Topološke lastnosti grup

Gašper Rotar

Fakulteta za matematiko in fiziko

15. april 2020

Dve preprosti trditvi

Definicija

Naj bo N *podgrupa grupe* G. N *je podgrupa edinka grupe* G, *označimo* $N \lhd G$, *če za vse* $a \in G$ *in* $n \in N$ *velja* $ana^{-1} \in N$.

Dve preprosti trditvi

Definicija

Naj bo N *podgrupa grupe* G*.* N *je podgrupa edinka grupe* G*, označimo* $N \triangleleft G$*, če za vse* $a \in G$ *in* $n \in N$ *velja* $ana^{-1} \in N$*.*

Trditev

Naj bo G *grupa in* $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$ *njena diagonala. Grupa* G *je komutativna natanko takrat, ko je* $\Delta(G)$ *podgrupa edinka grupe* $G \times G$*,* $\Delta(G) \triangleleft G \times G$*.*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

$(\Rightarrow)$ *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je* G *komutativna je seveda tudi* $G \times G$ *komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.
Velja: $(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta) \in \Delta$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.
Velja: $(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta) \in \Delta$
Torej:$\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.
Velja: $(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta) \in \Delta$
Torej: $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$

$\square$

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X *je Hausdorffov, če za vsaki različni točki* $x_1, x_2 \in X$ *obstajata odprti okolici* U_1 *in* U_2 *za točki* x_1 *in* x_2*, da* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

(ii) *Za poljuben $x \in X$ je $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x.*

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

(ii) *Za poljuben $x \in X$ je $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x.*

(iii) *Diagonala $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ je zaprt podprostor produkta $X \times X$.*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* *Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* *Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja* U, *da* $x \in U$ *in* $y \notin \overline{U}$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ (ii) Naj X Hausdorffov in $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Pokažimo, da Δ^C odprta v $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja U, da $x \in U$ in $y \notin \overline{U}$*
$(x, y) \in U \times \overline{U}^C$, *ta ne seka Δ*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja* U*, da* $x \in U$ *in* $y \notin \overline{U}$
$(x, y) \in U \times \overline{U}^C$*, ta ne seka* Δ

(iii) $\Rightarrow$ *(i) Naj bo* Δ^C *odprta*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja* U*, da* $x \in U$ *in* $y \notin \overline{U}$
$(x, y) \in U \times \overline{U}^C$*, ta ne seka* Δ

(iii) $\Rightarrow$ *(i) Naj bo* Δ^C *odprta*
Za $x \neq y$ *je* $(x, y) \in \Delta^C$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja* U*, da* $x \in U$ *in* $y \notin \overline{U}$
$(x, y) \in U \times \overline{U}^C$*, ta ne seka* Δ

(iii) $\Rightarrow$ *(i) Naj bo* Δ^C *odprta*
Za $x \neq y$ *je* $(x, y) \in \Delta^C$
$(x, y) \in U \times V$

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Naj* X *Hausdorffov in* $y \neq x$.
$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
Torej $y \notin \overline{U}$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Pokažimo, da* Δ^C *odprta v* $X \times X$
$(x, y) \in \Delta^C$ *obstaja* U*, da* $x \in U$ *in* $y \notin \overline{U}$
$(x, y) \in U \times \overline{U}^C$*, ta ne seka* Δ

(iii) $\Rightarrow$ *(i) Naj bo* Δ^C *odprta*
Za $x \neq y$ *je* $(x, y) \in \Delta^C$
$(x, y) \in U \times V$ $\square$

Konjugiranostni razredi

Definicija

Element y grupe G je konjugiran elementu x iz G, če obstaja tak $g \in G$, da je $y = gxg^{-1}$.

Konjugiranostni razredi

Definicija

Element y grupe G je konjugiran elementu x iz G, če obstaja tak $g \in G$, da je $y = gxg^{-1}$.

Trditev

Konjugiranost je ekvivalenčna relacija.

Konjugiranostni razredi

Dokaz

- *Refleksivnost:* $x = exe$

Konjugiranostni razredi

Dokaz

- *Refleksivnost:* $x = exe$
- *Simetričnost:* $y = gxg^{-1} \Rightarrow x = g^{-1}yg$

Konjugiranostni razredi

Dokaz

- *Refleksivnost:* $x = exe$
- *Simetričnost:* $y = gxg^{-1} \Rightarrow x = g^{-1}yg$
- *Tranzitivnost:* $y = gxg^{-1}, z = hyh^{-1} \Rightarrow z = hgxg^{-1}h^{-1}$

Konjugiranostni razredi

Dokaz

- *Refleksivnost:* $x = exe$
- *Simetričnost:* $y = gxg^{-1} \Rightarrow x = g^{-1}yg$
- *Tranzitivnost:* $y = gxg^{-1}, z = hyh^{-1} \Rightarrow z = hgxg^{-1}h^{-1}$

$\square$

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

$$ghg^{-1} = h \Rightarrow gh = hg$$

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

$$ghg^{-1} = h \Rightarrow gh = hg$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

$$ghg^{-1} = h \Rightarrow gh = hg$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna
Konjugiranostni razredi so $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$

Zgled

Če je G komutativna potem je vsak element v svojem razredu.

