        if(y&1) ret = Mul(ret, x);
    return ret;
}
```

加法原理和乘法原理

加法原理：
如果完成一件事有 n 个方法，第 i 种方法有 a_i 种方案完成，则总共有 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 种方案完成这件事。

加法原理和乘法原理

加法原理：
如果完成一件事有 n 个方法，第 i 种方法有 a_i 种方案完成，则总共有 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 种方案完成这件事。

乘法原理：
如果完成一件事有 n 个步骤，第 i 个步骤有 a_i 种方案完成，则总共有 $\prod_{i=1}^{n} a_i$ 种方案完成这件事。

全排列

- n 个不同的物品排成一列，求方案数。

全排列

- n 个不同的物品排成一列，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 n 个物品有 1 种方案。

全排列

- n 个不同的物品排成一列，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 n 个物品有 1 种方案。
- 因此，总方案数为 $n(n-1)\cdots 1 = n!$。

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \leq n$，求方案数。

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \leq n$，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 m 个物品有 $n-m+1$ 种方案。

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \le n$，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 m 个物品有 $n-m+1$ 种方案。
- 因此，总方案数为 $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \leq n$，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 m 个物品有 $n-m+1$ 种方案。
- 因此，总方案数为 $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
- 记该方案数为 P_n^m 或 A_n^m。

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \leq n$，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 m 个物品有 $n-m+1$ 种方案。
- 因此，总方案数为 $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
- 记该方案数为 P_n^m 或 A_n^m。
- 特别地，若 $m=n$，则排列方案数为 $P_n^n = n!$。

排列数

- n 个不同的物品，选出 m 个排成一列，$m \le n$，求方案数。
- 选出的第一个物品有 n 种方案，第二个物品有 $n-1$ 种方案……第 m 个物品有 $n-m+1$ 种方案。
- 因此，总方案数为 $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
- 记该方案数为 P_n^m 或 A_n^m。
- 特别地，若 $m=n$，则排列方案数为 $P_n^n = n!$。
- 例如 $P_5^3 = 5\times4\times3 = \dfrac{5!}{3!} = 60.$

组合数

- n 个不同的物品，选出 m 个，$m \leq n$，求方案数。**顺序不同的算作一种**。

组合数

- n 个不同的物品，选出 m 个，$m \leq n$，求方案数。**顺序不同的算作一种**。
- 因为顺序不同的算一种，所以方案数就是 $\dfrac{P_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。
- 记该方案数为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$。

组合数

- n 个不同的物品，选出 m 个，$m \le n$，求方案数。**顺序不同的算作一种**。
- 因为顺序不同的算一种，所以方案数就是 $\dfrac{P_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。
- 记该方案数为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$。
- 由于阶乘本身非常大，所以在遇到需要用排列数和组合数的问题时，一般会要求答案对某个大质数（指比题中条件大 2 个数量级以上）取模。此时我们预处理出阶乘和阶乘的逆元，即可 $O(1)$ 求出所有组合数。

组合数

- n 个不同的物品，选出 m 个，$m \le n$，求方案数。**顺序不同的算作一种**。
- 因为顺序不同的算一种，所以方案数就是 $\dfrac{P_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。
- 记该方案数为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$。
- 由于阶乘本身非常大，所以在遇到需要用排列数和组合数的问题时，一般会要求答案对某个大质数（指比题中条件大 2 个数量级以上）取模。此时我们预处理出阶乘和阶乘的逆元，即可 $O(1)$ 求出所有组合数。
- 例如 $\binom{7}{3} = \dfrac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35.$

组合数

- n 个不同的物品，选出 m 个，$m \le n$，求方案数。**顺序不同的算作一种**。
- 因为顺序不同的算一种，所以方案数就是 $\dfrac{P_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。
- 记该方案数为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$。
- 由于阶乘本身非常大，所以在遇到需要用排列数和组合数的问题时，一般会要求答案对某个大质数（指比题中条件大 2 个数量级以上）取模。此时我们预处理出阶乘和阶乘的逆元，即可 $O(1)$ 求出所有组合数。
- 例如 $\binom{7}{3} = \dfrac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35.$
- 因为阶乘逆元如果全部现算，复杂度会多一个 $\log$，这在 10^7 的范围下会超时。因此我们一般倒序求阶乘逆元，这样就只需求一遍 $n!$ 的逆元了。

求组合数代码

