# Day 6 练习题("简单"数学)

### By PaperCloud

(请选手仔细阅读此页内容)

比赛时间: 2023-7-13

试题名称	数上LCA	加三十三	未命名一	虚空之梦
时间限制	1000ms	1000ms	1000ms	1000ms
内存上限	512MB	512MB	512MB	512MB
评测方式	全文比较	全文比较	全文比较	全文比较
测试点数目	20	10	10	打包测试

### 1 注意事项:

- 1. 难度严格递增;
- 2. 尽可能把可以拿到的部分分都拿到;
- 3. 有问题找出题人;
- 4. 推荐一种快速的输入输出方法,以(A+B problem 为例):

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);cin.tie(0);
    int a, b;
    cin >> a >> b;
    cout << a + b << "\n";
    // 使用 "\n" 比 std::endl 更快。
    // 关同步后, cin/cout 和 scanf/printf 不要混用。
}
```

# 数上 LCA

# 题目描述

Barisore 喜欢研究树, 也喜欢研究数。

我们知道,一个树上节点的父亲是它的祖先中深度最大的。 Barisore 认为,一个正整数的"父亲",是它所有约数中最大的那个,比如 6 的父亲是 3,100 的父亲是 50。

Barisore 痴迷于 LCA(树上最近公共祖先)问题,于是她向你提出了 q 个问题,每个问题给了你两个正整数 x 和 y,她想知道它们的"LCA"是多少。

### 输入格式

第一行一个正整数 q,表示询问个数。

接下来 q 行,每行两个正整数 x 和 y,表示一个询问。

# 输出格式

输出 q 行,对于每个询问输出一个数表示答案。

# 样例输入与输出

### 输入样例

2 100 50 18 12

### 输出样例

50 3

### 样例解释

100 的父亲是 50;

18 的父亲是 9, 12 的父亲是 6, 9 和 6 的父亲都是 3。

# 数据范围与提示

```
设 N 为所有输入 x,y 的最大值。
对于 40% 的数据,N,q \leq 5000;
对于 70% 的数据,N,q \leq 10^6;
对于 100% 的数据,N \leq 10^7, q \leq 10^6。
```

由于输出输出量过大,请不要使用过慢的输入输出方式(如未关同步的 cin/cout)。

#### 提示:

- 1. 如何求一个数的最大约数? 思考课上讲过的线性筛法的过程。
- 2. 一个数作质因数分解,最多  $O(\log n)$  次,使用朴素的求 LCA 算法就可以啦。

#### 下面附上线性筛的代码:

```
const int N=1e7+3;
bool np[N];
int pri[N/10],cnt;
void init(int n){
    for(int i=2;i<=n;++i){
        if(!np[i])pri[++cnt]=i;
        for(int j=1;j<=cnt&&i*pri[j]<=n;++j){
            np[i*pri[j]]=1;
            if(!(i%pri[j]))break;
        }
    }
}</pre>
```

# 加三十三

### 题目描述

万众期待的 Z 大篮球赛即将开幕。

三十三班为了展现班级风采,Barisore 被任命在 n 个报名的同学中选 m 名参赛队员去参加比赛。

这 n 名同学各有擅长,其中 a 名同学只擅长前场,b 名同学只擅长后场,更有 c 名全能选手(既擅长前场又擅长后场)。当然,也有一些重在参与的同学,他们二者都不擅长。

Barisore 决定让 x 名擅长前场的同学担任前锋,y 名同学擅长后卫的同学担任后卫首发出场,剩下 m-x-y 名同学作为替补队员。Barisore 对替补队员没有要求。

她想知道有多少种不同的选择方案。两种方案不同当且仅当有任意一名同学的出场情况(前锋/后卫/替补/未选上)不同。由于这个方案数可能很大,你只需要输出其对 998244353 取模的值即可。

# 输入格式

一行 7 个整数 n, m, a, b, c, x, y。

### 输出格式

一行一个整数, 方案数对 998244353 取模的值。

### 样例输入与输出

### 样例输入1

12 7 4 3 2 3 2

### 样例输出1

2604

### 样例输入2

5000 3000 1500 800 400 200 100

### 样例输出2

541028747

子任务:

# 数据范围与提示

对于全部数据, $0 \le n, m, a, b, c, x, y \le 10^7, m \le n, a + b + c \le n, x + y \le m$ 。

测试点编号	$n,m \leq$	特殊限制
1	10	
2	1000	n = m
3	1000	c = 0
4	1000	
5	$10^{7}$	n = m
6	$10^{7}$	c = 0
7	$10^{7}$	x+y=m
8	$10^{7}$	
9	$10^{7}$	
10	$10^{7}$	

#### 提示:

- 1. 可以先枚举 a 名擅长前场的同学中有多少个被选中。
- 2. 阶乘, 阶乘逆元预处理:

