

---

Кафедра "Прикладная математика-1"

А.В. Иванов, А.П. Иванова

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ  
ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 3

Рекомендовано редакционно-издательским  
советом университета в качестве методических  
указаний

для студентов специальности УВМ

Москва – 2006

**Иванов А.В., Иванова А.П.** Моделирование случайных величин, систем массового обслуживания и случайных процессов. Часть 3.: Методические указания к лабораторным работам. – М.: МИИТ, 2006. – 52 с.

Методические указания содержат описание и варианты заданий к лабораторным работам № 5, 6 и 7 по курсу "Математическое моделирование". Лабораторная работа № 5 посвящена методу суммирования при моделировании случайных величин, распределенных по нормальному закону. Лабораторная работа № 6 посвящена применению метода Неймана для моделирования случайных величин, распределенных по нормальному закону. Лабораторная работа № 7 посвящена моделированию системы массового обслуживания (СМО).

В методических указаниях приведены основные определения и формулы, знание которых необходимо для выполнения лабораторных работ.

Для удобства ссылок нумерация параграфов, формул и рисунков единая в частях 1, 2 и 3 методических указаний.

## Содержание

<b>5</b>	<b>Моделирование непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону, методом суммирования</b>	<b>4</b>
5.1	Основные понятия и определения . . . . .	4
5.2	Задание к лабораторной работе № 5 . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Моделирование непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону, методом исключения (метод Неймана)</b>	<b>8</b>
6.1	Основные понятия и определения . . . . .	8
6.2	Алгоритм метода исключения . . . . .	11
6.3	Использование метода исключения для моделирования нормально распределенной случайной величины . . . . .	15
6.4	Задание к лабораторной работе № 6 . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Моделирование систем массового обслуживания (СМО)</b>	<b>19</b>
7.1	Основные понятия и определения . . . . .	19
7.1.1	Понятие СМО . . . . .	19
7.1.2	Классификация СМО . . . . .	21
7.2	Организация очереди заявок . . . . .	27
7.3	Дисциплина обслуживания заявок . . . . .	28
7.4	Число приборов в СМО и схема их соединения	29
7.5	Распределение времени обслуживания заявок каждым обслуживающим прибором . .	34
7.6	Пример моделирования процесса обслуживания заявок в СМО . . . . .	35
7.7	Задание к лабораторной работе № 7 . . . . .	42
	<b>Список литературы</b>	<b>51</b>

## 5 Моделирование непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону, методом суммирования

### 5.1 Основные понятия и определения

Метод вытекает из центральной предельной теоремы. В общем виде **центральная предельная теорема** формулируется следующим образом: если случайная величина  $X$  представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на сумму мало, то  $X$  имеет распределение, близкое к нормальному [2].

Одной из простых форм центральной предельной теоремы является следующая.

**Теорема.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

Введем случайную величину

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

а также соответствующую центрированную и нормированную случайную величину

$$Y_n^* = \frac{Y_n - M(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}.$$

Тогда для любых  $\alpha$  и  $\beta$  ( $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\alpha < Y_n^* < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

где  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$  — функция распределения стандартной нормально распределенной случайной величины.

Из определения функции  $F(x)$  разность  $F(\beta) - F(\alpha) = P(\alpha < Z < \beta)$ , где  $Z$  — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием  $\mu = 0$  и дисперсией  $D = 1$ . То есть при  $n \rightarrow \infty$  закон распределения случайной величины  $Y_n^*$  неограниченно приближается к стандартному нормальному.

**Рассмотрим частный случай.** Пусть  $Y_n$  — сумма  $n$  независимых равномерно распределенных на отрезке  $[0; 1]$  случайных величин  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Для каждой из этих величин математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

$$M(X_i) = \frac{1}{2},$$

$$D(X_i) = \int_0^1 (x - M(X_i))^2 dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Тогда  $M(Y_n) = \frac{n}{2}$ ,  $D(Y_n) = \frac{n}{12}$ . При этом при больших значениях  $n$  закон распределения случайной величины  $Y_n$  близок к нормальному с указанными значениями математического ожидания и дисперсии.

Рассмотрим случайную величину  $Y_n^* = \sqrt{\frac{12}{n}} (Y_n - \frac{n}{2})$ . Ее закон распределения также близок к нормальному. При этом ее математическое ожидание и дисперсия не зависят от  $n$  и равны соответственно  $M(Y_n^*) = 0$ ,  $D(Y_n^*) = 1$ .

Действительно, в соответствии с теоремами о числовых характеристиках случайной величины, если  $X$  — случай-

ная величина, а  $c_1$  и  $c_2$  — константы, то

$$M(c_1(X - c_2)) = c_1(M(X) - c_2),$$

$$D(c_1(X - c_2)) = c_1^2(D(X) - D(c_2)) = c_1^2 D(X).$$

Поэтому

$$M\left(\sqrt{\frac{12}{n}}\left(Y_n - \frac{n}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(M(Y_n) - \frac{n}{2}\right) = 0,$$

$$D\left(\sqrt{\frac{12}{n}}\left(Y_n - \frac{n}{2}\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{12}{n}}\right)^2 D(Y_n) = 1.$$

Таким образом, для моделирования нормально распределенной случайной величины  $Y_n^*$  с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1, необходимо с помощью датчика псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0; 1]$ , последовательно получать серии по  $n$  значений:  $S_i = \{r_{i1}, \dots, r_{in}\}$ . Тогда  $i$ -е значение реализации случайной величины  $Y_n^*$  равно следующему выражению:

$$(Y_n^*)_i = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{k=1}^n r_{ik} - \frac{n}{2}\right).$$

Переход к нормально распределенной случайной величине с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  осуществляется так же, как и в лабораторной работе № 4 [4], с помощью линейного преобразования

$$X_i = \sigma(Y_n^*)_i + \mu. \quad (31)$$

## 5.2 Задание к лабораторной работе № 5

Смоделировать непрерывную случайную величину с нормальным законом распределения методом суммирования.

**Выходные данные:**

1. Гистограмма;
2. Точные значения и оценки:
  - математического ожидания,
  - дисперсии,
  - асимметрии,
  - эксцесса;
3. Уровень значимости соответствия выборочных данных заданному закону распределения по критерию Пирсона.

**Примечания.**

1. Методы вычисления оценок и уровня значимости рассмотрены в лабораторной работе № 4 [4].
2. Интервал построения гистограммы:

$$\left[ \min_{i=1, \dots, N} (x_i); \max_{i=1, \dots, N} (x_i) \right],$$

$x_i$  — итоговые величины, полученные по формуле (31).

**Параметры моделирования.**

- Математическое ожидание  $\mu$ ;
- Среднее квадратическое отклонение  $\sigma$ ;

- Количество суммируемых независимых равномерно распределенных случайных величин  $n$ ;
- Количество реализаций случайной величины  $N$ ;
- Количество частичных интервалов гистограммы  $K$ .

### Варианты задания № 5.

Номера вариантов изменяются в пределах от 1 до 89. Параметры моделирования определяются номером варианта *Variant* по следующему алгоритму ( $[X]$  — целая часть числа  $X$ ):

$$\mu = \text{Variant} - [\text{Variant}/10] * 10,$$

$$\sigma = [\text{Variant}/10] + 1,$$

$$n = \text{Variant} + 5 - 11 * [(\text{Variant} - 1)/11],$$

$$N = (2 * (90 - \text{Variant}) + 8 - 22 * [(89 - \text{Variant})/11]) * 100,$$

$$K = 2\text{Variant} + 21 - 12 * [\text{Variant}/6].$$

## 6 Моделирование непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону, методом исключения (метод Неймана)

### 6.1 Основные понятия и определения

Метод исключения может быть применен для моделирования случайной величины с плотностью распределения, заданной на всей числовой прямой.

Если случайная величина  $X$  имеет сложную функцию плотности  $f(x)$ , для которой не существует явной формулы функции распределения  $y = F(x)$ , (в частности, если случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение), то для моделирования такой случайной величины будем



использовать более простую вспомогательную функцию  $g(x)$  (см. замечание 2 на стр. 13), которая является интегрируемой на всей числовой прямой (т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = G_0 < \infty$ ) и которая мажорирует функцию  $f(x)$  (т.е.  $f(x) \leq g(x)$  при  $-\infty < x < \infty$ ).

Введем двумерную случайную величину  $(X_1, X_2)$  с безусловной плотностью распределения первой координаты

$$f_1(x_1) = \frac{g(x_1)}{G_0} \quad (32)$$

и условной плотностью распределения второй координаты

$$f_2(x_2 | x_1) = \begin{cases} \frac{1}{g(x_1)}, & \text{если } 0 \leq x_2 \leq g(x_1), \\ 0, & \text{если } x_2 > g(x_1). \end{cases} \quad (33)$$

Тогда двумерная случайная величина  $(X_1, X_2)$  имеет следующую плотность распределения:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 | x_1) = \\ &= \begin{cases} \frac{g(x_1)}{G_0} \cdot \frac{1}{g(x_1)}, & \text{если } (x_1, x_2) \in D, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2) \notin D. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь область  $D$  находится на плоскости  $x_1 0 x_2$  между графиком функции  $x_2 = g(x_1)$  и осью абсцисс  $0 x_1$  (см. рис. 12).

