

Topološke lastnosti grup

Seminar

Gašper Rotar
Fakulteta za matematiko in fiziko

7. april 2020

1 Uvod

V tej seminarski bomo obravnavali uporabe topoloških pristopov za študij lastnosti grup.

2 Dva preprosta izreka

Definicija 1 Naj bo N podgrupa grupe G . N je podgrupa edinka grupe G , označimo $N \triangleleft G$, če za vse $a \in G$ in $n \in N$ velja $ana^{-1} \in N$.

Trditev 1 Za podgrupo N grupe G so naslednji pogoji ekvivalenti:

- (i) N je ednika.
- (ii) $aN \subseteq Na$ za vsak $a \in G$.
- (iii) $aN = Na$ za vsak $a \in G$.
- (iv) $aNa^{-1} = N$ za vsak $a \in G$.

Trditev 2 Naj bo G grupa in $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$. Grupa G je komutativna natanko takrat, ko je $\Delta(G)$ podgrupa edinka grupe G , $\Delta(G) \triangleleft G$.

Dokaz:

(\Rightarrow) Ker je G komutativna je seveda tudi $G \times G$ komutativna. Torej je vsaka njena podgrupa edinka. Sedaj je treba le še pokazati, da je $\Delta(G) \leq$

$G \times G$, kar je enostavno. Naj bosta $a = (\alpha, \alpha), b = (\beta, \beta) \in \Delta(G)$, potem:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) = (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta) \in \Delta(G), \\ (\alpha, \alpha) \cdot (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) &= (\alpha \cdot \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1}) = (1, 1). \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\Delta(G)$ zaprta za opreacijo, inverz (α, α) pa je $(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) \in \Delta(G)$, torej zaprta tudi za invertiranje.

(\Leftarrow) Naj bosta α, β elementa grupe G z enoto 1. Potem so $(\alpha, 1), (\alpha^{-1}, 1), (\beta, \beta) \in G \times G$ in $(\alpha, 1)^{-1} = (\alpha^{-1}, 1)$ ter $(\beta, \beta) \in \Delta(G)$. Potem lahko izračunamo:

$$(\alpha, 1) \cdot (\beta, \beta) \cdot (\alpha^{-1}, 1) = (\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta).$$

Ker je $\Delta(G)$ ednika je zaprta za konjugiranje, torej je $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$

□

Definicija 2 Topološki prostor X je Hausdorffov, če za vsaki različni točki $x_1, x_2 \in X$ obstajata odprti okolici U_1 in U_2 za točki x_1 in x_2 , da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Trditev 3 Naslednje izjave so ekvivalentne:

- (i) Prostor X je Hausdorffov.
- (ii) Za poljuben $x \in X$ je $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$, kjer je \mathcal{U} družina vseh okolic x .
- (iii) Diagonala $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ je zaprt podprostor produkta $X \times X$

3 Konjugiranostna topologija

3.1 Konjugiranostni razredi

Definicija 3 Element y grupe G je konjugiran elementu x iz G , če obstaja tak $g \in G$, da je $y = gxg^{-1}$.

Trditev 4 Konjugiranost je ekvivalenčna relacija.

Dokaz: Relacija je ekvivalenčna, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna. Naj bo e enota grupe G in x poljuben element G , potem $x = exe^{-1}$. To pomeni, da je poljuben element G konjugiran samemu sebi, relacija je refleksivna. Naj bo y konjugiran x , torej obstaja $g \in G$, da $y = gxg^{-1}$. Z enostavnim preoblikovanjem enačbe dobimo $x = g^{-1}yg$. Torej je tudi x konjugiran y , relacija je simetrična. Končno pokažimo še tranzitivnost. Če je $y = gxg^{-1}$ in $z = hyh^{-1}$ potem vstavimo y v drugo enačbo da dobimo $z = hgxg^{-1}h^{-1}$. Opazimo, da je $(hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ torej je z konjugiran x . □

Pripomba 1 Ekvivalenčnim razredom za konjugiranost pravimo konjugiranostni razredi.

Zgled 1 • Če je G komutativna potem za vsak $x, g \in G$ velja $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$, torej je vsak element sam v svojem konjugiranostnem razredu.

- kvaternioni
- podobne matrike

Izrek 1 Naj bo G grupa in označimo $U_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, to je konjugiranostni razred elementa h . Množica $\Theta = \bigcup_{h \in G} \{U_h\}$ je baza topologije na G .

Pripomba 2 To topologijo bomo imenovali konjugiranostna topologija in jo označili z $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz: Najprej moramo pokazati, da Θ pokrije cel G , kar je enostavno, preprosto vzamemo $\bigcup_{h \in G} U_h$. Ta množica je unija odprtih in vsebuje vsak $g \in G$, saj je ta gotovo v U_g .

□

3.2 Uporaba

Izrek 2 G je Abelova natanko takrat, ko je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffova.

Dokaz:

(\Rightarrow) G je Abelova natanko takrat, ko $gh = hg$, za vsak $h, g \in G$, ekvivalentno $ghg^{-1} = h$, za vsak $g, h \in G$, kar pa ravno pomeni $U_h = \{h\}$ za vsak $h \in G$. To pomeni, da so v $\mathcal{T}(G)$ enojci odprti, torej je to diskretna topologija. Diskretna topologija je seveda Hausdorffova.

(\Leftarrow) Privzemimo sedaj, da je $\mathcal{T}(G)$ Hausdorffov. Imejmo poljuben $x \in G$ in recimo, da obstaja $y \in U_x$ različen od x . Ker je G Hausdorffova obstajata odprti okoloici U_h in U_k , da $x \in U_h, y \in U_k$ in $U_h \cap U_k = \emptyset$. Toda to pomeni, da $x \in U_x \cap U_h$ in $y \in U_x \cap U_k$ torej $U_h = U_x = U_k$, kar pa je v protislovju z $U_h \cap U_k = \emptyset$. To pomeni, da $U_x = \{x\}$, kar pa je ravno ekvivalentno komutativnosti G .

□

Izrek 3 $H \triangleleft G$, če in samo če je H zaprt v $\mathcal{T}(G)$.

Dokaz:

(\Rightarrow) Naj bo $H \triangleleft G$. Dovolj je pokazati, da je $G - H$ odprta, saj iz tega sledi, da je H zaprta. Naj bo $x \in G - H$ in U_x konjugiranostni razred x , po definiciji je to tudi odprta okolica x . Recimo, da $U_x \cap H \neq \emptyset$, potem obstajata $g \in G$ in $h \in H$, da $h = gxg^{-1}$. Iz tega sledi $x = g^{-1}hg$, ker pa je H edinka po definiciji sledi $x \in H$. Prispeli smo do protislovja, torej $U_x \cap H = \emptyset$. Tako smo našli odprto okolico za x , ki je vsa v množici $G - H$, torej je ta odprta.

(\Leftarrow) Še pride

□

Izrek 4 Če je $\phi : G \rightarrow \Gamma$ homomorfizem grup, potem je prasluka $\phi^{-1}(U_\gamma)$ odprta v $\mathcal{T}(G)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Dokaz: Še pride

□

4 Pogled v druge algebraične strukture

Zaenkrat nič.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

normal subgroup podgrupa edinka

Literatura

[1] M. Brešar, *Uvod v algebro*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2018.