

Osnovi elektrotehnike 1  
(I kolokvijum)

K1

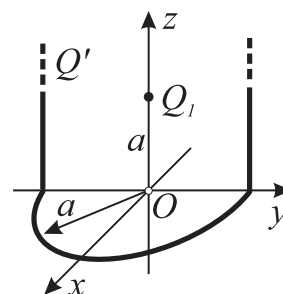
06.10.2021.

## ZADACI

**Zadatak 1.** Tanak, veoma dugačak, štap od izolacionog materijala, savijen kao na slici 1, naelektrisan je ravnomerno podužnom gustinom naelektrisanja  $Q'$ . Štap se sastoji od polukruga, poluprečnika  $a$ , koji leži u  $x$ - $y$  ravni zadanog koordinatnog sistema, i dva veoma duga pravolinijska segmenta, koji leže u  $y$ - $z$  ravni. Sredina je vazduh.

- Izvesti u opštim brojevima izraz za vektor jačine električnog polja u tački  $O$  (koordinatni početak), koji potiče od naelektrisanog polukruga.
- Izvesti u opštim brojevima izraz za vektor jačine električnog polja u tački  $O$ , koji potiče od naelektrisanih, veoma dugačkih, pravolinijskih segmenata.
- Odrediti količinu tačkastog naelektrisanja  $Q_1$ , postavljenog na  $z$  osi, na rastojanju  $a$  od koordinatnog početka, tako da rezultatni vektor jačine električnog polja u tački  $O$  ima samo  $x$  komponentu.

Brojni podaci su:  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $Q' = 30 \text{ nC/m}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

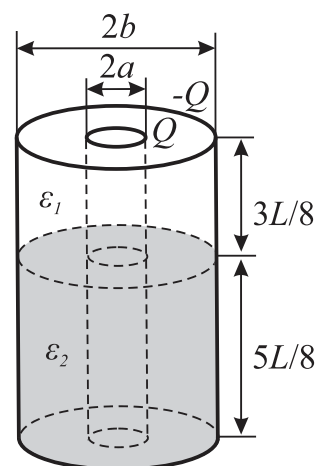


Slika 1.

**Zadatak 2.** Na slici 2 je prikazan koaksijalni kabl dužine  $L = 8 \text{ m}$ , ispunjen sa dva sloja dielektrika: čvrsti – relativne permitivnosti  $\epsilon_{r1} = 7$  i tečni – relativne permitivnosti  $\epsilon_{r2} = 4$ . Poluprečnici elektroda kabla su  $a$  i  $b = 2,7a$ . Elektrode kondenzatora su naelektrisane naelektrisanjem  $+Q$  i  $-Q$ .

- Razmotriti granične uslove i odrediti kako se u zavisnosti od rastojanja tačke od centra kondenzatora menjaju intenziteti vektora električnog pomeraja i vektora jačine električnog polja
- Odrediti nepoznati poluprečnik unutrašnje elektrode  $a$ , ako je maksimalni dozvoljeni napon na koji sme da se priključi kondenzator  $U_{\max} = 15 \text{ kV}$ .
- Za koliko će se promeniti kapacitivnost kondenzatora, nakon potpunog ispuštanja tečnog dielektrika?

Ostali brojni podaci:  $E_{C1} = 60 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{C2} = 80 \text{ kV/cm}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .



Slika 2.

## PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje dva sata.

Osnovi elektrotehnike 1  
(II kolokvijum)

K2

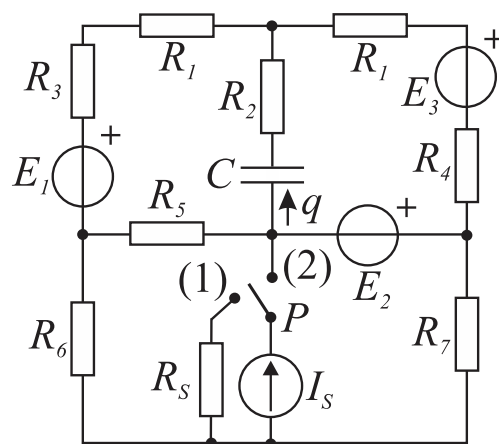
06.10.2021.

## ZADACI

**Zadatak 1.** Kada se u mreži sa slike 1 preklopnik  $P$  prebaci iz položaja (1) u položaj (2), kroz kondenzator kapacitivnosti  $C = 5 \mu F$  protekne naelektrisanje  $q = 100 \mu C$ , u naznačenom referentnom smeru.

- Primenjujući teoremu superpozicije, odrediti nepoznatu struju strujnog generatora,  $I_S$ .
- Odrediti snagu strujnog generatora  $I_S$  kada je preklopnik u položaju (2). Kolo rešavati primenom metode konturnih struja.