Таким образом,

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{G_0}, & \text{если } (x_1, x_2) \in D, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2) \notin D. \end{cases}$$

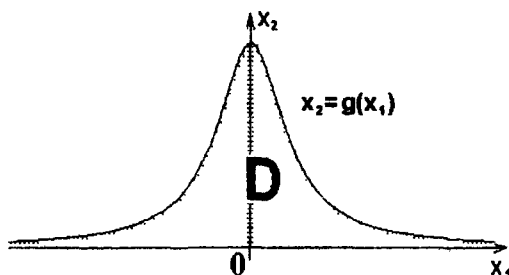


Рис. 12

Отсюда следует, что случайная величина  $(X_1, X_2)$  распределена в области  $D$  равномерно и вероятность ее попадания в некоторую область  $D_1 \subseteq D$  равна  $\frac{S_{D_1}}{S_D} = \frac{S_{D_1}}{G_0}$ , так как  $S_D = G_0$ .

Найдем вероятность попадания случайной величины  $(X_1, X_2)$  в криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, графиком функции  $x_2 = f(x_1)$  и вертикальными прямыми  $x_1 = x$  и  $x_1 = x + \Delta x$  (область  $D_1$  на рис. 13):

$$P((x_1, x_2) \in D_1) \approx \frac{f(x)\Delta x}{G_0}. \quad (34)$$

Эту же вероятность можно выразить как произведение безусловной вероятности попадания случайной величины  $(X_1, X_2)$  в область  $D_2$ , ограниченную осью абсцисс и графиком функции  $x_2 = f(x_1)$ , на условную вероятность попадания координаты  $x_1$  в отрезок  $[x; x + \Delta x]$ :

$$P((x_1, x_2) \in D_1) = P((x_1, x_2) \in D_2) * \\ * P(x_1 \in [x; x + \Delta x] | (x_1, x_2) \in D_2). \quad (35)$$

Так как  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = G_0$ , а  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  по свойству плотности, то  $S_{D_2} = 1$  и  $P((x_1, x_2) \in D_2) = \frac{S_{D_2}}{S_D} = \frac{1}{G_0}$ .

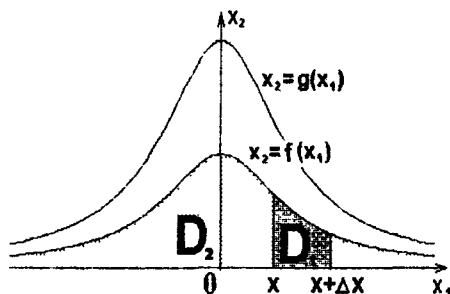


Рис. 13

Подставим это значение в (35):

$$P((x_1, x_2) \in D_1) = \frac{1}{G_0} P(x_1 \in [x; x + \Delta x] | (x_1, x_2) \in D_2).$$

С другой стороны, имеет место приближенное равенство (34), тогда  $P(x_1 \in [x; x + \Delta x] | (x_1, x_2) \in D_2) \approx f(x)\Delta x$ . Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_1 \in [x; x + \Delta x] | (x_1, x_2) \in D_2)}{\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, условная плотность распределения координаты  $x_1$  при условии, что случайная величина  $(X_1, X_2)$  попала под график функции  $x_2 = f(x_1)$ , совпадает с плотностью  $f(x)$ .

## 6.2 Алгоритм метода исключения

Алгоритм метода исключения (метода Неймана) состоит в следующем:

1. Разыгрывается двумерная случайная величина  $(X_1, X_2)$  с плотностями (безусловной и условной) распределения ее координат  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2 | x_1)$ , заданными фор-

мулами (32) и (33). При этом для определения случайной величины  $(X_1, X_2)$  сначала необходимо получить очередную реализацию координаты  $x_1$  с плотностью  $f_1(x_1)$ . При использовании метода обратной функции разыгрывается случайная величина  $R_1$ , равномерно распределенная на отрезке  $[0; 1]$ . Тогда очередная реализация координаты  $x_1$  вычисляется по формуле:  $x_1 = G^{-1}(G_0 R_1)$ , где  $G(x)$  — первообразная для функции  $g(x)$ , (так как плотность распределения  $f_1(x) = \frac{g(x)}{G_0}$ , то функция распределения  $y = F_1(x) = \frac{G(x)}{G_0}$  и  $x = G^{-1}(G_0 y)$ ). Затем очередная реализация координаты  $x_2$  получается как реализация равномерно распределенной случайной величины на отрезке  $[0; g(x_1)]$ . Т.е.  $x_2 = R_2 \cdot g(x_1)$ , где  $R_2$  — очередная реализация равномерно распределенной случайной величины на отрезке  $[0; 1]$ . 2. Если  $x_2 \leq f(x_1)$ , то  $x_1$  принимается в качестве очередной реализации случайной величины с плотностью  $f(x)$ , иначе полученная пара  $(x_1, x_2)$  отбраковывается.

В определении плотностей координат  $x_1$  и  $x_2$  двумерной случайной величины  $(X_1, X_2)$  используется мажорирующая функция  $g(x)$ . При этом на нее накладываются следующие условия:

1. Функция  $g(x)$  должна быть достаточно простой, чтобы для нее существовала явная формула первообразной функции  $y = G(x)$ , (а значит, и формула функции распределения  $F_1(x)$  для плотности  $f_1(x)$ , так как  $f_1(x_1) = \frac{g(x_1)}{G_0}$ ), а также формула обратной функции  $x = G^{-1}(y)$ . Так как  $F_1(x)$  — функция распределения, то естественно из множества первообразных  $\{G(x)\}$  выбрать ту, для которой выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0. \quad (36)$$

Именно она и будет рассматриваться в дальнейшем как функция  $G(x)$ . В этом случае для получения очередной реализации координаты  $x_1$  может быть использован метод обратной функции на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$  так же, как он был применен в лабораторной работе № 2 [3] для моделирования случайной величины с заданной плотностью на конечном интервале.

2. Функция  $g(x)$  должна быть близка к функции  $f(x)$  для уменьшения числа отбраковываемых пар  $(x_1, x_2)$ . Критерием близости служит величина  $\max(g(x) - f(x))$ .

Это условие вытекает из определения случайной величины  $(X_1, X_2)$  и указанного алгоритма метода исключения.

Действительно, в соответствии с алгоритмом метода исключения,  $x_1$  принимается в качестве очередной реализации случайной величины с плотностью  $f(x)$ , если  $x_2 \leq f(x_1)$ . Так как  $x_2 = R_2 \cdot g(x_1)$ , то получаем следующее условие отбора:  $R_2 \cdot g(x_1) \leq f(x_1)$ , или в другой форме:  $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ .

Поэтому, чем меньше разность  $1 - \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ , тем больше доля реализаций случайной величины  $R_2$ , которые удовлетворяют условию  $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ , так как  $R_2$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 1]$ .

### Замечания.

1. Метод исключения может быть применен не только для моделирования нормально распределенной случайной величины, но и для моделирования **любой** случайной величины с плотностью, заданной на бесконечном интервале.

2. Метод исключения имеет смысл применять только для случайных величин со сложной функцией плотности  $f(x)$ , для которой не существует явной формулы функции

распределения  $y = F(x)$  или формулы обратной функции  $x = F^{-1}(y)$ . В противном случае в качестве мажорирующей функции можно взять саму функцию плотности, и метод исключения вырождается в метод обратной функции (см. [4]).

3. Метод исключения, описанный в данной лабораторной работе, является обобщением метода исключения, описанного в лабораторной работе № 3 [4] для моделирования случайной величины с плотностью, заданной на конечном отрезке. При моделировании случайной величины с плотностью, заданной на конечном отрезке, в качестве мажорирующей функции используется константа  $g(x) = M_0 = \max_{[a;b]} f(x)$ . Для бесконечного интервала такая мажорирующая функция не может быть использована, так как  $\int_{-\infty}^{\infty} M_0 dx = \infty$ .

4. Несмотря на использование в описании метода исключения двумерной случайной величины  $(X_1, X_2)$ , реально при его реализации производятся вычисления над ее первой координатой.

5. В отличие от методов кусочно-линейной интерполяции и суммирования, являющихся приближенными (точность метода кусочно-линейной интерполяции зависит от количества отрезков интерполяции, а точность метода суммирования — от числа суммируемых равномерно распределенных на отрезке  $[0; 1]$  случайных величин), метод исключения является **точным**. При этом он может быть использован с **любой** мажорирующей функцией  $g(x)$ , которая является интегрируемой на всей числовой прямой, т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = G_0 < \infty$ .

### 6.3 Использование метода исключения для моделирования нормально распределенной случайной величины

Так же, как и в лабораторных работах № 4 [4] и № 5, сначала осуществляется моделирование стандартно распределенной случайной величины  $X$  с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1.

