ARC 053 解説

A : ドミノ色塗り

解法

答えは $H(W-1)+(H-1)W$ 通り．

まず，左右に隣り合う 2 マスを塗る方法が何通りか考えます．左右に隣り合う 2 マスを塗るとき，左のマスとしてあり得るものは，図 1 の ☆ のマスです．左右に隣り合う 2 マスを塗る方法は ☆ の個数に等しいので，$H(W-1)$ 通りです．

同様にして，上下に隣り合う 2 マスを塗る方法は $(H-1)W$ 通りです．よって，答えは $H(W-1)+(H-1)W$ 通りとなります．

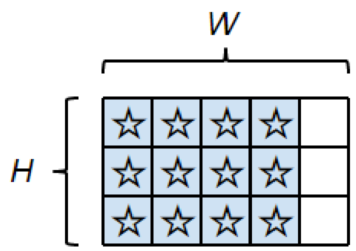

図 1

B : 回文分割

解法

文字列 S の長さを N とする．また，26 種類のアルファベットのうち，文字列 S に奇数回現れるものが K 種類であるとする．すると，答えは次式．計算量は $\mathrm{O}(N)$．

$$\begin{cases} N & (K=0) \\ 2\lfloor \frac{N-K}{2K} \rfloor + 1 & (1 \le K \le 26) \end{cases}$$

$K=0$ の場合，すべてのアルファベットが偶数個ずつあります．そのため，同じアルファベット同士のペアを $N/2$ 組作り，それらを左右対称に並べることで，1 個の回文を作ることができます．よって，答えは N です．

$K=1$ の場合，1 種類のアルファベットのみが奇数個です．このアルファベットを中央に置くことに決めると，残り $N-1$ 文字はすべてのアルファベットが偶数個ずつあります．そのため，同じアルファベット同士のペアを $(N-1)/2$ 組作り，それらを左右対称に並べることで，1 個の回文を作ることができます．

$K=2$ の場合，2 種類のアルファベットが奇数個です．この場合，少なくとも 2 個の回文に分割する必要があります．ここでは 2 個の回文に分割することにして，奇数個である 2 種類のアルファベットをそれぞれの中央に置くことに決めます．すると，残り $N-2$ 文字はすべてのアルファベットが偶数個ずつあり，同じアルファベット同士のペアを $(N-2)/2$ 組作ることができます．より短い方の回文の長さ X をできるだけ大きくしようとすると，ペアをできるだけ均等に割り振るのがよいことがわかります．よって，より短い方の回文には $\lfloor (N-1)/4 \rfloor$ 組のペアが割り振られ，答えは $X = 2\lfloor (N-1)/4 \rfloor + 1$ となります．

一般の $1 \leq K \leq 26$ の場合も，$K=2$ と同様に考えると，答えは $2\lfloor (N-K)/2K \rfloor + 1$ となることがわかります．

C：魔法使い高橋君

解法

N 個の魔法を唱える順番を **貪欲法** で決める．$a_i < b_i$ の魔法をグループ 1 とし，$a_i \geq b_i$ の魔法をグループ 2 とする．まず，グループ 1 の魔法を a_i の昇順にソートし，その順番に唱える．続いて，グループ 2 の魔法を b_i の降順にソートし，その順番に唱える．このときの X が答えである．計算量は $\mathrm{O}(N \log N)$．

とりあえず，グループ 1 の要素だけしかない場合を考えてみます．このとき，a_i の昇順にソートした順番が最適解であることを示します．ある順番において，ある隣接要素 i，$i+1$ が $a_i \geq a_{i+1}$ であったとします．すると，図 2 からわかるように，X の値を増加させずに i と $i+1$ をスワップできます．よって，任意の順番は X の値を増加させずに a_i の昇順にソートできることがわかります．以上より，a_i の昇順にソートした順番が最適解であることが示せました．

同様にして，グループ 2 の要素だけしかない場合も，b_i の降順にソートした順番が最適解であることが示せます．

では，グループ 1 の要素とグループ 2 の要素が混ざっている場合はどうでしょうか？ ある順番において，ある隣接要素 i，$i+1$ がそれぞれグループ 2，グループ 1 であったとします．すると，図 3 からわかるように，X の値を増加させずに i と $i+1$ をスワップできます．よって，任意の

