Теоретические («малые») домашние задания

Теория типов, ИТМО, M3334-M3339, осень 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:

   (a) $\lambda x.x\ x\ \lambda x.x\ x$

   (b) $(\lambda x.x\ x)\ \lambda x.x\ x$

   (c) $\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.x\ x$

   (d) $\lambda f.\lambda x.f f f x$

2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:

   (a) $(\lambda a.\lambda b.a)\ (\lambda a.\lambda b.a)\ (\lambda a.\lambda b.b)$

   (b) $(\lambda a.\lambda b.a)\ b$

   (c) $(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:

   (a) Or, Xor;

   (b) тернарная операция в Си (`?:`);

   (c) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F);

   (d) isEven (T, если аргумент чётный);

   (e) умножение на 2;

   (f) умножение;

   (g) возведение в степень;

   (h) упорядоченная пара. К паре должны прилагаться три лямбда-выражения (M, P_l, P_r): выражение M по двум значениям строит упорядоченную пару, а выражения P_l и P_r возвращают первый и второй элемент упорядоченной пары соответственно.
   Убедитесь, что для ваших выражений выполнено

   $$P_l\ (M\ A\ B) \to_\beta \dots \to_\beta A$$

   и

   $$P_r\ (M\ A\ B) \to_\beta \dots \to_\beta B$$

   (i) вычитание 1;

   (j) вычитание;

   (k) сравнение («меньше»);

   (l) деление.

4. Назовём бета-эквивалентностью транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции, будем записывать его как $(=_\beta)$. В частности, бета-эквивалентны те термы, которые имеют одинаковую нормальную форму. Также, нетрудно заметить следующее:

   (a) $And\ T\ F =_\beta F$;

   (b) $\Omega =_\beta \Omega$;

   (c) $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{n} =_\beta \overline{n+1}$;

   (d) $a \neq_\beta b$.

   Мы будем говорить, что лямбда-выражение E выражает функцию $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$, если при любых $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0$ выполнено

   $$E\ \overline{x_1}\ \dots\ \overline{x_k} =_\beta \overline{f(x_1, \dots, x_k)}$$

   Какие функции выражают следующие выражения? Ответ обоснуйте.

(a) $\lambda m.\lambda n.n\ m$;

(b) $\lambda m.\lambda n.\lambda x.n\ (m\ x)$.

5. *Ненормализуемым* назовём лямбда-выражение, не имеющее нормальной формы, то есть выражение, для которого нет конечной последовательности бета-редукций, приводящей к нормальной форме. *Сильно нормализуемым* назовём лямбда-выражение, для которого не существует бесконечной последовательности бета-редукций (любая последовательность бета-редукций неизбежно заканчивается нормальной формой, если её продолжать достаточно долго). *Слабо нормализуемым* назовём лямбда-выражение, которое имеет нормальную форму, но существует бесконечная последовательность бета-редукций, которая не приводит его в нормальную форму. Приведите примеры сильно нормализуемого, слабо нормализуемого и ненормализуемого лямбда-выражения.

Домашнее задание №2: «теорема Чёрча-Россера, Y-комбинатор»

1. *Полное доказательство теоремы Чёрча-Россера.* На лекции был представлен план доказательства теоремы, в котором необходимо заполнить пустоты.

   (a) Покажите, что отношение бета-редукции — подотношение отношения параллельной бета-редукции. В символической записи, $(\to_\beta) \subseteq (\rightrightarrows_\beta)$. То есть, если $A \to_\beta B$, то $A \rightrightarrows_\beta B$.

   (b) Покажите, что каковы бы ни были термы A, P, Q и переменная x, если выполнено $P \rightrightarrows_\beta Q$, то $A[x := P] \rightrightarrows_\beta A[x := Q]$. Убедитесь, что это справедливо и если x не входит свободно в A.

   (c) Покажите, что каковы бы ни были термы A, B, P, Q и переменная x, если $A \rightrightarrows_\beta B$ и $P \rightrightarrows_\beta Q$, то $A[x := P] \rightrightarrows_\beta B[x := Q]$.

   (d) Покажите, что $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

   (e) *Транзитивным и рефлексивным замыканием* отношения $R \subseteq U^2$ назовём такое отношение $R^* \subseteq U^2$, что $(x, y) \in R^*$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $a_1, \dots, a_n \in U$, что: $a_1 = x$, $a_n = y$ и $(a_i, a_{i+1}) \in R$.

   Покажите, что если R — некоторое отношение, обладающее ромбовидным свойством, то R^* тоже обладает ромбовидным свойством.

   (f) Покажите, что каковы бы ни были отношения R и S, если $R \subseteq S$, то $R^* \subseteq S^*$. В частности, покажите, что $(\twoheadrightarrow_\beta) \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$.

   (g) Покажите, что $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\twoheadrightarrow_\beta)$

   На основании доказанных лемм несложно показать утверждение теоремы Чёрча-Россера: из последних пунктов следует, что $(\rightrightarrows_\beta)^* = (\twoheadrightarrow_\beta)$, а из пункта (d) — что это отношение обладает ромбовидным свойством.

