

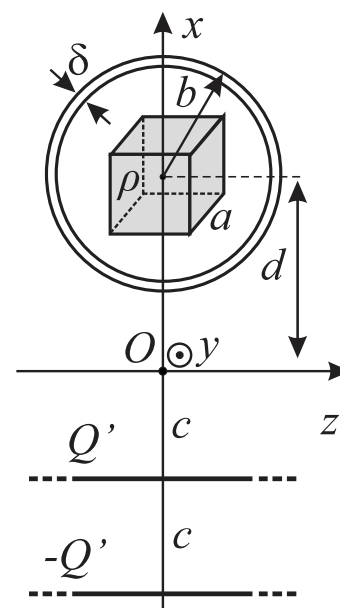
## ZADACI

**Zadatak 1.** Zapreminska gustina naelektrisanja u naelektrisanjoj kocki, stranice  $a = 2 \text{ cm}$ , ima konstantnu vrednost  $\rho_0 = 10 \mu\text{C}/\text{m}^3$ . Naelektrisana kocka se nalazi unutar nenaelektrisane provodne sferne ljuske, debljine  $\delta$ , spoljašnjeg poluprečnika  $b = 6 \text{ cm}$ , kao što je prikazano na slici 1. Centri kocke i sferne ljuske se poklapaju i nalaze se na  $x$  osi, na rastojanju  $d = 15 \text{ cm}$  od centra Dekartovog koordinatnog sistema. Dve tanke beskonačne niti, od izolacionog materijala, naelektrisane su istim podužnim gustinama naelektrisanja  $Q'$ , suprotnog predznaka, i postavljene su u  $x$ - $z$  ravni, paralelno sa  $z$  osom. Odrediti:

- Ukupnu količinu naelektrisanja,  $Q_K$ , u naelektrisanjoj kocki.
- Količine naelektrisanja na površima provodne ljuske.
- Podužnu gustinu naelektrisanja  $Q'$ , tako da ukupan vektor jačine električnog polja u koordinatnom početku bude jednak nuli.

Brojni podaci su:  $c = 8 \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

Naelektrisane niti se nalaze na dovoljno velikom rastojanju od provodne ljuske, tako da je njihov međusobni uticaj, kao i uticaj na raspodelu naelektrisanja na provodnoj ljusci zanemarljiv.

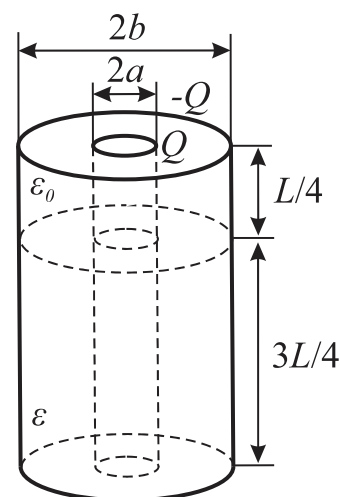


Slika 1.

**Zadatak 2.** Koaksijalni kabl poluprečnika elektroda  $a$  i  $b$ , dužine  $L$ , ispunjen je do  $3/4$  svoje zapremine tečnim dielektrikom relativne permittivnosti  $\varepsilon_r$ , i postavljen u vertikalni položaj, kao što je prikazano na slici 2. Kabl je priključen na izvor napona  $U$ .

- Izvesti izraz za kapacitivnost kabla.
- Dok je kabl priključen na izvor napona  $U$ , kroz odgovarajući otvor na njemu, tečni dielektrik se dopuni, tako da on zauzima čitavu zapreminu strukture. Pri tome se kapacitivnost kabla poveća za 20%, u odnosu na prvobitnu vrednost. Na osnovu ovoga, izračunati relativnu permittivnost tečnog dielektrika,  $\varepsilon_r$ .

Brojni podaci su:  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $b = 2,7a$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $U = 10 \text{ kV}$ .