Переход к нормально распределенной случайной величине  $X^*$  с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  осуществляется с помощью линейного преобразования:

$$x_i^* = \sigma x_i + \mu. \quad (37)$$

Нормально распределенная случайная величина  $X$  с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1, имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (38)$$

В качестве мажорирующей для функции (38) возьмем следующую функцию  $g(x)$  (график функции  $g(x)$  см. на рис. 14):

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} e^{-|x|+0.5}, & \text{если } |x| > 0.5, \\ 1, & \text{если } |x| \leq 0.5. \end{cases}$$

Функция  $g(x)$  является интегрируемой на всей числовой прямой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = G_0 = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}.$$

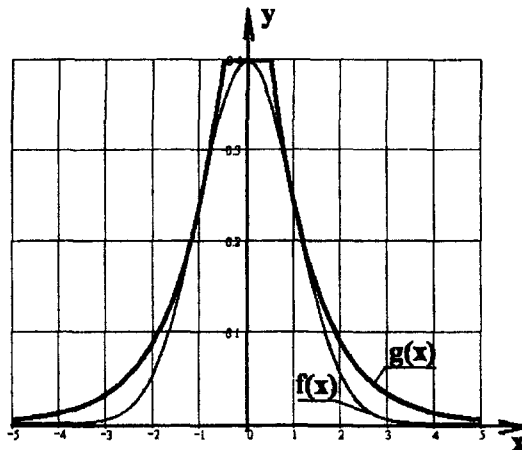


Рис. 14

При этом функция  $g(x)$  является мажорирующей для  $f(x)$ , т.е.  $f(x) \leq g(x)$  при  $-\infty < x < \infty$ .

Тогда первообразная  $G(x)$  с учетом условия (36) определяется следующим образом:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \int_{-\infty}^x e^{u+0.5} du, & \text{если } x \leq -0.5, \\ 1.5 + x, & \text{если } -0.5 < x \leq 0.5, \\ \int_{0.5}^x e^{-u+0.5} du, & \text{если } x > 0.5. \end{cases}$$

**Замечание** по определению функции  $G(x)$ :  $G(x) = 1.5 + x$  при  $-0.5 < x \leq 0.5$ , так как  $\int_{-\infty}^{-0.5} e^{u+0.5} du = 1$ .

После вычисления интегралов получим следующий вид



функции  $G(x)$ :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} e^{x+0.5}, & \text{если } x \leq -0.5, \\ 1.5 + x, & \text{если } -0.5 < x \leq 0.5, \\ 3 - e^{-x+0.5}, & \text{если } x > 0.5. \end{cases}$$

Функция  $y = G(x)$  является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси. Поэтому для нее существует однозначная обратная функция  $x = G^{-1}(y)$ , следующего вида:

$$G^{-1}(y) = \begin{cases} -0.5 + \ln(y\sqrt{2\pi}), & \text{если } 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ -1.5 + y\sqrt{2\pi}, & \text{если } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < y \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}, \\ 0.5 - \ln(3 - y\sqrt{2\pi}), & \text{если } \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < y < \frac{3}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

**Примечание.** Интервалы изменения аргумента  $y$  для функции  $G^{-1}(y)$  выбраны в соответствии с интервалами изменения аргумента  $x$  для функции  $G(x)$ .

В соответствии с описанным алгоритмом для получения очередной реализации случайной величины  $X$  с плотностью  $f(x)$  разыгрываются последовательно две реализации  $R_1$  и  $R_2$  равномерно распределенной на отрезке  $[0; 1]$  случайной величины. Далее вычисляется  $x_1 = G^{-1}(G_0 R_1)$ .

Для выбранной мажорирующей функции  $g(x)$  значение  $G_0 = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}$ , получим

$$x_1 = \begin{cases} -0.5 + \ln(3R_1), & \text{если } 0 < R_1 \leq \frac{1}{3}, \\ -1.5 + 3R_1, & \text{если } \frac{1}{3} < R_1 \leq \frac{2}{3}, \\ 0.5 - \ln(3 - 3R_1), & \text{если } \frac{2}{3} < R_1 < 1. \end{cases}$$

После этого, если оказывается, что выполняется неравенство  $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ , то значение  $x_1$  принимается в качестве

очередной реализации случайной величины  $X$  с плотностью  $f(x)$ . В противном случае полученная пара  $(R_1, R_2)$  отбраковывается.

Как указано выше, переход к нормально распределенной случайной величине  $X^*$  с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  осуществляется с помощью линейного преобразования (37).

#### **6.4 Задание к лабораторной работе № 6**

Смоделировать непрерывную случайную величину с нормальным законом распределения методом исключения.

**Выходные данные:**

1. Гистограмма;
2. Точные значения и оценки:
  - математического ожидания,
  - дисперсии,
  - асимметрии,
  - эксцесса;
3. Уровень значимости соответствия выборочных данных заданному закону распределения по критерию Пирсона.

**Примечание.** Методы вычисления оценок и уровня значимости рассмотрены в лабораторной работе № 4 [4].

**Параметры моделирования.**

- Математическое ожидание  $\mu$ ;
- Среднее квадратическое отклонение  $\sigma$ ;

- Количество реализаций случайной величины  $N$ ;
- Количество частичных интервалов гистограммы  $K$ .

### Варианты задания № 6.

Номера вариантов изменяются в пределах от 1 до 89. Параметры моделирования определяются номером варианта *Variant* по следующему алгоритму ( $[X]$  — целая часть числа  $X$ ):

$$\mu = \text{Variant} - [\text{Variant}/10] * 10,$$

$$\sigma = [\text{Variant}/10] + 1,$$

$$N = (2 * (90 - \text{Variant}) + 8 - 22 * [(89 - \text{Variant})/11]) * 100,$$

$$K = 2\text{Variant} + 21 - 12 * [\text{Variant}/6].$$

## 7 Моделирование систем массового обслуживания (СМО)

### 7.1 Основные понятия и определения

#### 7.1.1 Понятие СМО

**Определение 1.** Система массового обслуживания (СМО) — система, состоящая из потока заявок и обслуживающих эти заявки приборов.

Примерами таких систем могут служить: системы передачи данных, разнообразные вычислительные системы, погрузочно-разгрузочные работы на складах, техническое обслуживание подвижного состава на железнодорожном транспорте и т.д.

Процессы массового обслуживания классифицируются по следующим признакам:

1. **Входящий поток заявок**, задаваемый моментами их поступления в систему или распределением длин

интервалов между поступающими заявками.

2. **Организация очереди заявок.**
3. **Дисциплина обслуживания заявок.**
4. **Число обслуживающих приборов и схема их соединения** в обслуживающей системе.
5. **Распределение времени обслуживания** заявок каждым обслуживающим прибором.

Эффективность СМО характеризуется такими показателями работы, как:

- среднее время простоя отдельных обслуживающих приборов и системы в целом;
- среднее время ожидания начала обслуживания;
- вероятность того, что поступившая заявка будет немедленно принята к обслуживанию;
- среднее время нахождения заявки в системе;
- закон распределения длины очереди и средняя длина очереди и т.д.

Эти показатели для определенного круга систем могут быть определены аналитически (т.е. совокупностью математических формул)\*). Для сложных СМО эти показатели вычисляются на основе моделирования работы системы на ЭВМ и статистической обработки полученных данных серии численных экспериментов.

---

\*) Как правило, аналитическое представление характеристик СМО возможно только для пуассоновского входного потока и распределения длительности обслуживания отдельных заявок по показательному закону.

### 7.1.2 Классификация СМО

**Определение 2.** *Поток событий* — последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени.

В общем случае, события могут быть различными. Мы будем рассматривать поток *однородных событий*, различающихся только моментами появления. Строго говоря, классификация событий как однородных или неоднородных зависит от цели моделирования. Например, совокупность программ, поступающих на выполнение в вычислительную систему, можно рассматривать как однородный поток событий, если состав и количество команд в каждой программе рассматривать как некоторый обобщенный параметр функции, определяющей продолжительность выполнения программы. В то же время, одна и та же программа, осуществляющая запрос к информационной системе, может трактоваться как различные события, если целью исследования является определение законов распределения частоты обращения к тем или иным блокам информационной системы.

**Определение 3.** Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

**Определение 4.** Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий в отрезок времени  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  длины  $\Delta t$  зависит только от  $\Delta t$  и не зависит от начального момента  $t_1$ .

**Определение 5.** Поток событий называется *поток* без последствия, если число событий, попавших в любой интервал времени, не зависит от числа событий, попавших в любой другой интервал.

**Определение 6.** Поток событий называется *ординар-*

ным, если вероятность попадания в элементарный интервал длины  $\Delta t$  двух и более событий мала по сравнению с вероятностью попадания в этот интервал одного события.

**Определение 7.** Поток событий называется *стационарным пуассоновским потоком* или *простейшим потоком*, если он удовлетворяет свойствам, сформулированным в определениях 4, 5, 6, т.е. является стационарным ординарным потоком без последствия.

Пусть поток событий является стационарным пуассоновским потоком. Выделим произвольный отрезок времени длины  $\tau$ . Определим для такого потока  $P_m(\tau)$  — вероятность того, что в отрезок времени длины  $\tau$  попадет ровно  $m$  событий потока.

