概率期望及相关 DP

江子祺

adam01 fan club

2023 年 11 月 25 日

目录

1. 概率与期望基础知识
2. 概率期望及相关 DP 例题
3. 推荐题目

前言

本次分享内容为：概率期望及相关 DP。没有介绍高斯消元，由 **Masterhuang** 介绍。受到篇幅限制，没有讲条件概率。
今天题目的洛谷题单：点我！
题目整体偏向基础，较简单，难度主要在绿到紫，大佬们可以爆切。
基础部分仅介绍 OI 常用的知识，可能不严谨，欢迎指正。
你可能需要的前置知识：

- 动态规划基础

简介

概率与期望是 OI 中较为冷门的知识点。
在 NOI 大纲中，概率基础为 8 级内容；条件概率及贝叶斯公式为 9 级内容；数学期望为 10 级内容。
当碰到概率期望问题时，大部分均考虑使用 DP 解决。

我们通常把对随机现象的研究叫做 **随机试验**。
称随机试验每一个可能的结果为 **样本点**，记作 ω；所有样本点所组成的集合称为 **样本空间**，记作 Ω。
对于样本空间 Ω，称它的任意子集为 **随机事件**，我们可以用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示随机事件。
当随机事件中包含的样本点出现了，则这个随机事件就发生。

随机事件

我们通常把对随机现象的研究叫做 **随机试验**。
称随机试验每一个可能的结果为 **样本点**，记作 ω；所有样本点所组成的集合称为 **样本空间**，记作 Ω。
对于样本空间 Ω，称它的任意子集为 **随机事件**，我们可以用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示随机事件。
当随机事件中包含的样本点出现了，则这个随机事件就发生。
若样本点个数有限，记一个随机事件 A 的样本点个数为 $n(A)$。
由于事件是样本点组成的，我们可以把它们看作是 **集合**。

概率

概率是对随机事件发生的可能性的度量。
我们用一个 $[0,1]$ 中的实数表示概率，越接近 1 越可能发生，反之越不可能。
对于事件 A ，我们记其发生的概率为 $P(A)$。
显然有 $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$。

古典概型

古典概型是一类概率模型，满足样本空间有限，且每种情况出现概率相等。通常在 OI 中我们碰到的都是古典概型。
在古典概型中，设研究事件 A 的样本点个数 $n(A)=K$，同理 $n(\Omega)=N$，则

$$P(A)=\frac{K}{N}$$

古典概型

古典概型是一类概率模型，满足样本空间有限，且每种情况出现概率相等。通常在 OI 中我们碰到的都是古典概型。
在古典概型中，设研究事件 A 的样本点个数 $n(A)=K$，同理 $n(\Omega)=N$，则

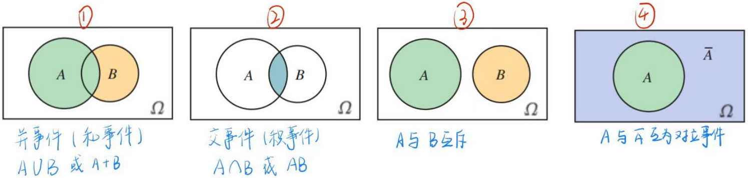
$$P(A)=\frac{K}{N}$$

例如，记事件 A 摇骰子摇到 ≤ 2 的数，则 $A=\{1,2\}, n(A)=2$；$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, n(\Omega)=6$；$P(A)=\frac{1}{3}$。

事件之间的关系

由此，类似集合之间关系，我们有事件之间的关系。

- 并事件（和事件）：事件 A 与 B 中至少发生了一个，这样的事件为 A 与 B 的**并事件（和事件）**，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$。
- 交事件（积事件）：事件 A 与 B 同时发生，这样的事件为 A 与 B 的**交事件（积事件）**，记作 $A \cap B$ 或 AB。
- 互斥事件：两个事件 A, B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$（$\varnothing$ 表示空集）则事件 A, B **互斥**。
- 对立事件：A 与 B 有且仅有一个发生，$A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$ 则事件 A, B **互为对立**，记 A 的对立事件为 $\overline{A}$。
- 独立事件：定义满足 $P(AB) = P(A)P(B)$ 的事件 A, B 互相独立。即互不影响。



概率的性质（重要）

- 对于事件 A, B，若 A, B 互为对立事件，则有 $P(A) + P(B) = 1$。
- 对于事件 A, B，若事件互相独立，则同时发生的概率：$P(AB) = P(A) \times P(B)$。
- 对于事件 A, B，则至少一个发生的概率：$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。特别地，当 A, B 互斥时，$P(AB) = 0$，即 $P(A + B) = P(A) + P(B)$。