Slika 2

## PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje dva sata.

Osnovi elektrotehnike 1  
(II kolokvijum)

K2

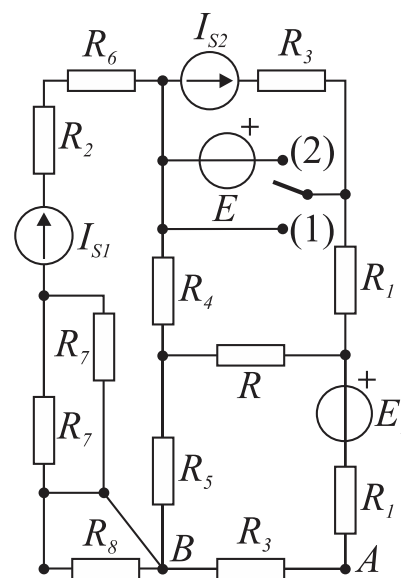
31.08.2021.

## ZADACI

**Zadatak 1.** Kada se u mreži sa slike 1 preklopnik prebaci iz položaja (1) u položaj (2), napon između tačaka A i B se poveća za  $\Delta U_{AB} = 2 \text{ V}$ .

- Izračunati vrednost *ems* naponskog generatora  $E$ .
- Izračunati snagu strujnog generatora  $I_{S1}$ , kada je preklopnik u položaju (2). Prilikom rešavanja, koristiti metodu konturnih struja.

Brojni podaci su:  $R = R_1 = R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_5 = R_6 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = R_8 = 16 \text{ k}\Omega$ ,  
 $E_1 = 9 \text{ V}$ ,  $I_{S1} = 2 \text{ mA}$ ,  $I_{S2} = 4 \text{ mA}$ .

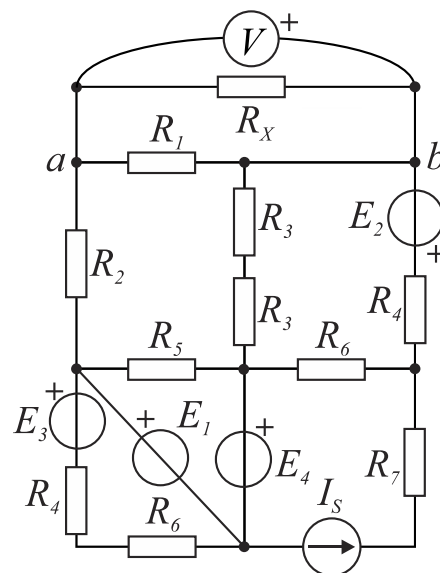


Slika 1.

**Zadatak 2.** Idealan voltmetar na slici 2 podešen je na opseg da meri napone do  $2 \text{ V}$ .

- Odrediti elemente Tevenenovog generatora u odnosu na priključke otpornika  $R_X$  (priključci a i b). Proračune izvršiti korišćenjem metode potencijala čvorova.
- Ispitati da li je priključen voltmetar, sa izabranim mernim opsegom, pogodan za merenje napona na otporniku  $R_X$ .
- Ukoliko nije pogodan, odrediti najveću vrednost otpornosti otpornika  $R_X$ , pri kojoj bi se voltmetar sa izabranim mernim opsegom mogao koristiti za merenje napona na njemu.

Brojni podaci su:  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_5 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 30 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_X = 35 \text{ k}\Omega$ ,  
 $E_1 = 4 \text{ V}$ ,  $E_2 = 1,5 \text{ V}$ ,  $E_3 = E_4 = 2,5 \text{ V}$ ,  $I_S = 1 \text{ mA}$ .



Slika 2.

## PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje dva sata.

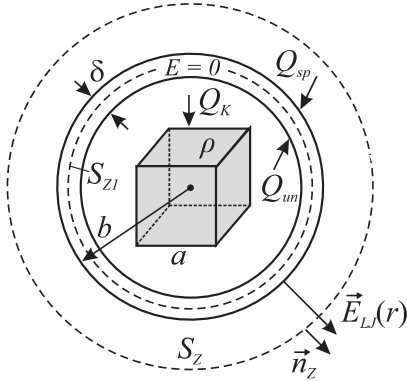
I-1

a)

$$Q_K = \int_{V_K} \rho dV = \int_{V_K} \rho_0 dV = \rho_0 V_K = \rho_0 a^3$$

$$Q_K = 80 \text{ pC}$$

b)



$$\oint_{S_{z1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutar S_{z1}}}{\epsilon_0}$$

$E = 0$ , u provodniku

$$0 = \frac{Q_K + Q_{un}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{un} = -Q_K = -80 \text{ pC}$$

$$Q_{LJ} = Q_{un} + Q_{sp} = 0$$

$$Q_{sp} = -Q_{un} = 80 \text{ pC}$$

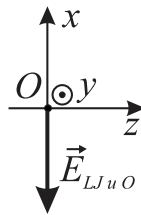
c)

$$\oint_{S_z} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutar S_z}}{\epsilon_0} \quad \angle(\vec{E}_{LJ}, \vec{n}_z) = 0$$

$$E_{LJ}(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_K + Q_{un} + Q_{sp}}{\epsilon_0} = \frac{Q_K}{\epsilon_0}$$

$$E_{LJ}(r) = \frac{Q_K}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > b$$

$$\vec{E}_{LJuO} = \frac{Q_K}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cdot (-\vec{i}_x)$$

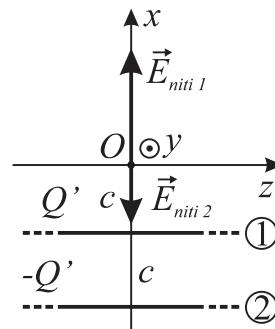


$$E_{niti1} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 c}$$

$$\vec{E}_{niti1} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 c} \cdot \vec{i}_x$$

$$E_{niti2} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 2c}$$

$$\vec{E}_{niti2} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 2c} \cdot (-\vec{i}_x)$$



$$\vec{E}_O = \vec{E}_{LJuO} + \vec{E}_{niti1} + \vec{E}_{niti2} = \left( \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 c} - \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 2c} - \frac{Q_K}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right) \cdot \vec{i}_x = \left( \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 2c} - \frac{Q_K}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right) \cdot \vec{i}_x$$

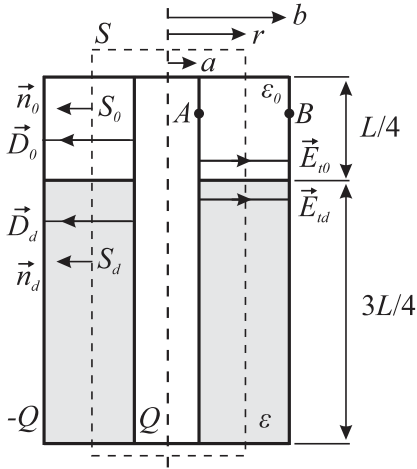
$$|\vec{E}_O| = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 2c} - \frac{Q_K}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 0$$

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 2c}{4\pi\epsilon_0 d^2} Q_K = \frac{c}{d^2} Q_K$$

$$Q' = 284,44 \text{ pC / m}$$

I-2

a)



Granični uslov:

$$E_{r0} = E_{td} \quad E_0 = E_d = E$$

$$D_{n0} = D_{nd} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{uS}$$

$$\int_{S_{OM}} D ds = Q$$

$$\int_{OM_1} D_0 ds + \int_{OM_2} D_d ds = Q$$

$$D_0 2\pi r \frac{L}{4} + D_d 2\pi r \frac{3L}{4} = Q \quad (D_0 = \epsilon_0 E, \quad D_d = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E)$$