```
const int N=1e7+10,mod=998244353;
inline int inc(int x,int y){return x+y>=mod?x+y-mod:x+y;} // 加法
inline int dec(int x,int y){return x-y<0?x-y+mod:x-y;} // 减法
inline int mul(int x,int y){return (ll)x*y%mod;} // 乘法
inline int qpow(int x,int y){ // 快速幂运算
   int r=1;
   for(;y;y>>=1){
      if(y&1)r=mul(r,x);
      x=mul(x,x);
   }return r;
}
```

```
inline int inv(int x){return qpow(x,mod-2);} // 逆元运算
int fac[N],inf[N];
void init(int n){ // 预处理部分
    fac[0]=1;
    for(int i=1;i<=n;++i)fac[i]=mul(fac[i-1],i);
    inf[n]=inv(fac[n]);
    for(int i=n-1;~i;--i)inf[i]=mul(inf[i+1],i+1);
}</pre>
```

# 未命名一

# 题目描述

Barisore 与数学/OI的邂逅,是 dev-c++ 里新建的第一个 未命名1.cpp 开始的。

今天,Barisore 给你出了一道题:

从  $1,2,\ldots,n$  中选出一些数使得选出的任意两个数之积都不是立方数,问最多能选出多少个。

她刚出完就认为这个问题过于简单, 因此又追加了一个问题:

设上面这个问题的答案是 f(n),求  $\bigoplus_{i=1}^n if(i)$  的值。

### 输入格式

一个数,n。

# 输出格式

一个数,答案。

# 样例输入与输出

### 样例输入1

10

### 样例输出1

96

### 样例输入2

114

### 样例输出2

8840

### 样例输入3

1919810

### 样例输出3

39665825343

# 数据范围与提示

对于前 3 组数据, $n \leq 50$ 。

对于第  $4 \le 8$  组数据,对于第 k 组数据, $n < 10^{k-2}$ 。

对于全部数据, $1 \le n \le 10^7$ 。

# 样例解释

n=1时,选择 $\{1\}$ 

n=2 时,选择  $\{1,2\}$ 

n=3 时,选择  $\{1,2,3\}$ 

n=4 时,选择  $\{1,2,3\}$ 

n=5 时,选择  $\{1,2,3,5\}$ 

n=6 时,选择  $\{1,2,3,5,6\}$ 

n=7时,选择  $\{1,2,3,5,6,7\}$ 

n=8 时,选择  $\{1,2,3,5,6,7\}$ 

n=9 时,选择  $\{1,2,3,5,6,7\}$ 

n=10 时,选择  $\{1,2,3,5,6,7,10\}$ 

因此, f(1) 到 f(10) 分别为 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7。

#### 提示:

- 1.  $n \leq 50$ , 可以使用打表方法。
- 2. 考虑取数的规律:

记

$$egin{aligned} [x] &= \{k^3x | k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k^3x \leq n\} \ \overline{x} &= \min\{y \in \mathbb{N}^* | xy = k^3, k \in \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

其中规定 x 无立方因子(即不能被 1 以外任何立方数整除)。\pause

### 容易发现:

- 1. [1] 中只能选择一个数。
- 2. 若 $x \neq 1$ , [x]要么不选,要么全选。
- 3. [x] 和  $[\overline{x}]$  只能二选一。
- 3. 预处理出 [x] 和  $\overline{x}$ ,并维护所有 [x] 当前的大小,贪心选择 [x] 和  $[\overline{x}]$  中较大者即可。这样你就可以拿到 60 分;
- 4. 尝试更快地计算 $\overline{x}$ ,你可以获得更高的分数。比如:质因数分解。
- 5. 记 $f(x) = \overline{x}$ , f(x)是一个积性函数, 试着用线性筛来计算它。

# 虚空之梦

### 题目描述

2023 年 6 月 30 日 5 : 30,天亮了,而通宵复习期末考的 Barisore 还没放下手中的笔记。

最后,她带着迷茫和困倦,进入了梦乡。

梦境里,她再次来到那间充斥着数学的味道的教室,而此时这里空无一人,摆的整整齐齐的  $n \times m$  张桌子,每一张桌子上都留着他曾经努力听课的痕迹。

那些模糊的记忆都化成了数字出现在她眼前。

有一个 n 行 m 列的矩阵,第 i 行第 j 列为整数  $a_{i,j}$ 。

定义一个子矩阵 [a,b] imes [c,d] 的回忆值为其中所有数之和的 k 次方,  $(\sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d a_{i,j})^k$ ,其中 k 是给定的常数。

注:在本题中,我们规定 $0^0 = 1$ 。

请计算这个矩阵的所有子矩阵的回忆值之和。

形式化的,请你计算  $\sum_{a=1}^{n} \sum_{b=a}^{n} \sum_{c=1}^{m} \sum_{d=c}^{m} (\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} a_{i,j})^{k}$ 。

### 输入格式

第一行三个整数 n, m, k。

以下 n 行每行 m 个整数  $a_{i,i}$ 。

# 输出格式

一行一个整数表示答案。由于这个数可能过大,你只需输出其对 $2^{32}$  取模的值即可。

# 样例与输出与输出

### 样例输入1

2 3 1

2 8 7

4 5 9

### 样例输出1

236

### 样例输入2