概率的性质

给几个小问题帮助理解:

例

例 1：生日悖论

班上有 50 人，假设每个人的生日均匀随机，一年有 365 天。
求存在至少两名同学生日相同的概率。

概率的性质

给几个小问题帮助理解:

例

例 1: 生日悖论

班上有 50 人，假设每个人的生日均匀随机，一年有 365 天。
求存在至少两名同学生日相同的概率。

解

记 $A =$ “存在同学生日相同”
注意到“存在两人生日相同”和“所有人生日不同”是对立事件，考虑求 $\overline{A}$，即所有人生日不同的概率。

概率的性质

给几个小问题帮助理解:

例

例 1: 生日悖论

班上有 50 人，假设每个人的生日均匀随机，一年有 365 天。
求存在至少两名同学生日相同的概率。

解

记 $A=$ “存在同学生日相同”
注意到“存在两人生日相同”和“所有人生日不同”是对立事件，考虑求 $\overline{A}$，即所有人生日不同的概率。
$n(\overline{A})$：一个一个确定，第一个人有 365 种可能，后面每个人比前面少 1（不能重复），即 A_{365}^{50}。

$$P(\overline{A})=\frac{A_{365}^{50}}{365^{50}}\approx 0.03$$

所以 $P(A)\approx 0.97$。
可以发现其实概率非常大。

例

例 2：NOIP 2017 提高组初赛
小 A 去旅游，要连坐 3 次飞机（编号为 1,2,3），他们的准点概率分别为 0.9,0.8,0.9。
如果存在第 i （$i = 1, 2$）架航班晚点，且 $i + 1$ 架飞机**不晚点**则会赶不上飞机。
求小 A 旅行成功的概率。**注意：同时晚点可以赶上飞机**。

概率的性质

解

设 A, B, C 为 “第 1/2/3 架飞机准点”，$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 反之。我们发现只有三种情况，并且他们互斥：

- 1,2 准点，3 随意（记为 D_1）
- 1 准点 2,3 晚点。（记为 D_2）
- 全部晚点。（记为 D_3）

概率的性质

解

设 A, B, C 为“第 1/2/3 架飞机准点”，$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 反之。我们发现只有三种情况，并且他们互斥：

- 1,2 准点，3 随意（记为 D_1）
- 1 准点 2,3 晚点。（记为 D_2）
- 全部晚点。（记为 D_3）

则答案为

$$\begin{aligned} & P(D_1 + D_2 + D_3) \\ = & P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) \\ = & P(AB) + P(A\overline{BC}) + P(\overline{ABC}) \\ = & 0.72 + 0.018 + 0.002 \\ = & 0.74 \end{aligned}$$

数学期望

通俗的说，**随机变量**指随机试验各种结果所表示的值。
在数学中，一个随机变量 X 的**数学期望** $E(X)$ 为试验中每次可能的结果乘以其概率的和。
形式化地讲，

$$E(X) = \sum_{i \in \Omega} p_i x_i$$

其中 x_i 表示事件的一种取值，p_i 即与之对应的概率。

数学期望

通俗的说，**随机变量**指随机试验各种结果所表示的值。
在数学中，一个随机变量 X 的**数学期望** $E(X)$ 为试验中每次可能的结果乘以其概率的和。
形式化地讲，

$$E(X) = \sum_{i \in \Omega} p_i x_i$$

其中 x_i 表示事件的一种取值，p_i 即与之对应的概率。
举个例子：投六面骰子投出的点数的期望为：

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

期望的可加性

对于任意随机变量 X, Y 我们有:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$$

即期望的**可加性**（线性性）。证明略。

期望的可加性

对于任意随机变量 X, Y 我们有:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

即期望的**可加性**（线性性）。证明略。
这里给出一个小例子方便理解:

例

例：奇怪的问题
有一辆车上载着 n 个乘客，途经 k 个车站，每个人在随机的一个车站下车。每个车站如果没有人下车就不会停车。求出停车次数 X 的期望值 $E(X)$。（直接用含 n, k 的式子表示）

期望的可加性

解

考虑设 $E(X_i)$ 表示第 i 个车站停车次数的期望值，停车为 1，否则为 0，则只要计算 $E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i)$。

期望的可加性

解

考虑设 $E(X_i)$ 表示第 i 个车站停车次数的期望值，停车为 1，否则为 0，则只要计算 $E(X)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)$。