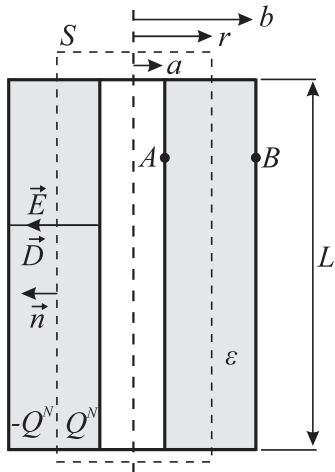
$$E = \frac{Q}{\left( \epsilon_0 \frac{L}{4} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{3L}{4} \right) 2\pi r}, \quad a \leq r \leq b$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{\left( \epsilon_0 \frac{L}{4} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{3L}{4} \right) 2\pi r} dr = \frac{Q}{\left( \epsilon_0 \frac{L}{4} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{3L}{4} \right) 2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\left( \epsilon_0 \frac{L}{4} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{3L}{4} \right) 2\pi}{\ln \frac{b}{a}}$$

b)

$$U = 10 \text{ kV} = \text{const.} \quad \epsilon_0 \rightarrow \epsilon$$



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{uS}$$

$$\int_{S_{OM}} D ds = Q$$

$$D 2\pi r L = Q \quad (D = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E)$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r L}, \quad a \leq r \leq b$$

$$U_{AB}^{NOVO} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

$$C^{NOVO} = \frac{Q}{U_{AB}^{NOVO}} = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$C^{NOVO} = 1,2 C$$

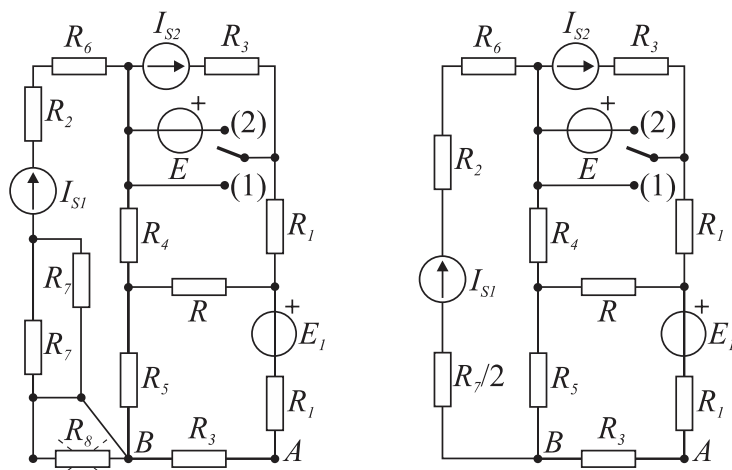
$$\frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} = 1,2 \frac{\left( \epsilon_0 \frac{L}{4} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{3L}{4} \right) 2\pi}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$\frac{\ln \frac{b}{a}}{\epsilon_0 L 2\pi}$$

$$\epsilon_r = 1,2 \cdot \left( \frac{1}{4} + \epsilon_r \frac{3}{4} \right) \quad \boxed{\epsilon_r = 3}$$

II-1

a)



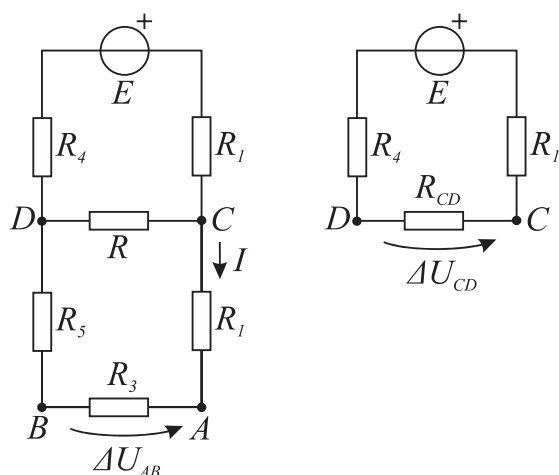
$$\boxed{\begin{matrix} Svi \\ generatori \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} Svi \\ sem E \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} Samo \\ E \end{matrix}}$$