Так как поток стационарный, то для него можно определить величину  $\lambda$  — плотность потока (среднее число событий, приходящихся на единицу времени). Тогда в элементарный отрезок длины  $\Delta t$  попадет в среднем  $\lambda \Delta t$  событий. Так как поток ординарный, то при  $\Delta t \rightarrow 0$  вероятность попадания в отрезок  $\Delta t$  одного события приблизительно равна математическому ожиданию числа событий, попавших в него, т.е.  $P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$ . Соответственно, вероятность отсутствия событий на отрезке  $\Delta t$  равна  $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$ .

Разделим отрезок  $\tau$  на  $n$  частей длины  $\Delta t = \frac{\tau}{n}$ . Тогда вероятность того, что на отрезке  $\Delta t$  произошло одно событие, равна  $P_1(\Delta t) \approx \frac{\lambda \tau}{n}$ , а вероятность отсутствия событий —  $P_0(\Delta t) \approx 1 - \frac{\lambda \tau}{n}$ .

Так как поток без последствия, то вероятность того, что среди  $n$  частей ровно  $m$  частей "заняты", равна

$$P_m(\tau) \approx C_n^m \left( \frac{\lambda \tau}{n} \right)^m \left( 1 - \frac{\lambda \tau}{n} \right)^{n-m},$$

где  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  — число сочетаний из  $n$  по  $m$ , или

$$P_m(\tau) \approx C_n^m \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}, \quad (39)$$

где  $a = \lambda\tau$ .

Перейдем в формуле (39) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} P_m(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{a^m}{n^m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \cdot \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{\left(\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^m} = \\ &= 1 \cdot \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{e^{-a}}{1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$P_m(\tau) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda\tau}. \quad (40)$$

На рис. 15 показаны зависимости  $P(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$  для различных значений параметра  $a$ .

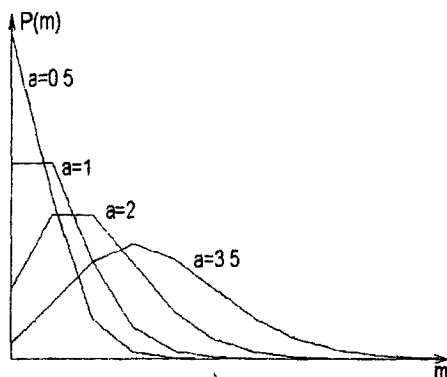


Рис. 15

На основании (40) можно вывести закон распределения для случайной величины  $T$  — длины промежутка между соседними событиями.

Получим выражение для функции распределения случайной величины  $T$ . По определению,  $F(t) = P(T < t)$ . Тогда  $1 - F(t) = P(T \geq t)$  — вероятность того, что на интервале  $[t_0; t_0 + T)$  не произошло второго события, если первое событие произошло в момент  $t_0$ . Но  $P(T \geq t) = P_0(t)$  — вероятность того, что на участке  $[t_0; t_0 + t)$  длины  $t$  не произошло ни одного события. Поэтому  $1 - F(t) = P(T \geq t) = P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$ .

Отсюда получаем выражение для плотности распределения длины промежутка между соседними событиями:

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (41)$$

Математическое ожидание случайной величины  $T$  имеет вид

$$m_T = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Действительно, если  $\lambda$  — плотность потока, т.е. среднее количество событий на единицу длины, то  $\frac{1}{\lambda}$  — средняя длина промежутка между соседними событиями.

**Определение 8.** Закон распределения с плотностью (41) называется *показательным*.

На рис. 16 показан график плотности показательного распределения.

Таким образом, для стационарного пуассоновского процесса плотность распределения длины промежутка между соседними событиями является показательной функцией указанного вида (41).



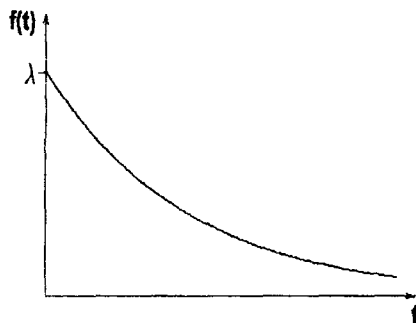


Рис. 16

**Замечание.** Если плотность распределения длины промежутка между соседними событиями является другой функцией, то это означает, что не выполняется по крайней мере одно из трех свойств стационарного пуассоновского процесса: стационарность, отсутствие последствия или ординарность.

Если поток событий является ординарным, без последствия, но нестационарным, то он называется *нестационарным пуассоновским потоком*. Для него вводится понятие мгновенной плотности  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = m'(t).$$

Здесь  $m(t)$  — математическое ожидание числа событий на участке  $(0, t)$ . Для такого потока, как и для стационарного потока,  $P_m(\tau, t_0)$  — вероятность того, что на отрезок времени длины  $\tau$ , начинающийся в момент  $t_0$ , попадет  $m$  событий потока.

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (42)$$

где  $a$  — математическое ожидание числа событий на от-

резке  $[t_0; t_0 + \tau]$ :  $a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$ .

Наличие дополнительного параметра  $t_0$  в выражении (42) в случае нестационарного потока обусловлено тем, что, в отличие от стационарного потока, величина параметра  $a$  зависит не только от длины участка, но и от его начала.

Так же, как и для стационарного потока, для нестационарного потока на основании (42) можно вывести закон распределения для случайной величины  $T$  — длины промежутка между соседними событиями, при условии, что первое событие произошло в момент  $t_0$ .

$$F_{t_0}(\tau) = P_{t_0}(T < \tau) = 1 - P_{t_0}(T \geq \tau) = 1 - e^{-a}.$$

Таким образом,

$$F_{t_0}(\tau) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt}.$$

**Пример.** Пусть  $\lambda(t) = \frac{1}{c+t_0-t}$  при  $t \in [0, c]$ . Тогда

$$F_{t_0}(\tau) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{c+t_0-t} dt} = 1 - e^{\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{t-c-t_0} dt}.$$

$$F_{t_0}(\tau) = 1 - e^{\ln|t-c-t_0|} \Big|_{t_0}^{t_0+\tau} = 1 - \frac{|\tau - c|}{c} = 1 - \frac{c - \tau}{c} = \frac{\tau}{c},$$

так как  $\tau \leq c$  из определения функции  $\lambda(t)$ .

Плотность распределения длины промежутка между соседними событиями имеет вид  $f_{t_0}(t) = F'_{t_0}(t) = \frac{1}{c}$ .

Таким образом, поток с равномерной плотностью распределения длины промежутка между соседними событиями является нестационарным пуассоновским потоком с функцией  $\lambda(t) = \frac{1}{c+t_0-t}$ .

Для большинства СМО интервалы между последовательными моментами поступления заявок являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами (с равномерной или неравномерной плотностью распределения). Таким образом, потоки заявок в таких СМО являются стационарными или нестационарными пуассоновскими потоками. Действительно, для любой наперед заданной функции распределения  $F(\tau)$  промежутков времени между соседними заявками можно однозначно получить выражение для соответствующей функции  $\lambda(t)$ :

$$F_{t_0}(\tau) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt}.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt = -\ln(1 - F_{t_0}(\tau)),$$

$$\Lambda(t_0 + \tau) = \Lambda(t_0) - \ln(1 - F_{t_0}(\tau)),$$

где  $\Lambda(t)$  — первообразная функции  $\lambda(t)$ . При этом выражение в правой части является возрастающей функцией. Поэтому  $\lambda(t) \geq 0$ .

## 7.2 Организация очереди заявок

Очередь возникает, если заявка не может быть обслужена в момент своего поступления. Различают СМО с отказами обслуживания и с очередями. Очередь характеризуется числом мест ожидания. СМО с отказами можно рассматривать как СМО с очередью нулевой длины. Рассматриваются также СМО с бесконечной очередью. Это является формализацией ситуации, когда число мест ожидания

настолько велико, что в данной СМО все поступившие заявки могут быть помещены в очередь с учетом темпов поступления заявок и их обслуживания.

### 7.3 Дисциплина обслуживания заявок

Различаются следующие основные виды дисциплины обслуживания:

- FIFO — "First In First Out" — заявки начинают обслуживаться в порядке их поступления (однако, если обслуживание осуществляется параллельно несколькими обслуживающими устройствами с разной производительностью, то обслуживание очередной заявки может начаться раньше, чем закончится обслуживание предыдущей заявки);

- LIFO — "Last In First Out" — заявки начинают обслуживаться в обратном порядке: первой начинает обслуживаться заявка, поступившая в СМО последней. Такая организация обслуживания называется стеком (Stack);

- SIRO — "Service In Random Order" — заявки начинают обслуживаться в случайном порядке;

- PS — "Processor Sharing" — все заявки, находящиеся в системе, обслуживаются одновременно. Каждая заявка обслуживается в течение фиксированного кванта времени. Если в течение этого кванта обслуживание заявки не заканчивается, то система запоминает состояние текущей заявки и переходит к обслуживанию следующей заявки;

- PSS — "Priority Service System" — все заявки, находящиеся в системе, разделяются на приоритетные классы. Таким образом, в системе организуется  $n$  очередей по числу приоритетных значений. Выбор очередной заявки на обслуживание осуществляется из непустой очереди с максимальным приоритетом. При такой дисциплине обслуживания при наличии постоянного потока высокоприоритет-

ных заявок очередь низкоприоритетных заявок может переполняться. Для того, чтобы низкоприоритетные заявки обслуживались в приемлемое время, в таких системах часто используется дополнительная процедура увеличения на единицу приоритета заявки, т.е. переноса ее в соседнюю более приоритетную очередь после пребывания ее в текущей очереди в течение определенного времени  $t_0$  — параметра системы обслуживания с приоритетами.