2. Реализуйте следующие функции с помощью Y-комбинатора, вычисляющие:

   (a) факториал числа;

   (b) n-е простое число;

   (c) функцию Аккермана;

   (d) частичный логарифм.

3. *Отмеченным объединением* множеств $L \uplus R$ назовём множество пар

$$U = \{\langle 1, x\rangle \mid x \in L\} \cup \{\langle 2, y\rangle \mid y \in R\}$$

Соответственно, для данного множества мы можем определить три функции

название	обозначение	определение
левая инъекция	$in_L : L \to U$	$in_L(x) = \langle 1, x\rangle$
правая инъекция	$in_R : R \to U$	$in_R(x) = \langle 2, x\rangle$
выбор	$Case : U \times (L \to X) \times (R \to X) \to X$	$Case(u, f, g) = \begin{cases} f(x), & \text{если } u = \langle 1, x\rangle \\ g(x), & \text{если } u = \langle 2, x\rangle \end{cases}$

Говоря простыми словами, инъекции приписывают к значению цифру 1 или 2, получая значение из множества U, а выбор, основываясь на приписанной цифре, применяет к значению первую или вторую фукнцию.

Построим аналогичную конструкцию для типов. *Типом-суммой* типов L и R (или, иначе, *алгебраическим типом*) назовём тип данных U, хранящий значения либо типа L, либо типа R, причём всегда точно известно, какого именно (сравните с определением дизъюнкции в интуиционистской логике). С точки зрения теории множеств, множество значений типа U — отмеченное объединение множеств значений типов L и R. Для этого типа существует три базовых операции: две инъекции и выбор. Данный тип данных довольно широко распространён, и присутствует в ограниченном объёме даже в языках Си и Паскаль.

Например, в языке Паскаль с возможно следующее определение (там данная конструкция называется «записью с вариантами»):

```
type value: record
    is_real: boolean;
    case is_real of
        false: (real_value: real);
        true:  (int_value: integer);
    end;
```

Данная запись если `is_real = true` содержит поле `int_value`, а если `false` — поле `real_value`. Реализация данной структуры предполагает, что оба эти поля расположены в одной памяти.

В языке Си аналогом этой структуры является объединение (`union`), однако, явного поля для выбора одного из вариантов там не предусмотрено. В языке Си++ довольно близким аналогом является класс `std::variant` — «безопасное» объединение.

В лямбда-исчислении оказывается возможно реализовать эту конструкцию в чистом математическом виде:

$$\begin{array}{l} In_L = \lambda x.\lambda f.\lambda g.f\ x \\ In_R = \lambda x.\lambda f.\lambda g.g\ x \\ Case = \lambda u.\lambda f.\lambda g.u\ f\ g \end{array}$$

Также ещё заметим, что список можно представить, как алгебраический тип с двумя вариантами:

- `Nil` (соответствует пустому списку)
- `Cons(h,t)` (соединение головы списка `h` и хвоста `t`)

В частности, можно записать список `[1,2,3]` как `Cons(1,Cons(2,Cons(3,Nil)))`.

В лямбда-исчислении мы можем представить `Cons(h,t)` как правую инъекцию упорядоченной пары $\langle h, t\rangle$ (так будем обозначать выражение $\lambda a.a\ h\ t$), а `Nil` — как левую инъекцию любого значения, например, F. Тогда список `[1,2,3]` может быть представлен следующим лямбда-выражением:

$$In_R\ \langle \overline{1}, In_R\ \langle \overline{2}, In_R\ \langle \overline{3}, In_L\ F\rangle\rangle\rangle$$

(a) Реализуйте конструкции In_L, In_R, $Case$ на языках Си, Паскаль и Си++ как можно ближе к формальному определению.

(b) Покажите, что $Case\ (In_L\ \overline{0})\ (\lambda x.p)\ (\lambda x.q) =_\beta p$ и $Case\ (In_R\ q)\ (\lambda x.p)\ (\lambda x.x) =_\beta q$.

(c) Постройте лямбда-выражение, по чёрчевскому нумералу $\overline{n}$ возвращающее список `[1,2,3,...,n]`.

(d) Постройте лямбда-выражение, по списку возвращающее его длину.

(e) Постройте лямбда-выражение, суммирующее список чёрчевских нумералов.

(f) Покажите, как реализовать алгебраический тип на n вариантов.

(g) Покажите, как реализовать обращение списка (функция должна вернуть список в обратном порядке).

4. Чёрчевские нумералы соответствуют аксиоматике Пеано (числа записываются путём приписываний штрихов — прибавлений единиц). В частности поэтому вся арифметика с ними крайне медленная. А можно ли реализовать их с использованием двоичной записи?

   (a) Предложите, как можно реализовать «логарифмические» нумералы — значения, которые соответствовали бы двоичной записи чисел.

   (b) Определите операцию преобразования чёрчевского нумерала в логарифмический.

   (c) Определите операцию преобразования логарифмического нумерала в чёрчевский.

   (d) Определите операцию суммы логарифмических нумералов.

   (e) Определите операцию ограниченного вычитания единицы из логарифмического нумерала (напомним, ограниченное вычитание возвращает 0, если вычитаемое больше уменьшаемого).