

# FAST 主动反射面的形状调节方案

## 摘要

中国天眼 (FAST), 是我国具有自主知识产权的目前世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜。它的落成启用, 对我国在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。本文建立了 FAST 主动反射面形状调节的框架: 首先给出了求解理想抛物面方程的方法, 然后设计了将反射面调节为工作抛物面的方案, 并计算了工作抛物面和基准反射球面的信号接收比, 最后对于模型的优点和不足进行了分析。

问题 1 要求确定待观测天体  $S$  位于基准球面正上方时的理想抛物面。我们首先建立了瞬时抛物面坐标系和球心坐标系, 并得到了两个坐标系之间的坐标变换公式, 为计算反射面各点的参数和进行几何分析奠定基础; 然后基于抛物面最小二乘拟合模型, 并利用粒子群算法求解得到理想抛物面方程为  $x^2 + y^2 - 560.64z - 168394 = 0$ 。

问题 2 要求确定待观测天体  $S$  在所给的方位角  $\alpha$  和仰角  $\beta$  下的理想抛物面, 并给出反射面板调节方案。我们首先利用问题 1 中得到的理想抛物面方程, 基于抛物面坐标系和球心坐标系之间的坐标变换公式计算得到了此时理想抛物面的顶点为  $(-49.3136, -36.8845, -293.9803)$ ; 然后定义了工作抛物面和理想抛物面的贴近误差  $\sigma$ , 并建立了以主索节点的位置坐标为变量、贴近误差  $\sigma$  为目标的单目标优化模型, 并利用自适应粒子群算法求解得到调节后反射面 300m 口径内主索节点的位置坐标、各促动器的伸缩量 (见 result.xlsx), 需要移动的主索节点和径向伸缩距离分别如图10、图11所示。

问题 3 要求在问题 2 中反射面调节方案的基础上, 比较工作抛物面和基准反射面的信号接收比。我们首先基于微元法的思想, 对反射面的每一板块建立电磁波信号反射传播分析模型, 加权求和得到调节后馈源舱的信号接收比为 75.22%; 然后, 基于球面像差分析模型计算得到基准反射球面的信号接收比为 15%。由此可见, 调节反射面得到的工作抛物面的信号聚焦能力远胜过基础反射球面。

**关键字:** 中国天眼 粒子群算法 最小二乘方法 坐标变化

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

2016 年，随着“中国天眼”竣工并投入使用，我国拥有了世界上半径最大、观察距离最远的射电望远镜。基于三项完全知识产权的自主创新——选址方法、索网主动反射面、柔性索结合并联机器人的馈源支撑，FAST 突破了射电望远镜工程极限。当前，FAST 望远镜测量基准网的精度已提升至 1 毫米以内，其中，灵敏度水平是世界第二大射电望远镜的 2.5 倍，这是中国建造的望远镜第一次在灵敏度这个参数上占据制高点。

FAST 由主动反射面、信号接收系统（馈源舱）以及相关的控制、测量和支承系统组成。其中，主动反射面具有两种工作状态：基准态和工作态。将反射面调节为工作抛物面是主动反射面技术的关键，该过程通过下拉索与促动器配合来完成。下拉索长度固定；促动器沿基准球面径向安装，其底端固定在地面，顶端可沿基准球面径向伸缩来完成下拉索的调节，从而调节反射面板的位置，最终形成工作抛物面。

## 1.2 需要解决的问题

本文在反射面板调节约束下，确定一个理想抛物面。通过调节促动器的径向伸缩量，可以将反射面调节为工作抛物面，使其尽量贴近理想抛物面，以获得天体电磁波经反射面反射后的最佳接受效果。

问题 1：结合反射面板调节因素，确定当待观测天体  $S$  位于基准球面正上方时的理想抛物面。

问题 2：当待观测天体  $S$  位于  $\alpha = 36.795^\circ, \beta = 78.169^\circ$  时，确定理想抛物面。建立反射面板调节模型，调节相关促动器的伸缩量，使反射面尽量贴近该理想抛物面。将理想抛物面的顶点坐标，以及调节后反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标、各促动器的伸缩量等结果按规定保存。

问题 3：基于问题 2 的反射面调节方案，计算调节后馈源舱的接收比，即馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比，并与基准反射球面的接收比作比较。

# 二、基本假设

1. 由于工程力学问题繁杂，忽略拉动过程中结构自重、温度场、高空风等造成拉索和支撑结构的微小形变；

2. FAST 地处洼地山区，人口稀少，设有电磁波宁静区。假设电波环境优良，电磁波信号不受到干扰；
3. 假设模型均为静态瞬时，只考虑追踪天体在某一固定位置时板面的调整；
4. 由于被测天体满足天线远场测量条件，只考虑平行于抛物面对称轴的均匀平面波，且电磁波信号及反射信号均视为直线传播；
5. 假设忽略天线增益和信号的信号在自由空间路径的衰弱；
6. 由于反射面板间的缝隙和反射面板上的小圆孔尺寸远小于天体电磁波波长，可认为反射板正面是连续的。

### 三、符号说明

具体符号说明见表 1。

表 1 符号说明

符号	含义
$\{X_0, Y_0, Z_0\}$	坐标变换下的平移参数
$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$	坐标变换下的旋转参数
$f$	抛物面焦距
$h$	抛物面顶点高度
$e_i$	第 $i$ 个节点的定向误差
$\sigma$	天线表面的精度
$P_i$	第 $i$ 个观测点
$d_{ij}$	相邻主索节点之间的欧式距离
$d'_{ij}$	调节之后相邻节点之间的距离
$\Delta d_{ij}$	距离变化的大小
$R_0$	每个背架的最优半径
$\eta_i$	单元反射板对应的接收比

### 四、问题分析

当工作抛物面尽量贴近理想抛物面时，我们可以获得天体电磁波经反射面反射后的最佳接收效果。问题 1 要求确定当待观测天体位于基准球面正上方时的理想抛物面。为了计算反射面各点的参数信息，建立起瞬时抛物面坐标系和球心坐标系，找出两坐标系

之间的旋转关系。根据题目所给信息，可以求出在瞬时抛物面坐标系下的旋转抛物面方程，从而利用坐标变换公式，结合反射面各点的几何精度，可以得出在球心坐标系下的旋转抛物面方程。

