矩陣運算性質

總分	

班級：＿＿＿＿＿＿　座號：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單選題

1. (　　) 設 A、B、C 皆為二階方陣，O 為二階零方陣，I 為二階單位方陣。選出正確的選項。
(A)因為 AB 與 BA 都存在，且兩者都是二階方陣，所以 $AB=BA$　(B)若 $AB=AC$ 且 $A\neq O$，則 $B=C$　(C)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$　(D)若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$　(E)若 $AB=BA$ 且 $AC=CA$，則 $A(B+C)=(C+B)A$

2. (　　) 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，選出正確的選項。　(A) $AB=BA$　(B) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　(C) $A^2=-I$　(D) $B^3=8I$　(E) $(ABA)^3=512I$

二、計算題

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，
(1)求 $A+2B-3C$。
(2)若矩陣 X 滿足 $(2X+A)+2(X+B)=3(X+C)$，求矩陣 X

2.
(1)判斷二階方陣 $A=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ 是否有反方陣；若有，求其反方陣。
(2)已知二階方陣 $B=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 8 & x\end{bmatrix}$ 沒有反方陣，求實數 x 的值。

3. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}50 & 25\\ 75 & 50\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}16 & 48\\ -64 & 32\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$，求
(1)實數 r、s 的值。
(2) AB。

4. 已知 A 為二階方陣，矩陣 $X=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$，$AX=\begin{bmatrix}3\\ 8\end{bmatrix}$，$A^2X=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$，求二階方陣 A。

5.
(1)設 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$，且第 (i,j) 元 $a_{ij}=2i+3j$，求 A。
(2)已知 $\begin{bmatrix}2x+y & 1\\ x-2y & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2u-v\\ -5 & u+2v\end{bmatrix}$，求 x、y、u、v 的值。

6. 已知矩陣 A 、 B 、 C 滿足 $AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$ ， $AC=\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 6\end{bmatrix}$ ，求

(1) $A(BA)C$ 。

(2) $A(B+C)$ 。

7.

(1)已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\4 & 3\end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix}2\\18\end{bmatrix}$ 滿足 $AX=B$ ，試利用 A 的反方陣 A^{-1} ，求矩陣 X 。

(2)利用二階反方陣，求聯立方程式 $\begin{cases}3x+2y=7\\6x+5y=16\end{cases}$ 的解。

8. 設矩陣 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ ， $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\-2 & 2\end{bmatrix}$ 。

(1)將 A^3 以單位方陣 I 表示。

(2)求 A^{10} 。

9. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$ ，求滿足 $AX=\begin{bmatrix}2 & 0 & 6\\3 & 4 & -1\end{bmatrix}$ 的矩陣 X 。

10. 為了避免資料外洩，甲把公司電腦文件夾的四個數字的密碼 (a,b,c,d) 改寫為四個數字的密碼 (x,y,z,u) 之後，再轉交給乙保管。已知 (a,b,c,d) 與 (x,y,z,u) 滿足關係 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}x & y\\z & u\end{bmatrix}$ ，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}$ 是只有甲才知道的二階方陣。

(1)若甲的正確密碼 (a,b,c,d) 為 $(2,1,3,2)$ ，求乙所保管的密碼 (x,y,z,u) 。

(2)若乙所保管的密碼 (x,y,z,u) 為 $(6,4,3,9)$ ，求甲的正確密碼 (a,b,c,d) 。