对于每个车站，每个人**不在**这个车站下车的可能性为 $\dfrac{k-1}{k}$，则所有人**都不在**这里下车的概率为 $\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n$，同时每站期望停车次数等于停车概率。则有：

$$E(X_i)=1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$

期望的可加性

解

考虑设 $E(X_i)$ 表示第 i 个车站停车次数的期望值，停车为 1，否则为 0，则只要计算 $E(X)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)$。

对于每个车站，每个人**不在**这个车站下车的可能性为 $\frac{k-1}{k}$，则所有人**都不在**这里下车的概率为 $\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$，同时每站期望停车次数等于停车概率。则有：

$$E(X_i)=1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$

根据期望的可加性：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=k\times\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right]$$

期望的其它性质

性质 1

设随机变量 X 的取值仅可能是 $1 \sim n$ 的整数，则有下式成立：

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(i \le X)$$

期望的其它性质

性质 1

设随机变量 X 的取值仅可能是 $1 \sim n$ 的整数，则有下式成立：

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(i \le X)$$

证明.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} P(X = j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(i \le X) \end{aligned}$$

$\square$

期望的其它性质

性质 2

通常，设事件 A 发生概率为 $P(A)$（$P(A) \neq 0$），则不断试验直到 A 发生，期望次数为 $E(X) = \dfrac{1}{P(A)}$。

证明有点困难。

1 概率与期望基础知识

2 概率期望及相关 DP 例题

3 推荐题目

例题 1 AT_dp_i Coins

N 枚硬币，第 i 枚硬币有 p_i 的概率正面朝上，有 $1-p_i$ 的概率反面朝上。扔完所有硬币，求**正面朝上的硬币数比反面朝上的硬币数多**的概率（输出浮点数，误差不超过 10^{-9}）。
$N<3000$，保证 N 是奇数。
样例：$N=3, p=\{0.30, 0.60.0.80\}$ $Ans=0.612000000$。

例题 1 题解

我们令 $f(i,j)$ 表示抛了前 i 个硬币，其中有 j $(j \le i)$ 个朝上的概率。

例题 1 题解

我们令 $f(i,j)$ 表示抛了前 i 个硬币，其中有 j $(j \le i)$ 个朝上的概率。则可以由“抛到朝上”和“抛到不朝上”转移过来，也就是：

$$f(i,j) = f(i-1,j-1) \times p_i + f(i-1,j) \times (1-p_i)$$

例题 1 题解

我们令 $f(i,j)$ 表示抛了前 i 个硬币，其中有 j $(j \le i)$ 个朝上的概率。
则可以由“抛到朝上”和“抛到不朝上”转移过来，也就是：

$$f(i,j) = f(i-1,j-1) \times p_i + f(i-1,j) \times (1-p_i)$$

答案即为

$$\sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}^{n} f(n,j)$$

例题 2 P4316 绿豆蛙的归宿

给出一张 n 个点 m 条边的有向无环图，起点为 1，终点为 n，边有边权，保证从起点出发能够到达所有的点，所有的点也都能够到达终点。
现从起点出发，走向终点。到达每一个顶点时，如果该节点点有 k 条出边，可以选择任意一条边离开该点，并且走向每条边的概率为 $\frac{1}{k}$ 。
现在绿豆蛙想知道，从起点走到终点的所经过的路径总长度期望是多少？
$1 \le n \le 10^5$，$1 \le m \le 2 \times 10^5$。

例题 2 题解（方法一）

首先考虑顺推：
令 $dp(i)$ 表示到达点 i 的路径期望长度。
考虑到这是个 DAG（有向无环图），我们考虑按照拓扑序来进行更新。
对于每个结点找到它能被从哪儿转移来不好做，但是我们可以对于每个结点转移向它能转移的下一个结点。这种方法我们称为 **刷表法**。

例题 2 题解（方法一）

首先考虑顺推：
令 $dp(i)$ 表示到达点 i 的路径期望长度。
考虑到这是个 DAG（有向无环图），我们考虑按照拓扑序来进行更新。
对于每个结点找到它能被从哪儿转移来不好做，但是我们可以对于每个结点转移向它能转移的下一个结点。这种方法我们称为 **刷表法**。
令出边数为 out_i，对于边 (i, j, w) 执行更新（$\leftarrow$ 表示赋值）：

$$dp_j \leftarrow dp_j + (dp_i + w) \times \frac{1}{out_i}$$

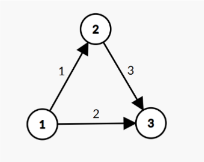
这样看着很对，但你写完过不了样例！

例题 2 题解（方法一）

注意期望的定义 $E(X)=\sum_{i\in\Omega}P_iX_i$，每种值还要乘上相应的概率，此处的 dp_i 一项已经乘上了，但是 w 并没有，w 只乘上了经过当前这条边的概率，没有乘上到达前一个结点的概率。