Brojni podaci su:  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 300 \Omega$ ,  
 $R_4 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 400 \Omega$ ,  $R_6 = 300 \Omega$ ,  $R_7 = 540 \Omega$ ,  
 $E_1 = 20 V$ ,  $E_2 = 70 V$ ,  $E_3 = 100 V$ .

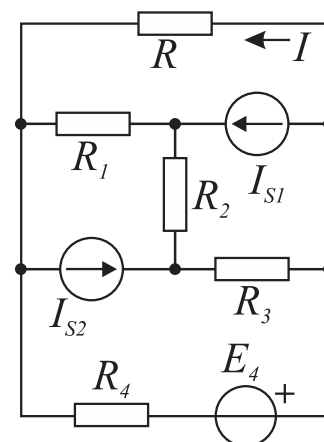


Slika 1.

**Zadatak 2.** U mreži sa slike 2 poznate su brojne vrednosti svih elemenata, osim otpornosti otpornika  $R$ .

- Primenjujući teoremu o kompenzaciji, izračunati otpornost otpornika  $R$ , tako da jačina struje kroz njegove priključake ima vrednost  $I = 0,1 A$ , u naznačenom referentnom smeru.
- Izračunati snagu strujnog generatora  $I_{S2}$ , kada otpornik  $R$  ima otpornost izračunatu pod a).
- Izračunati snagu naponskog generatora  $E_4$ , kada otpornik  $R$  ima otpornost izračunatu pod a).

Brojni podaci su:  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 20 \Omega$ ,  
 $I_{S1} = 150 mA$ ,  $I_{S2} = 62,5 mA$ ,  $E_4 = 4 V$ .



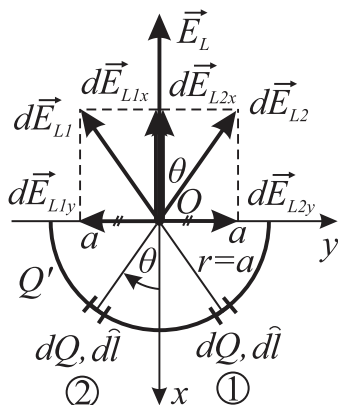
Slika 2.

## PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje dva sata.

I-1

a)



Zbog simetrije je:

$$d\vec{E}_{L1y} + d\vec{E}_{L2y} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{Ly} = 0}$$

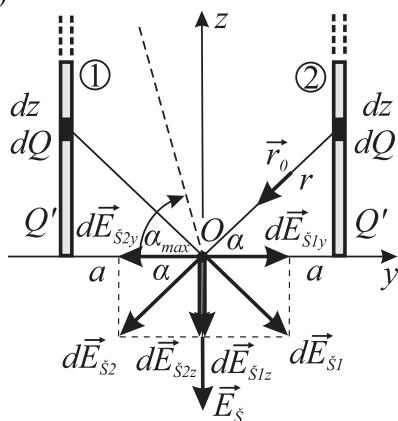
$$dE_{L1x} = dE_{L2x} = dE_{L1} \cos \theta = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Q' dl}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta = \frac{Q' a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta$$

$$dE_{L1x} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta$$

$$E_L = \int_{\text{po luku}} dE_{L1x} = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$\boxed{\vec{E}_L = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot (-\vec{i}_x)}$$

b)



Zbog simetrije je:

$$d\vec{E}_{S1y} + d\vec{E}_{S2y} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{Sy} = 0}$$

$$dE_{S1x} = dE_{S2x} = dE_{S1} \sin \alpha = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha$$

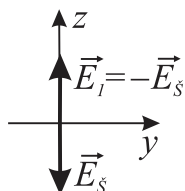
$$dE_S = 2 dE_{S1x} = 2 \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = 2 \frac{Q' \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = 2 \frac{Q' \frac{d\alpha}{\cos \alpha}}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{\cos \alpha}} \sin \alpha$$

$$dE_S = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha d\alpha$$

$$E_S = \int_{\text{po štapu}} dE_S = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$\boxed{\vec{E}_S = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot (-\vec{i}_z)}$$

c)



$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$|\vec{E}_{Oz}| = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_S \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{i}_z \Rightarrow Q_1 < 0$$

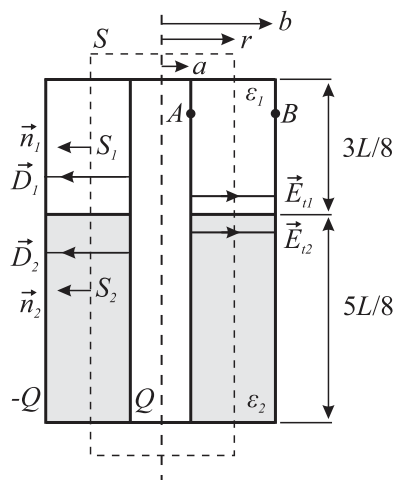
$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$|Q_1| = 2a Q' = 1,2 \text{ nC}$$

$$\boxed{Q_1 = -1,2 \text{ nC}}$$

I-2

a)