#### **7.4 Число приборов в СМО и схема их соединения**

В классической теории массового обслуживания рассматриваются системы, имеющие идентичные обслуживающие приборы (ОП), которые могут работать одновременно. Таким образом,  $n$  ОП одновременно обслуживают до  $n$  заявок. Примером такой системы является офисная многоканальная телефонная станция.

В настоящее время многие СМО в соответствии со спецификой заявок обслуживают их в несколько этапов. При этом на каждом этапе могут работать параллельно несколько обслуживающих устройств, а между обслуживающими устройствами разных этапов могут быть размещены буферные запоминающие устройства для организации очереди заявок к обслуживающим устройствам очередного этапа.

Пример такой СМО приведен на рис. 17.

Кроме того, заявка, в зависимости от результатов, полученных при анализе заявки на первом этапе обслуживания, может проходить разное число стадий обслуживания. Примером такой СМО является информационная база (ИБ), содержащая текстовую и графическую информацию. Если ответом на запрос к такой ИБ является текст, то он форматируется и выдается Заказчику. Если кроме

текста необходимо выдать изображение, то дополнительным этапом обработки является компоновка текстовой и графической информации.

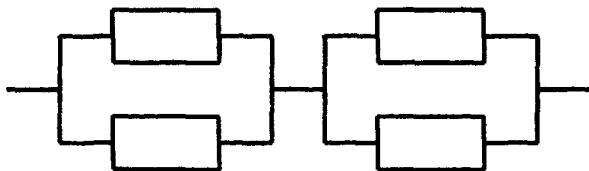


Рис. 17

Важной задачей при проектировании таких систем является определение емкостей буферных запоминающих устройств и количества обслуживающих устройств на каждом этапе, обеспечивающих сбалансированную загрузку всех обслуживающих устройств СМО.

Следует отметить, что вычислительная техника является важной составной частью СМО. Вместе с тем, отдельные устройства компьютеров также являются системами массового обслуживания. Основным устройством компьютера, осуществляющим обработку информации, является процессор. Повышение производительности компьютера осуществляется по четырем основным направлениям:

- повышение тактовой частоты;
- совершенствование структуры процессора;
- совершенствование структуры компьютера в целом;
- создание многопроцессорных компьютеров.

Наращивание тактовой частоты имеет технологические ограничения, поэтому основное внимание уделяется трем остальным направлениям.

Рассмотрим, например, структуру современного процессора с точки зрения СМО.

Микропроцессор шестого поколения Pentium 4 [5], выпущенный Intel в июне 2000 года, продолжает линию микропроцессоров с архитектурой x86.

Структура микропроцессора показана на рис. 18.

В Pentium 4 реализованы:

- гарвардская архитектура внутренней памяти с разделением потоков команд и данных;
- суперскалярная архитектура, обеспечивающая одновременное выполнение нескольких команд в параллельно работающих исполнительных устройствах;
- динамическое изменение последовательности команд;
- конвейерное исполнение команд;
- предсказание переходов.

Раздельные потоки команд и данных поступают от системной шины в процессор через **блок внешнего интерфейса** и общую **кэш-память второго уровня** объемом 256 Кбайт.

**Дешифратор команд** на основе записанных в **постоянной памяти микропрограмм** осуществляет преобразование x86-команды в последовательность микрокоманд, помещаемых в **кэш-память микрокоманд** емкостью 12000 микрокоманд. Порядок размещения команд соответствует порядку их выполнения с учетом предсказанных переходов **Блоком трассировки и предсказания ветвлений**.

**Блок трассировки и предсказания ветвлений** содержит **буфер адресов ветвлений (БАВ)** емкостью в 4092 адреса ранее выполненных переходов с предысторией их выполнения. **Блок трассировки и предсказания ветвлений** обеспечивает вероятность правильного предсказания ветвления перехода, равную 0.9.

**Блок распределения регистров** выполняет назначе-

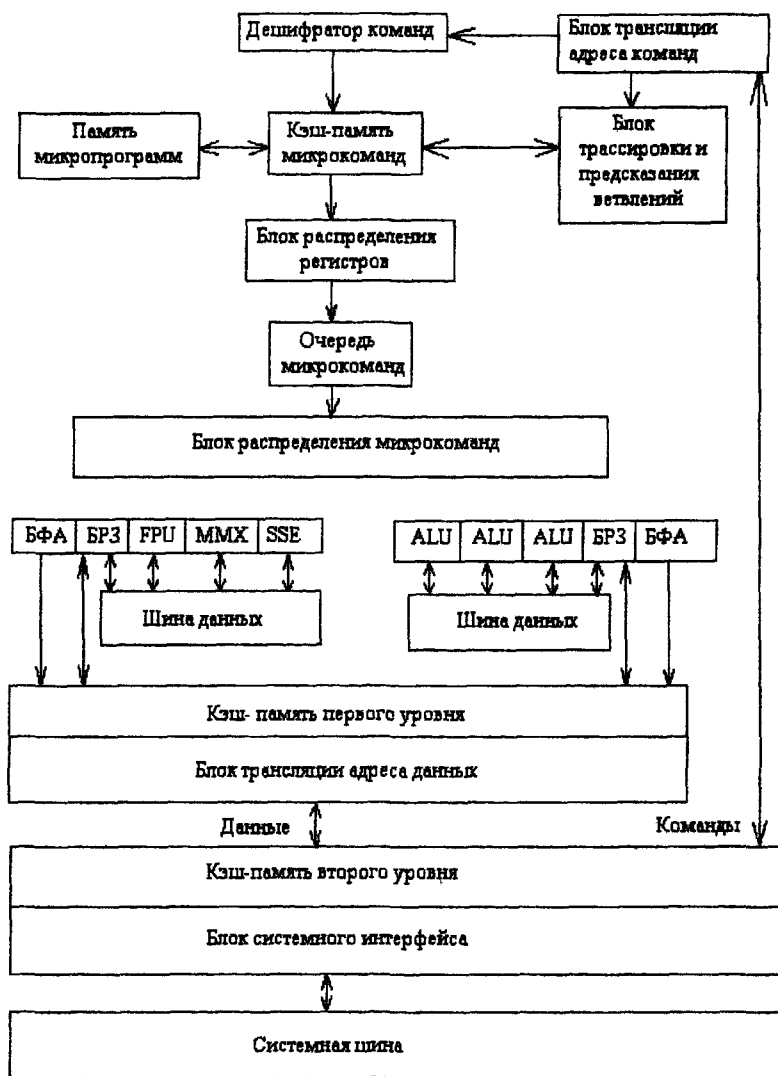


Рис. 18



ние каждому из логических регистров микрокоманд одного из 128 физических регистров **блока регистров замещения (БРЗ)**. Сформированная последовательность микрокоманд размещается в очереди, допускающей хранение микрокоманд для 126 команд x86.

**Блок распределения микрокоманд** выбирает микрокоманды из очереди не в порядке их поступления, а по мере готовности необходимых операндов и исполнительных устройств. При этом реализуется одновременное выполнение до шести микрокоманд в параллельно работающих исполнительных устройствах.

**Буфер переупорядочивания** обеспечивает порядок выдачи результатов микрокоманд во внешнюю память, соответствующий следованию команд в программе.

**Блоки трансляции адреса команд и данных** формирует физические адреса памяти, применяя для хранения базовых адресов **внутреннюю буферную память**.

Адреса выбираемых из памяти операндов вычисляются **блоком формирования адреса (БФА)** данных с использованием **кэш-памяти первого уровня** объемом 8 Кбайт. **БФА** формирует 48 адресов для загрузки операндов из памяти в регистр **БРЗ** и 24 адреса для записи из регистра в память для команд, еще не выбранных на выполнение.

Ядро процессора содержит конвейеризированные (с двадцатью ступенями конвейера) блоки **ALU** (целочисленные операции), **FPU** (операции с плавающей точкой), **MMX** (обработка данных мультимедиа). Число ступеней конвейера (20) получено в результате имитационного моделирования. Увеличение числа ступеней конвейера увеличивает потери, связанные с необходимостью очистки конвейера в случае выполнения команд ветвления, когда требуется

выбрать команду из другой ветви программы.

**Блок SSE** (Streaming SIMD Extensions) реализует поточную обработку мультимедийных данных в формате с плавающей точкой. Одна SIMD-команда одновременно обрабатывает четыре 32-разрядных числа с плавающей точкой, упакованные в т.н. 128-разрядное SPFP-значение.

## 7.5 Распределение времени обслуживания заявок каждым обслуживающим прибором

Для задания распределения времени обслуживания заявок каждым обслуживающим прибором используются те же функции, которые используются для описания характеристик входного потока (см. п.7.1.2.).