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

$$ghg^{-1} = h \Rightarrow gh = hg$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna
Konjugiranostni razredi so $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$

Zgled

Podobne matrike: $B = P^{-1}AP$

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h.

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G} \{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G} \{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Pripomba

Topologijo, ki jo kot baza podaja Θ, bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G}\{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Pripomba

Topologijo, ki jo kot baza podaja Θ, bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

- *Θ je pokritje*

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G}\{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Pripomba

Topologijo, ki jo kot baza podaja Θ, bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

- *Θ je pokritje*
- *U_h in U_k bazni množici*

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G}\{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Pripomba

Topologijo, ki jo kot baza podaja Θ, bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

- *Θ je pokritje*
- *U_h in U_k bazni množici*
  $x \in U_h \cap U_k \Rightarrow U_h = U_k$

Konjugiranostni razredi

Izrek

Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h. Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G}\{U_h\}$ je baza neke topologije na G.

Pripomba

Topologijo, ki jo kot baza podaja Θ, bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

- Θ *je pokritje*
- U_h *in* U_k *bazni množici*
  $x \in U_h \cap U_k \Rightarrow U_h = U_k$ $\square$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

$(\Rightarrow)$ G komutativna $\Rightarrow U_x = \{x\}$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

$(\Rightarrow)$ G *komutativna* $\Rightarrow U_x = \{x\}$

$\mathcal{T}(G)$ *diskretna*

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

($\Rightarrow$) G *komutativna* $\Rightarrow U_x = \{x\}$
$\mathcal{T}(G)$ *diskretna*

($\Leftarrow$) $\mathcal{T}(G)$ *Hausdorffova*

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

($\Rightarrow$) G *komutativna* $\Rightarrow U_x = \{x\}$
$\mathcal{T}(G)$ *diskretna*

($\Leftarrow$) $\mathcal{T}(G)$ *Hausdorffova*
Recimo da $y \neq x$ *in* $y \in U_x$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

($\Rightarrow$) G *komutativna* $\Rightarrow U_x = \{x\}$
$\mathcal{T}(G)$ *diskretna*

($\Leftarrow$) $\mathcal{T}(G)$ *Hausdorffova*
Recimo da $y \neq x$ *in* $y \in U_x$
$x \in U_h, y \in U_k$ *in* $U_h \cap U_k = \emptyset$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

($\Rightarrow$) G komutativna $\Rightarrow U_x = \{x\}$
$\mathcal{T}(G)$ diskretna

($\Leftarrow$) $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova
Recimo da $y \neq x$ in $y \in U_x$
$x \in U_h, y \in U_k$ in $U_h \cap U_k = \emptyset$
$x \in U_x \cap U_h$ in $y \in U_x \cap U_k$ torej $U_h = U_x = U_k$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

G je komutativna natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz

$(\Rightarrow)$ G *komutativna* $\Rightarrow U_x = \{x\}$
$\mathcal{T}(G)$ *diskretna*

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{T}(G)$ *Hausdorffova*
Recimo da $y \neq x$ *in* $y \in U_x$
$x \in U_h, y \in U_k$ *in* $U_h \cap U_k = \emptyset$
$x \in U_x \cap U_h$ *in* $y \in U_x \cap U_k$ *torej* $U_h = U_x = U_k$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, *če in samo če je* H *zaprt v* $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

$(\Rightarrow)$ $H \triangleleft G$, *pokažemo da* $G - H$ *odprta.*

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Rightarrow$) $H \triangleleft G$, pokažemo da $G - H$ odprta.
Naj bo $x \in G - H$ in U_x konjugiranostni razred x.

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Rightarrow$) $H \triangleleft G$, pokažemo da $G - H$ odprta.
Naj bo $x \in G - H$ in U_x konjugiranostni razred x.
$U_x \cap H \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in G, h \in H : h = gxg^{-1}$.

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Rightarrow$) $H \triangleleft G$, pokažemo da $G - H$ odprta.
Naj bo $x \in G - H$ in U_x konjugiranostni razred x.
$U_x \cap H \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in G, h \in H : h = gxg^{-1}$.
Sledi $x = g^{-1}hg$, ker H edinka potem $x \in H$.

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Rightarrow$) $H \triangleleft G$, pokažemo da $G - H$ odprta.
Naj bo $x \in G - H$ in U_x konjugiranostni razred x.
$U_x \cap H \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in G, h \in H : h = gxg^{-1}$.
Sledi $x = g^{-1}hg$, ker H edinka potem $x \in H$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Leftarrow$) Naj bo $H \subseteq G$ zaprta

Izrek

$H \lhd G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Leftarrow$) Naj bo $H \subseteq G$ zaprta
Pokažimo da za vsak $h \in H$ tudi $U_h \subseteq H$, torej za $g \in G$ velja $ghg^{-1} \in H$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Leftarrow$) Naj bo $H \subseteq G$ zaprta
Pokažimo da za vsak $h \in H$ tudi $U_h \subseteq H$, torej za $g \in G$ velja $ghg^{-1} \in H$
Recimo, da $\exists h \in H : U_h \not\subseteq H$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

$(\Leftarrow)$ *Naj bo* $H \subseteq G$ *zaprta*
Pokažimo da za vsak $h \in H$ *tudi* $U_h \subseteq H$, *torej za* $g \in G$ *velja* $ghg^{-1} \in H$
Recimo, da $\exists h \in H : U_h \nsubseteq H$
$x \in U_h \Rightarrow U_x = U_h$, *torej* U_x *seka* H *in* $G - H$.