```
5 7 3
3 4 7 6 9 4 5
5 4 2 9 7 8 4
3 1 9 4 5 2 2
3 8 9 5 6 6 3
5 1 9 4 8 2 6
```

### 样例输出2

90937097

# 数据范围与提示

对于全部数据, $1 \le n \times m \le 2 \times 10^5, 0 \le k \le 10, 0 \le a_{i,j} < 2^{32}$ 。

子任务 1  $(6 \, \Im)$  :  $1 \leq n, m \leq 20$ ;

子任务 2  $(8 \, \Im)$  :  $1 \leq n, m \leq 100$ ;

子任务 3(6 分): k=0;

子任务 4(16 分): n=1;

子任务 5  $(24 \, \text{分})$  :  $k \leq 3$ ;

子任务 6(40分): 无特殊限制。

子任务内部有一定梯度。

#### 提示:

- 1. 使用二维前缀和可以获得 14 分;
- 2. k=0 时,答案只和矩阵的大小有关;
- 3. n = 1 时,矩阵退化成数组,矩阵和变成了区间和,我们试着用前缀和来计算这个答案:

$$\begin{split} &\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (s_{j} - s_{i})^{K} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=0}^{K} (-1)^{k} \binom{K}{k} s_{j}^{k} s_{i}^{K-k} \\ &= \sum_{k=0}^{K} (-1)^{k} \binom{K}{k} \sum_{i=0}^{n} s_{i}^{K-k} \sum_{j=i}^{n} s_{j}^{k} \end{split}$$

4. 注意到  $nm \leq 2 imes 10^5$ ,因此  $\min\{n,m\} \leq 450$ 。