```
ll fac[N],inf[N];
void init(int n){
    fac[0]=1;
    for(int i=1;i<=n;++i)
        fac[i]=fac[i-1]*i%mod;
    inf[n]=inv(fac[n]);
    for(int i=n-1;~i;--i)
        inf[i]=inf[i+1]*(i+1) %mod;
}
ll C(int n,int m){
    return fac[n]*inf[m]%mod*inf[n-m]%mod;
}
```

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$
- 7 个人站成一排，A, B, C 不能相邻，求总方案数。

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$
- 7 个人站成一排，A, B, C 不能相邻，求总方案数。
  $4! \times P_5^3 = 24 \times 60 = 1440$

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$
- 7 个人站成一排，A, B, C 不能相邻，求总方案数。
  $4! \times P_5^3 = 24 \times 60 = 1440$
- 求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 的正整数解/非负整数解组数。

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$
- 7 个人站成一排，A, B, C 不能相邻，求总方案数。
  $4! \times P_5^3 = 24 \times 60 = 1440$
- 求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 的正整数解/非负整数解组数。
  算法一：$\binom{11}{3} = 165.$

$$\binom{11}{3} + \binom{4}{1}\binom{11}{2} + \binom{4}{2}\binom{11}{1} + \binom{4}{3}\binom{11}{0} = 165 + 220 + 66 + 4 = 455$$

捆绑，插空，分类

- 7 个人站成一排，其中 A, B, C 三个人必须站在一起，X, Y 两个人必须站在两侧，求总方案数。
  $2! \times 3! \times 3! = 72$
- 7 个人站成一排，A, B, C 不能相邻，求总方案数。
  $4! \times P_5^3 = 24 \times 60 = 1440$
- 求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 的正整数解/非负整数解组数。

  算法一：$\binom{11}{3} = 165.$

  $$\binom{11}{3} + \binom{4}{1}\binom{11}{2} + \binom{4}{2}\binom{11}{1} + \binom{4}{3}\binom{11}{0} = 165 + 220 + 66 + 4 = 455$$

  算法二：$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) = 16$

  $$\binom{15}{3} = 455$$

捆绑，插空，分类

- 8 个人报名节目，其中 3 个只会唱歌，3 个只会跳舞，2 个又会唱又会跳，选 4 个人参加演出，2 人唱歌 2 人跳舞，求方案数。

捆绑，插空，分类

- 8 个人报名节目，其中 3 个只会唱歌，3 个只会跳舞，2 个又会唱又会跳，选 4 个人参加演出，2 人唱歌 2 人跳舞，求方案数。

$$\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{5}{2}=3+36+30=69.$$

杨辉三角

- 这是组合数的前 9 行，从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{8}{8}$。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6		1	
		1		7		21		35		35		21		7		1	
	1		8		28		56		70		56		28		8		1

图 1: 杨辉三角

杨辉三角

- 这是组合数的前 9 行，从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{8}{8}$。
- 容易发现下面的数恰好是上面两个数的和，即

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

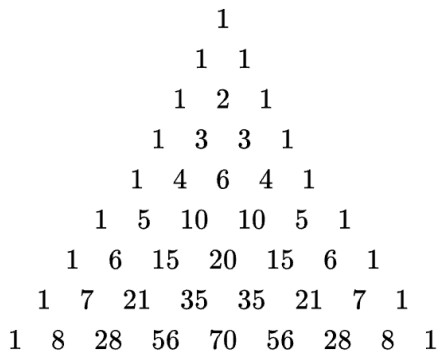


图 1: 杨辉三角

杨辉三角

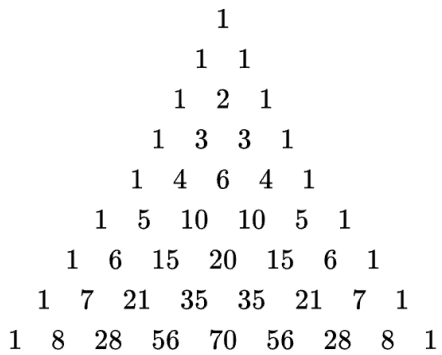


图 1: 杨辉三角

- 这是组合数的前 9 行，从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{8}{8}$。
- 容易发现下面的数恰好是上面两个数的和，即

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

- 考虑实际意义。如果最后一个物品选了，那么其余部分的方案数为 $\binom{n-1}{m-1}$；没选，其余部分方案数为 $\binom{n-1}{m}$。因此总方案数就是二者相加。

杨辉三角

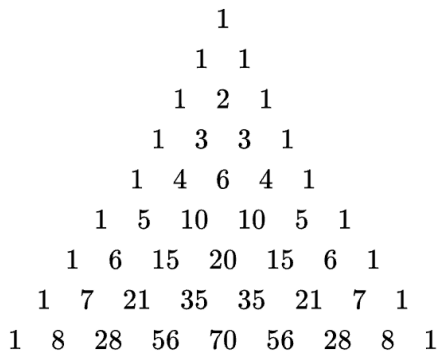


图 1: 杨辉三角

- 这是组合数的前 9 行，从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{8}{8}$。
- 容易发现下面的数恰好是上面两个数的和，即

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

- 考虑实际意义。如果最后一个物品选了，那么其余部分的方案数为 $\binom{n-1}{m-1}$；没选，其余部分方案数为 $\binom{n-1}{m}$。因此总方案数就是二者相加。
- 根据上面的递推公式，我们可以 $O(n^2)$ 求出所有的 $\binom{n}{m}$。

[NOIP2016] 组合数问题

求 $i \le n, j \le m, k \mid \binom{i}{j}$ 的 (i,j) 的数量，多组询问。

$n, m \le 2000, T \le 10^4$。

[NOIP2016] 组合数问题

求 $i \le n, j \le m, k \mid \binom{i}{j}$ 的 (i,j) 的数量，多组询问。

$n, m \le 2000, T \le 10^4$。

求出模 k 意义下的杨辉三角，然后二维前缀和即可。

圆排列

- n 个不同的物品排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

圆排列

- n 个不同的物品排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

$$(n-1)!$$

圆排列

- n 个不同的物品排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

$$(n-1)!$$

- n 个不同的物品选出 m 个排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

圆排列

- n 个不同的物品排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

$$(n-1)!$$

- n 个不同的物品选出 m 个排成一个环，旋转可得的算同一种方案，共有多少种方案?

$$\binom{n}{m}(m-1)! = P_n^m/m$$

可重集排列

- n 种物品，每种物品都有无穷多个，选出 m 个物品排成一列，求方案数。

可重集排列

- n 种物品，每种物品都有无穷多个，选出 m 个物品排成一列，求方案数。

$$n^m$$

可重集排列

- n 种物品，每种物品都有无穷多个，选出 m 个物品排成一列，求方案数。

$$n^m$$

可重集组合

- 等价于求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 非负整数解组数

可重集组合

- 等价于求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 非负整数解组数

$$\binom{n+m-1}{n-1}$$

可重集组合

- 等价于求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 非负整数解组数

$$\binom{n+m-1}{n-1}$$

- 如果每种物品都必须选择?

可重集组合

- 等价于求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 非负整数解组数

$$\binom{n+m-1}{n-1}$$

- 如果每种物品都必须选择?
  正整数解组数。

$$\binom{m-1}{n-1}$$

多重全排列

- n 种物品，第 i 种物品有 a_i 个，将所有物品排成一列，求方案数。

多重全排列

- n 种物品，第 i 种物品有 a_i 个，将所有物品排成一列，求方案数。

$$P(\sum_{i=1}^{n} a_i; a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)!}{\prod_{i=1}^{n} a_i!}$$

$$P(9; 2, 3, 4) = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260.$$

错排问题

- n 个球装入 n 个箱子，每个箱子装一个球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。

错排问题

- n 个球装入 n 个箱子，每个箱子装一个球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 n 号箱：$D(n-2)$。

错排问题

- n 个球装入 n 个箱子，每个箱子装一个球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 n 号箱：$D(n-2)$。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 j 号箱：把 i 号箱和 n 号球“扔掉”，n 号箱当做 i 号箱（因为限制了 i 号球不能装入 n 号箱），$D(n-1)$。

错排问题

- n 个球装入 n 个箱子，每个箱子装一个球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 n 号箱：$D(n-2)$。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 j 号箱：把 i 号箱和 n 号球“扔掉”，n 号箱当做 i 号箱（因为限制了 i 号球不能装入 n 号箱），$D(n-1)$。

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2)).$$

$$D(1) = 0, D(2) = 1, D(3) = 2, D(4) = 9, D(5) = 44, D(6) = 265 \cdots$$

错排问题

- n 个球装入 n 个箱子，每个箱子装一个球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 n 号箱：$D(n-2)$。