Granični uslov:

$$E_{r1} = E_{r2} \quad E_1 = E_2 = E$$

$$D_{n1} \neq D_{n2}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{us}$$

$$\int_{S_{OM}} D ds = Q \quad \int_{OM_1} D_1 ds + \int_{OM_2} D_2 ds = Q$$

$$D_1 2\pi r \frac{3L}{8} + D_2 2\pi r \frac{5L}{8} = Q \quad D_1 = \epsilon_1 E \quad D_2 = \epsilon_2 E$$

$$E = \frac{Q}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi r}, \quad a \leq r \leq b$$

$$D_1 = \epsilon_1 E = \epsilon_1 \frac{Q}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi r} \quad D_2 = \epsilon_2 E = \epsilon_2 \frac{Q}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi r}, \quad a \leq r \leq b$$

b)

$$E_{\max}(r=a) = \frac{Q_{\max}}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi a} \leq \min\{E_{c1}, E_{c2}\} = E_{c1}$$

$$Q_{\max} = E_{c1} \left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi a$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi r} dr = \frac{Q}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$U_{\max} = \frac{Q_{\max}}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{E_{c1} \left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi a}{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi} \ln \frac{b}{a} = E_{c1} a \ln \frac{b}{a}$$

$$a = \frac{U_{\max}}{E_{c1} \ln \frac{b}{a}} = \frac{15 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^5 \cdot \ln 2,7} = 0,25 \cdot 10^{-2} m = 2,5 \cdot 10^{-3} m \quad \boxed{a = 2,5 mm}$$

c)

Pre ispuštanja tečnog dielektrika:  $C = \frac{Q}{U_{AB}} \quad C^{PRE} = \frac{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_2 \frac{5L}{8} \right) 2\pi}{\ln \frac{b}{a}} = 2,28 nF$

Posle ispuštanja tečnog dielektrika:  $C^{POSLE} = \frac{\left( \epsilon_1 \frac{3L}{8} + \epsilon_0 \frac{5L}{8} \right) 2\pi}{\ln \frac{b}{a}} = 1,45 nF$

$$\Delta C = C^{POSLE} - C^{PRE} = 1,45 nF - 2,28 nF \quad \boxed{\Delta C = -0,83 nF}$$

$$\frac{C^{POSLE}}{C^{PRE}} = \frac{1,45 nF}{2,28 nF} \quad \boxed{\frac{C^{POSLE}}{C^{PRE}} = 0,64}$$

II-1

a)

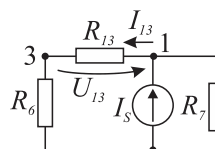
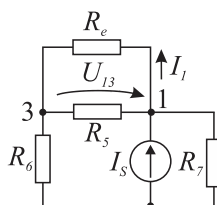
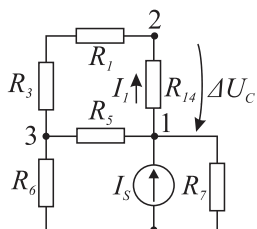
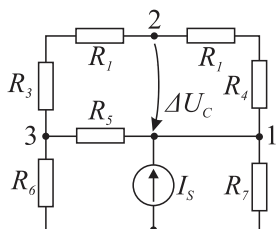
$$\boxed{\begin{matrix} Svi \\ generatori \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} Svi \\ sem I_s \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} Samo \\ I_s \end{matrix}}$$

(2)                      (1)

$$U_C^{(2)} = U_C^{(1)} + U_C'$$

$$q = C(U_C^{(2)} - U_C^{(1)}) = C U_C' = C \Delta U_C$$

$$\Delta U_C = \frac{q}{C} = \frac{100 \mu C}{5 \mu F} = 20 V$$



$$R_{14} = R_1 + R_4 = 200 \Omega$$

$$I_1 = \frac{\Delta U_C}{R_{14}} = \frac{20}{200} = 0,1 A$$

$$R_e = R_1 + R_3 + R_{14} = 600 \Omega$$

$$U_{13} = I_1 R_e = 0,1 \cdot 600 = 60 V$$

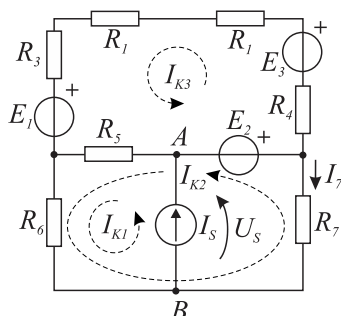
$$R_{13} = R_e \parallel R_5 = 600 \parallel 400 = 240 \Omega$$