(2)                      (1)

$$U_{AB}^{(2)} = U_{AB}^{(1)} + \Delta U_{AB}$$

$$\Rightarrow \Delta U_{AB} = U_{AB}^{(2)} - U_{AB}^{(1)}$$

$$\Delta U_{AB} = 2 V$$



$$I = \frac{\Delta U_{AB}}{R_3} = \frac{2}{5 k} = 0,4 mA$$

$$\Delta U_{CD} = I(R_1 + R_3 + R_5) = 0,4 m \cdot 20 k = 8 V$$

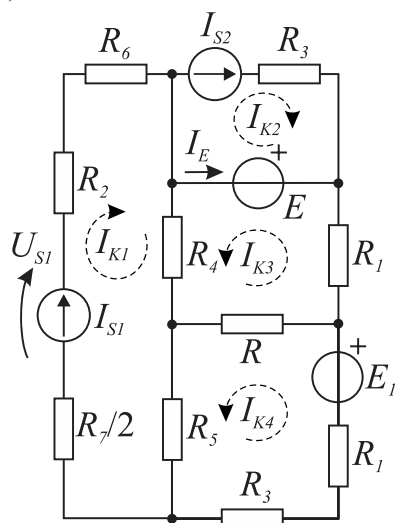
$$R_{CD} = R \parallel (R_1 + R_3 + R_5) = 5 k \parallel 20 k = 4 k$$

$$\Delta U_{CD} = \frac{R_{CD}}{R_{CD} + R_1 + R_4} E = \frac{4 k}{4 k + 5 k + 2 k} E = \frac{4}{11} E$$

$$E = \frac{11}{4} \Delta U_{CD} = \frac{11}{4} \cdot 8 V$$

$$\boxed{E = 22 V}$$

b)



$$MKS: n_g - (n_e - 1) - n_{s.g.} = 8 - (5 - 1) - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$K1: I_{K1} = I_{S1} = 2 mA$$

$$K2: I_{K2} = I_{S2} = 4 mA$$

$$K3: (R + R_1 + R_4) I_{K3} + R_4 I_{K1} - R I_{K4} = -E$$

$$K4: (R + R_1 + R_3 + R_5) I_{K4} + R_5 I_{K1} - R I_{K3} = E_1$$

$$(5k + 5k + 2k) I_{K3} + 2k \cdot 2m - 5k I_{K4} = -22 \quad / : k$$

$$(5k + 5k + 5k + 10k) I_{K4} + 10k \cdot 2m - 5k I_{K3} = 9 \quad / : k$$

$$12 I_{K3} - 5 I_{K4} = -26 m$$

$$-5 I_{K3} + 25 I_{K4} = -11 m$$

$$I_{K3} = -2,56 mA$$

$$I_{K4} = -0,95 mA$$

$$U_{S1} = R_2 I_{S1} + R_6 I_{S1} + R_4 (I_{K3} + I_{K1}) + R_5 (I_{K4} + I_{K1}) + \frac{R_7}{2} I_{S1}$$

$$U_{S1} = 8k \cdot 2m + 10k \cdot 2m + 2k \cdot (-2,56m + 2m) + 10k \cdot (-0,95m + 2m) + \frac{16k}{2} \cdot 2m$$

$$U_{S1} = 61,38 V$$

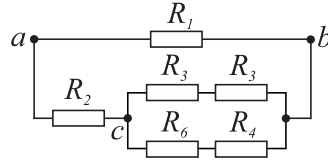
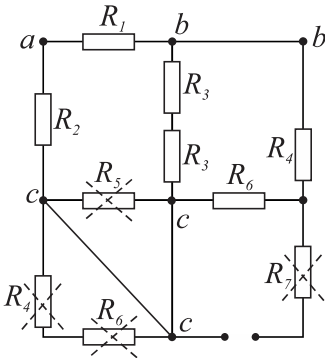
$$P_{S1} = U_{S1} I_{S1} = 61,38 V \cdot 2 mA$$

$$\boxed{P_{S1} = 122,76 mW}$$

II-2

a)