- n 号球装入 i 号箱，i 号球装入 j 号箱：把 i 号箱和 n 号球“扔掉”，n 号箱当做 i 号箱（因为限制了 i 号球不能装入 n 号箱），$D(n-1)$。

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2)).$$

$$D(1) = 0, D(2) = 1, D(3) = 2, D(4) = 9, D(5) = 44, D(6) = 265 \cdots$$

有多余元素的错排问题

- n 个球，n 个箱子，每个箱子装一个球，另有 m 个多余的球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。

有多余元素的错排问题

- n 个球，n 个箱子，每个箱子装一个球，另有 m 个多余的球。要求第 i 个球不能装入第 i 个箱子，求方案数。

$$D_m(n) = (n-1)(D_m(n-1) + D_m(n-2)) + mD_m(n-1).$$

$$D_m(n) = (n+m-1)D_m(n-1) + (n-1)D_m(n-2).$$

$$D_m(1) = m, D_m(2) = m^2 + m + 1$$

二项式定理

- 二项式就是形如 $(x+y)^n$ 的式子。它完全展开一共有 2^n 项。

二项式定理

- 二项式就是形如 $(x+y)^n$ 的式子。它完全展开一共有 2^n 项。
- 我们合并同类项时，考虑 $x^i y^{n-i}$ 有多少项。

二项式定理

- 二项式就是形如 $(x+y)^n$ 的式子。它完全展开一共有 2^n 项。
- 我们合并同类项时，考虑 $x^i y^{n-i}$ 有多少项。
- 在 n 个数中选 i 个填 x，$n-i$ 个填 y，因此有 $\binom{n}{i}$ 项。故

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

二项式定理

- 二项式就是形如 $(x+y)^n$ 的式子。它完全展开一共有 2^n 项。
- 我们合并同类项时，考虑 $x^i y^{n-i}$ 有多少项。
- 在 n 个数中选 i 个填 x，$n-i$ 个填 y，因此有 $\binom{n}{i}$ 项。故

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

- 例如 $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.
- 求 $(ax+by)^k$ 的 $x^n y^m$ 项系数?

二项式定理

- 二项式就是形如 $(x+y)^n$ 的式子。它完全展开一共有 2^n 项。
- 我们合并同类项时，考虑 $x^i y^{n-i}$ 有多少项。
- 在 n 个数中选 i 个填 x，$n-i$ 个填 y，因此有 $\binom{n}{i}$ 项。故

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

- 例如 $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.
- 求 $(ax+by)^k$ 的 $x^n y^m$ 项系数?

$$\binom{k}{n}\binom{k}{m} a^n b^m$$

多项式定理

- 二项式定理的扩展。

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i = n} P(n; a_1, a_2, \cdots, a_m) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

例如 $(x + y + z)^3 =$
$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x + 3zx^2 + 6xyz.$

容斥原理

- 设 S_1, S_2 为有限集，令 $|S|$ 表示 S 的大小，则

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$

容斥原理

- 设 S_1, S_2 为有限集，令 $|S|$ 表示 S 的大小，则

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$

- 设 S_1, S_2, S_3 为有限集，则

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

容斥原理

- 设 S_1, S_2 为有限集，令 $|S|$ 表示 S 的大小，则

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$

- 设 S_1, S_2, S_3 为有限集，则

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

- 一般地，设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为 n 个有限集，则

$$|\cup_{i=1}^{n} S_i| = \sum_{1 \le i \le n} |S_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^{n} S_i|$$

错排问题的容斥解法

- 下面让我们来重新看一下错排问题。
- n 个人排队，1 不能排在第一个，2 不能排在第二个，……n 不能排在第 n 个，

错排问题的容斥解法

- 下面让我们来重新看一下错排问题。
- n 个人排队，1 不能排在第一个，2 不能排在第二个，$\cdots\cdots n$ 不能排在第 n 个，

$$D(n) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$D(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{i!}$$

$$D_m(n) = P_{n+m}^n - \binom{n}{1} P_{n+m-1}^{n-1} + \binom{n}{2} P_{n+m-2}^{n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} P_m^0$$

例题-引入-第二类斯特林数

6 个人分成 A, B, C, D 四个小组，且每组都不能为空。求分组方案数。

例题-引入-第二类斯特林数

6 个人分成 A, B, C, D 四个小组，且每组都不能为空。求分组方案数。

$$4^6 - \binom{4}{1}3^6 + \binom{4}{2}2^6 - \binom{4}{3}1^6 = 4096 - 2916 + 384 - 4 = 1560.$$

如果四组相同?

例题-引入-第二类斯特林数

6 个人分成 A, B, C, D 四个小组，且每组都不能为空。求分组方案数。

$$4^6 - \binom{4}{1}3^6 + \binom{4}{2}2^6 - \binom{4}{3}1^6 = 4096 - 2916 + 384 - 4 = 1560.$$

如果四组相同?

$$\frac{1560}{4!} = 65.$$

第二类斯特林数

n 个物品划分成 m 组，每组不为空且每组相同时的方案数称为“第二类斯特林数”，记作 $S(n,m)$，例如 $S(6,4)=65$。

第二类斯特林数

n 个物品划分成 m 组，每组不为空且每组相同时的方案数称为“第二类斯特林数”，记作 $S(n,m)$，例如 $S(6,4)=65$。
递推：考虑最后一个人是新开还是加入老组。

第二类斯特林数

n 个物品划分成 m 组，每组不为空且每组相同时的方案数称为“第二类斯特林数”，记作 $S(n,m)$，例如 $S(6,4)=65$。
递推：考虑最后一个人是新开还是加入老组。

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$$

第二类斯特林数

n 个物品划分成 m 组，每组不为空且每组相同时的方案数称为“第二类斯特林数”，记作 $S(n,m)$，例如 $S(6,4)=65$。
递推：考虑最后一个人是新开还是加入老组。

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$$

容斥求通项：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

第二类斯特林数

n 个物品划分成 m 组，每组不为空且每组相同时的方案数称为“第二类斯特林数”，记作 $S(n,m)$，例如 $S(6,4)=65$。
递推：考虑最后一个人是新开还是加入老组。

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$$

容斥求通项：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

$O(n^2)$ 求出 $i\le n,j\le m$ 的所有 $S(i,j)$；
$O(n)$ 求出一项。

划分数

把正整数 n 划分为 m 个正整数的和，顺序不同的方案算同一种。

划分数

把正整数 n 划分为 m 个正整数的和，顺序不同的方案算同一种。

$$P(n,m)=P(n-1,m-1)+P(n-m,m),P(n,n)=1,P(n,1)=1$$

$O(n^2)$ DP。

盒子放球问题

n 个球，m 个盒子，求：
球相同/不相同，盒子相同/不相同，盒子可空/不可空的方案数。
$n, m \leq 2000$。

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子可空：可重集组合；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子不可空：划分数；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子不可空：划分数；
- 球不同，盒子相同，盒子不可空：第二类斯特林数；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子不可空：划分数；
- 球不同，盒子相同，盒子不可空：第二类斯特林数；
- 球不同，盒子不同，盒子不可空：第二类斯特林数；

盒子放球问题

- 球不同，盒子不同，盒子可空：可重集排列问题；
- 球相同，盒子不同，盒子不可空：可重集组合；
- 球相同，盒子不同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子可空：可重集组合；
- 球相同，盒子相同，盒子不可空：划分数；
- 球不同，盒子相同，盒子不可空：第二类斯特林数；
- 球不同，盒子不同，盒子不可空：第二类斯特林数；
- 球不同，盒子相同，盒子可空：第二类斯特林数

自然数幂和

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

自然数幂和

但是 $k \geq 4$ 时，我们就没有特别简便的公式了。

$$n^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} - (i-1)^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} i^j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k+1}{j} i^j$$

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j = n^{k+1}$$

设 $S_k = \sum_{i=1}^{n} i^k$，$S_k = \frac{1}{k+1}(n^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k+1}{j} S_j)$

初始：$S_0 = n$

Lucas 定理

$$\binom{n}{m} \mod p = \binom{n/p}{m/p}\binom{n\%p}{m\%p} \mod p$$