Для краткого обозначения простых СМО используется т.н. символика Кендалла:  $A/B/n/m$ .

Здесь:

$A$  — тип входного потока,

$B$  — тип распределения времени обслуживания заявок приборами,

$n$  — число обслуживающих приборов ( $1 \leq n \leq \infty$ ),

$m$  — максимальная длина очереди ( $0 \leq m \leq \infty$ ),

$$A = \begin{cases} M - \text{простейший или стационарный поток без} \\ \quad \text{последствия,} \\ E_k - \text{поток Эрланга порядка } k, \\ HM_k - \text{гиперэкспоненциальный поток} \\ \quad \text{порядка } k, \\ D - \text{детерминированный поток,} \\ G - \text{рекуррентный поток,} \\ GI - \text{рекуррентный поток с запаздыванием,} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} M - \text{время обслуживания распределено} \\ \quad \text{экспоненциально,} \\ E_k - \text{время обслуживания подчинено закону} \\ \quad \text{Эрланга порядка } k, \\ HM_k - \text{время обслуживания подчинено гипер-} \\ \quad \text{экспоненциальному закону порядка } k, \\ D - \text{детерминированное обслуживание,} \\ G - \text{рекуррентное обслуживание,} \\ GI - \text{рекуррентное обслуживание с запаздыванием.} \end{cases}$$

При  $n = 1$  СМО называется одноканальной.

**Примечание.** В данных методических указаниях ввиду ограниченного объема мы не рассматриваем СМО с рекуррентным обслуживанием заявок и СМО с рекуррентным обслуживанием с запаздыванием, эти системы описаны в [6].

## 7.6 Пример моделирования процесса обслуживания заявок в СМО

Целью моделирования является эмпирическое получение числовых характеристик СМО, например, таких, как средняя очередь в момент времени  $t_0$ , стационарное время прохождения заявки через СМО, среднее время простоя некоторого прибора на промежутке времени  $[t_0, t_0 + T]$  и т.д. Функции распределения времени обслуживания заявок на каждом приборе СМО и функции распределения интервалов времени между поступлениями заявок заданы.

Рассмотрим пример.

Пусть интервалы между поступлениями заявок в СМО имеют закон распределения с плотностью вида 4 (см. стр.

44):

$$f(x) = \begin{cases} a(b-x), & x \in (0, b), \\ 0, & x \notin (0, b). \end{cases} \quad (43)$$

Интенсивность поступления заявок в систему равна  $\lambda$ .  
Найдем параметры  $a$  и  $b$  из следующих условий:

$$\int_0^b f(x) dx = 1, \quad (44)$$

$$M(x) = \int_0^b x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}. \quad (45)$$

Из условия (44) имеем:

$$\left( abx - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^b = ab^2 - \frac{ab^2}{2} = \frac{ab^2}{2} = 1. \quad (46)$$

Из условия (45) получим:

$$\left( \frac{abx^2}{2} - \frac{ax^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{ab^3}{2} - \frac{ab^3}{3} = \frac{ab^3}{6} = \frac{1}{\lambda}. \quad (47)$$

Например, для  $\lambda = 0.2$  из (46) и (47) получаем  $a = \frac{2}{225}$ ,  
 $b = 15$ .

Найдем функцию распределения:

$$\begin{aligned} y = F(x) &= \int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{2}{225} (15 - t) dt = \\ &= \left( \frac{2}{15} t - \frac{1}{225} t^2 \right) \Big|_0^x = \frac{2}{15} x - \frac{1}{225} x^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Выразим из (48)  $x$  через  $y$ , решив квадратное уравнение

$$\frac{1}{225}x^2 - \frac{2}{15}x + y = 0,$$

или

$$x^2 - 30x + 225y = 0.$$

Получим

$$x = 15 \pm 15\sqrt{1-y} = 15(1 - \sqrt{1-y}). \quad (49)$$

В последнем выражении мы выбрали знак "−", так как при  $y \in [0, 1]$   $x$  должно принимать значения из интервала  $(0, b) = (0, 15)$ .

Смоделируем интервалы между поступлениями заявок в систему методом обратной функции (см. [3]), используя (49).

Пусть  $t_i$  — интервалы между поступлениями заявок,  $\tau_i$  — моменты поступления заявок на обслуживание в СМО,

вычисляемые по формуле  $\tau_i = \sum_{k=1}^i \tau_k$ .

$t_1 = 11.53,$	$\tau_1 = 11.53$
$t_2 = 3.57,$	$\tau_2 = 15.1$
$t_3 = 6.12,$	$\tau_3 = 21.22$
$t_4 = 12.2,$	$\tau_4 = 33.32$
$t_5 = 0.59,$	$\tau_5 = 33.91$
$t_6 = 6.93,$	$\tau_6 = 40.84$
$t_7 = 2.76,$	$\tau_7 = 43.6$
$t_8 = 12.51,$	$\tau_8 = 56.11$
$t_9 = 8.51,$	$\tau_9 = 64.62$
$t_{10} = 4.72,$	$\tau_{10} = 69.34$

**Замечание.**

**При моделировании СМО на ЭВМ следует моделировать интервалы между поступлениями заявок в систему и времена обслуживания заявок на каждом из приборов СМО "по мере необходимости", т.е. по мере обработки заявок системой, а не сразу для всех заявок одновременно.**

Это связано с тем, что количество заявок велико. При моделировании СМО в рамках 16-разрядных DOS-версий систем программирования (Pascal, C, C++ и др.) под информационные объекты (например, массивы значений) отводится ограниченный объем памяти. Поэтому попытка размещения в программе массивов большой размерности может привести к аварийному завершению программы. При моделировании СМО в рамках современных 32-разрядных Visual-версий систем программирования (Delphi, Visual Studio и др.) на объем информационных объектов не накладывается ограничений. Однако, отдельные фрагменты больших информационных объектов могут размещаться в SWAP-буферах. SWAP-буферы реализуются операционной системой в виде служебных файлов на внешних запоминающих устройствах (например, винчестерах). В этом случае регулярное обращение к информации, размещенной в SWAP-буферах, увеличивает среднее время обращения к массиву (хотя в рамках операционной системы реализованы специальные оптимизационные алгоритмы страничного обмена между SWAP-буферами и оперативной памятью), что существенно замедляет работу программы.

Пусть СМО состоит из трех приборов, соединенных следующим образом (см. рис. 19).

Интенсивности обслуживания заявок на приборах рав-

ны соответственно:  $\lambda_1 = 1.2$ ,  $\lambda_2 = 1.2$ ,  $\lambda_3 = 0.2$ . Законы распределения времени обслуживания заданы с помощью функции плотности распределения вида (43).

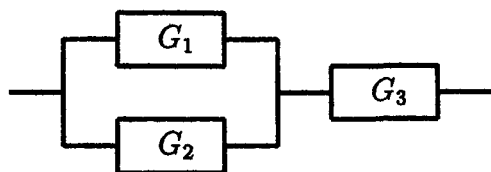


Рис. 19

Для  $\lambda_{1,2} = 1.2$  из (46) и (47) получаем  $a = \frac{8}{25} = 0.32$ ,  $b = \frac{5}{2} = 2.5$ . Для  $\lambda_3 = 0.2$   $a = \frac{2}{225}$ ,  $b = 15$ .

Моделирование времени обслуживания на трех приборах выполним методом обратной функции (см. [3]). Найдем функцию распределения для  $\lambda_{1,2} = 1.2$ :

$$\begin{aligned} y = F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0.32(2.5 - t) dt = \\ &= (0.8t - 0.16t^2) \Big|_0^x = 0.8x - 0.16x^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Выразим из (50)  $x$  через  $y$ , решив квадратное уравнение

$$0.16x^2 - 0.8x + y = 0.$$

Получим

$$x = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.64 - 0.64y}}{0.32} = 2.5(1 - \sqrt{1 - y}).$$

В последнем выражении мы выбрали знак "−", так как при  $y \in [0, 1]$   $x$  должно принимать значения из интервала  $(0, b) = (0, 2.5)$ .

Для  $\lambda_3 = 0.2$  функция распределения и обратная функция были найдены ранее ((48), (49)).

Смоделируем времена обслуживания заявок тремя приборами. Обозначим через  $T_i^j$  время обслуживания заявки  $i$  на приборе  $j$ .

$$\begin{array}{lll}
 T_1^1 = 1,41 & T_1^2 = 0.82 & T_1^3 = 7.03 \\
 T_2^1 = 0.09 & T_2^2 = 0.21 & T_2^3 = 4.05 \\
 T_3^1 = 1.81 & T_3^2 = 0.28 & T_3^3 = 6.11 \\
 T_4^1 = 0.56 & T_4^2 = 1.02 & T_4^3 = 12.66 \\
 T_5^1 = 0.06 & T_5^2 = 0.62 & T_5^3 = 6.68 \\
 T_6^1 = 1.42 & T_6^2 = 1.8 & T_6^3 = 8.5 \\
 T_7^1 = 0.09 & T_7^2 = 1.16 & T_7^3 = 0.57 \\
 T_8^1 = 1.82 & T_8^2 = 0.82 & T_8^3 = 7.5 \\
 T_9^1 = 0.57 & T_9^2 = 0.28 & T_9^3 = 5.05 \\
 T_{10}^1 = 1.31 & T_{10}^2 = 1.14 & T_{10}^3 = 7.29
 \end{array}$$

В следующей таблице смоделирована очередь заявок на входе в СМО.

