

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3334-М3339, осень 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:

- (a) $\lambda x.x x \lambda x.x x$
- (b) $(\lambda x.x x) \lambda x.x x$
- (c) $\lambda x.(x x) \lambda x.x x$
- (d) $\lambda f.\lambda x.f f f x$

2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:

- (a) $(\lambda a.\lambda b.a) (\lambda a.\lambda b.a) (\lambda a.\lambda b.b)$
- (b) $(\lambda a.\lambda b.a) b$
- (c) $(\lambda f.\lambda x.f (f x)) (\lambda f.\lambda x.f (f x))$

3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:

- (a) Or, Xor;
- (b) тернарная операция в Си ($?:$);
- (c) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F);
- (d) isEven (T, если аргумент чётный);
- (e) умножение на 2;
- (f) умножение;
- (g) возведение в степень;
- (h) упорядоченная пара. К паре должны прилагаться три лямбда-выражения (M, P_l, P_r) : выражение M по двум значениям строит упорядоченную пару, а выражения P_l и P_r возвращают первый и второй элемент упорядоченной пары соответственно.

Убедитесь, что для ваших выражений выполнено

$$P_l (M A B) \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A$$

и

$$P_r (M A B) \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta B$$

- (i) вычитание 1;
- (j) вычитание;
- (k) сравнение («меньше»);
- (l) деление.

4. Назовём бета-эквивалентностью транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции, будем записывать его как $(=_\beta)$. В частности, бета-эквивалентны те термы, которые имеют одинаковую нормальную форму. Также, нетрудно заметить следующее:

- (a) $And T F =_\beta F$;
- (b) $\Omega =_\beta \Omega$;
- (c) $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n f (f x)) \bar{n} =_\beta \overline{n+1}$;
- (d) $a \neq_\beta b$.

Мы будем говорить, что лямбда-выражение E выражает функцию $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$, если при любых $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$E \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k =_\beta \overline{f(x_1, \dots, x_k)}$$

Какие функции выражают следующие выражения? Ответ обоснуйте.

- (a) $\lambda t. \lambda n. n \ t;$
- (b) $\lambda t. \lambda n. \lambda x. n \ (t \ x).$

5. *Ненормализуемым* назовём лямбда-выражение, не имеющее нормальной формы, то есть выражение, для которого нет конечной последовательности бета-редукций, приводящей к нормальной форме. *Сильно нормализуемым* назовём лямбда-выражение, для которого не существует бесконечной последовательности бета-редукций (любая последовательность бета-редукций неизбежно заканчивается нормальной формой, если её продолжать достаточно долго). *Слабо нормализуемым* назовём лямбда-выражение, которое имеет нормальную форму, но существует бесконечная последовательность бета-редукций, которая не приводит его в нормальную форму. Приведите примеры сильно нормализуемого, слабо нормализуемого и ненормализуемого лямбда-выражения.

Домашнее задание №2: «теорема Чёрча-Россера, Y-комбинатор»

1. *Полное доказательство теоремы Чёрча-Россера.* На лекции был представлен план доказательства теоремы, в котором необходимо заполнить пустоты.
- (a) Покажите, что отношение бета-редукции — подотношение отношения параллельной бета-редукции. В символической записи, $(\rightarrow_\beta) \subseteq (\Rightarrow_\beta)$. То есть, если $A \rightarrow_\beta B$, то $A \Rightarrow_\beta B$.
 - (b) Покажите, что каковы бы ни были термы A, P, Q и переменная x , если выполнено $P \Rightarrow_\beta Q$, то $A[x := P] \Rightarrow_\beta A[x := Q]$. Убедитесь, что это справедливо и если x не входит свободно в A .
 - (c) Покажите, что каковы бы ни были термы A, B, P, Q и переменная x , если $A \Rightarrow_\beta B$ и $P \Rightarrow_\beta Q$, то $A[x := P] \Rightarrow_\beta B[x := Q]$.
 - (d) Покажите, что (\Rightarrow_β) обладает ромбовидным свойством.
 - (e) *Транзитивным и рефлексивным замыканием* отношения $R \subseteq U^2$ назовём такое отношение $R^* \subseteq U^2$, что $(x, y) \in R^*$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $a_1, \dots, a_n \in U$, что: $a_1 = x, a_n = y$ и $(a_i, a_{i+1}) \in R$.
Покажите, что если R — некоторое отношение, обладающее ромбовидным свойством, то R^* тоже обладает ромбовидным свойством.
 - (f) Покажите, что каковы бы ни были отношения R и S , если $R \subseteq S$, то $R^* \subseteq S^*$. В частности, покажите, что $(\rightarrow_\beta) \subseteq (\Rightarrow_\beta)^*$.
 - (g) Покажите, что $(\Rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)$.