问题 2 建立在问题 1 的基础上，由于相邻主索节点调节的变化有一定范围，并且受到促动器径向伸缩长度的限制，调节后的工作抛物面并不一定能完全贴合问题一中拟合的理想旋转抛物面，我们建立起节点贴近的单目标最优化模型，从而确定出理想的旋转抛物面 [1]。

基于第 2 问的反射面调节方案，问题 3 要求我们计算调节后馈源舱的接收比。考虑将反射面分成若干个板块，对每一板块单独进行分析，计算出它的球面方程，从而得到切面方程。根据入射光线和反射光线的关系，最终可以确定出一个面积来表示反射能量的大小，从而得到馈源舱的接收比。

## 五、问题 1 的模型建立与求解

### 5.1 坐标变换模型的建立

#### 5.1.1 一般坐标变换

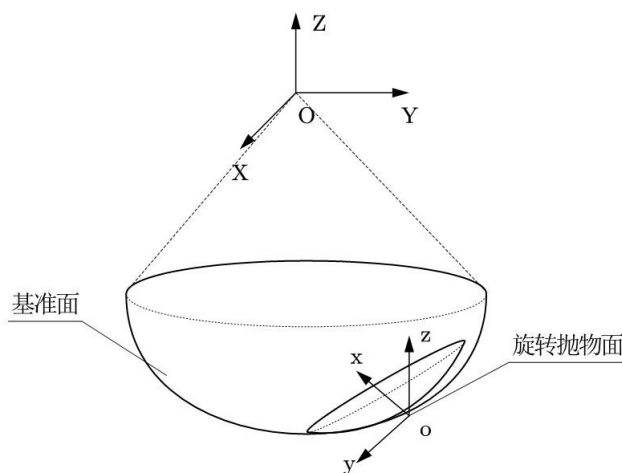


图 1 坐标变换示意图

坐标转换主要是为了方便将结果归算到同一个参考坐标系中，为后续的参数计算和几何分析做准备。

两个右手直角坐标系  $c - xyz$  到  $C - XYZ$  之间的转换一般可以直接使用七参数模型 [2]，包括 3 个平移参数  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ ，3 个旋转参数  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$  和 1 个尺度参数  $m$ ，此时有坐标变换公式

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = mR \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $m$  为尺度参数,  $(X_0, Y_0, Z_0)$  为平移参数, 也是在坐标系  $C - XYZ$  下的坐标。  $R$  为旋转矩阵, 在右手系中以右旋角度为正, 并按旋转轴相互独立的 *Kardan* 旋转进行, 顺序依次为  $x, y, z$  轴, 则有

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & -\cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z & \sin \varepsilon_y \\ \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_z + \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z - \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \\ \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

并记为

$$R = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

### 5.1.2 抛物面意义下的坐标变换

为计算反射面各点的法向偏差、反射面整体精度以及拟合参数, 在该坐标测量系统中, 我们建立了两个坐标系: 一个是在基准状态下的球心东北天坐标系  $C - XYZ$ , 另一个是瞬时抛物面坐标系  $c - xyz$ , 其  $z$  轴沿径向指向  $C$  点,  $x$  轴垂直于  $z$  轴和  $Z$  轴, 构成右手直角坐标系。

对于该瞬时抛物面坐标系  $c - xyz$  和球心坐标系  $C - XYZ$ , 则旋转矩阵  $R$  为

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_z & 0 \\ \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\varepsilon_x$  与  $\varepsilon_z$  的近似值是  $90^\circ - \beta$  和  $\alpha$ , 即被追踪天体  $S$  的天顶距 ( $90^\circ -$  仰角) 和方位角 [3]。

### 5.1.3 问题 1 中的抛物面方程

表征标准抛物面几何特性的形状参数包括主光轴指向、焦距以及焦点位置, 在该射电望远镜 FAST 中, 焦点位置基本可以近似为馈源舱位置  $P$ 。

在问题 1 中, 由于  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ , 即天体  $S$  位于基准球面正上方, 所以通过几何分析, 馈源舱 (焦点) 位置和抛物面顶点在焦面和抛物面的最低点。假设抛物面的顶点坐标为  $(0, 0, -h)$ , 由焦径比  $F/R = 0.466$  可得

$$h = R + \left(\frac{f}{2} - F\right) = 0.534R + \frac{f}{2} \quad (5)$$

在瞬时抛物面坐标系  $c - xyz$  下，旋转抛物面的方程为

$$x^2 + y^2 = 4fz \quad (6)$$

由坐标变换公式 (1) 可以得到在球心坐标系  $C - XYZ$  下旋转抛物面的方程为

$$F = X^2 + Y^2 - 4f(Z + h) = 0 \quad (7)$$

## 5.2 基于最小二乘法的抛物面拟合

对各参数求偏导，可得参数焦距  $f$  的线性化系数为

$$\frac{dF}{df} = -4\left(Z + \frac{f}{2} + 0.534R\right) - 4f \cdot \frac{1}{2} = -4(Z - f - 0.534R) \quad (8)$$

对基准球面上的第  $i$  个观测点  $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ ，误差方程为

