# Лабораторна робота №3.
# РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

**Мета роботи: розробка програми розв'язання нелінійних рівнянь**

## Хід виконання роботи:

1. Вивчити методи розв'язання нелінійних рівнянь.
2. Скласти алгоритми програм розв'язання нелінійних рівнянь двома методами.
3. Написати програму розв'язання нелінійних рівнянь двома методами.
4. Для налагодження програми взяти нелінійне рівняння **з відомим розв'язком** та провести тестування програми.
5. Дослідити збіжність методів від вибору початкових умов.
6. Підготувати звіт.

Реалізувати методи розв'язку та меню вибору методу.

В програмі передбачити:

- режим налагодження – виведення результатів на кожній ітерації (за вибором користувача);
- призупинку обчислення при перевищенні заданої кількості ітерацій з видачею інформації для прийняття рішення, що робити далі (продовжити з такою ж кількістю ітерацій; або виконати програма до кінця, поки не будуть знайдено корені рівняння; або вийти із програми, перед виходом вивівши на екран отриманий проміжний результат обрахунку);
- визначення затрат часу на пошук кореня, наприклад, за допомогою функцій **clock()** чи **time()**;
- вивід на екран значення кореня та значення функції в цій точці.

**Вхідні дані**: початкове (початкові) значення кореня, похибка обчислення, максимальна кількість ітерацій.

**Вихідні дані**: значення кореня, значення функції у знайденій точці, кількість ітерацій.

## Зміст звіту:

1. Мета роботи.
2. Алгоритм кожного метода.
3. Обрана функція та обраховане вручну значення кореня.
4. Результати обрахунків коренів функції заданими методами при чотирьох різних початкових умовах.
5. Кількість ітерацій, яка потрібна для знаходження кореня при заданій похибці обчислення для кожного з методів при різних початкових умовах.
6. Висновки щодо точності та часу обчислення кожного з методів.

## МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Загальна форма запису нелінійного рівняння $f(x)=0$. Наприклад, $f(x)=x^3+2.0\cdot x$.

Розв'язком рівняння $f(x)$ буде таке X, при якому рівняння перетворюється в тотожність: при $x=X$, $f(X)=0$. Функція нев'язки $|f(x_{пот})|$ є мірою відхилення $x_{пот}$ від X ($x_{пот}$ – поточне значення кореня). При **чисельному** розв'язку рівнянь розв'язком вважається таке $X_ч$, при якому $|f(X_ч)|\leq\varepsilon$, де $\varepsilon$ – похибка обчислення, яку обирати з діапазону $\varepsilon = 10^{-5} - 10^{-3}$ (для метода половинного ділення розв'язком є будь-яке значення з проміжку $[x_1; x_2]$, якщо $|x_1-x_2|\leq\varepsilon$).

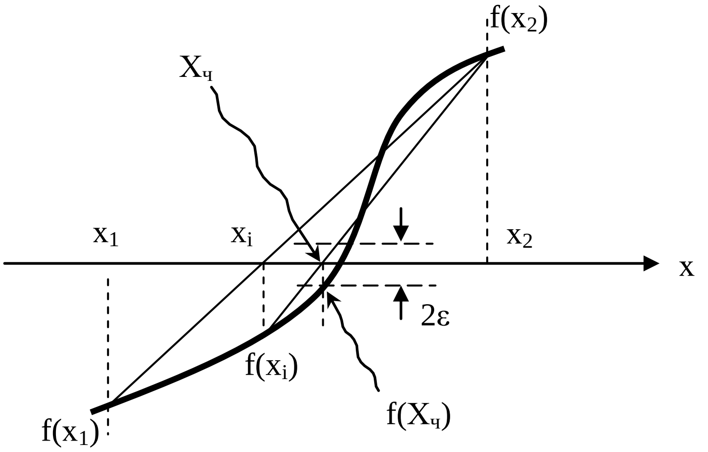
**Метод хорд**

Задамо точки $x_1$ та $x_2$, в яких значення функції мають **протилежні знаки** (в нашому випадку, наприклад, в точці $x_1$ $f(x_1)<0$, в точці $x_2$ $f(x_2)>0$). Як відомо з курсу вищої математики, при цій умові корінь рівняння лежить між точками $x_1$ і $x_2$. Проводимо через точки $f(x_1)$ та $f(x_2)$ пряму (хорду), рівняння якої в канонічному виді має вигляд

$$F(x) = f(x_2) + f'(x_2)\cdot(x - x_2) = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\cdot(x - x_2),$$

де $f(x_1)$, $f(x_2)$ - значення функції в точках $x_1$ і $x_2$,

$f'(x)$ – похідна функції $f(x)$.