```
ll C(int n,int m){
    if(n<m)return 0;
    return fac[n]*inf[m]%p*inf[n-m]%p;
}
ll lucas(int n,int m){
    if(n<m)return 0;
    if(n<p)return C(n,m);
    return lucas(n/p,m/p)*C(n%p,m%p)%p;
}
```

Lucas 定理证明

设 $n = sp + q, m = tp + r$，且 $0 \le q, r < p$，构造多项式

$$(1+x)^n = (1+x)^{sp+q} = ((1+x)^p)^s (1+x)^q$$

因为对任意的 $1 < i < p$，$p \mid \binom{p}{i}$，所以

$$(1+x)^p = 1 + x^p \mod p$$

所以

$$(1+x)^{sp+q} = (1+x^p)^s (1+x)^q = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} x^{ip} \cdot \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j \mod p$$

比较等式两端 x^{tp+r} 的系数，则有

$$\binom{sp+q}{tp+r} = \binom{s}{t}\binom{q}{r}$$

即定理得证。

组合数前缀和 - [SHOI2015] 超能粒子炮 · 改

求 $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \mod p$，$n, k \le 10^9, p = 2333$，$T$ 组询问，$T \le 10^5$。

Solution：

每 p 个分一段：

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n/p}{i/p} \binom{n\%p}{i\%p}$$

$$\sum_{i=0}^{k/p-1} \binom{n/p}{i} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n\%p}{j} + \binom{n/p}{k/p} \sum_{j=0}^{k\%p} \binom{n\%p}{j}$$

设 $f(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$

$$f(n,k) = f(n/p, k/p-1) f(n\%p, p-1) + \binom{n/p}{k/p} f(n\%p, k\%p)$$

$O(p^2 + T \log n)$

Fibnacci 数列

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathcal{N})$$

Fibnacci 数列

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathcal{N})$$

通项公式:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$

Finonacci 数列相关等式

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$
- $F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$

其他性质

- 相邻项互质：$gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$;

其他性质

- 相邻项互质：$gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$;
- 辗转相除法：$gcd(F_n, F_m) = F_{gcd(n,m)}$;

其他性质

- 相邻项互质：$gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$;
- 辗转相除法：$gcd(F_n, F_m) = F_{gcd(n,m)}$;
- 整除的等价表示：$n|m \Leftrightarrow F_n|F_m$.

卡特兰数

卡特兰数 $C(n)$ 定义为凸 $n+2$ 边形不同的三角剖分数。

$$C(1)=1, C(2)=2, C(3)=5, C(4)=14, C(5)=42, C(6)=132, \cdots$$

卡特兰数

卡特兰数 $C(n)$ 定义为凸 $n+2$ 边形不同的三角剖分数。

$$C(1)=1, C(2)=2, C(3)=5, C(4)=14, C(5)=42, C(6)=132, \cdots$$

根据这个定义，可得递推公式：

$$C(n)=\sum_{i=0}^{n-1} C(i)C(n-i-1)$$

若干等价定义

卡特兰数有若干种等价定义。例如：

- n 个数按 $1 \sim n$ 的次序入栈，不同的出栈序列数为 $C(n)$。

若干等价定义

卡特兰数有若干种等价定义。例如：

- n 个数按 $1 \sim n$ 的次序入栈，不同的出栈序列数为 $C(n)$。
- n 个点的二叉搜索树个数（即根的序号大于左儿子，小于右儿子）为 $C(n)$。

若干等价定义

卡特兰数有若干种等价定义。例如：

- n 个数按 $1 \sim n$ 的次序入栈，不同的出栈序列数为 $C(n)$。
- n 个点的二叉搜索树个数（即根的序号大于左儿子，小于右儿子）为 $C(n)$。
- n 个 1 和 n 个 -1 组成一个长 $2n$ 的序列，且满足序列的所有前缀和都非负，序列数量为 $C(n)$。

通项和递推式

$$C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

$$C(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

$$C(n) = C(n-1) \cdot \frac{4n-2}{n+1}.$$

基本定义

若存在 d 使得 $y = dx$，则称 x 整除 y，记作 $x|y$。

基本定义

若存在 d 使得 $y = dx$，则称 x 整除 y，记作 $x|y$。
若 $x|y$，则称 x 是 y 的约数（又称因数），y 是 x 的倍数。

基本定义

若存在 d 使得 $y = dx$，则称 x 整除 y，记作 $x|y$。
若 $x|y$，则称 x 是 y 的约数（又称因数），y 是 x 的倍数。
若 $p > 1$ 且只有 1 和自身两个约数，则称 p 是质数。

基本定义

若存在 d 使得 $y = dx$，则称 x 整除 y，记作 $x|y$。
若 $x|y$，则称 x 是 y 的约数（又称因数），y 是 x 的倍数。
若 $p > 1$ 且只有 1 和自身两个约数，则称 p 是质数。
若 $x > 1$ 且有超过两个约数，则称 x 是合数。

基本定义

若存在 d 使得 $y = dx$，则称 x 整除 y，记作 $x|y$。
若 $x|y$，则称 x 是 y 的约数（又称因数），y 是 x 的倍数。
若 $p > 1$ 且只有 1 和自身两个约数，则称 p 是质数。
若 $x > 1$ 且有超过两个约数，则称 x 是合数。
$0, 1$ 不是质数也不是合数。

算术基本定理/唯一分解定理

任意一个数 x 均可分解为若干质数幂次的乘积。即

$$x = \prod_{i=1}^{m} p_i^{c_i}$$

其中 $p_1, \cdots, p_m$ 是不同的质数，$c_1, \cdots, c_m \geq 1$。

单个质数判定

$O(\sqrt{n})$ 判定法，每个数最多只有一个 $> \sqrt{n}$ 的因数。

单个质数判定

$O(\sqrt{n})$ 判定法，每个数最多只有一个 $> \sqrt{n}$ 的因数。

