

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3334-М3339, осень 2019 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:

- (a)  $\lambda x.x x \lambda x.x x$
- (b)  $(\lambda x.x x) \lambda x.x x$
- (c)  $\lambda x.(x x) \lambda x.x x$
- (d)  $\lambda f.\lambda x.f f f x$

2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:

- (a)  $(\lambda a.\lambda b.a) (\lambda a.\lambda b.a) (\lambda a.\lambda b.b)$
- (b)  $(\lambda a.\lambda b.a) b$
- (c)  $(\lambda f.\lambda x.f (f x)) (\lambda f.\lambda x.f (f x))$

3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:

- (a) Or, Xor;
- (b) тернарная операция в Си ( $?:$ );
- (c) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F);
- (d) isEven (T, если аргумент чётный);
- (e) умножение на 2;
- (f) умножение;
- (g) возведение в степень;
- (h) упорядоченная пара. К паре должны прилагаться три лямбда-выражения  $(M, P_l, P_r)$ : выражение  $M$  по двум значениям строит упорядоченную пару, а выражения  $P_l$  и  $P_r$  возвращают первый и второй элемент упорядоченной пары соответственно.  
Убедитесь, что для ваших выражений выполнено

$$P_l (M A B) \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A$$

и

$$P_r (M A B) \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta B$$

- (i) вычитание 1;
- (j) вычитание;
- (k) сравнение («меньше»);
- (l) деление.

4. Назовём бета-эквивалентностью транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции, будем записывать его как  $(=_\beta)$ . В частности, бета-эквивалентны те термы, которые имеют одинаковую нормальную форму. Также, нетрудно заметить следующее:

- (a)  $And T F =_\beta F$ ;
- (b)  $\Omega =_\beta \Omega$ ;
- (c)  $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n f (f x)) \bar{n} =_\beta \overline{n+1}$ ;
- (d)  $a \neq_\beta b$ .

Мы будем говорить, что лямбда-выражение  $E$  выражает функцию  $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ , если при любых  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0$  выполнено

$$E \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k =_\beta \overline{f(x_1, \dots, x_k)}$$

Какие функции выражают следующие выражения? Ответ обоснуйте.

- (a)  $\lambda t. \lambda n. n \ t$ ;
- (b)  $\lambda t. \lambda n. \lambda x. n \ (t \ x)$ .

5. *Ненормализуемым* назовём лямбда-выражение, не имеющее нормальной формы, то есть выражение, для которого нет конечной последовательности бета-редукций, приводящей к нормальной форме. *Сильно нормализуемым* назовём лямбда-выражение, для которого не существует бесконечной последовательности бета-редукций (любая последовательность бета-редукций неизбежно заканчивается нормальной формой, если её продолжать достаточно долго). *Слабо нормализуемым* назовём лямбда-выражение, которое имеет нормальную форму, но существует бесконечная последовательность бета-редукций, которая не приводит его в нормальную форму. Приведите примеры сильно нормализуемого, слабо нормализуемого и ненормализуемого лямбда-выражения.