1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

PODEMOS

1° SIMULADO - 1ª OSMM
NÍVEL 3 – ENSINO MÉDIO

Esse simulado apresenta para vocês um estilo de como será a OSMM – OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA, primeira olimpíada regional que atenderá mais de 160 municípios.

A prova deverá ser feita na **Plataforma Papert** entre 30 de agosto e 19 de setembro. Até lá teremos um 2º Simulado.

Esse simulado não tem nenhum valor para fins de pontuação e as respostas não devem ser enviadas para nós. Esse simulado serve para conhecer a OSMM e seu estilo.

Alguns assuntos podem parecer estranhos para alguns professores, porém, selecionamos cuidadosamente os conteúdos, com base na BNCC e com temas recorrentes em olimpíadas de Matemática. Queremos que sirva de inspiração para introdução de novos assuntos na matemática escolar.

Abordamos assuntos que são tradicionalmente estudados na escola como números e operações, álgebra, geometria e medidas, mas apresentamos também nos diferentes níveis temas de Estatística (como quartis, box-plots, correlação, diagramas de dispersão, diagramas de radar, etc), de Combinatória (como combinações, permutações com elementos repetidos, permutações circulares, combinações completas, princípio da casa dos pombos), de Lógica Matemática (como proposições, conectivos, tabela verdade, leis de De Morgan), de Raciocínio Lógico-Matemático (como diagramas de Venn e Carroll, diagramas de Correlação Lógica, puzzles japoneses) e de Matemática Financeira (como juros compostos, equivalência de capitais e sistemas de amortização).

Se sinta a vontade para conectar o PODEMOS para dúvidas. A prova pode conter erros e incoerências, problemas de redação ou até mesmo erros de português. Por favor, não tenham receio de nos contactar para avisar.

Questão 1 – Os filhos de Gengis Khan

Gengis Khan teve muitos filhos, com diversas mulheres. Ele teve mais de 39 filhos. Todos os filhos de Gengis Khan eram gêmeos menos 39, todos eram trigêmeos menos 39, todos eram quadrigêmeos menos 39. Quantos filhos teve Gengis Khân?

a)48
b)51
c)75
d)78
e)111

Problema adaptado da XXII OBM - Níveis 1, 2 e 3 - 1ª fase - 2000. Gengis Khan na realidade teve mais de 700 filhos.

Solução:

O número N de filhos de Gêngis Khan, sendo $2x$ gêmeos, $3y$ trigêmeos, $4y$ quadrigêmeos, podemos afirmar que:

$$N = 2x + 39$$
$$N = 3y + 39$$
$$N = 4z + 39$$

Disso concluímos que $2x = 3y = 4z$, portanto N é um múltiplo comum de 2, 3, 4.

Mas veja, trigêmeos + quadrigêmeos, gêmeos + quadrigêmeos, gêmeos + trigêmeos, precisam ser números menores que 39.

$$2x + 3y < 39$$
$$2x + 4z < 39$$
$$3y + 4z < 39$$

O menor deles é 12, se $2x = 3y + 4z = 12$, temos $12 + 39 = 51$ filhos.

Aliás, o número $N = 12k + 39$, e poderia ser qualquer número da sequência: $51, 63, 75, 87, 99, 111$, mas precisamos checar e aí veremos que 51 é a única resposta possível.

Não poderíamos ter 63 filhos, pois 63-39=24, e nesse caso 24+24>39.

GABARITO: ‘B’

Questão 2 – Os Artistas Leonardo e Pabline

Considere falsa a afirmação “Leonardo é cantor e Pabline é pintora” e verdadeira a afirmação “Se Leonardo é cantor, então Pabline é pintora”. Nessas condições, é necessariamente verdade que

a) Leonardo não é cantor.
b) Leonardo é cantor ou Pabline não é pintora.
c) Pabline não é pintora.
d) Leonardo é cantor.
e) Pabline é pintora.