```
bool prime(int n){
    for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i))return 1;
    return 0;
}
```

单个质数判定

$O(\sqrt{n})$ 判定法，每个数最多只有一个 $> \sqrt{n}$ 的因数。

```
bool prime(int n){
    for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i))return 1;
    return 0;
}
```

上述过程用于分解质因数：

```
for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i)){
    while(!(n%i))n/=i,++cnt;
    //do something for (i,cnt)
}
if(n>1) //do something for (n,1)
```

单个质数判定

$O(\sqrt{n})$ 判定法，每个数最多只有一个 $> \sqrt{n}$ 的因数。

```
bool prime(int n){
    for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i))return 1;
    return 0;
}
```

上述过程用于分解质因数：

```
for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i)){
    while(!(n%i))n/=i,++cnt;
    //do something for (i,cnt)
}
if(n>1) //do something for (n,1)
```

更高效的质数判定：Miller-Rabin 二次探测法，复杂度 $O(\log^2 n)$；

单个质数判定

$O(\sqrt{n})$ 判定法，每个数最多只有一个 $> \sqrt{n}$ 的因数。

```
bool prime(int n){
    for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i))return 1;
    return 0;
}
```

上述过程用于分解质因数：

```
for(int i=2;i*i<=n;++i)if(!(n%i)){
    while(!(n%i))n/=i,++cnt;
    //do something for (i,cnt)
}
if(n>1) //do something for (n,1)
```

更高效的质数判定：Miller-Rabin 二次探测法，复杂度 $O(\log^2 n)$；
更高效的质因数分解：Pollard-Rho 算法，复杂度 $O(n^{\frac{1}{4}})$。

1-n 中所有质数的判定

如何快速找到 1 到 n 中的全部质数？$n \leq 10^7$。

1-n 中所有质数的判定

如何快速找到 1 到 n 中的全部质数？$n \leq 10^7$。
如果对于每个数都 $O(\sqrt{n})$ 暴力判定，复杂度 $O(n\sqrt{n})$ 无法接受。

埃氏筛

先把所有数列出来，然后
划掉除 2 外所有被 2 整除的数字；
划掉除 3 外所有被 3 整除的数字；
划掉除 5 外所有被 5 整除的数字（为什么不是 4?）；
……
划到 $\sqrt{n}$ 为止，剩下的就都是质数了。
复杂度 $O(n \log \log n)$。

欧拉筛

埃氏筛的思路是先枚举质数 p，再枚举另一个约数 i，将所有 $i\times p$ 都标记为合数。
欧拉筛则相反，先枚举另一个约数 i，再枚举质数 p。只不过我们强制这个 p 是 $i\times p$ 的最小质因数。
当 p 枚举到 i 的质因数时，p 就不再是 $i\times p$ 的最小质因数了（可以退出了）。因为每个数只会被筛一次，所以复杂度为 $O(n)$。

欧拉筛

埃氏筛的思路是先枚举质数 p，再枚举另一个约数 i，将所有 $i\times p$ 都标记为合数。
欧拉筛则相反，先枚举另一个约数 i，再枚举质数 p。只不过我们强制这个 p 是 $i\times p$ 的最小质因数。
当 p 枚举到 i 的质因数时，p 就不再是 $i\times p$ 的最小质因数了（可以退出了）。因为每个数只会被筛一次，所以复杂度为 $O(n)$。

```
bool np[N];
int pri[N],cnt=0;
void sieve(int n){
    for(int i=2;i<=n;++i){
        if(!np[i])pri[++cnt]=i;
            for(int j=1;j<=cnt;++j){
                np[i*pri[j]]=1;
                if(!(i%pri[j]))break;
            }
        }
}
```

区间素数筛法

求区间 $[L, R]$ 之间的素数个数，$L, R \leq 10^{12}, R - L \leq 10^6$。

区间素数筛法

求区间 $[L, R]$ 之间的素数个数，$L, R \leq 10^{12}, R - L \leq 10^6$。
10^{12} 的范围不允许我们从头筛，10^6 的区间长度不允许我们判断每个质数是否为质数。
那我们就只能“从中间筛”！
我们用小于 $\sqrt{R}$ 的所有质数去筛 L 到 R 的数，如果整除则标记为合数。
复杂度为 $O(n \log n)$ $(n = 10^6 = \sqrt{10^{12}})$

Acwing 1291 轻拍牛头

给 n 个数，对每个 i，求满足 $a_j|a_i, j \neq i$ 的 j 的数量（即有多少个数是它的约数）。
$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq a_i \leq 10^6$

轻拍牛头-题解

因为 $a_i \leq 10^6$，所以考虑把每个数的因数都求出来，并预处理每个数的个数（$count$ 数组）
复杂度降为 $O(n\sqrt{M})$，然而还是过不去（众所周知除法和取模比加减乘要慢三倍，10^9 次除法或取模就别想了）。

轻拍牛头-题解

因为 $a_i \leq 10^6$，所以考虑把每个数的因数都求出来，并预处理每个数的个数（*count* 数组）
复杂度降为 $O(n\sqrt{M})$，然而还是过不去（众所周知除法和取模比加减乘要慢三倍，10^9 次除法或取模就别想了）。
枚举倍数:
我们把枚举因数的两层循环“倒过来”，就变成了枚举倍数——

```
for(int i=1;i<=M;++i)
for(int j=i;j<=M;j+=i)
    //do something
```

轻拍牛头-题解

因为 $a_i \le 10^6$，所以考虑把每个数的因数都求出来，并预处理每个数的个数（*count* 数组）
复杂度降为 $O(n\sqrt{M})$，然而还是过不去（众所周知除法和取模比加减乘要慢三倍，10^9 次除法或取模就别想了）。
枚举倍数:
我们把枚举因数的两层循环“倒过来”，就变成了枚举倍数——

```
for(int i=1;i<=M;++i)
for(int j=i;j<=M;j+=i)
    //do something
```

这样就可以得到 $1 \cdots 10^6$ 每个数在 $\{a_i\}$ 里的约数个数。

轻拍牛头-题解

因为 $a_i \le 10^6$，所以考虑把每个数的因数都求出来，并预处理每个数的个数（*count* 数组）
复杂度降为 $O(n\sqrt{M})$，然而还是过不去（众所周知除法和取模比加减乘要慢三倍，10^9 次除法或取模就别想了）。

枚举倍数:

我们把枚举因数的两层循环“倒过来”，就变成了枚举倍数——

```
1 for(int i=1;i<=M;++i)
2 for(int j=i;j<=M;j+=i)
3     //do something
```

这样就可以得到 $1 \cdots 10^6$ 每个数在 $\{a_i\}$ 里的约数个数。
我们来分析一下这样做的复杂度。内层循环一共进行了
$M + \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \cdots + \frac{M}{M} = M(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{M}) = O(M \log M)$ 次！
于是我们的复杂度成功降到了 $O(n + M \log M)$。

若 $d|x, d|y$ 同时成立，则称 d 是 x, y 的公约数。最大公约数记为 $\gcd(a, b)$。

gcd 和 lcm

若 $d|x, d|y$ 同时成立，则称 d 是 x, y 的公约数。最大公约数记为 $\gcd(a, b)$。
若 $x|m, y|m$ 同时成立，则称 m 是 x, y 的公倍数。最小公倍数记为 $\mathrm{lcm}(a, b)$。

gcd 和 lcm

若 $d|x, d|y$ 同时成立，则称 d 是 x, y 的公约数。最大公约数记为 $\gcd(a, b)$。
若 $x|m, y|m$ 同时成立，则称 m 是 x, y 的公倍数。最小公倍数记为 $\mathrm{lcm}(a, b)$。

辗转相除求最大公约数