$$v_i = -4(Z_i - f - 0.534R)df - F_i \quad (9)$$

对于所有的观测点，可列出误差矩阵方程

$$\min \|V\|_2, V = A \cdot df - F \quad (10)$$

基于抛物面拟合的最小二乘模型 (10)，可得到焦距  $f$  估值和  $h$ 。

## 5.3 问题 1 的求解

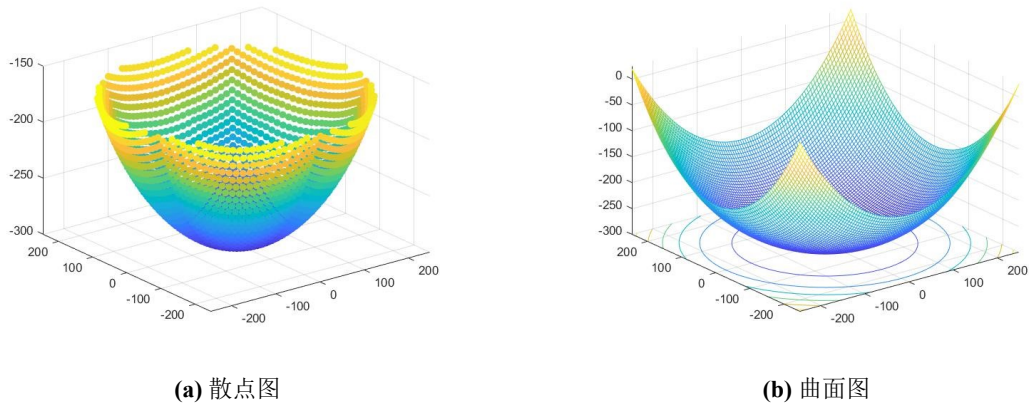


图 2 基准面的散点图与曲面图

代入附件 1 中的数据，绘制出基准面的散点图与曲面图，可以看出基准面是一个接近球面的形状。

球面和抛物面都具有各向同性特点，所以分析变形策略时，可以将问题简化到二维空间，用圆弧线替代基本球面、抛物线替代抛物面。

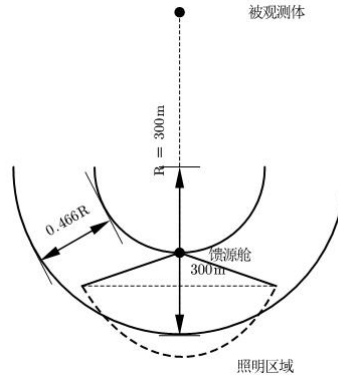


图 3 截面示意图

此旋转抛物面的对称轴是  $z$  轴，可看作由  $xoz$  平面的抛物线以  $z$  轴为对称轴旋转而来，将三维图形转换为二维图形进行计算。在  $xoz$  平面内的基准圆弧和抛物线方程如下所示：

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 - 2Pz - 2P(R + h) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

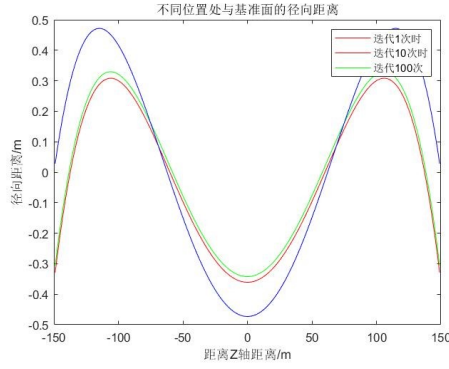
对于抛物线的方程，我们只需要知道该抛物线的焦径比  $f$  以及顶点相对于基准面的偏移量  $h$ ，即可确定抛物线的方程，得到抛物线方程后，旋转一周即可得到理想抛物面方程。

题目要求满足馈源舱接收平面的中心只能在与基准球面同心的一个球面（焦面）上移动，两同心球面的半径差为  $F = 0.466R$  处，我们建立焦径比  $f$  和顶点偏移量  $h$  的约束关系 (12):

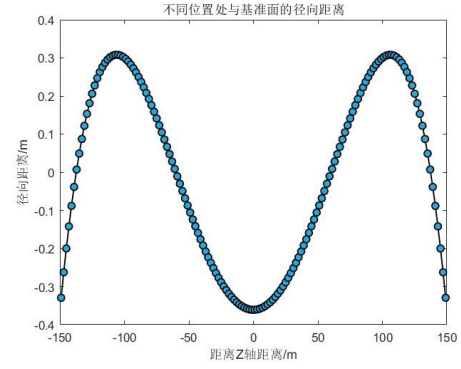
$$f = \frac{0.466R + h}{R} \quad (12)$$

目标函数设定为抛物线各点与基准面上各点的径向距离的均方根最小。以顶点的偏移量  $h$  作为自变量，用上述约束关系表示出  $f$ ，进而计算出抛物线与基准面的径向距离的均方根。使用粒子群算法对  $h$  可能的取值进行搜索，最终解得当  $h = 0.3610$ ,  $f = 0.4672$  时均方根最小，其值为 0.2339。

在使用粒子群算法求解理想抛物线时，算法在 100 次内可达到收敛状态，其中不同迭代次数时，基准点与抛物线的径向距离、理想抛物线各点处与基准面径向距离差如图所示。



(a) 不同迭代次数下基准点与抛物线的径向距离



(b) 抛物线各点与抛物线的径向距离

图 4 粒子群算法迭代结果

本题中粒子群算法的基本使用流程如图5所示。

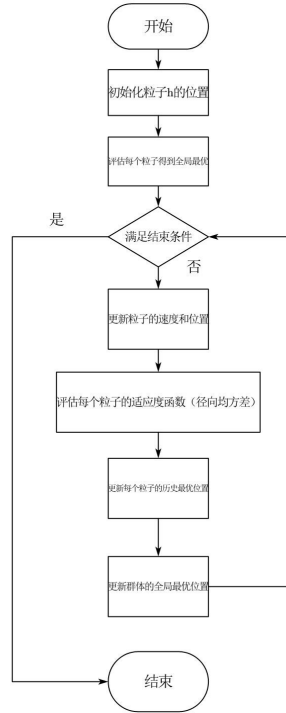


图 5 粒子群算法示意图

得到理想抛物线的方程为

$$x^2 - 560.64z - 168394 = 0 \quad (13)$$

以  $z$  轴为对称轴，旋转得到抛物面方程为：

$$x^2 + y^2 - 560.64z - 168394 = 0 \quad (14)$$

其顶点坐标为  $(0, 0, -300.361)$ ，馈源舱位置在  $(0, 0, -160.2)$ 。



## 六、问题 2 的模型建立与求解

### 6.1 基于最小二乘方法的理想抛物面求解

在一个任意坐标系下确定一个抛物面通常需要 7 个参数，即表征抛物面位置的 3 个参数  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ ，表征姿态的 3 个旋转参数  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$  以及焦距  $f$ 。但是对于理想的旋转抛物面，由于其在  $z$  轴方向的旋转对称性，通常固定  $\varepsilon_z = 0$ ，所以确定一个旋转抛物面的参数为  $(X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, f)$ 。