例题 2 题解（方法一）

注意期望的定义 $E(X)=\sum_{i\in\Omega}P_iX_i$，每种值还要乘上相应的概率，此处的 dp_i 一项已经乘上了，但是 w 并没有，w 只乘上了经过当前这条边的概率，没有乘上到达前一个结点的概率。
有点难理解，举个例子，图如下：



$$dp_1=0\ (\text{Yes})$$
$$dp_2=0.5\ (\text{Yes})$$
$$dp_3=1+3.5=4.5\ (\text{No!})$$

这样 1,2 两个点答案正确，然而 3 号点期望应该是 3 $(1\to 2\to 3:2, 1\to 3:1)$。
我们观察发现，在记录 $2\to 3$ 这条边直接加上了 3 的贡献，但是这条边只有 $\dfrac{1}{2}$ 概率走过，到达 2 号点的概率只有 $\dfrac{1}{2}$，这样就多算了，即 w 还要乘上到达这个点对应的概率。

例题 2 题解（方法一）

因此额外记录从 1 到点 i 的概率 p_i，对出边 p_j 更新：

$$p_j \leftarrow p_j + p_i \times \frac{1}{out_i}$$

那么

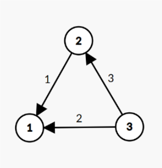
$$dp_j \leftarrow dp_j + (dp_i + w \times p_i) \times \frac{1}{out_i}$$

例题 2 题解（方法二）

再考虑倒推。考虑按照拓扑序倒着更新，令 p_i 为 i 到 n 的概率，dp_i 为 i 到 n 的期望长度。

例题 2 题解（方法二）

再考虑倒推。考虑按照拓扑序倒着更新，令 p_i 为 i 到 n 的概率，dp_i 为 i 到 n 的期望长度。 此时我们发现 $p_i = 1$（因为每个点一定会走到 n），所以原来错误的方程就对了！

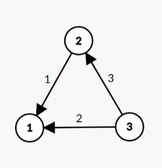


$$dp_3 = 0 \text{ (Yes)}$$
$$dp_2 = 1.5 \text{ (Yes)}$$
$$dp_1 = 1 + 2 = 3 \text{ (Yes!)}$$

直接不用考虑概率，按照最早的那个递推式即可。
实现上，可以反向建图跑更加好写。

例题 2 题解（方法二）

再考虑倒推。考虑按照拓扑序倒着更新，令 p_i 为 i 到 n 的概率，dp_i 为 i 到 n 的期望长度。 此时我们发现 $p_i = 1$（因为每个点一定会走到 n），所以原来错误的方程就对了！



$$dp_3 = 0 \text{ (Yes)}$$
$$dp_2 = 1.5 \text{ (Yes)}$$
$$dp_1 = 1 + 2 = 3 \text{ (Yes!)}$$

直接不用考虑概率，按照最早的那个递推式即可。
实现上，可以反向建图跑更加好写。
因此，我们可以发现，**在期望 DP 中有时使用倒推更方便**。

例题 3 [NOIP2016 提高组] 换教室

大学是一个由 v 个点 e 条边组成的无向连通图，边有边权 w。
牛牛在大学有 n 节课，第 i 节课在教室 c_i 上。牛牛可以对最多 m 次课程提出申请（可以不全用，可以完全不提出），
对于每节课，申请后分别有 k_i 概率成功，且成功概率相互独立，成功后会在教室 d_i 上课。
当第 $i(1 \le i < n)$ 节课后，牛牛会从上节课的教室经过最短的路径到达下一个教室，花费体力值等于路径长。
请安排一种申请方案，使得体力值的总和的**期望值**最小，输出期望值(保留两位小数)。
$1 \le n \le 2 \times 10^3$，$0 \le m \le 2 \times 10^3$，$1 \le v \le 300$，$0 \le e \le 9 \times 10^3$，$1 \le w_j \le 100$。

例题 3 题解

先用你喜欢的算法求出任意两个教室之间的最短路。

例题 3 题解

先用你喜欢的算法求出任意两个教室之间的最短路。
很容易想到，使用 $dp_{i,j}$ 表示前 i 次课申请换了 j 次教室的期望值。
但是我们需要知道上个教室在哪里才能转移，因此要额外记录上个教室的信息。令 $dp_{i,j,0/1}$ 表示前 i 次课申请换了 j 次教室，上次是否**申请**换教室的期望值。