Adaptado de: **Concurso Escrevente Técnico Judiciário - TJ-SP - Banca VUNESP - 2018**

Solução:

Considere as proposições:

$$c: Leonardo\ é\ cantor$$
$$p: Pabline\ é\ pintora$$

É falsa a afirmação:

$$c \wedge p$$

É verdadeira a afirmação

$$c \rightarrow p$$

Vamos checar as tabelas verdades:

c	p	$c \wedge p$	$c \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Com certeza sabemos que é falsa a proposição c, portanto, Leonardo não é cantor.

a) Leonardo não é cantor. VERDADE
b) Leonardo é cantor ou Pabline não é pintora. FALSO, pois não sabemos se Pabline é pintora. Se ela for pintora a afirmação é falsa, se ela não for pintora a afirmação é verdadeira.
c) Pabline não é pintora. INCERTO.
d) Leonardo é cantor. FALSO.
e) Pabline é pintora. INCERTO.

GABARITO: ‘A’

Questão 3 – O Novo Vingador

Foi feita uma enquete sobre a preferência das pessoas sobre personagens de “Os Vingadores”. “Qual dos personagens você gostaria que tivesse um filme novo especial?” a resposta foi a seguinte:

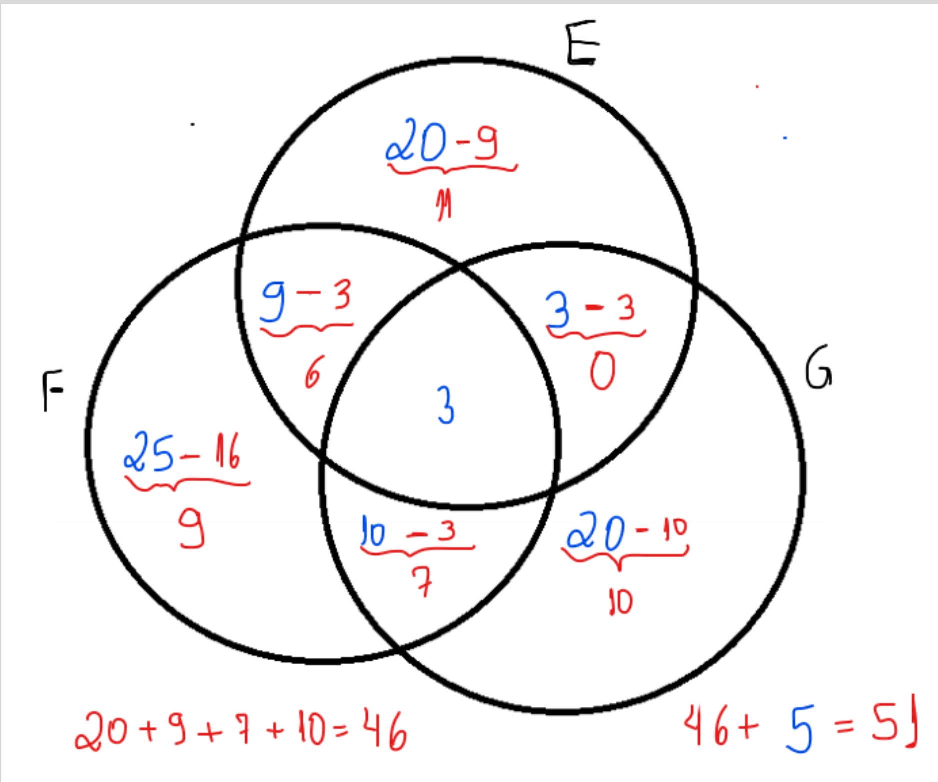
Dr. Estranho	20
Homem Formiga	25
Gavião Arqueiro	20
Dr. Estranho e Homem Formiga	9
Dr. Estranho e Gavião Arqueiro	3
Homem Formiga e Gavião Arqueiro	10
Os Três	3
Nenhum deles	5

Quantas pessoas escolheram apenas um único personagem?

a)28
b)37
c)46
d)65
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos colocar os dados no diagrama de Venn e calcular as regiões:



Escolheram apenas um personagem 9+11+10=30.