```
int gcd(int x,int y){return y?gcd(y,x%y):x;}
```

约数个数 $\sigma_0(n)$ 和约数和 $\sigma_1(n)$

我们一般记

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

约数个数 $\sigma_0(n)$ 和约数和 $\sigma_1(n)$

我们一般记

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

常用的：$\sigma_0(n)$ 表示约数个数，$\sigma_1(n)$ 表示约数和。

约数个数 $\sigma_0(n)$ 和约数和 $\sigma_1(n)$

我们一般记

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

常用的：$\sigma_0(n)$ 表示约数个数，$\sigma_1(n)$ 表示约数和。
若 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$，则考虑 n 的约数的唯一分解，每个 p_i 的幂次都 $\le c_i$，因此由乘法原理可得

$$\sigma_0(n) = \prod_{i=1}^{k} (c_i + 1)$$

$$\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{c_i}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{c_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

约数个数 $\sigma_0(n)$ 和约数和 $\sigma_1(n)$

我们一般记

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

常用的：$\sigma_0(n)$ 表示约数个数，$\sigma_1(n)$ 表示约数和。
若 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$，则考虑 n 的约数的唯一分解，每个 p_i 的幂次都 $\le c_i$，因此由乘法原理可得

$$\sigma_0(n) = \prod_{i=1}^{k} (c_i + 1)$$

$$\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{c_i}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{c_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

因此我们对 n 分解质因数后，即可直接得到 n 的约数个数、约数和。

约数个数 $\sigma_0(n)$ 和约数和 $\sigma_1(n)$

我们一般记

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

常用的：$\sigma_0(n)$ 表示约数个数，$\sigma_1(n)$ 表示约数和。
若 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$，则考虑 n 的约数的唯一分解，每个 p_i 的幂次都 $\le c_i$，因此由乘法原理可得

$$\sigma_0(n) = \prod_{i=1}^{k} (c_i + 1)$$

$$\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{c_i}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{c_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

因此我们对 n 分解质因数后，即可直接得到 n 的约数个数、约数和。
当 n 很大，而 n 的质因数分解已知时，上述两个公式可以快速求得 n 的约数个数、约数和（举个最简单的例子，求 $n!$ 的约数和，$n < 10^6$）。

[JLOI2014] 聪明的燕姿

已知 $\sigma_1(x) = n$，求所有的 x。T 组询问。
$n \leq 2 \times 10^9$

[JLOI2014] 聪明的燕姿 - Solution

将 n 分解（不一定是质因数），然后考虑把 n 写成约数和公式的形式。
例如：
$n = 42 = 6 \times 7 = (1+5) \times (1+2+2^2) \to x = 5 \times 2^2 = 20$
$n = 42 = 3 \times 14 = (1+2) \times (1+13) \to x = 2 \times 13 = 26$
$n = 42 = 1 + 41 \to x = 41$
因此我们用 DFS 分解 n。从 1 到 $\sqrt{n}$ 枚举 x 的质因数及其幂次，并检验 $1 + p + \cdots + p^c$ 是否可整除 n，若能整除则搜下一层。
如果 $n = 1$ 则将 x 加入答案并返回；如果 $n - 1$ 是质数则直接给当前的 x 乘 $n - 1$ 并加入答案。

概览

同余方程包括：线性同余数方程（exgcd 算法），线性同余方程组（中国剩余定理 CRT，扩展中国剩余定理），指数同余方程（BSGS 算法），高次同余方程（阶和原根）。
该部分涉及的数学知识较多，时间关系我们今天只介绍最简单的 exgcd 算法。CRT 算法作为了解。

裴蜀定理

若 $(a,b)=d$，则对任意整数 x,y，均有 $d \mid (ax+by)$，且二元一次不定方程 $ax+by=d$ 必有解。特别地，$(a,b)=1$ 当且仅当 $ax+by=1$ 有解。

线性同余方程

关于 x 的形如 $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$ 的方程称为线性同余方程。

线性同余方程

关于 x 的形如 $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$ 的方程称为线性同余方程。
由乘法逆元的定义可知，
若 $(a, m) = 1$，则该同余方程的解为 $x = ba^{-1} \mod m$。

线性同余方程

关于 x 的形如 $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$ 的方程称为线性同余方程。
由乘法逆元的定义可知，
若 $(a, m) = 1$，则该同余方程的解为 $x = ba^{-1} \mod m$。
若 $(a, m) \neq 1$，设 $d = (a, m)$。若 $d|b$，则方程两边及模数同时除 d 即可；否则方程无解。
例如 $3x = 2 \mod 6$ 就是无解的。

二元一次不定方程

形如 $ax + by = c$ 的方程称为二元一次不定方程。
因为 $ax + by = c$ 可写作 $ax = c \mod b$,
因此对于二元一次不定方程 $ax + by = c$，方程两边同时除以 (a, b, c) 后，即可得到其通解为 $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$，其中 $x_0 = ca^{-1} \mod b, y_0 = \dfrac{ax_0 - c}{b} \mod a$。

扩展欧几里得算法

之前提到过，当 m 很大的时候，通过求 m 的欧拉函数得到 a 的逆元复杂度过高。

扩展欧几里得（exgcd）算法就是通过辗转相除得到方程 $ax + by = 1$ $((a, b) = 1)$ 的一组解，从而得到 a 模 b 意义下的逆元，解出线性同余方程或二元一次不定方程。

扩展欧几里得算法

之前提到过，当 m 很大的时候，通过求 m 的欧拉函数得到 a 的逆元复杂度过高。

扩展欧几里得（exgcd）算法就是通过辗转相除得到方程 $ax + by = 1$ $((a, b) = 1)$ 的一组解，从而得到 a 模 b 意义下的逆元，解出线性同余方程或二元一次不定方程。

我们现有方程

$$ax + by = 1$$

扩展欧几里得算法

之前提到过，当 m 很大的时候，通过求 m 的欧拉函数得到 a 的逆元复杂度过高。
扩展欧几里得（exgcd）算法就是通过辗转相除得到方程 $ax + by = 1$ $((a, b) = 1)$ 的一组解，从而得到 a 模 b 意义下的逆元，解出线性同余方程或二元一次不定方程。
我们现有方程

$$ax + by = 1$$

辗转相除时，我们令

$$a_1 = b, b_1 = a \pmod{b}$$

即

$$a_1 = b, b_1 = a - kb$$

其中 $k = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$,

扩展欧几里得算法

则若 $a_1x + b_1y = 1$ 的解为 $x = x_1, y = y_1$，即

$$bx_1 + (a - kb)y_1 = 1$$

即

$$ay_1 + b(x_1 - ky_1) = 1$$

则

$$x = y_1, y = x_1 - ky_1$$

当除到最后一步时，有 $a = 1, b = 0$，此时易知 $x = 1, y = 0$ 是一组解。因此直接返回即可。

exgcd 代码