在瞬时抛物面坐标系  $c - xyz$  中，旋转抛物面的方程是

$$x^2 + y^2 = 4fz \quad (15)$$

应用坐标变换公式 (1)，假设得到的方程为  $F = f(X, Y, Z) = 0$ 。

在 FAST 射电望远镜坐标系统球心坐标系  $C - XYZ$  和瞬时抛物面坐标系  $c - xyz$  中，对于各参数求偏导，各参数的线性化系数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0} &= 2(X_0 - X) + (4f + 2z)a_3 \\ \frac{\partial F}{\partial Y_0} &= 2(Y_0 - Y) + (4f + 2z)b_3 \\ \frac{\partial F}{\partial Z_0} &= 2(Z_0 - Z) + (4f + 2z)c_3 \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} &= y(4f + 2z) \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_y} &= -x(4f + 2z) \sin \varepsilon_x \\ \frac{\partial F}{\partial f} &= -4z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

故对第  $i$  个观测点  $P_i = (X_i, Y_i, Z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ ，可以得出误差方程

$$v_i = a_i \delta X - F_i \quad (17)$$

其中，

$$a_i = \left[ \frac{\partial F}{\partial X_0} \quad \frac{\partial F}{\partial Y_0} \quad \frac{\partial F}{\partial Z_0} \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_y} \quad \frac{\partial F}{\partial f} \right]$$

$$\delta X = [dX_0 \quad dY_0 \quad dZ_0 \quad d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad df]^T$$

对于所有的观测点，可得到如下得误差矩阵方程

$$V = A\delta X - F \quad (18)$$

其中， $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ， $F = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$ 。

对上述方程运用最小二乘法直接迭代法求解，即可计算出各参数的估值，从而确定出理想的旋转抛物面。

## 6.2 工作抛物面贴近误差的计算

### 6.2.1 选取计算贴近误差需要的点

为了减小理想抛物面与工作抛物面的贴近误差,可以将背架结构的上表面做成球面形状,即每个单元反射面板是球面单元子块。

对于球心坐标系  $C - XYZ$ , 对每一球面子块进行分析, 设基准球面上的观测点为  $P_i = (X_P^{(i)}, Y_P^{(i)}, Z_P^{(i)}) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 旋转抛物面上的主索节点理论位置为  $N_i = (X_N^{(i)}, Y_N^{(i)}, Z_N^{(i)}) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 工作抛物面上的主索节点的实际位置为  $M_i = (X_M^{(i)}, Y_M^{(i)}, Z_M^{(i)}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

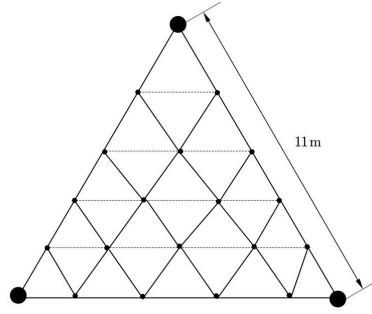


图 6 统计点示意图

为了估算工作抛物面贴近理想抛物面的误差,我们在每个球面子块上均匀取  $m$  个统计点, 记为  $T_j = (X_T^{(j)}, Y_T^{(j)}, Z_T^{(j)}) (j = 1, 2, \dots, m)$ 。

### 6.2.2 贴近精度

由于主索节点只能在径向移动, 所以第  $i$  个节点的径向误差为

$$e_i = \sqrt{(X_N^{(i)} - X_M^{(i)})^2 + (Y_N^{(i)} - Y_M^{(i)})^2 + (Z_N^{(i)} - Z_M^{(i)})^2} \quad (19)$$

同理, 将第  $j$  个统计点的径向误差即为  $e_j$ 。

单个节点的法向误差并不会对反射面的面型误差产生决定性影响, 衡量反射面贴近误差的应该是各被测点法向误差的均方根值。故天线表面的贴近误差为

$$\sigma = RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2 + \sum_{j=1}^m e_j^2}{n + m}} \quad (20)$$

其中  $RMS$  的值越小, 误差越小。

## 6.3 单目标最优化模型

由于相邻主索节点调节的变化有一定范围, 并且受到促动器径向伸缩长度的限制, 调节后的工作抛物面并不一定能完全贴合问题一中拟合的理想旋转抛物面。我们在此忽

略单元三角形反射面板的厚度，只考虑主索节点对理想抛物面的贴近，所以我们建立了节点贴近的单目标最优化模型 [4]。

### 6.3.1 目标函数

为了在约束条件下尽量使工作抛物面和理想抛物面的贴近误差最小，故模型的目标函数为  $\min \sigma$ 。

### 6.3.2 约束条件

(1) 由于主索的长度变化非常微小，且每块板近似为等边三角形，所以相邻的主索节点必然是彼此距离最近的点 [5]，即  $\|M_i, M_j\|_2 = \min(\|M_i, M_k\|_2)(k = 1, 2, \dots, n)$  时，主索节点  $M_i$  与  $M_j$  相邻。由于相邻的主索节点变化范围不能超过 0.07%，故有

$$\frac{\Delta d_{ij}}{d_{ij}} \leq 0.07\% \quad (21)$$

其中  $d_{ij} = \|M_i, M_j\|_2 = \sqrt{(X_M^{(i)} - X_M^{(j)})^2 + (Y_M^{(i)} - Y_M^{(j)})^2 + (Z_M^{(i)} - Z_M^{(j)})^2}$  表示相邻主索节点之间的欧式距离， $d'_{ij} = \|M'_i, M'_j\|_2$  表示调节之后相邻节点之间的距离， $\Delta d_{ij} = d'_{ij} - d_{ij}$  表示距离变化的大小。