GABARITO: ‘E’

Questão 4 – Trapézio Isósceles e sua Diagonal

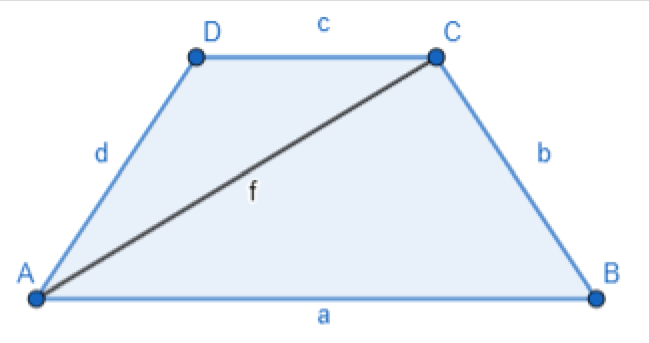
Considere os pontos A, B, C e D. Eles são os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos internos nos vértices A e B são agudos e possuem a metade da medida dos outros dois ângulos internos. A diagonal AC é perpendicular ao lado BC. Sabendo que a base maior mede 20 cm, determine o perímetro desse trapézio em centímetros.

a)42
b)44
c)46
d)48
e)50

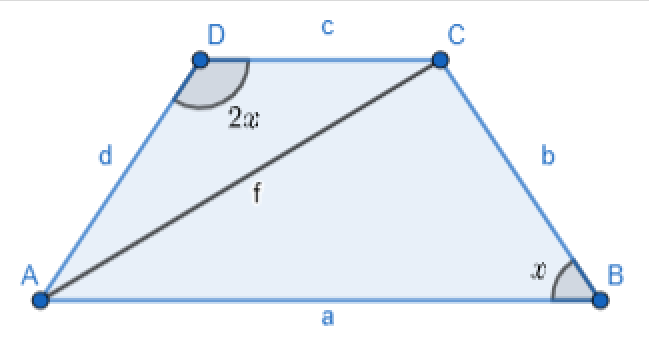
Adaptado do PISM/UFJF - 2016, 1ª Etapa.

Solução:

Vamos desenhar a figura:



A base maior $a = 20$, precisamos encontrar os demais valores. Podemos também marcar os ângulos:



Sabemos que a soma desses ângulos é 180º:

$$x + 2x = 180°$$
$$3x = 180°$$
$$x = 60°$$

Como ABC é retângulo, sabemos que:

$$\cos 60° = \frac{b}{20}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{b}{20}$$
$$b = 10$$

Precisamos agora encontrar a base menor c e há várias formas de fazer isso. Primeiramente vamos achar f:

$$f^2 + 10^2 = 20^2$$
$$f^2 = 400 - 100$$
$$f^2 = 300$$
$$f = 10\sqrt{3}$$

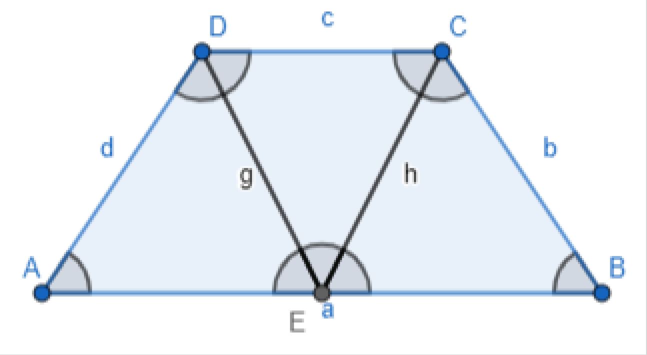
Podemos usar a Lei dos Cossenos para achar o valor de c:

$$f^2 = c^2 + d^2 + 2dc\cos 120°$$
$$\left(10\sqrt{3}\right)^2 = c^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot c \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$300 = c^2 + 100 - 10c$$
$$c^2 - 10c - 200 = 0$$

Resolvendo a equação encontramos $c = 20$ ou $c = -10$ (não serve).