例题 3 题解

先用你喜欢的算法求出任意两个教室之间的最短路。
很容易想到，使用 $dp_{i,j}$ 表示前 i 次课申请换了 j 次教室的期望值。
但是我们需要知道上个教室在哪里才能转移，因此要额外记录上个教室的信息。令 $dp_{i,j,0/1}$ 表示前 i 次课申请换了 j 次教室，上次是否**申请**换教室的期望值。
则可以由上次换、上次不换来转移过来，又有换没换成功的讨论。我们知道连着两个单独的成功概率分别为 k_{i-1}, k_i，则同时成功、第一个成功第二个不成功、第二个成功第一个不成功、都不成功的概率分别为 $k_{i-1} \cdot k_i$，$k_{i-1} \cdot (1-k_i)$，$(1-k_{i-1}) \cdot k_i$，$(1-k_{i-1}) \cdot (1-k_i)$。
具体看代码:

例题 3 题解

```
dp[i][j][0] = min(
    dp[i - 1][j][0] + dis[c[i - 1]][c[i]],
    dp[i - 1][j][1] + dis[c[i - 1]][c[i]] * (1 - k[i - 1])
                    + dis[d[i - 1]][c[i]] * k[i - 1]
);
dp[i][j][1] = min(
    dp[i - 1][j - 1][0] + dis[c[i - 1]][c[i]] * (1 - k[i])
                        + dis[c[i - 1]][d[i]] * k[i],
    dp[i - 1][j - 1][1] + dis[c[i - 1]][c[i]] * (1 - k[i - 1]) * (1 - k[i])
                        + dis[c[i - 1]][d[i]] * (1 - k[i - 1]) * k[i]
                        + dis[d[i - 1]][c[i]] * k[i - 1] * (1 - k[i])
                        + dis[d[i - 1]][d[i]] * k[i - 1] * k[i]
);
```

例题 4 P4550 收集邮票

有 n 种邮票，你可以任意次买邮票，第 i 次买花费 i 元钱，获得 n 种邮票中的随机一种，每种概率相等。
求买到所有邮票花的钱的期望（保留 2 位小数）。
$n \le 10^4$。（可加强到 $n \le 10^7$）。
样例：$n = 3$；$\text{Ans} = 21.25$

例题 4 P4550 收集邮票

有 n 种邮票，你可以任意次买邮票，第 i 次买花费 i 元钱，获得 n 种邮票中的随机一种，每种概率相等。
求买到所有邮票花的钱的期望（保留 2 位小数）。
$n \leq 10^4$。（可加强到 $n \leq 10^7$）。
样例：$n = 3$；$\text{Ans} = 21.25$
提示：先考虑如何求出购买次数的期望。

例题 4 题解

先考虑求出【提示】中的问题。设 $f(i)$ 表示获得了 i 种邮票（显然具体是哪几种与答案无关），还需要买完的期望**购买次数**。显然 $f(n) = 0$。

例题 4 题解

先考虑求出【提示】中的问题。设 $f(i)$ 表示获得了 i 种邮票（显然具体是哪几种与答案无关），还需要买完的期望**购买次数**。显然 $f(n)=0$。
对于 $f(i)$，可能买到之前已经有的了，概率为 $\frac{i}{n}$；也可能买到没有的，概率 $\frac{n-i}{n}$。
则有

$$f(i)=\frac{i}{n}[f(i)+1]+\frac{n-i}{n}[f(i+1)+1]$$

例题 4 题解

先考虑求出【提示】中的问题。设 $f(i)$ 表示获得了 i 种邮票（显然具体是哪几种与答案无关），还需要买完的期望**购买次数**。显然 $f(n) = 0$。

对于 $f(i)$，可能买到之前已经有的了，概率为 $\frac{i}{n}$；也可能买到没有的，概率 $\frac{n-i}{n}$。

则有

$$f(i) = \frac{i}{n}[f(i) + 1] + \frac{n-i}{n}[f(i+1) + 1]$$

这里由于式子左右都有 $f(i)$，我们需要化简整理成可以递推的形式，得：

$$f(i) = f(i+1) + \frac{n}{n-i}$$

递推计算即可。

例题 4 题解

这时很多人会想:

一种? 做法

买了 k 次则一共买了 $1+2+\cdots+k=\frac{k(1+k)}{2}$ 元，那么设购买次数的期望为 $E(X)$，购买价格的期望为 $E(Y)$ 则

$$E(Y)=\frac{E(X^2)+E(X)}{2}$$

这不是做完了?