Тепер знаходимо з цього рівняння координату точки $x_i$, в якій хорда перетинає вісь абсцис ($F(x_i)=0$):

$$x_i = \frac{f(x_2)\cdot x_1 - f(x_1)\cdot x_2}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Вирахуване значення $x_i$ вважаємо новим значенням $x_1$ або $x_2$: значення $x_i$ обирається рівним $x_1$ або $x_2$ таким чином, щоб точка з розв’язком знаходилася всередині інтервалу $[x_1; x_2]$, тобто **значення функції в точках $x_1$ та $x_2$** знову **мали протилежні знаки**. **(При однакових знаках в обох точках добуток значень функцій в цих точках буде додатній, при різних знаках – від’ємний.)**

На кожній ітерації обчислюємо $|f(x_i)|$ і порівнюємо з заданою похибкою розв’язку ε. Цикл припиняється, коли значення функції в точці $x_i$ менше за абсолютним значенням ніж ε; це значення $x_i$ вважається розв’язком рівняння $X_ч$.

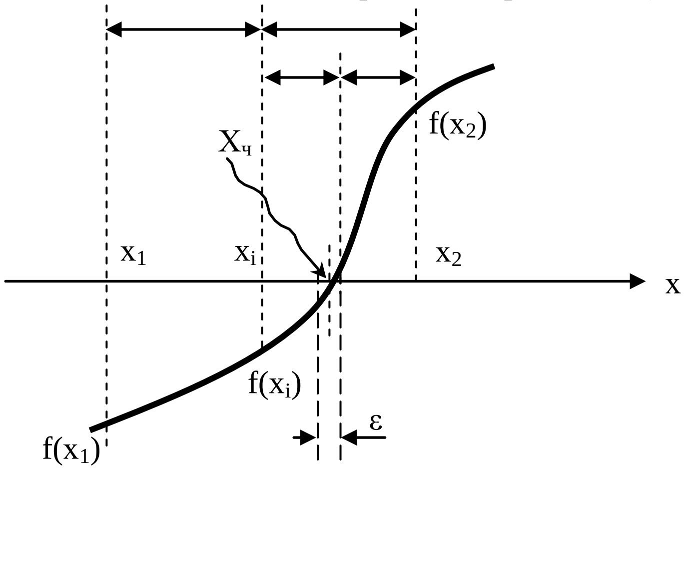
**Метод половинного ділення**

Задамо точки $x_1$ та $x_2$, в яких значення функції мають **протилежні знаки** (в нашому випадку, наприклад, в точці $x_1$ $f(x_1)<0$, в точці $x_2$ $f(x_2)>0$). При цій умові корінь рівняння лежить між точками $x_1$ і $x_2$. Метод половинного ділення полягає в зменшенні інтервалу $[x_1; x_2]$ вдвічі на кожній ітерації.

Обираємо нову точку на середині відрізку $[x_1; x_2]$:

$$x_i = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Обчислюємо значення $F=f(x_i)$. Перевіряємо, в якому з утворених проміжків $[x_1; x_i]$ та $[x_i; x_2]$ знаходиться розв’язок рівняння (якщо значення функції на кінцях проміжку




мають **протилежні знаки**, то розв’язок знаходиться в цьому проміжку). Для **показаної на малюнку** функції бачимо, що якщо F<0, то корінь рівняння лежить поміж $x_i$ та $x_2$. В цьому разі необхідно значення змінної $x_1$ замінити на значення $x_i$ і повторити обчислення. Якщо F>0, то корінь лежить поміж $x_1$ і $x_i$ (друга ітерація). Тоді треба замінити значення змінної $x_2$ на $x_i$ і повторити обчислення. Після присвоєння $x_i$ необхідно перевірити критерій закінчення пошуку розв'язку $|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}|\leq\boldsymbol{\varepsilon}$.

## Метод Ньютона (метод дотичних)

Обираємо $x_1$ і обчислюємо $f(x_1)$. Проводимо у вибраній точці дотичну до кривої $f(x)$. Рівняння дотичної має вигляд:

$$F(x)=f(x_1)+f'(x_1)\cdot(x-x_1)$$

де $f'(x_1)$ – перша похідна функції $f(x)$ в точці $x_1$.

З цього рівняння визначаємо точку $x_i$, в якій дотична перетинає вісь абсцис:

$$0=f(x_1)+f'(x_1)\cdot(x_i-x_1),$$

звідки

$$x_i=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Значення $x_i$ ближче до кореня ніж $x_1$. Міняємо $x_1$ на $x_i$ і повторюємо обчислення до того часу, поки не виконається критерій зупинки $|\mathbf{f(x_i)}|\leq\boldsymbol{\varepsilon}$.