(2) 促动器只能沿径向伸缩，导致主索节点也几乎沿径向伸缩。

$$|\overrightarrow{M_i C} \times \overrightarrow{M'_i C}| = 0 \quad (22)$$

(3) 促动器（主索节点）径向伸缩范围为-0.6~+0.6 米。

$$d'_{ii} = \|M_i, M'_i\|_2 \leq 0.6 \quad (23)$$

(4) 伸缩后促动器顶端一定不低于底端（地锚）。设促动器顶端为  $H_i(i = 1, 2, \dots, n)$ ，底端为  $L_i(i = 1, 2, \dots, n)$ ，所以  $\overrightarrow{L_i H_i}$  与  $\overrightarrow{H_i C}$  一定同向，故有

$$\overrightarrow{L_i H_i} \cdot \overrightarrow{H_i C} > 0 \quad (24)$$

## 6.4 问题 2 的求解

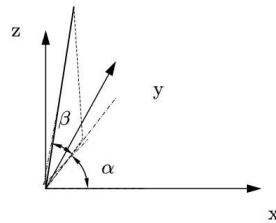


图 7 天体方位示意图

首先分析待观测点的位置，天体  $S$  的方位可用方位角  $\alpha$  和仰角  $\beta$  来表示。

将方位角坐标  $(\alpha, \beta)$  首先转换成直角坐标系下的坐标  $(x, y, z)$ ，其转换条件是：

$$\begin{cases} x = \cos \beta \cos \alpha \\ y = \cos \beta \sin \alpha \\ z = \sin \beta \end{cases} \quad (25)$$

完成转换后取出截面示意图，如图所示。此时被观测体不再位于正上方，导致馈源舱和工作面顶点的位置都不在  $z$  轴上，进而增加了计算的难度，因此在模型中使用双坐标系，即瞬时抛物面坐标系  $c-xyz$  和球心坐标系  $C-XYZ$ 。瞬时坐标系的  $z$  轴是待观测体和球心的交线，将旋转抛物面的对称轴转移到  $z$  轴，等同于待观测点位于正上方的情况，减少了计算的难度。

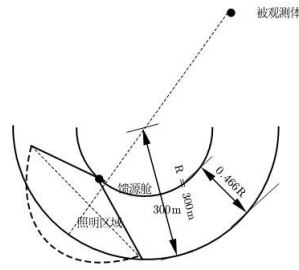


图 8 截面示意图

首先求出旋转矩阵  $A$ ，利用罗德里格旋转矩阵公式，即可得到从球心坐标系与瞬时坐标系的转换关系，得到旋转矩阵  $A$

$$\begin{pmatrix} 0.9863 & -0.0101 & -0.1641 \\ -0.0101 & 0.9923 & -0.1228 \\ 0.1641 & 0.1228 & 0.9787 \end{pmatrix}$$

得到旋转矩阵后，将第一问中的顶点坐标  $(0, 0, -300.361)$  经过旋转后得到当前的顶点坐标为  $(-49.3136, -36.8845, -293.9803)$ 。将原基准面与旋转后的基准面对比，如图9所示。

接着，由于工作抛物面的口径是  $300m$ ，而基准面的口径是  $500m$ ，因此不需要将所有的点都进行径向的移动，在此基础上，分析基准面上的哪些点需要移动，我们将需要移动的主索节点认为是距离此时的顶点的距离在  $XOY$  平面上的投影不超过  $150m$ 。取出这些点，如图10所示。

然后，确定的主索节点的径向位移差。其中径向位移差需要满足其径向伸缩范围为  $-0.6 \sim +0.6$  米，以及相邻结点之间变化幅度不超过  $0.07\%$ 。目标函数是各个主索节点的径向伸缩量的均方根。

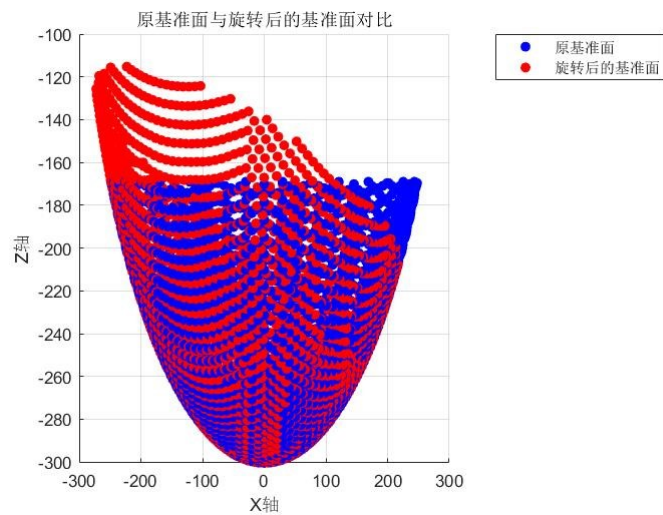


图 9 原基准面与旋转后的基准面对比

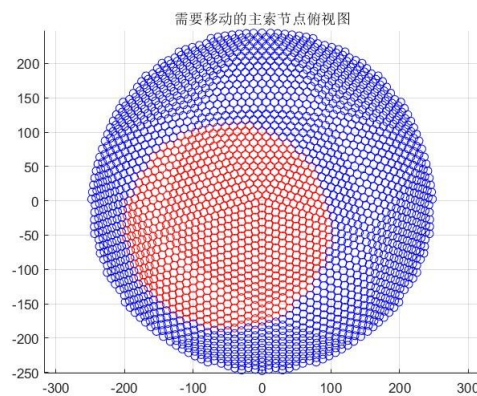


图 10 需要移动的主索节点俯视图

将带有约束条件的适应度函数代入第一问中的自适应粒子群算法，解得促动器的伸缩量如附件 4 表 3 所示。将伸缩距离表示在俯视图上，得到不同节点伸缩量如图所示：

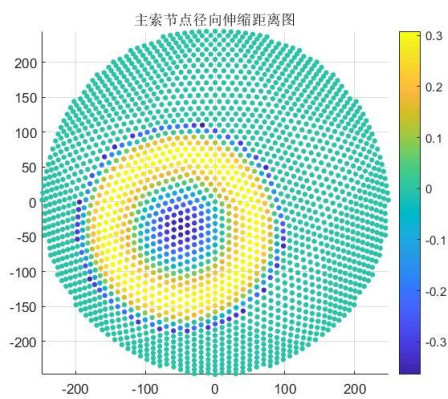


图 11 主索节点径向伸缩距离图

最后，将伸缩量沿径向加给被选中的节点，即可得到调整后的各主索节点的位置，如附件 4 表 2 所示。

## 七、问题 3 的模型建立与求解

### 7.1 电磁波信号反射传播模型

由于 FAST 射电望远镜接收的是来自遥远的宇宙天体的电磁波信号，远远满足天线远场条件，且由直线传播的假设，所以可以将电磁波信号看作平行平面波。

假设射入的平面波波面内各点电场强度和磁场强度分别相等，即为均匀平面波 [6]。

### 7.2 工作抛物面信号接收比分析

#### 7.2.1 背架结构半径

反射面与抛物面得贴近过程实际上是一个优化过程，优化参数主要是两个：（1）球面子块（背架结构）的半径  $R_0$ ， $R_0$  不同得到的反射面几何精度  $RMS$  也不同；（2）主索节点与理想节点的径向误差  $e_i$ ，并非将主索节点调节到理想抛物面是精度最优，而是偏离一定距离时几何精度最高。在球面所望单元网格尺寸一定的情况下，对于一个给定的背架结构半径，可以时得到反射面与抛物面的几何偏差均方值  $RMS$  最小值，通过参数分析可以球的最优得背架结构半径  $R_0$ 。