例题 4 题解

这时很多人会想:

一种？做法

买了 k 次则一共买了 $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(1+k)}{2}$ 元，那么设购买次数的期望为 $E(X)$，购买价格的期望为 $E(Y)$ 则

$$E(Y)=\frac{E(X^2)+E(X)}{2}$$

这不是做完了?

你说得对，但是有个很大的问题：期望具有线性性但是**不可以平方**。
$E(X^2)$ 我们不知道。
即 $E^2(X)$（或者说 $[E(X)]^2$）不一定等于 $E(X^2)$。

例题 4 题解

那么我们有一个很方便的解决方法：再记录 $E(X^2)$ 即可。

例题 4 题解

那么我们有一个很方便的解决方法：再记录 $E(X^2)$ 即可。
设 $E(x_i)$ 表示已经买了 i 个，还需要买的个数 x_i 的期望值。它就是上文的 $f(i)$。
设 $E(x_i^2)$ 表示已经买了 i 个，还需要花费的价格**的平方** x_i^2 的期望值。
请注意区别【平方的期望值】和【期望值的平方】。

例题 4 题解

那么我们有一个很方便的解决方法：再记录 $E(X^2)$ 即可。
设 $E(x_i)$ 表示已经买了 i 个，还需要买的个数 x_i 的期望值。它就是上文的 $f(i)$。
设 $E(x_i^2)$ 表示已经买了 i 个，还需要花费的价格**的平方** x_i^2 的期望值。
请注意区别【平方的期望值】和【期望值的平方】。
则平方的递推式与普通的区别不大，但**请注意 +1 的位置**：

$$E(x_i^2) = \frac{i}{n}E((x_i+1)^2) + \frac{n-i}{n}E((x_{i+1}+1)^2)$$

例题 4 题解

那么我们有一个很方便的解决方法：再记录 $E(X^2)$ 即可。
设 $E(x_i)$ 表示已经买了 i 个，还需要买的个数 x_i 的期望值。它就是上文的 $f(i)$。
设 $E(x_i^2)$ 表示已经买了 i 个，还需要花费的价格**的平方** x_i^2 的期望值。
请注意区别【平方的期望值】和【期望值的平方】。
则平方的递推式与普通的区别不大，但**请注意 +1 的位置**：

$$E(x_i^2) = \frac{i}{n}E((x_i+1)^2) + \frac{n-i}{n}E((x_{i+1}+1)^2)$$

化简，得

$$E\left(x_i^2\right) = E\left(x_{i+1}^2\right) + 2E\left(x_{i+1}\right) + \frac{2i}{n-i}E\left(x_i\right) + \frac{n}{n-i}$$

例题 4 题解

那么我们有一个很方便的解决方法：再记录 $E(X^2)$ 即可。
设 $E(x_i)$ 表示已经买了 i 个，还需要买的个数 x_i 的期望值。它就是上文的 $f(i)$。
设 $E(x_i^2)$ 表示已经买了 i 个，还需要花费的价格**的平方** x_i^2 的期望值。
请注意区别【平方的期望值】和【期望值的平方】。
则平方的递推式与普通的区别不大，但**请注意 +1 的位置**：

$$E(x_i^2) = \frac{i}{n}E((x_i+1)^2) + \frac{n-i}{n}E((x_{i+1}+1)^2)$$

化简，得

$$E\left(x_i^2\right) = E\left(x_{i+1}^2\right) + 2E\left(x_{i+1}\right) + \frac{2i}{n-i}E\left(x_i\right) + \frac{n}{n-i}$$

答案即 $\frac{1}{2}\left[E(x_0^2)+E(x_0)\right]$。事实上继续设计价格 DP 也可以求，限于篇幅请读者自行研究。

例题 5 P3750 [六省联考 2017] 分手是祝愿

有 n 个灯，编号 $1 \sim n$，每个灯初始可能打开或者关闭。
每次操作选择一个数 x 使得所有 x 的因数（包含 1 和 x）号灯被转换状态（开变成关，关变成开）。
有一固定整数 k，考虑操作方式：当目前关掉所有灯的最小操作次数 $\le k$ 时直接采用最优策略；否则均匀随机一个灯进行操作。
给定 n, k 和灯的初始状态，求操作次数期望值乘以 $n!$ 的值取模 100003（质数）的答案。
$k \le n \le 10^5$；对于 50% 数据有 $k = n$。

例题 5 题解

先讲 50 分做法：
显然每个灯最多操作一次，且操作顺序不影响答案。
考虑从大到小枚举每个数，如果这个灯没关就把它的所有因数号灯转换状态。
正确性：n 号灯若开着有且仅有自己能把自己关掉，因此必须选择；若关着变成打开也没办法被更小的打开。
然后转化为一个规模小 1 的问题，同理。