Номер заявки	Время прихода	Время ухода	Прибор обслуживания
1	11.53	11.53	$G_1$
2	15.1	15.1	$G_1$
3	21.22	21.22	$G_1$
4	33.32	33.32	$G_1$
5	33.91	33.91	$G_1$
6	40.84	40.84	$G_2$
7	43.6	46.54	$G_1$
8	56.11	56.11	$G_2$
9	64.62	64.62	$G_1$
10	69.34	69.34	$G_2$

Смоделируем работу приборов  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ , запишем в таблицы.



Первый прибор ( $G_1$ )

Номер заявки	Время прихода	Длительность обслуживания	Ожидаемое время ухода	Фактическое время ухода
1	11.53	1.41	12.94	12.94
2	15.1	0.09	15.19	19.97
3	21.22	1.81	23.03	24.02
4	33.32	0.56	33.88	33.88
5	33.91	0.06	33.97	46.54
7	46.54	1.42	47.96	61.72
9	64.62	0.09	64.71	69.79

Второй прибор ( $G_2$ )

Номер заявки	Время прихода	Длительность обслуживания	Ожидаемое время ухода	Фактическое время ухода
6	40.84	0.82	41.66	53.22
8	56.11	0.21	56.32	62.29
10	69.34	0.28	69.62	74.84

Третий прибор ( $G_3$ )

Номер заявки	Время прихода	Длительность обслуживания	Время ухода из СМО
1	12.94	7.03	19.97
2	19.97	4.05	24.02
3	24.02	6.11	30.13
4	33.88	12.66	46.54
5	46.54	6.68	53.22
6	53.22	8.5	61.72
7	61.72	0.57	62.29
8	62.29	7.5	69.79
9	69.79	5.05	74.84
10	74.84	7.29	82.13

### **Комментарии.**

1. Заявка № 2 на приборе  $G_1$  закончила обслуживаться в 15.19. Прибор  $G_3$  освободился в 19.97, фактическое время ухода равно 19.97.

2. Заявка № 5 на приборе  $G_1$  закончила обслуживаться в 33.97. Но прибор  $G_3$  занят обслуживанием заявки № 4 до 46.54. Поэтому и прибор  $G_1$  находится в состоянии ожидания до 46.54.

3. Заявка № 6 поступила в СМО в 40.84. В этот момент свободен прибор  $G_2$ . Поэтому заявка № 6 сразу начинает обслуживаться на этом приборе.

4. Заявка № 6 на приборе  $G_2$  закончила обслуживаться в 41.66. Но прибор  $G_3$  занят обслуживанием заявки № 5 до 53.22. Поэтому и прибор  $G_2$  находится в состоянии ожидания до 53.22.

5. Заявка № 7 на приборе  $G_1$  закончила обслуживаться в 47.96. Но прибор  $G_3$  занят обслуживанием заявки № 6 до 61.72. Поэтому и прибор  $G_1$  находится в состоянии ожидания до 61.72.

Аналогичные комментарии можно дать и по обслуживанию других заявок в данной СМО.

## **7.7 Задание к лабораторной работе № 7**

### **Варианты задания № 7.**

В таблице указаны параметры СМО, здесь

$V$  — номер варианта,

$\lambda$  — интенсивность поступления заявок в СМО,

$\lambda_i$  — интенсивность обслуживания заявки на приборе  $i$ ,

$N$  — номер схемы, описывающей СМО,

$k$  — номер плотности распределения  $f_k(x)$  или закона распределения,

$s$  — номер вычисляемой характеристики.

$V$	$\lambda$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$N$	$k$	$s$
1	2	0,47	0,43	0,9	0,83	1	1	1
2	2,2	0,3	0,91	0,67	0,53	2	2	2
3	3,0	0,34	0,87	0,6	0,7	3	3	3
4	3,5	0,63	0,57	0,39	0,55	4	4	4
5	0,8	0,4	1,2	8,1	11,4	5	5	5
6	0,5	6,8	0,71	5,0	3,4	6	6	6
7	4,0	1,0	0,87	0,88	0,1	7	7	7
8	2,5	0,44	12,0	0,7	0,1	8	8	8
9	0,7	0,8	1,3	7,8	3,45	9	9	9
10	2,0	0,4	5,5	8,0	0,3	10	10	10
11	3,4	5,7	0,34	0,11	0,9	1	2	3
12	2,4	3,1	0,5	4,2	0,7	2	3	4
13	11,4	10,4	0,53	0,4	0,88	3	4	5
14	1,3	2,4	9,4	5,8	0,66	4	5	6
15	0,2	3,2	0,4	0,7	1,3	5	6	7
16	0,4	0,9	3,7	0,1	1,3	6	7	8
17	9,2	10,3	8,3	0,7	2,4	7	8	9
18	2,1	3,0	5,4	0,9	1,5	8	9	10
19	0,66	1,56	0,4	7,4	0,53	1	10	9
20	7,5	8,4	2,0	3,1	0,9	2	1	8
21	5,5	4,8	2,8	11,4	0,7	3	2	7
22	0,53	2,3	4,7	7,1	1,0	4	3	6
23	1,6	0,65	2,4	0,99	0,53	5	4	5
24	2,4	3,2	0,57	11,4	0,7	6	5	4
25	4,3	5,8	1,3	0,88	0,4	7	6	3

Виды функций плотности распределения  $f_k(x)$ :

$$1. \quad f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2. \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & x \in (0, b), \\ 0, & x \notin (0, b). \end{cases}$$

$$3. \quad f_3(x) = \begin{cases} a^x, & x \in (0, b), \\ 0, & x \notin (0, b). \end{cases}$$

$$4. \quad f_4(x) = \begin{cases} a(b-x), & x \in (0, b), \\ 0, & x \notin (0, b). \end{cases}$$

$$5. \quad f_5(x) = \begin{cases} bx, & x \in (0, a), \\ 2ab - bx, & x \in (a, 2a), \\ 0, & x \notin (0, 2a). \end{cases}$$

$$6. \quad f_6(x) = \begin{cases} b, & x \in (0, b), \\ ab, & x \in (a, 2a), \\ 3ab - bx, & x \in (2a, 3a), \\ 0, & x \notin (0, 3a). \end{cases}$$

Виды законов распределения:

7. 

$X$	0	5	10	15
$p$	$a$	$2a$	$a$	$1 - 4a$

8. 

$X$	0	1	10
$p$	$a$	$a$	$1 - 2a$

9. 

$X$	1	2	10	20
$p$	$a$	$2a$	$a$	$1 - 4a$

10. 