#### 7.2.2 反射面板分析

对于球心坐标系  $C - XYZ$ ，若某个三角形球面子板  $T_i$  的三个主索节点是  $\{A_i = (x_A^{(i)}, y_A^{(i)}, z_A^{(i)}), B_i = (x_B^{(i)}, y_B^{(i)}, z_B^{(i)}), C_i = (x_C^{(i)}, y_C^{(i)}, z_C^{(i)})\}$ 。由问题 2，每个背架结构的最优半径均为  $R_0$ ，球心  $O_i = (X_O^{(i)}, Y_O^{(i)}, Z_O^{(i)})$ ，所以球面方程为

$$(X - X_O^{(i)})^2 + (Y - Y_O^{(i)})^2 + (Z - Z_O^{(i)})^2 = R_0^2 \quad (26)$$

假设在反射板上的入射点为  $S = (X_S, Y_S, Z_S)$ ，则该点处切面方程的法向量为  $\vec{n} = \overrightarrow{O_i S} = (X_S - X_O^{(i)}, Y_S - Y_O^{(i)}, Z_S - Z_O^{(i)})$ ，并记为  $\vec{n} = (a, b, c)$ 。则该反射板的平面方程为

$$a(X - X_S) + b(Y - Y_S) + c(Z - Z_S) = 0 \quad (27)$$

#### 7.2.3 反射传播分析

对一条入射电磁波线进行分析 [7]，在前馈射电望远镜中，入射电磁波线近似与抛物面对称轴平行，所以入射线向量表示为

$$\vec{x} = (\cos \beta \cdot \cos \alpha, \cos \beta \cdot \sin \alpha, \sin \beta) \quad (28)$$

式中， $\alpha$  为天体  $S$  的方位角， $\beta$  为天体  $S$  的仰角。

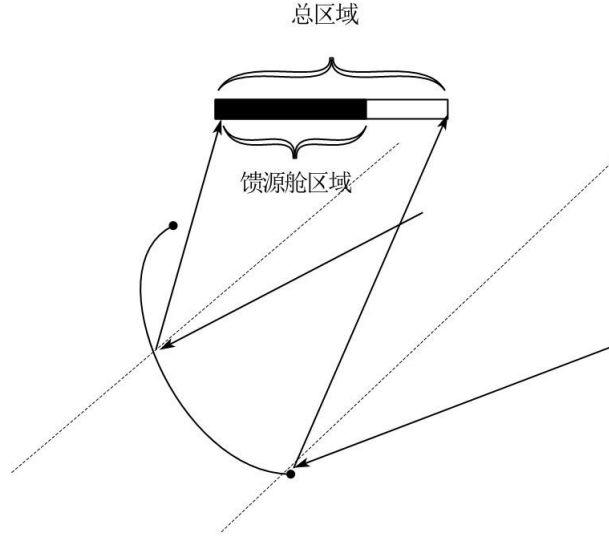


图 12 反射传播示意图

假设在反射板上的入射点为  $S = (X_S, Y_S, Z_S)$ ，将法向量  $\vec{n} = (a, b, c)$  作为对称轴，对称得到反射线向量为  $\vec{y} = (m, n, p)$ 。由几何分析， $\vec{y}$  需要满足方程

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{n} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{n}, \vec{y}) = 0 \\ \cos \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \cos \langle \vec{y}, \vec{n} \rangle \end{cases} \quad (29)$$

该反射波的直线参数方程为

$$\begin{cases} X = X_S + mt \\ Y = Y_S + nt \\ Z = Z_S + pt \end{cases}, t \in R \quad (30)$$

#### 7.2.4 接收比

对于第  $i$  块板来说，我们可以用该反射电磁波束在馈源圆盘面的投影部分的面积  $S_{1j}$  代表该波束反射信号的能量，用馈源圆盘与投影部分重叠的面积  $S_{2j}$  代表接收信号的能量，则该单元反射板对应的接收比即为  $\eta_i = \frac{S_{1i}}{S_{2i}}$ ，整体接收比即为以投影面积为权重的单元反射板接受比的加权平均数。

$$\eta = \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_{1i}}{\sum_{j=1}^N S_{1j}} \eta_i \right) \quad (31)$$

### 7.3 基准球面信号接收比分析

#### 7.3.1 球面像差分析





#### 7.4 问题 3 的求解

对于理想抛物面而言，由被观测点发出的信号，将会在抛物面的汇聚作用下汇聚于抛物面的焦点处，如果馈源舱恰好位于焦点，则此时信号全部被馈源舱所接受。但是对于主索节点的径向位移只能在  $0.6m$  之内以及相邻节点之间的距离变化不能超过  $0.07\%$  的限制，我们所得到的实际工作的抛物面与理想抛物面并非完全吻合，因此工作抛物面的焦点没有落在馈源舱内，造成了一定量的信号损失，为了解决这个问题，我们首先研究我们的实际工作的抛物面的相关信息：