例题 5 题解

先说一种最先想到但是行不通的办法。
设 $f(i)$ 表示“最少还要操作 i 次”时答案的期望。

$$f(i) = \frac{i}{n} f(i-1) + \frac{n-i}{n} f(i+1) + 1$$

这个式子具有后效性，没办法直接递推。可以使用高斯消元，但是超出了我们的讨论范围也过不了 10^5。
考虑转换状态定义。

例题 5 题解

设 $f(i)$ 从“最少还要操作 i 次”到“最少还要操作 $i-1$ 次”需要的操作次数期望。**这也是期望 DP 中一种常见的状态设计方式**。

例题 5 题解

设 $f(i)$ 从“最少还要操作 i 次”到“最少还要操作 $i-1$ 次”需要的操作次数期望。**这也是期望 DP 中一种常见的状态设计方式**。

则有 $\dfrac{i}{n}$ 概率选择到了需要的；$\dfrac{n-i}{n}$ 用了错误的，那还需要用 $f(i+1)$ 次修正错误，再用 $f(i)$ 次。

$$f(i) = \frac{i}{n} + \frac{n-i}{n} \times (f(i) + f(i+1) + 1)$$

例题 5 题解

设 $f(i)$ 从“最少还要操作 i 次”到“最少还要操作 $i-1$ 次”需要的操作次数期望。**这也是期望 DP 中一种常见的状态设计方式**。

则有 $\dfrac{i}{n}$ 概率选择到了需要的；$\dfrac{n-i}{n}$ 用了错误的，那还需要用 $f(i+1)$ 次修正错误，再用 $f(i)$ 次。

$$f(i) = \frac{i}{n} + \frac{n-i}{n} \times (f(i) + f(i+1) + 1)$$

整理，得

$$f(i) = \frac{n + (n-i) \times f(i+1)}{i}$$

例题 5 题解

设 $f(i)$ 从“最少还要操作 i 次”到“最少还要操作 $i-1$ 次”需要的操作次数期望。**这也是期望 DP 中一种常见的状态设计方式**。
则有 $\frac{i}{n}$ 概率选择到了需要的；$\frac{n-i}{n}$ 用了错误的，那还需要用 $f(i+1)$ 次修正错误，再用 $f(i)$ 次。

$$f(i)=\frac{i}{n}+\frac{n-i}{n}\times(f(i)+f(i+1)+1)$$

整理，得

$$f(i)=\frac{n+(n-i)\times f(i+1)}{i}$$

答案为 $\left[\sum_{i=k+1}^{n} f(i)\right]+k$。
别忘了特判最优次数 $\leq k$ 的情况，事实上有 80 分。

例题 6 P6046 纯粹容器

n 个容器，每个容器有互不相同硬度 a_i，从左到右摆成一排。
共 $n-1$ 次操作，第 i 次操作，随机两个相邻（已砸掉的容器被忽略）的容器，砸掉硬度小的。
求每个容器期望能存活多久，即最大的整数 m 使得满足 $m \le n-1$ 且 m 次操作后容器没被砸掉，答案对 998244353 取模。
$1 \le n \le 50$，$\{a\}$ 是排列。
提示：数据没开满，直接考虑 $n \le 5000$。

例题 6 P6046 纯粹容器

n 个容器，每个容器有互不相同硬度 a_i，从左到右摆成一排。
共 $n-1$ 次操作，第 i 次操作，随机两个相邻（已砸掉的容器被忽略）的容器，砸掉硬度小的。
求每个容器期望能存活多久，即最大的整数 m 使得满足 $m \le n-1$ 且 m 次操作后容器没被砸掉，答案对 998244353 取模。
$1 \le n \le 50$，$\{a\}$ 是排列。
提示：数据没开满，直接考虑 $n \le 5000$。
提示 2：可以不用 DP。

例题 6 题解

设随机变量 X_i 表示第 i 个容器期望的存活时间，考虑前面提到的其它性质 1 这个式子变形一下：

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{n-1} P(j \leq X)$$

问题转化为对于每个位置 i，对于每个 $j \in [1, n]$ 求出它在 j 次或者以上才能砸碎的概率 $P_{i,j}$。

例题 6 题解

设随机变量 X_i 表示第 i 个容器期望的存活时间，考虑前面提到的其它性质 1 这个式子变形一下：

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{n-1} P(j \le X)$$

问题转化为对于每个位置 i，对于每个 $j \in [1, n]$ 求出它在 j 次或者以上才能砸碎的概率 $P_{i,j}$。
不妨令 l_i, r_i 分别表示 i 号左右第一个比它大的数的位置。可以发现，l_i, r_i 是最靠近的会砸碎 i 容器的；如果 l_i, r_i 被一个更大的砸碎了，则其就会代替 l_i, r_i 也是等效的。