順番は X の値を増加させずに，(グループ 1 の要素たち) → (グループ 2 の要素たち) という順番に並べ替えられることがわかります．グループ 1 の要素とグループ 2 の要素が完全に分離されていれば，X の値を増加させずに，グループ 1 を a_i の精進にソートし，グループ 2 を b_i の降順にソートできます．以上より，(グループ 1 を a_i の昇順にソートしたもの) → (グループ 2 を b_i の降順にソートしたもの) という順番が最適解であることが示せました．

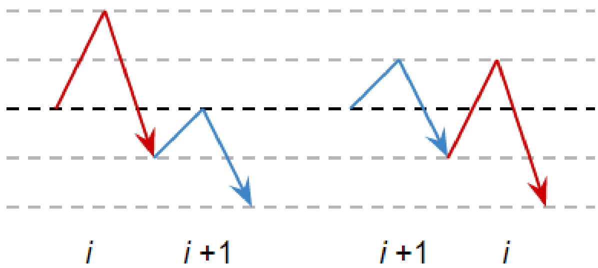

図 2

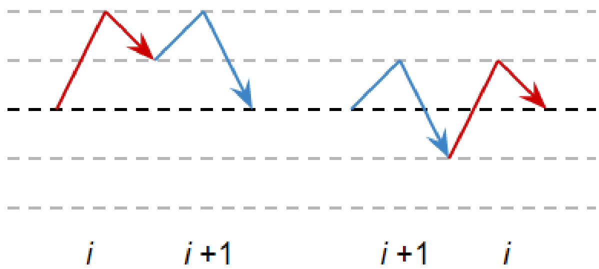

図 3

D : 2 つの山札

まずは，問題を視覚的に捉えましょう．例えば，サンプル 3 を視覚的に表すと，「図 4 のグリッドグラフにおいて，左上の点から右下の点まで移動するとき，パス上の数列は何通りか？」という問題になります．

グリッドグラフのパスの数え上げは，**動的計画法** (DP) の典型問題として有名です．この DP では，$dp[i][j] :=$ (点 (i,j) までのパスの個数) と定義して，$dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$ という漸化式を計算します．もちろん，この DP ではパス上の数列を正しく数え上げられません．例えば図 4 では，数列 $(3,3,3,3,5,5,5,5)$ を 2 重に数えてしまいます．これは，ある数列に対応する終点が複数個あり得ることが原因です．例えば図 5 では，数列 $(3,3,3,3,5,5)$ に対応する終点が 2 個あります ($(2,4)$，$(4,2)$)．

パス上の数列を正しく数え上げるためには，次のような工夫が必要です．ある数列に対応する終点が複数個あり得ることに対応するため，$dp[S] :=$ (あり得る終点の集合が S であるような数列の

個数) と定義します．例えば図 5 では，あり得る終点の集合が $\{(2,4),(4,2)\}$ であるような数列は $(3,3,3,3,5,5)$，$(3,3,4,4,4,4)$ の 2 通りなので，$dp[\{(2,4),(4,2)\}]=2$ となります．このように定義した $dp[S]$ をすべて計算した後，$dp[\{$ 右下の点 $\}]$ を参照すると正しい答えが求まります．

しかし，S をそのまま状態として持つと DP の状態数が大きくなりすぎるので，より効率的な状態の持ち方を考えなければなりません．実は，「数列の長さ」と「数列の末項」がペアで指定されると，対応する S は高々 4 通りしかないことがわかります．よって，$dp[l][p][S] :=$ (長さが l かつ末項が p の数列であって，あり得る終点の集合が S であるものの個数) と定義すると，DP の状態数が $\mathrm{O}(N^2)$ に抑えられます．さらに，各状態からの遷移も高々 4 通りしかないことがわかります．以上より，全体の計算量が $\mathrm{O}(N^2)$ に抑えられ，DP で問題を解くことができます．

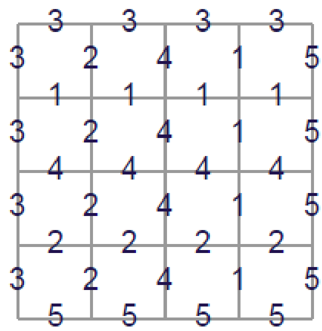

図 4

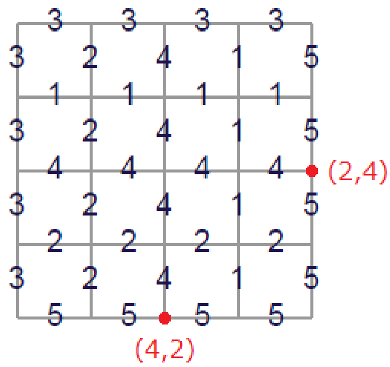

図 5