На основании доказанных лемм несложно показать утверждение теоремы Чёрча-Россера: из последних пунктов следует, что $(\Rightarrow_\beta)^* = (\rightarrow_\beta)$, а из пункта (d) — что это отношение обладает ромбовидным свойством.

2. Реализуйте следующие функции с помощью Y-комбинатора, вычисляющие:

- (a) факториал числа;
- (b) n -е простое число;
- (c) функцию Аккермана;
- (d) частичный логарифм.

3. *Отмеченным объединением* множеств $L \uplus R$ назовём множество пар

$$U = \{\langle 1, x \rangle \mid x \in L\} \cup \{\langle 2, y \rangle \mid y \in R\}$$

Соответственно, для данного множества мы можем определить три функции

название	обозначение	определение
левая инъекция	$in_L : L \rightarrow U$	$in_L(x) = \langle 1, x \rangle$
правая инъекция	$in_R : R \rightarrow U$	$in_R(x) = \langle 2, x \rangle$
выбор	$Case : U \times (L \rightarrow X) \times (R \rightarrow X) \rightarrow X$	$Case(u, f, g) = \begin{cases} f(x), & \text{если } u = \langle 1, x \rangle \\ g(x), & \text{если } u = \langle 2, x \rangle \end{cases}$

Говоря простыми словами, инъекции приписывают к значению цифру 1 или 2, получая значение из множества U , а выбор, основываясь на приписанной цифре, применяет к значению первую или вторую функцию.

Построим аналогичную конструкцию для типов. *Типом-суммой* типов L и R (или, иначе, *алгебраическим типом*) назовём тип данных U , хранящий значения либо типа L , либо типа R , причём всегда

точно известно, какого именно (сравните с определением дизъюнкции в интуиционистской логике). С точки зрения теории множеств, множество значений типа U — отмеченное объединение множеств значений типов L и R . Для этого типа существует три базовых операции: две инъекции и выбор. Данный тип данных довольно широко распространён, и присутствует в ограниченном объёме даже в языках Си и Паскаль.

Например, в языке Паскаль с возможно следующее определение (там данная конструкция называется «записью с вариантами»):

```
type value: record
  is_real: boolean;
  case is_real of
    false: (real_value: real);
    true:  (int_value: integer);
  end;
```

Данная запись если `is_real = true` содержит поле `int_value`, а если `false` — поле `real_value`. Реализация данной структуры предполагает, что оба эти поля расположены в одной памяти.

В языке Си аналогом этой структуры является объединение (`union`), однако, явного поля для выбора одного из вариантов там не предусмотрено. В языке Си++ довольно близким аналогом является класс `std::variant` — «безопасное» объединение.

В лямбда-исчислении оказывается возможно реализовать эту конструкцию в чистом математическом виде:

$$\begin{aligned} In_L &= \lambda x. \lambda f. \lambda g. f \ x \\ In_R &= \lambda x. \lambda f. \lambda g. g \ x \\ Case &= \lambda u. \lambda f. \lambda g. u \ f \ g \end{aligned}$$

Также ещё заметим, что список можно представить, как алгебраический тип с двумя вариантами:

- `Nil` (соответствует пустому списку)
- `Cons(h,t)` (соединение головы списка `h` и хвоста `t`)

В частности, можно записать список `[1,2,3]` как `Cons(1,Cons(2,Cons(3,Nil)))`.

В лямбда-исчислении мы можем представить `Cons(h,t)` как правую инъекцию упорядоченной пары $\langle h, t \rangle$ (так будем обозначать выражение $\lambda a. a \ h \ t$), а `Nil` — как левую инъекцию любого значения, например, F . Тогда список `[1,2,3]` может быть представлен следующим лямбда-выражением:

$$In_R \ \langle \bar{1}, In_R \ \langle \bar{2}, In_R \ \langle \bar{3}, In_L \ F \rangle \rangle \rangle$$