Perímetro 20+10+10+10=50

Há uma outra forma de achar 20, pois note na figura, que todos os ângulos assinalados medem 60º:



GABARITO: ‘E’

Questão 5 – Cones e Cilindros em Ordem

Considere as figuras:

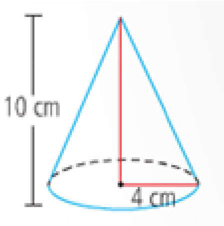


Figura 1

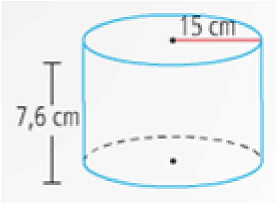


Figura 2

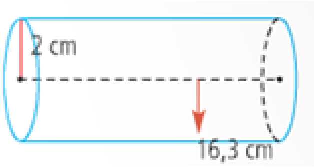


Figura 3

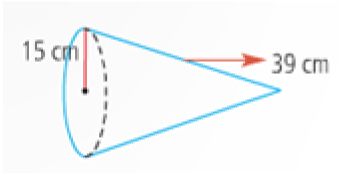


Figura 4

Coloque os volumes das figuras em ordem crescente:

a)Figura 1 > Figura 3 > Figura 2 > Figura 4
b)Figura 1 > Figura 3 > Figura 4 > Figura 2
c)Figura 3 > Figura 1 > Figura 2 > Figura 4
d)Figura 3 > Figura 1 > Figura 4 > Figura 2
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos achar os volumes:

$$V_{Figura1} = \frac{\pi 4^2 10}{3} = \frac{160\pi}{3} = 53\frac{1}{3}\pi$$

$$V_{Figura2} = \pi 15^2 \frac{76}{10} = 1485\pi$$

$$V_{Figura3} = \pi 2^2 \frac{163}{10} = \frac{652}{10}\pi = 65\frac{1}{5}\pi$$

$$V_{Figura4} = \frac{\pi 15^2 39}{3} = 2925\,\pi$$

Figura 4 > Figura 2 > Figura 3 > Figura 1

GABARITO: ‘E’

Questão 6 – Picolitros

Podemos afirmar que $1\ Tm^3$ (Terâmetro cúbico) equivale a quantos pL (picoltros)?

a)10^{12}
b)10^{27}
c)10^{39}
d)10^{47}
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Podemos afirmar que $1\,Tm^3 = (10^{12}m)^3 = 10^{36}m^3$, e sabemos que $1m^3 = 10^3L$, portanto:

$$1\,Tm^3 = 10^{36}(10^3L) = 10^{39}L$$

Temos que $1pL = 10^{-12}L$, então $1L = 10^{12}pL$, portanto

$$1\,Tm^3 = 10^{39}(10^{12}pL) = 10^{47}pL$$

GABARITO: ‘D’

Questão 7 – Zeros em 1000!

Quantos zeros possui $1000!$?

a)200
b)240
c)248
d)500
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

De 1 a 1000 temos 200 números com fator 5.
Mas temos 40 números com dois fatores 5.
Mas temos 8 números com três fatores 5.

Portanto temos 248 fatores 5 de 1 a 1000.

Fatores 2 é muito mais que 248, portanto, são 248 zeros.

GABARITO: ‘C’

Questão 8 – Potência Doida

Determine o valor de

$$64^{0,8333\ldots}$$

Esse número equivale a:

a)16
b)32

c)53
d)77
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos achar a geratriz de $0{,}8333\ldots$.

$$\begin{cases} 100x = 83{,}333\ldots. \\ 10x = 8{,}3333 \end{cases} -$$
$$90x = 83 - 8$$
$$x = \frac{75}{90}$$
$$x = \frac{5}{6}$$