```
int exgcd(int a,int b,int& x,int& y){
    if(!b){x=1,y=0;return a;}
    exgcd(b,a%b,y,x);
    y-=x*(a/b);
}
```

exgcd 代码

```
int exgcd(int a,int b,int& x,int& y){
    if(!b){x=1,y=0;return a;}
    exgcd(b,a%b,y,x);
    y-=x*(a/b);
}
```

用 exgcd 求逆元：

$$a(a^{-1}) + xM = 1$$

exgcd 代码

```cpp
int exgcd(int a,int b,int& x,int& y){
    if(!b){x=1,y=0;return a;}
    exgcd(b,a%b,y,x);
    y-=x*(a/b);
}
```

用 exgcd 求逆元：

$$a(a^{-1}) + xM = 1$$

其中 M 是模数，a 是要求逆元的数，求解上述二元一次不定方程，得到 a^{-1} 和 x 的值。

问题形式

形如

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & (\mathrm{mod}\ m_1) \\ x \equiv a_2 & (\mathrm{mod}\ m_2) \\ \cdots & \\ x \equiv a_n & (\mathrm{mod}\ m_n) \end{cases}$$

的方程组称为线性同余方程组。

问题形式

形如

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & (\mathrm{mod}\ m_1) \\ x \equiv a_2 & (\mathrm{mod}\ m_2) \\ \cdots & \\ x \equiv a_n & (\mathrm{mod}\ m_n) \end{cases}$$

的方程组称为线性同余方程组。
该方程组的解形如 $x = A \mod M$，其中 $M = \mathrm{lcm}(m_1, m_2, \cdots m_n)$。

中国剩余定理（CRT）

当 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 两两互质时，我们可以直接用公式求解。

设 $M = m_1 m_2 \cdots m_n = \mathrm{lcm}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，$M_i = \dfrac{M}{m_i}$，$N_i = M_i^{-1} \mod m_i$，则

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i M_i N_i \mod M$$

欧拉函数的定义

定义 n 的欧拉函数为 $1 \sim n$ 中与 n 互质的数的数量，记作 $\varphi(n)$。
设 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$，则

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i - 1}(p_i - 1)$$

根据上面的公式，我们可以 $O(\sqrt{n})$ 求出 $\varphi(n)$。

积性函数，线性筛

如果一个函数 f 满足以下性质：

- $f(1) = 1$
- 若 $\gcd(p, q) = 1$，则 $f(pq) = f(p)f(q)$

则称 f 是积性函数。

积性函数，线性筛

如果一个函数 f 满足以下性质：

- $f(1) = 1$
- 若 $\gcd(p, q) = 1$，则 $f(pq) = f(p)f(q)$

则称 f 是积性函数。
例如 $1, Id, \varphi, \sigma_0, \sigma_1$ 都是积性函数。

线性筛

只要 $f(p^k)$ 可以 $O(1)$ 算出，积性函数就可以使用欧拉筛在线性时间得到 $1 \sim n$ 的结果。

```
f[1]=1;
for(int i=2;i<=n;++i){
    if(!np[i])f[i]=F(p,1),c[i]=1;
    for(int j=1;j<=cnt&&i*pri[j]<=n;++j){
        int p=pri[j],ip=i*p;
        np[ip]=1;
        if(!(i%p)){
            f[ip]=f[i]/F(p,c[i])*F(p,c[i]+1);
            c[ip]=c[i]+1;
            break;
        }
        f[ip]=f[i]*f[p];
        c[ip]=1;
    }
}
```

其中 $f(i)$ 是积性函数值，$F(p,k)$ 是 $f(p^k)$ 的值（可以直接算），$c(i)$ 是 i 最小质因数的幂次。

线性筛简化版本

如果 $\frac{f(p^{k+1})}{f(p^k)}$ 为定值 $F(p)$，则无需存 c。