$$I_{13} = \frac{U_{13}}{R_{13}} = \frac{60}{240} = 0,25 A$$

$$I_{13} = \frac{R_7}{R_{13} + R_6 + R_7} I_s \Rightarrow I_s = \frac{R_{13} + R_6 + R_7}{R_7} I_{13} = \frac{240 + 300 + 540}{540} \cdot 0,25$$

$$\boxed{I_s = 0,5 A}$$

b)



$$n_g = 6, n_c = 4, n_{s.g.} = 1, n_{i.n.g.} = 1$$

$$MKS: n_g - (n_c - 1) - n_{s.g.} = 6 - (4 - 1) - 1 = 2$$

$$MPČ: n_c - 1 - n_{i.n.g.} = 4 - 1 - 1 = 2$$

$$K1: I_{K1} = I_s = 0,5 A$$

$$K2: (R_5 + R_6 + R_7) I_{K2} + (R_5 + R_6) I_{K1} - R_5 I_{K3} = -E_2$$

$$K3: (R_1 + R_1 + R_3 + R_4 + R_5) I_{K3} - R_5 I_{K1} - R_5 I_{K2} = -E_1 + E_2 + E_3$$

$$K2: 1240 I_{K2} - 400 I_{K3} = -420 \quad / \cdot 2,5$$

$$K3: -400 I_{K2} + 1000 I_{K3} = 350$$

$$K2: 3100 I_{K2} - 1000 I_{K3} = -1050$$

$$K3: -400 I_{K2} + 1000 I_{K3} = 350$$

$$2700 I_{K2} = -700$$

$$I_{K2} = 0,26 A$$

$$I_{K3} = 0,45 A$$

$$U_s = -E_2 + R_7 I_7 = -E_2 + R_7 (-I_{K2}) = -70 + 540 \cdot (-0,26)$$

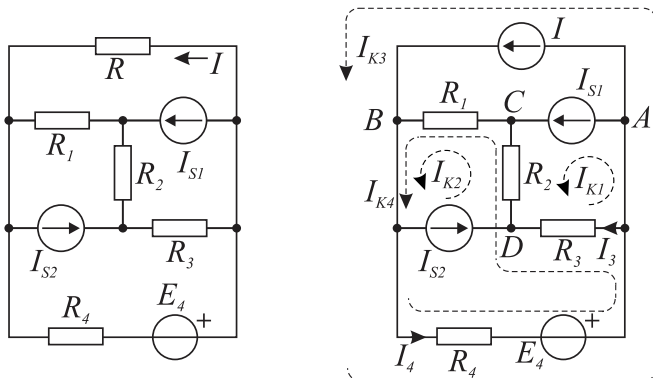
$$U_s = -210,4 V$$

$$P_s = U_s I_s = -210,4 V \cdot 0,5 A$$

$$\boxed{P_s = -105,2 W}$$

II-2

a)



$$I_{K1} = I_{S1} = 150 \text{ mA}$$

$$I_{K2} = I_{S2} = 62,5 \text{ mA}$$

$$I_{K3} = I = 100 \text{ mA}$$

$$\frac{I_{K4} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - I_{K1} (R_2 + R_3) + I_{K2} (R_1 + R_2) + I_{K4} R_4 = E_4}{I_{K4} (30 + 10 + 20 + 20) - 150 \text{ m} \cdot (10 + 20) + 62,5 \text{ m} \cdot (30 + 10) + 100 \text{ m} \cdot 20 = 4}$$

$$80 I_{K4} = 4 + 4,5 - 2,5 - 2 = 4$$

$$I_{K4} = 50 \text{ mA}$$

$$U_{AB} = E_4 - I_4 R_4 = E_4 - (I_{K3} + I_{K4}) R_4 = 4 - (100 \text{ m} + 50 \text{ m}) \cdot 20 = 1 \text{ V}$$

$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{0,1} \quad \boxed{R = 10 \Omega}$$

b)

$$P_{IS2} = U_{S2} I_{S2} = U_{DB} I_{S2} = (-I_3 R_3 + E_4 - I_4 R_4) I_{S2}$$

$$I_3 = I_{K4} - I_{K1} = 50 \text{ m} - 150 \text{ m} = -100 \text{ mA}$$

$$P_{IS2} = (100 \text{ m} \cdot 20 + 4 - 150 \text{ m} \cdot 20) \cdot 62,5 \text{ m}$$

$$\boxed{P_{IS2} = 187,5 \text{ mW}}$$

c)

$$P_{E4} = E_4 I_4 = 4 \cdot 150 \text{ m} \quad \boxed{P_{E4} = 600 \text{ mW}}$$