$R_T$ :

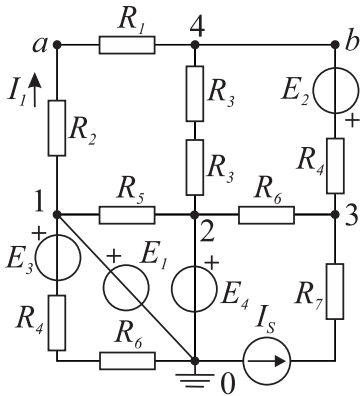


$$R_T = R_1 \parallel [R_2 + (R_3 + R_4) \parallel (R_6 + R_7)]$$

$$R_T = 50k \parallel [30k + (20k + 20k) \parallel (30k + 10k)]$$

$$R_T = 25k\Omega$$

$E_T$ :



$$V_0 = 0V, \quad V_1 = E_1 = 4V, \quad V_2 = E_4 = 2,5V$$

$$V_3 \left( \frac{1}{R_4 + 0} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7 + \infty} \right) - V_2 \left( \frac{1}{R_6} \right) - V_4 \left( \frac{1}{R_4 + 0} \right) = I_s + \frac{E_2}{R_4}$$

$$V_4 \left( \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{2R_3} + \frac{1}{R_4 + 0} \right) - V_1 \left( \frac{1}{R_1 + R_2} \right) - V_2 \left( \frac{1}{2R_3} \right) - V_3 \left( \frac{1}{R_4 + 0} \right) = -\frac{E_2}{R_4}$$

$$V_3 \left( \frac{1}{10k} + \frac{1}{30k} \right) - 2,5 \cdot \left( \frac{1}{30k} \right) - V_4 \left( \frac{1}{10k} \right) = 1m + \frac{1,5}{10k} \quad \cdot 30k$$

$$V_4 \left( \frac{1}{80k} + \frac{1}{40k} + \frac{1}{10k} \right) - 4 \cdot \left( \frac{1}{80k} \right) - 2,5 \cdot \left( \frac{1}{40k} \right) - V_3 \left( \frac{1}{10k} \right) = -\frac{1,5}{10k} \quad / \cdot 80k$$

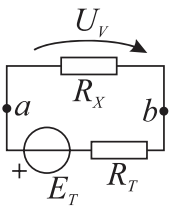
$$\left. \begin{array}{l} 4V_3 - 3V_4 = 37 \\ -8V_3 + 11V_4 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow V_3 = 19,9V, \quad V_4 = 14,2V$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_4}{R_1 + R_2} = \frac{4 - 14,2}{80k} = -0,1275mA$$

$$E_T = U_{ab} = I_1 R_1 = (-0,1275mA) \cdot 50k$$

$$E_T = -6,375V$$

b)



$$U_V = -\frac{R_X}{R_X + R_T} E_T = -\frac{35k}{35k + 25k} \cdot (-6,375) = 3,72V > 2V$$

Priključeni voltmetar, sa izabranim mernim opsegom, nije pogodan za merenje napona na otporniku  $R_X = 35k\Omega$ .

c)

$$U_V = -\frac{R_X}{R_X + R_T} E_T \leq U_{V_{\max}} = 2V$$

$$\frac{R_X}{R_X + R_T} |E_T| \leq U_{V_{\max}}$$

$$R_X \leq \frac{\frac{U_{V_{\max}}}{|E_T|} R_T}{1 - \frac{U_{V_{\max}}}{|E_T|}} = \frac{\frac{2}{6,375} \cdot 25k}{1 - \frac{2}{6,375}} = 11,43k$$

$$R_X \leq 11,43k\Omega$$