Topološke lastnosti grup

Seminar

Gašper Rotar
Fakulteta za matematiko in fiziko

4. april 2020

1 Uvod

V tej seminarski bomo obravnavali uporabe topoloških pristopov za študij lastnosti grup.

2 Dva preprosta izreka

Definicija 1 *Naj bo* N *podgrupa grupe* G. N *je podgrupa edinka grupe* G*, označimo* $N \triangleleft G$*, če za vse* $a \in G$ *in* $n \in N$ *velja* $ana^{-1} \in N$.

Trditev 1 *Za podgrupo* N *grupe* G *so naslednji pogoji ekvivalenti:*

(i) N *je ednika.*

(ii) $aN \subseteq Na$ *za vsak* $a \in G$.

(iii) $aN = Na$ *za vsak* $a \in G$.

(iv) $aNa^{-1} = N$ *za vsak* $a \in G$.

Trditev 2 *Naj bo* G *grupa in* $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$. *Grupa* G *je komutativna natanko takrat, ko je* $\Delta(G)$ *podgrupa edinka grupe* G*,* $\Delta(G) \triangleleft G$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna. Torej je vsaka njena podgrupa edinka. Zdaj je trebna le še pokazati, da je $\Delta(G) \leq$

$G \times G$, kar je enostavno. Naj bosta $a = (\alpha, \alpha), b = (\beta, \beta) \in \Delta(G)$, potem:

$$a + b = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \in \Delta(G),$$
$$(\alpha, \alpha) + (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1).$$

Vidimo, da je $\Delta(G)$ zaprta za opreacijo, inverz (α, α) pa je $(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) \in \Delta(G)$, torej zaprta tudi za invertiranje.

($\Leftarrow$) Naj bosta α, β elementa grupe G z enoto 1. Potem so $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$ in $(\alpha, 1)^{-1} = (\alpha^{-1}, 1)$ ter $(\beta, \beta) \in \Delta(G)$. Potem lahko izračunamo:

$$(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta).$$

Ker je $\Delta(G)$ ednika je zaprta za invertiranje, torej je $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$

$\square$

Definicija 2 *Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okoloici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Trditev 3 *Naslednje izjave so ekvivalentne:*

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

(ii) *Za poljuben $x \in X$ je $\cap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x.*

(iii) *Diagonala $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ je zaprt podprostor produkta $X \times X$*

3 Konjugiranostna topologija

Definicija 3 *Naj bo G grup in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$*

Izrek 1 *G je Abelova natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.*