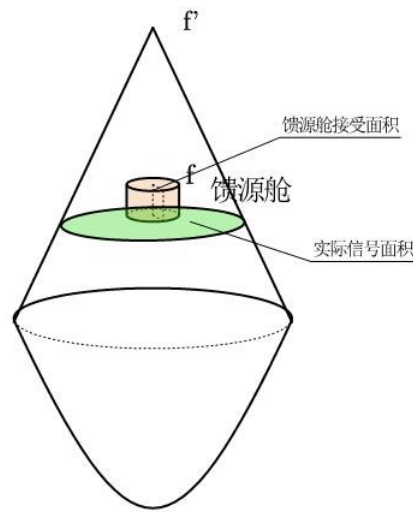


图 14 实际工作抛物面示意图

反射自工作面的信号汇聚于  $f'$  点，这些信号在馈源舱所在平面形成了一个与馈源舱覆盖区域的同心圆，这两个圆的面积之比即为馈源舱的信号接受比。

所以，我们将问题 2 中得到的工作抛物面在瞬时坐标系  $c - xyz$  下进行拟合，得到实际的抛物面方程，求出它的焦距位置，连接焦距与抛物面边缘的点，在于馈源舱  $z$  坐标相同的平面上的截面面积  $R'$ ，以及馈源舱的接受面积  $R$ ，求出则吸收比为  $\frac{R}{R'}$ 。

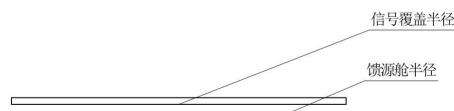


图 15 工作抛物面下的信号接收截面图

在  $c - xoy$  坐标系下，实际工作抛物面拟合出来的抛物面方程为：

$$x^2 + y^2 - 560.28z - 1689588 = 0 \quad (34)$$

其焦距为 140.07m，顶点坐标是 (0,0,-300.9)。其焦点坐标位于 (0,0,-160.83)，而馈源舱位于 (0,0,-160.2)。可以看出，焦点与馈源舱之间有一定偏差。

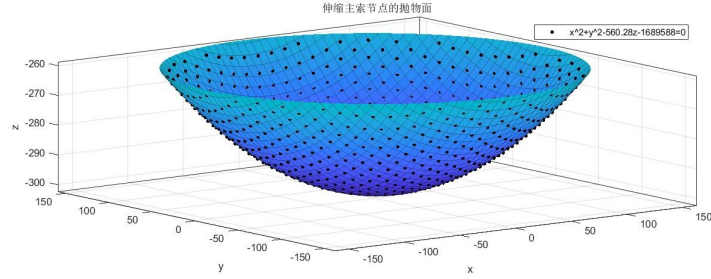


图 16 伸缩主索节点的抛物面示意图

经计算信号在馈源舱平面的投影的半径为 0.6647m，而馈源舱的区域的半径是 0.5m。因此信号接受比为  $\frac{R}{R'} = 75.22\%$ 。

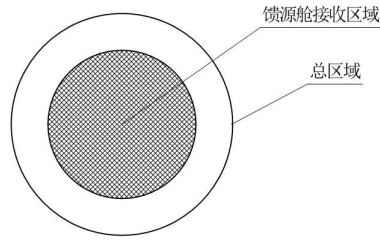


图 17 馈源舱平面信号接收区域示意图

同理，分析球形基准面的信号接受比，球体对远处的平行信号汇聚于球心。因此，其中一部分被馈源舱所接收，经计算信号接受比为  $\frac{R}{R'} = 15\%$ 。

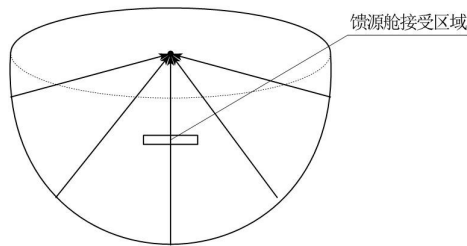


图 18 球形基准面信号接收区域示意图

## 八、模型分析

### 8.1 模型的优点

- 类比一般坐标变换，在问题一中建立了抛物面意义下的坐标变换模型，为后续法向偏差、反射面整体精度以及拟合参数的计算和几何分析奠定了基础，同时，为解决复杂几何问题提供参考思路。
- 粒子群算法是一种基于随机迭代的智能搜索算法，具有相当快的收敛速度。在问题2单目标最优化模型的求解过程中，仅用10步就几乎收敛于全局最优解。
- 在问题3中，基于微元法的思想，从物理几何光学出发，建立了计算馈源与反射面信号接收比的单元面板电磁信号反射模型。

### 8.2 模型的不足

- 由于FAST射电望远镜口径较大，信号的反射过程时间相对较长，信号强度的衰减与增益对馈源和反射面的信号接收比的计算有较大影响。
- 在问题2中，我们用馈源盘的重叠面积与反射波束的投影面积之比代表信号接收比，与实际信号强度之比有较大误差。

## 参考文献

- [1] 南仁东.500m球反射面射电望远镜FAST[J].中国科学G辑:物理学、力学、天文学,2005(05):3-20.
- [2] 丁辰.FAST反射面节点测量数据处理方法研究[D].解放军信息工程大学,2017.
- [3] 李明辉,朱丽春.FAST瞬时抛物面变形策略优化分析[J].贵州大学学报(自然科学版),2012,29(06):24-28+43.
- [4] 钱宏亮.FAST主动反射面支承结构理论与试验研究[D].哈尔滨工业大学,2007.
- [5] 沈世钊,范峰,钱宏亮.FAST主动反射面支承结构总体方案研究[J].建筑结构学报,2010,31(12):1-8.
- [6] 吴江,王博.大型反射面天线轨道不平度对指向精确度的影响[J].太赫兹科学与电子信息学报,2017,15(04):634-639.
- [7] 王璐璐,黄文华,章勇华,方文饶.物理光学法分析反射面天线辐射场[J].强激光与粒子束,2018,30(06):53-57.

- [8] Li D , Nan R , Pan Z . The Five-Hundred-Meter Aperture Spherical Radio Telescope (FAST) Project[J]. Proceedings of the International Astronomical Union, 2012, 20(S291):989-1024.