例题 6 题解

设随机变量 X_i 表示第 i 个容器期望的存活时间，考虑前面提到的其它性质 1 这个式子变形一下：

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{n-1} P(j \le X)$$

问题转化为对于每个位置 i，对于每个 $j \in [1, n]$ 求出它在 j 次或者以上才能砸碎的概率 $P_{i,j}$。
不妨令 l_i, r_i 分别表示 i 号左右第一个比它大的数的位置。可以发现，l_i, r_i 是最靠近的会砸碎 i 容器的；如果 l_i, r_i 被一个更大的砸碎了，则其就会代替 l_i, r_i 也是等效的。
也就是说，i **号瓶子被砸碎当且仅当** $l_i \sim i$ **被合并成了一个瓶子，或者** $i \sim r_i$ **被合并成一个瓶子**。而如果在 t 次操作内 i 被与更大的合并在一起，那么这个瓶子存活时间一定 $< t$。

例题 6 题解

设事件 A, B 分别为 $l_i \sim i$，$i \sim r_i$ 合并，C 为 $l_i \sim r_i$ 合并。根据概率公式有
$P(X < j) = P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-P(C)$，
$P(X \geq j) = 1 - P(X < j)$。

例题 6 题解

设事件 A,B 分别为 $l_i\sim i$，$i\sim r_i$ 合并，C 为 $l_i\sim r_i$ 合并。根据概率公式有
$P(X<j)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(C)$，
$P(X\geq j)=1-P(X<j)$。这里 $P(A)$ 即要求在 j 次操作内有 $i-l_i$ 次正好合并需要的这些数，剩余的次数在剩余操作内任意取，分母是总方案数，即

$$\frac{\binom{n-1-(i-l_i)}{j-(i-l_i)}}{\binom{n-1}{j}}$$

例题 6 题解

设事件 A, B 分别为 $l_i \sim i$，$i \sim r_i$ 合并，C 为 $l_i \sim r_i$ 合并。根据概率公式有
$P(X<j)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(C)$，
$P(X \geq j)=1-P(X<j)$。 这里 $P(A)$ 即要求在 j 次操作内有 $i-l_i$ 次正好合并需要的这些数，剩余的次数在剩余操作内任意取，分母是总方案数，即

$$\frac{\binom{n-1-(i-l_i)}{j-(i-l_i)}}{\binom{n-1}{j}}$$

其余式子同理，这样就可以计算了。预处理逆元就可以 $O(n^2)$。

例题 6 题解

```
// 预处理 f[i][j] 组合数, l[i], r[i] 第一个大于它的 (如果没有设为 0)
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    if (a[i] == n) {
        cout << n - 1 << ' ';
        continue;
    }
    ll ans = 0;
    auto g2 = [&](ll x, ll y, ll v) {
        int len = y - x;
        if (x == 0 || y == 0 || v < len) return 0;
        return (int)(f[n - 1 - len][v - len] * inv(f[n - 1][v]) % mod);
    };
    for (int j = 1; j < n; j++) {
        ll va = g2(l[i], i, j), vb = g2(i, r[i], j), vc = g2(l[i], r[i], j);
        ans = ((ans + 1 - va - vb + vc) % mod + mod) % mod;
    }
    cout << ans << ' ';
}
```

1 概率与期望基础知识

2 概率期望及相关 DP 例题

3 推荐题目

推荐题目

按照主观难度排序。跟洛谷上的题单（点我！ ）一样的。

- CF518D 期望 DP 基础题。
- CF453A 概率与期望基础题，提示：直接列出计算式即可。
- CF16E 概率 DP。
- AT_dp_i 状态设计与转移较为复杂的 DP。
- P1654 比较板的高次期望问题。提示：可以参考例 4；bonus：$O(n(n+m))$ 扩展到 m 次方。
- P6835 图上随机游走类期望问题。提示：可以参考例 5 的状态设计。
- CF248E 高妙的期望问题。

推荐至少完成前面 4 题。

致谢

感谢老师提供的机会，感谢大家的聆听。

Thanks!

参考资料

- 高中数学课本必修二
- 各题目洛谷相关题解
- 李煜东《算法竞赛进阶指南》