```
f[1]=1;
for(int i=2;i<=n;++i){
    if(!np[i])f[i]=P(p),c[i]=1;
    for(int j=1;j<=cnt&&i*pri[j]<=n;++j){
        int p=pri[j],ip=i*p;
        np[ip]=1;
        if(!(i%p)){
            f[ip]=f[i]*F(p);
            break;
        }
        f[ip]=f[i]*f[p];
    }
}
```

其中 $F1(p)$ 是 $f(p)$ 的值。

积性函数举例说明

下面我们通过 $\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \mu$（莫比乌斯函数）举例说明：

积性函数举例说明

下面我们通过 $\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \mu$（莫比乌斯函数）举例说明：
$\varphi : F1(p) = p - 1, F(p) = p$

积性函数举例说明

下面我们通过 $\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \mu$（莫比乌斯函数）举例说明：
$\varphi : F1(p) = p - 1, F(p) = p$
$\sigma_0 : F(p, k) = k + 1$

积性函数举例说明

下面我们通过 $\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \mu$（莫比乌斯函数）举例说明：

$\varphi : F1(p) = p - 1, F(p) = p$

$\sigma_0 : F(p, k) = k + 1$

$\sigma_1 : F(p, k) = 1 + p + \cdots + p^k$

积性函数举例说明

下面我们通过 $\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \mu$（莫比乌斯函数）举例说明：
$\varphi : F1(p) = p - 1, F(p) = p$
$\sigma_0 : F(p, k) = k + 1$
$\sigma_1 : F(p, k) = 1 + p + \cdots + p^k$
$\mu(n)$ 的定义：

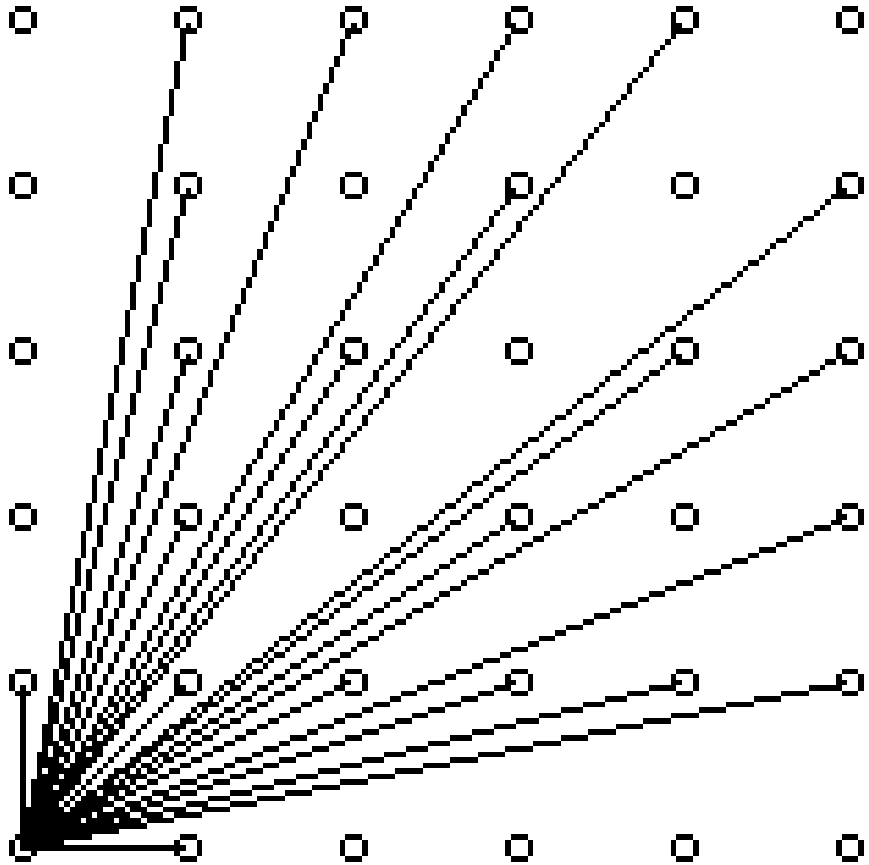
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^n & n = p_1 \ldots p_k \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

即有平方因子的数的莫比乌斯函数值均为 0。
$\mu : F1(p) = -1, F(p) = 0$

[SDOI2008] 仪仗队

作为体育委员，C 君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N \times N$ 的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C 君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐（如下图）。求 C 君可以看到的学生个数。

$n \leq 10^6$。



[SDOI2008] 仪仗队 - Solution

我们不妨把 $(1,1)$ 看做原点，所有点的坐标就是 $(0,0)$ 到 $(n-1,n-1)$，(i,j) 可见当且仅当 $(i,j)=1$。
因此我们要求的就是（为方便起见令 $n \leftarrow n-1$）

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\gcd(i,j)==1]+2$$

gcd 矩阵对角线两边完全对称，因此只需计算

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[\gcd(i,j)==1]+1$$

注意对角线上的 $(1,1)$ 被重复计算，所以要减 1。
而根据 $\varphi(i)$ 的定义有

$$\sum_{j=1}^{i}[gcd(i,j)==1]=\varphi(i)$$

问题引入

求 $a^b \bmod p$ 的值，$a, b, p \leq 10^9$。
——我会！不就是快速幂吗?

问题引入

求 $a^b \bmod p$ 的值，$a, b, p \leq 10^9$。

——我会！不就是快速幂吗?

求 $a^b \bmod p$ 的值，$a, b \leq 10^{10000000}, p \leq 10^9$。

——????????

费马小定理

若 p 为质数，则对任意 $1 \leq a \leq p-1$，均有 $a^{p-1} \bmod p = 1$。

费马小定理

若 p 为质数，则对任意 $1 \le a \le p-1$，均有 $a^{p-1} \bmod p = 1$。

推论：
对任意 $1 \le a \le p-1, b \ge 0$，均有 $a^b \bmod p = a^{b \bmod (p-1)} \bmod p$。

欧拉定理

对任意 $1 \leq a \leq m-1, (a,m) = 1$，均有 $a^{\varphi(m)} \bmod m = 1$。

欧拉定理

对任意 $1 \le a \le m-1, (a,m)=1$，均有 $a^{\varphi(m)} \bmod m = 1$。

推论：
对任意 $1 \le a \le m-1, (a,m)=1, b \ge 0$，均有
$a^b \bmod m = a^{b \bmod \varphi(m)} \bmod m$。
事实上费马小定理可以看做欧拉定理的特殊情况。

扩展欧拉定理

对任意 $1 \le a \le m-1, (a,m) > 1, b \ge \varphi(m)$，均有 $a^b \bmod m = a^{b \bmod \varphi(m)+\varphi(m)} \bmod m$。

乘法逆元

设 $1 \leq a < m$，若存在 $1 \leq b < m$ 满足 $ab \bmod m = 1$，则称 b 是 a 在模 m 意义下的乘法逆元，简称逆元，记作 a^{-1}。

乘法逆元

设 $1 \le a < m$，若存在 $1 \le b < m$ 满足 $ab \bmod m = 1$，则称 b 是 a 在模 m 意义下的乘法逆元，简称逆元，记作 a^{-1}。
若 $(a, m) = d > 1$，则 $d | (ab \bmod m)$，因此 a 存在逆元的充要条件是 $(a, m) = 1$。

乘法逆元

设 $1 \le a < m$，若存在 $1 \le b < m$ 满足 $ab \bmod m = 1$，则称 b 是 a 在模 m 意义下的乘法逆元，简称逆元，记作 a^{-1}。
若 $(a, m) = d > 1$，则 $d | (ab \bmod m)$，因此 a 存在逆元的充要条件是 $(a, m) = 1$。
根据欧拉定理，$a^{-1} = a^{\varphi(m)-1} \bmod m$。

乘法逆元

设 $1 \le a < m$，若存在 $1 \le b < m$ 满足 $ab \bmod m = 1$，则称 b 是 a 在模 m 意义下的乘法逆元，简称逆元，记作 a^{-1}。
若 $(a, m) = d > 1$，则 $d | (ab \bmod m)$，因此 a 存在逆元的充要条件是 $(a, m) = 1$。
根据欧拉定理，$a^{-1} = a^{\varphi(m)-1} \bmod m$。
如果 p 为质数，则 $a^{-1} = a^{p-2} \bmod p$。

乘法逆元

设 $1 \le a < m$，若存在 $1 \le b < m$ 满足 $ab \bmod m = 1$，则称 b 是 a 在模 m 意义下的乘法逆元，简称逆元，记作 a^{-1}。
若 $(a, m) = d > 1$，则 $d | (ab \bmod m)$，因此 a 存在逆元的充要条件是 $(a, m) = 1$。
根据欧拉定理，$a^{-1} = a^{\varphi(m)-1} \bmod m$。
如果 p 为质数，则 $a^{-1} = a^{p-2} \bmod p$。
因为这种做法要求出欧拉函数，当 m 较大（超过 10^9）时复杂度过高。
所以当 m 不是质数时，我们一般用下一节讲的扩展欧几里得算法（exgcd）去求逆元。

线性算法求逆元

当我们需要的逆元都较小而又很多时，可以用线性逆元一次性求出 $1 \sim n$ 的所有逆元。
设 $p = k \cdot i + r, 1 < i < p, r < i$，则 $k = \lfloor \frac{p}{i} \rfloor$

$$k \cdot i + r = 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

两边同时乘 $i^{-1} r^{-1}$，则

$$k \cdot r^{-1} + i^{-1} = 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

故 $i^{-1} = -k \cdot r^{-1} = -\lfloor \frac{p}{i} \rfloor r^{-1}$
因为 r^{-1} 已经求出，所以可以递推求出 inv。

```
inv[1]=1;
for(int i=2;i<=n;++i)inv[i]=inv[mod%i]*(mod-mod/i)%mod;
```

Thanks for listening!

Any Questions?

关于下午考试：祝大家好运。