Topološke lastnosti grup

Gašper Rotar

Fakulteta za matematiko in fiziko

9. april 2020

Dve preprosti trditvi

Definicija

Naj bo N podgrupa grupe G. N je podgrupa edinka grupe G, označimo $N \triangleleft G$, če za vse $a \in G$ in $n \in N$ velja $ana^{-1} \in N$.

Dve preprosti trditvi

Definicija

Naj bo N podgrupa grupe G. N je podgrupa edinka grupe G, označimo $N \triangleleft G$, če za vse $a \in G$ in $n \in N$ velja $ana^{-1} \in N$.

Trditev

Naj bo G grupa in $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$ njena diagonala. Grupa G je komutativna natanko takrat, ko je $\Delta(G)$ podgrupa edinka grupe G, $\Delta(G) \triangleleft G$.

Dve preprosti trditvi

Dokaz

$(\Rightarrow)$ *Ker je* G *komutativna je seveda tudi* $G \times G$ *komutativna.*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je* G *komutativna je seveda tudi* $G \times G$ *komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*

$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$

$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*

$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$

$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$

Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.

Dve preprosti trditvi

Dokaz

($\Rightarrow$) *Ker je* G *komutativna je seveda tudi* $G \times G$ *komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

($\Leftarrow$) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.
Velja: $(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta) \in \Delta$

Dve preprosti trditvi

Dokaz

(⇒) *Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna.*
$a \cdot b = (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G)$
$(\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1)$

(⇐) *Naj bodo* $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$
Potem: $(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta)$.
Velja: $(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta) \in \Delta$
Torej:$\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X *je Hausdorffov, če za vsaki različni točki* $x_1, x_2 \in X$ *obstajata odprti okolici* U_1 *in* U_2 *za točki* x_1 *in* x_2*, da* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

(ii) *Za poljuben $x \in X$ je $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x.*

Dve preprosti trditvi

Definicija

Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2, da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev

Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) *Prostor X je Hausdorffov.*

(ii) *Za poljuben $x \in X$ je $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x.*

(iii) *Diagonala $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ je zaprt podprostor produkta $X \times X$*

Dve preprosti trditvi

Dokaz

Tu pride dokaz haudorf

Konjugiranostni razredi

Definicija

Element y grupe G je konjugiran elementu x iz G, če obstaja tak $g \in G$, da je $y = gxg^{-1}$.

Konjugiranostni razredi

Definicija

Element y *grupe* G *je konjugiran elementu* x *iz* G, *če obstaja tak* $g \in G$, *da je* $y = gxg^{-1}$.

Trditev

Konjugiranost je ekvivalenčna relacija.

Konjugiranostni razredi

Dokaz

tu pride dokaz Konjugiranostni

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem za vsak $x, g \in G$ *velja:*

$$gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$$

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem za vsak $x, g \in G$ velja:

$$gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem za vsak $x, g \in G$ velja:

$$gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna
Konjugiranostni razredi so $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$

Konjugiranostni razredi

Zgled

Če je G komutativna potem za vsak $x, g \in G$ velja:

$$gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$$

Zgled

Kvaternionska grupa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ni komutativna
Konjugiranostni razredi so $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$

Zgled

Podobne matrike: $B = P^{-1}AP$