$X$	5	10	50
$p$	$a$	$a$	$1 - 2a$

Схема 1

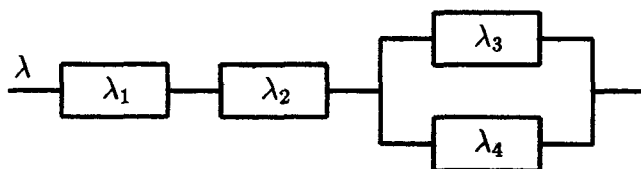


Схема 2

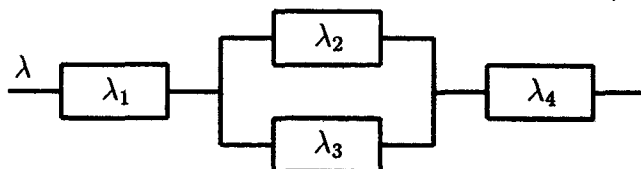


Схема 3

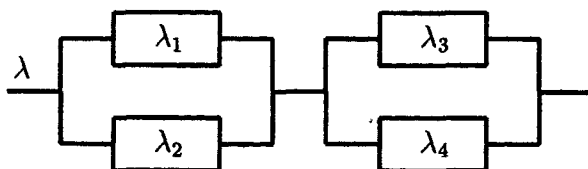


Схема 4

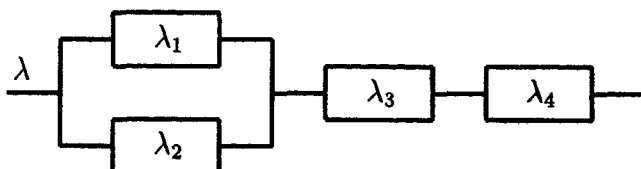


Схема 5

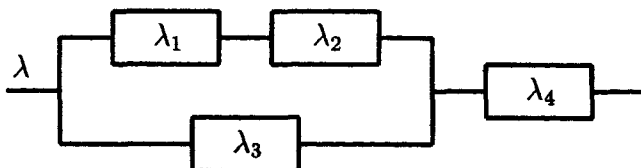


Схема 6

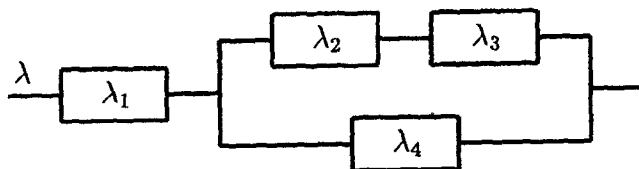


Схема 7

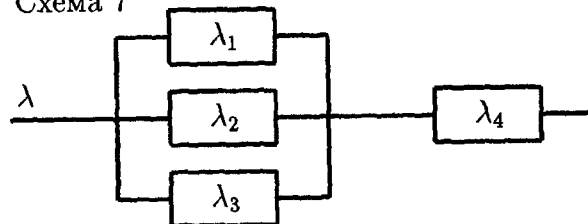


Схема 8

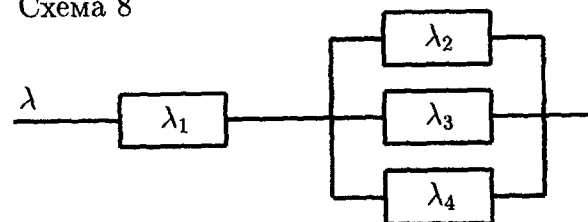


Схема 9

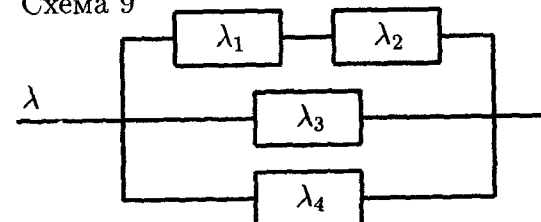
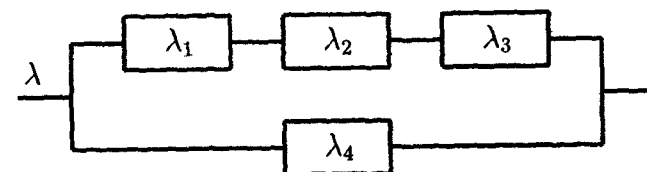


Схема 10



**Вычисляемые характеристики с примечаниями по их вычислению.**

1. **Средняя очередь в момент времени  $t_0$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. При каждом моделировании подсчитывается длина очереди  $R_{t_0}$  в момент времени  $t_0$  как разность количеств заявок, пришедших до момента времени  $t_0$ , и выбранных из очереди до этого момента.
2. **Средняя очередь на интервале времени  $(t_0, t_0 + T)$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. При каждом моделировании вычисляется  $R_{t_0}$  так, как это было указано в п.1. Далее упорядочиваются события очереди (поступление заявки, выбор заявки из очереди) на интервале  $(t_0, t_0 + T)$ . Пусть события очереди на указанном интервале произошли в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$  ( $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_0 + T$ ). Пусть  $t_0 + T = t_k$ . На каждом из интервалов  $(t_{i-1}, t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  длина очереди остается постоянной. В этом случае можно вычислить  $R_{t_0, t_0+T}$  — оценку математического ожидания длины очереди на интервале  $(t_0, t_0 + T)$  — следующим образом. Пусть

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{— если в момент } t_i \text{ заявка} \\ & \text{поступила в СМО,} \\ -1 & \text{— если в момент } t_i \text{ заявка выбрана} \\ & \text{из очереди на обслуживание.} \end{cases}$$

Положим также  $u_0 = 0$ . Тогда

$$R_{t_0, t_0+T} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \left[ (t_i - t_{i-1}) \left( R_{t_0} + \sum_{j=1}^i u_{j-1} \right) \right],$$

или

$$R_{t_0, t_0+T} = R_{t_0} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \left[ (t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^i u_{j-1} \right].$$

Пусть в рассмотренном примере (см. п. 7.6)  $t_0 = 43$ ,  $T = 4$ . Тогда  $R_{t_0} = 0$ ,  $t_1 = 43.6$ ,  $t_2 = 46.54$ ,  $t_3 = 47$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$ ,  $R_{t_0, t_0+T} = 0 + \frac{(43.6-43)*0 + (46.54-43.6)*1 + (47-46.54)*0}{4} = \frac{2.94}{4} = 0.735$

3. **Стационарная средняя очередь.** Необходимо смоделировать работу СМО на длительном промежутке времени, например,  $t_{2500}$  ( $t_{2500}$  — время, которое требуется для прохождения через СМО 2500 заявок) несколько раз. При этом средняя длина очереди вычисляется для двух отдаленных моментов времени (например, для  $t_{2300}$  и  $t_{2400}$ ) так, как это указано в п. 1. Если  $|R_{t_{2400}} - R_{t_{2300}}| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — параметр), то стационарного режима нет. При моделировании следует обратить внимание на замечание на с. 38.
4. **Среднее виртуальное время прохождения заявки через данный прибор в момент времени  $t_0$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. При каждом моделировании необходимо взять длительность нахождения на заданном приборе той заявки, которая находилась на приборе в заданный момент времени.
5. **Среднее время обслуживания заявки на интервале времени  $(t_0, t_0 + T)$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. При каждом моделировании необходимо взять среднюю длительность прохождения через СМО тех заявок, которые находились на обслуживании (т. е. уже были выбраны из



очереди) в интервале  $(t_0, t_0 + T)$ . Если  $a$  — момент выбора заявки из очереди,  $b$  — время окончания обслуживания данной заявки, то время прохождения данной заявки через СМО учитывается в том случае, когда одновременно выполняются два условия:  $b \geq t_0$  и  $a \leq t_0 + T$ .

6. **Стационарное время прохождения заявки через СМО.** Необходимо смоделировать работу СМО на длительном промежутке времени (см. пояснения в п. 3) несколько раз. Вычисляется  $L_{t_0}$  — среднее виртуальное время обслуживания заявки в момент времени  $t_0$  по аналогии с п. 4.  $L_{t_0}$  определяется для двух отдаленных моментов времени (например, для  $t_{2300}$  и  $t_{2400}$ ). Если  $|L_{t_{2400}} - L_{t_{2300}}| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — параметр), то стационарного режима нет. При моделировании следует обратить внимание на замечание на с. 38.
7. **Среднее виртуальное время ожидания на заданном приборе в момент времени  $t_0$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. Вычисляется среднее время ожидания прибора, которое приходилось на момент времени  $t_0$ . Ожидание происходит из-за занятости следующего в цепочке прибора в тот момент, когда данный прибор закончил обслуживание очередной заявки.
8. **Среднее виртуальное время ожидания на заданном приборе на интервале  $(t_0, t_0 + T)$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. Вычисляется средняя длительность ожидания заданного прибора, которое приходилось на какой-либо момент времени в интервале  $(t_0, t_0 + T)$ . Ожидание на приборе определяется так же, как и в п. 7. Если  $a$  —

момент начала ожидания прибора,  $b$  — момент конца ожидания, то длительность ожидания учитывается в том случае, когда одновременно выполняются условия:  $b \geq t_0$  и  $a \leq t_0 + T$ .

9. **Среднее время простоя заданного прибора на интервале  $(t_0, t_0 + T)$ .** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз. Простой происходит из-за отсутствия заявок на входе заданного прибора, когда он не обслуживает какую-либо заявку. Среднее время простоя  $P_{t_0, t_0 + T}$  заданного прибора на интервале  $(t_0, t_0 + T)$  вычисляется так же, как и время ожидания в п. 7 и 8.
10. **Стационарное среднее время простоя заданного прибора.** Необходимо выполнить моделирование СМО несколько раз на длительном промежутке времени (см. п. 3). Вычисляется средняя длительность простоя заданного прибора  $P_{t_0}$  по аналогии с вычислением ожидания в п. 7, приходящаяся на два отдаленных момента времени (например, при  $t_{2300}$  и  $t_{2400}$ ). Если  $|P_{t_{2400}} - P_{t_{2300}}| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — параметр), то стационарного режима нет. При моделировании следует обратить внимание на замечание на с. 38.

## Список литературы

- [1] *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. Учеб. для вузов — 7-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 575 с.
- [2] *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.
- [3] *Иванов А.В., Иванова А.П.* Моделирование случайных величин, систем массового обслуживания и случайных процессов. Часть 1.: Методические указания к лабораторным работам. — М.: МИИТ, 2005. — 28 с.
- [4] *Иванов А.В., Иванова А.П.* Моделирование случайных величин, систем массового обслуживания и случайных процессов. Часть 2.: Методические указания к лабораторным работам. — М.: МИИТ, 2006. — 36 с.
- [5] *Корнеев В.В., Киселев А.В.* Современные микропроцессоры: — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 448 с.
- [6] *Тихоненко О.М.* Модели массового обслуживания в информационных системах: Учеб. пособие — Мн.: УП "Технопринт", 2003. — 327 с.

Учебно-методическое издание

Иванов Александр Валентинович,  
Иванова Александра Петровна

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ  
ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 3

Методические указания  
к лабораторным работам по курсу  
"Математическое моделирование"

---

Подписано в печать **13.12.06.**

Тираж 100

Усл. печ. л. 3,25

Формат 60x84/16

Изд. № **218-06**

Заказ **566.**

---

127994, Москва, ул. Образцова, 15  
Типография МИИТа