- (a) Реализуйте конструкции In_L , In_R , $Case$ на языках Си, Паскаль и Си++ как можно ближе к формальному определению.
 - (b) Покажите, что $Case \ (In_L \ \bar{0}) \ (\lambda x. p) \ (\lambda x. q) =_{\beta} p$ и $Case \ (In_R \ q) \ (\lambda x. p) \ (\lambda x. x) =_{\beta} q$.
 - (c) Постройте лямбда-выражение, по чётковскому нумералу \bar{n} возвращающее список $[1, 2, 3, \dots, n]$.
 - (d) Постройте лямбда-выражение, по списку возвращающее его длину.
 - (e) Постройте лямбда-выражение, суммирующее список чётковских нумералов.
 - (f) Покажите, как реализовать алгебраический тип на n вариантов.
 - (g) Покажите, как реализовать обращение списка (функция должна вернуть список в обратном порядке).
4. Чётковские нумералы соответствуют аксиоматике Пеано (числа записываются путём приписываний штрихов — прибавлений единиц). В частности поэтому вся арифметика с ними крайне медленная. А можно ли реализовать их с использованием двоичной записи?
- (a) Предложите, как можно реализовать «логарифмические» нумералы — значения, которые соответствовали бы двоичной записи чисел.
 - (b) Определите операцию преобразования чётковского нумерала в логарифмический.
 - (c) Определите операцию преобразования логарифмического нумерала в чётковский.
 - (d) Определите операцию суммы логарифмических нумералов.
 - (e) Определите операцию ограниченного вычитания единицы из логарифмического нумерала (напомним, ограниченное вычитание возвращает 0, если вычитаемое больше уменьшаемого).

Домашнее задание №3: «просто типизированное лямбда-исчисление»

1. На прошлой лекции определение параллельной бета-редукции было сформулировано неточно, отчего следующее утверждение не могло быть доказано:

Покажите, что каковы бы ни были термы A, B, P, Q и переменная x , если $A \Rightarrow_\beta B$ и $P \Rightarrow_\beta Q$, то $A[x := P] \Rightarrow_\beta B[x := Q]$.

Однако, данное утверждение можно доказать, если переформулировать параллельную бета-редукцию так. $A \Rightarrow_\beta B$, если:

- (a) $A = x, B = y$ и $x = y$
- (b) $A = P Q, B = R S$ и $P \Rightarrow_\beta R, Q \Rightarrow_\beta S$
- (c) $A = \lambda x.P, B = \lambda x.Q$ и $P \Rightarrow_\beta Q$
- (d) $A = (\lambda x.P) Q, B = R[x := S]$ и $P \Rightarrow_\beta R, Q \Rightarrow_\beta S$

В связи с этим:

- (a) Докажите утверждение из прошлого домашнего задания при заданном определении.
 - (b) Обладает ли исходное отношение параллельной бета-редукции (заданное на прошлой лекции) ромбовидным свойством? Возможно, вы можете привести для него контрпример?
2. Покажите, что если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \alpha$, то $\vdash B : \alpha$.
 3. Верно ли, что если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash B : \alpha$, то $\vdash A : \alpha$? Верно ли это свойство для исчисления по Чёрчу?
 4. Покажите, что комбинатор $\Omega = (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$ не имеет типа.
 5. Покажите, что никакое лямбда-выражение не имеет типа $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.
 6. Докажите следующие утверждения в ИИВ и постройте соответствующие лямбда-выражения согласно изоморфизму Карри-Ховарда:
 - (a) $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
 - (b) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
 - (c) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
 - (d) $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
 - (e) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma)$
 - (f) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ (аналог контрапозиции)
 7. Каков тип лямбда-выражения для суммы двух чёрчевских нумералов? Ответ поясните.
 8. Заметим, что:

$$\begin{aligned} \vdash S : (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\ \vdash K : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Как несложно заметить, данные утверждения соответствуют (в смысле изоморфизма Карри-Ховарда) схемам аксиом для импликационного фрагмента интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле. Значит, и доказательство утверждений может быть (согласно изоморфизму) перенесено в лямбда-исчисление.

Гильбертовский стиль, который мы использовали в курсе матлогики, предполагал плоский список высказываний и номера утверждений для подсказок. Однако, мы можем изображать эти доказательства и в виде дерева:

$$\frac{\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \quad \frac{\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}}{\alpha \rightarrow \alpha}$$

Давайте теперь изобразим вывод типа (для экономии места мы не указываем вывод типов для комбинаторов S и K).

$$\frac{\frac{\vdash K : \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad \vdash S : (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\vdash S K : (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}}{\vdash S K K : \alpha \rightarrow \alpha}$$

Осталось заметить, что действительно $I =_{\beta} S K K$.

На основе изложенного, постройте доказательства следующих утверждений в гильбертовском стиле и выразите соответствующие выражения с помощью комбинаторов S и K :

- (a) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
- (b) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
- (c) $(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (d) $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma)$

9. В дополнение к базису SK рассмотрим базис $BCKW$:

$$\begin{aligned} B &= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x (y z) \\ C &= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z y \\ K &= \lambda x. \lambda y. x \\ W &= \lambda x. \lambda y. x y y \end{aligned}$$

Выведите типы для данных комбинаторов, постройте схемы аксиом для соответствующего гильбертовского исчисления высказываний и покажите, что данное исчисление также позволяет доказать любое утверждение из импликационного фрагмента ИИВ.