## 附录 A 源代码

```
%问题一主程序
%第一部分绘制附件一相关图像
clear
load Point.mat;
xyz = table2array(Point(:,2:4));
x = xyz(:,1);
y = xyz(:,2);
z = xyz(:,3);
c = linspace(1,10,length(x));
scatter3(x,y,z,[],c,'filled')%绘制散点图
x(1) = [];%处理NaN数据
y(1) = [];
z(1) = [];
[X,Y,Z]=griddata(x,y,z,linspace(min(x),max(x))',linspace(min(y),max(y))','v4');%插值
figure,surf(X,Y,Z);%三维曲面
figure,meshc(X,Y,Z)%剖面图
view(0,0);
figure,meshc(X,Y,Z);%s三维曲面（浅色）+等高线
%%
%第二部分：确定理想抛物线
i = 1:2:150;
[h,rms] = PSO_adaptation(@fitness,50,2,2,0.8,0.6,100,1);
f = (300 * 0.466 + h) / 300;
fprintf('理想抛物线的顶点偏移量为%f焦距比为%f\n',h,f)
[min_offset,max_offset,offset]=radial_distance(h,f,i);
j = -i;
i = [j(end:-1:1),i];
offset = [offset(end:-1:1),offset];
plot(i, offset, 'ok-', 'linewidth', 1.1, 'markerfacecolor', [36, 169, 225]/255)
title('不同位置处与基准面的径向距离');
xlabel('距离Z轴距离/m');
ylabel('径向距离/m');
%%
% 第三部分，比较不同迭代次数得到的抛物线的径向差距
f = [0.4672,0.4671,0.4611];
h = [0.3610,0.3424,0.4732];
for i = 1:3
j = 1:2:150;
[min_offset,max_offset,offset]=radial_distance(h(i),f(i),j);
plot([-j(end:-1:1),j], [offset(end:-1:1),offset])
hold on
title('不同位置处与基准面的径向距离');
xlabel('距离Z轴距离/m');
ylabel('径向距离/m');
```

```

end
legend('迭代1次时','迭代10次时','迭代100次')

%问题二主程序
%第一部分：坐标系的旋转
clear
load Point.mat
xyz = table2array(Point(:,2:4));
x = xyz(:,1);
y = xyz(:,2);
z = xyz(:,3);

scatter3(x,y,z,[],'b','filled')%绘制散点图
hold on
alpha = 36.795;%方位角
beta = 78.169;%仰角
alpha = degtorad(alpha);%转换成弧度
beta = degtorad(beta);

z0 = [0,0,1];%原坐标系下的z轴
z1 = [cos(beta) * cos(alpha),cos(beta) * sin(alpha),sin(beta)];%现坐标系下的z轴

theta = acos(dot(z0,z1)/(norm(z0)*norm(z1)));
C = [z0(2)*z1(3)-z0(3)*z1(2);z0(3)*z1(1)-z0(1)*z1(3);z0(1)*z1(2)-z0(2)*z1(1)];

axang = [C;2*pi - theta]';
rotm = axang2rotm(axang);
% 旋转矩阵
C=rotm;

xyz = xyz * C;
x = xyz(:,1);
y = xyz(:,2);
z = xyz(:,3);
scatter3(x,y,z,[],'r','filled')%绘制散点图
title('原基准面与旋转后的基准面对比');
xlabel('X轴');
ylabel('Y轴');
zlabel('Z轴');
legend('原基准面','旋转后的基准面')
view(0,0)

vertex = [0,0,-300.361];%原来的顶点坐标
vertex = vertex * C; %旋转后的顶点坐标
fprintf('顶点坐标是(%f,%f,%f)\n',vertex(1),vertex(2),vertex(3))

```

```

%%
%第二部分：选择需要调整的点
load data.mat
figure
process = find((Point.x - vertex(1)).^2 + (Point.y - vertex(2)).^2 < 150.^2);
%process = find((Point.x).^2 + (Point.y).^2 < 150.^2);
scatter3(Point.x,Point.y,Point.z,'b');
title('需要移动的主索节点俯视图');
hold on;
scatter3(Point.x(process),Point.y(process),Point.z(process),'r');
view(0,90)
axis equal
%%
% 第三部分：计算径向伸缩距离
figure;
global d_z
d_z = sqrt((Point.x(process) - vertex(1)).^2 + (Point.y(process) - vertex(2)).^2);
%[xm,fv] = PSO_adaptation(@fitness2,50,2,2,0.8,0.6,100,length(process));
offset = zeros(length(Point.x),1);
[~,~,offset(process)] = radial_distance(0.3610,0.4672,d_z);
scatter3(Point.x,Point.y,Point.z,15,offset,'filled')
axis equal
title('主索节点径向伸缩距离图');
h = colorbar;%右侧颜色栏
view(0,90)
%%
%第四部分：求解结果
for i = 1:length(Point.x)
norm_x(i) = Point.x(i) / sqrt(Point.x(i).^2 + Point.y(i).^2 + Point.z(i).^2);
norm_y(i) = Point.y(i) / sqrt(Point.x(i).^2 + Point.y(i).^2 + Point.z(i).^2);
norm_z(i) = Point.z(i) / sqrt(Point.x(i).^2 + Point.y(i).^2 + Point.z(i).^2);
end
x = Point.x + offset*norm_x(i);
y = Point.y + offset*norm_y(i);
z = Point.z + offset*norm_z(i);

%问题三主程序
%第一部分拟合抛物面
clear
load data.mat
process = find((Point.x).^2 + (Point.y).^2 < 150.^2);
x = Point.x(process);
y = Point.y(process);
z = Point.z(process);

```

```

x(x == NaN) = [];
y(y == NaN) = [];
z(z == NaN) = [];
%此时调用cftool工具箱得到拟合后的抛物面
%%
%第二部分：计算信号经过工作抛物面在馈源舱平面上的投影
point = [0,0,-160.83]; %工作抛物面焦点坐标
cabin = [0,0,-160.2]; %馈源舱位置
d_z = max(sqrt(x.^2 + y.^2)); %计算最远距离
z_o = (d_z.^2 - 168950)/561.48; %计算边缘处的坐标
x_o = -150 / sqrt(2);
vector = [point(1) - x_o, point(3) - z_o]; %计算反射光线的向量
A = [x_o, z_o] + vector .* ((cabin(3) - z_o) / (point(3) -
    z_o)); %计算反射光线在馈源舱平面的坐标
%%
%第三部分：绘制图像
x1 = -0.5:0.01:0.5;
y1 = sqrt(0.5^2 - x1.^2);
plot(x1, y1, 'r--')
hold on
plot(x1, -y1, 'r--')
x2 = -0.6647:0.01:0.6647;
y2 = sqrt(0.6647^2 - x2.^2);
plot(x2, y2, 'b--')
hold on
plot(x2, -y2, 'b--');
legend('馈源舱接受面积', '总面积')

```