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, *če in samo če je* H *zaprt v* $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

$(\Leftarrow)$ *Naj bo* $H \subseteq G$ *zaprta*
Pokažimo da za vsak $h \in H$ *tudi* $U_h \subseteq H$, *torej za* $g \in G$ *velja* $ghg^{-1} \in H$
Recimo, da $\exists h \in H : U_h \not\subseteq H$
$x \in U_h \Rightarrow U_x = U_h$, *torej* U_x *seka* H *in* $G - H$.
Torej x *robna in ni v* H

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

$H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz

($\Leftarrow$) Naj bo $H \subseteq G$ zaprta
Pokažimo da za vsak $h \in H$ tudi $U_h \subseteq H$, torej za $g \in G$ velja $ghg^{-1} \in H$
Recimo, da $\exists h \in H : U_h \not\subseteq H$
$x \in U_h \Rightarrow U_x = U_h$, torej U_x seka H in $G - H$.
Torej x robna in ni v H $\Rightarrow\!\Leftarrow$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

Če je $\phi : G \to \Gamma$ homomorfizem grup, potem je praslika $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Izrek

Če je $\phi : G \to \Gamma$ homomorfizem grup, potem je praslika $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Dokaz

Zveznost preverimo na bazi: $\forall \gamma \in \Gamma : \phi^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{T}(G)$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

Če je $\phi : G \to \Gamma$ homomorfizem grup, potem je praslika $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Dokaz

Zveznost preverimo na bazi: $\forall \gamma \in \Gamma : \phi^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{T}(G)$
Definiramo:

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

Izrek

Če je $\phi : G \to \Gamma$ homomorfizem grup, potem je praslika $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Dokaz

Zveznost preverimo na bazi: $\forall \gamma \in \Gamma : \phi^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{T}(G)$
Definiramo:

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g | \phi(g) \in U_\gamma\}} U_g$$

$$t \in \phi^{-1}(U_\gamma) \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow t \in U_t \subseteq S_\gamma$$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Izrek

Če je $\phi : G \to \Gamma$ homomorfizem grup, potem je praslika $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Dokaz

Zveznost preverimo na bazi: $\forall \gamma \in \Gamma : \phi^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{T}(G)$
Definiramo:

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

$t \in \phi^{-1}(U_\gamma) \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow t \in U_t \subseteq S_\gamma$
Ker to velja za vsak t je $\phi^{-1}(U_\gamma) \subseteq S_\gamma$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g \mid \phi(g) \in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$
Obstajata $g, h \in G$, *da* $\phi(g) \in U_\gamma$ *in* $t = hgh^{-1}$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g | \phi(g) \in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$
Obstajata $g, h \in G$, *da* $\phi(g) \in U_\gamma$ *in* $t = hgh^{-1}$

$$\phi(t) = \phi(h)\phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(g)\phi(h)^{-1}$$

Uporaba topologije $\mathcal{T}(G)$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g | \phi(g) \in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$
Obstajata $g, h \in G$, *da* $\phi(g) \in U_\gamma$ *in* $t = hgh^{-1}$

$$\phi(t) = \phi(h)\phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(g)\phi(h)^{-1}$$

$\phi(t)$ *konjugiran* $\phi(g)$, *sta v enakem razredu*

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$
Obstajata $g, h \in G$, *da* $\phi(g) \in U_\gamma$ *in* $t = hgh^{-1}$

$$\phi(t) = \phi(h)\phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(g)\phi(h)^{-1}$$

$\phi(t)$ *konjugiran* $\phi(g)$, *sta v enakem razredu*
$\phi(g) \in U_\gamma \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow t \in \phi^{-1}(U_\gamma)$

Dokaz

$$S_\gamma = \bigcup_{\{g|\phi(g)\in U_\gamma\}} U_g$$

Naj bo zdaj $t \in S_\gamma$
Obstajata $g, h \in G$, *da* $\phi(g) \in U_\gamma$ *in* $t = hgh^{-1}$

$$\phi(t) = \phi(h)\phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(g)\phi(h)^{-1}$$

$\phi(t)$ *konjugiran* $\phi(g)$, *sta v enakem razredu*
$\phi(g) \in U_\gamma \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow \phi(t) \in U_\gamma \Rightarrow t \in \phi^{-1}(U_\gamma)$
$S_\gamma \subseteq \phi^{-1}(U_\gamma)$