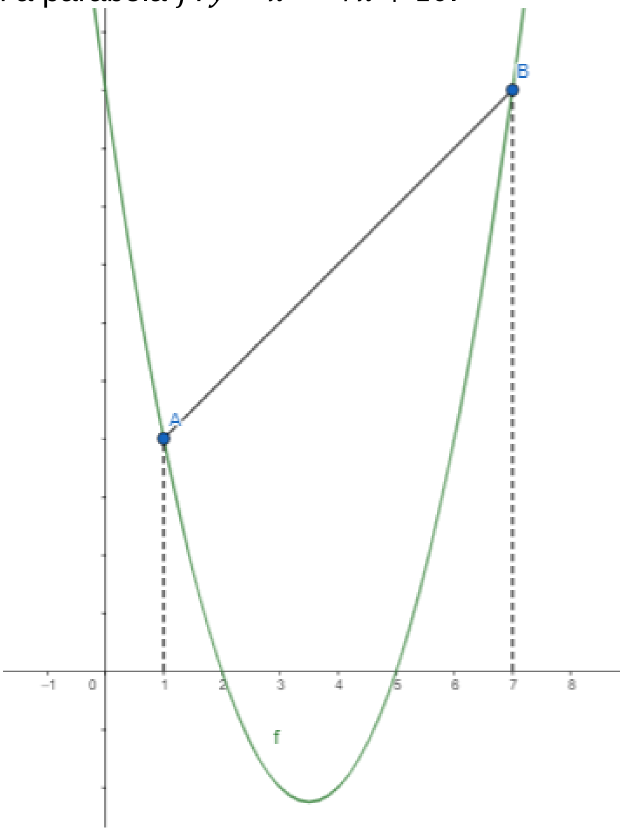
Então:

$$64^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{64^5} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^5 = 2^5 = 32$$

GABARITO: ‘B’

Questão 9 – Reta na Parábola

Os pontos A e B pertencem à parábola $f: y = x^2 - 7x + 10$.



Determine a reta suporte do segmento $\overline{AB}$.

a)$y = x + 3$
b)$y = 2x + 1$
c)$y = 2x + 3$
d)$y = 3x + 1$
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

$$f(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 1 - 7 + 10 = 4$$
$$f(7) = 7^2 - 7 \cdot 7 + 10 = 49 - 49 + 10 = 10$$

Portanto temos que encontrar uma reta que tenha coordenadas (1,4) e (7,10).

Vamos encontrar a equação da reta que passa por esses pontos (existem muitas maneiras)

1ª maneira: A reta é da forma $y = ax + b$
Portanto:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 7a + b = 10 \end{cases}$$
$$6a = 6$$
$$a = 1$$

Substutindo:

$$1 + b = 4$$
$$b = 3$$

A reta é $y = x + 3$

2ª maneira: Vamos utilizar a relação $y - y_0 = m(x - x_0)$
Então:

$$m = \frac{10 - 4}{7 - 1} = \frac{6}{6} = 1$$

Então:

$$y - 4 = 1(x - 1)$$
$$y - 4 = x - 1$$
$$y = x + 3$$

3ª maneira:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & \\ & 1 & 4 & \\ y & 7 & 10 & 4x \\ 28 & x & y & 10 \\ 10x & & & 7y \end{array}$$

Então, pelo esquema:

$$(y - 7y) + (10x - 4x) + (28 - 10) = 0$$
$$-6y + 6x + 18 = 0$$
$$y - x - 3 = 0$$
$$y = x + 3$$

4ª maneira:
Também é possível utilizar determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(10-4) - y(7-1) + 1(10-28) = 0$$

$$6x - 6y - 18 = 0$$

$$y = x + 3$$

GABARITO: 'A'

Questão 10 – Uma Inequação Quociente

Qual é a solução da inequação a seguir?

$$\frac{5x-2}{x-2} \leq 1$$

a)$[0,2]$
b)$[0,2[$
c)$[0,+\infty[$
d)$]-\infty,0] \cup]2,+\infty]$
e)$]-\infty,0] \cup [2,+\infty]$

Solução:

Trata-se de uma equação quociente. Note que não é possível fazer o produto $5x-4 \geq x-2$, pois não sabemos se $x-2$ é positivo ou negativo

Vamos então fazer o procedimento tradicional

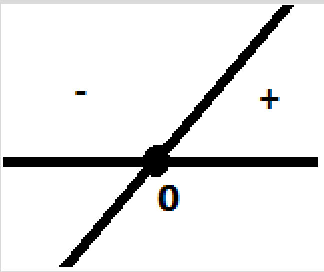
$$\frac{5x-2}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{5x-2}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} \leq 0$$

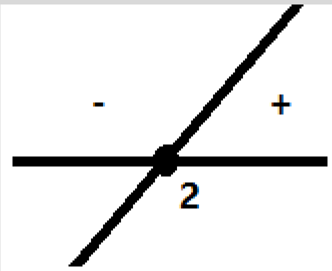
$$\frac{4x}{x-2} \leq 0$$

Vamos fazer o estudo do sinal:

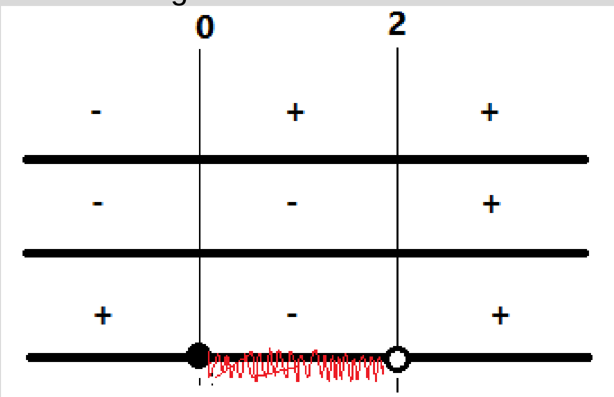
Numerador $f(x) = 4x$



Denominador $g(x) = x - 2$



Vamos comparar e achar os valores negativos:



A solução é $0 \leq x < 2$, o denominador não pode ser zero, por isso a bolinha aberta

$$S = [0,2[$$

GABARITO: ‘B’

Questão 11 – Aniversariantes de Muzambinho

Muzambinho, segundo o IBGE tem 20.545. "Podemos garantir que há pelo menos um dia do ano que há *k* muzambinhenses que fazem aniversário". Qual é o maior valor possível de k?

a)56
b)57
c)20179
d)20546
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Aqui podemos utilizar uma importante propriedade do Princípio da Casa dos Pombos (PCP) generalizado.

Vamos dividir a população por 366

$$\frac{20545}{366} = 56{,}13 \ldots$$

Vamos supor que em cada um dos 366 dias tenhamos 56 pessoas que aniversariam, teremos 20.496 pessoas, portanto é possível garantir que 57 pessoas aniversariam em pelo menos um dos dias do ano.

GABARITO: 'B'

Questão 12 – Viajando Apertado

Eu preciso levar 15 pessoas para uma viagem em três veículos. O primeiro tem 6 lugares, o segundo tem 5 lugares, e o terceiro tem 4 lugares. De quantas maneiras essas pessoas podem ser transportadas? É indiferente onde as pessoas sentam em cada veículo.

a)$C_{15,6} \cdot C_{15,5} \cdot C_{15,4}$
b)$P_6 \cdot P_5 \cdot P_4$
c)$A_{15,6} \cdot A_{15,5} \cdot A_{15,4}$
d)$\frac{P_{15}}{P_6+P_5+P_4}$
e)$C_{15,6} \cdot C_{9,5} \cdot C_{4,4}$

Adaptado de **PC PARÁ – FUNCAB 2016**

Solução:

Como a ordem não importa, trata-se de combinações, ou seja, a quantidade é de $\binom{15}{6}$ para o primeiro carro. Como sobram 9 pessoas, temos agora que colocar $\binom{9}{5}$ no segundo carro. Sobram agora 4 pessoas, portanto, o número de formas de coloca-los no carro é $\binom{4}{4}$, portanto:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4}$$

Isso também pode ser escrito como

$$C_{15,6} \cdot C_{9,5} \cdot C_{4,4}$$

GABARITO: 'E'

Questão 13 – Las Mulheres De Papel

Qual é a negação da proposição a seguir:

Tokio é inteligente ou Nairóbi não é louca

a)Tókio não é inteligente e Nairóbi é louca
b)Tókio não é inteligente ou Nairóbi é louca
c)Tókio não é inteligente e Nairóbi não é louca
d)Tókio é inteligente e Nairóbi não é louca
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Aqui vamos utilizar as Leis de De Morgan, que diz que

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Então a negação é:

"Tókio não é inteligente e Nairobi é louca"

GABARITO: 'A'

Questão 14 – Equivalência de Capitais de Fevereiro

Se R$ 1.000 em 5 abril equivale a R$ 1.210 em 5 de junho, hoje, 5 de fevereiro, esse dinheiro vale quanto?

Dados: $\frac{1000}{1,1} = 909,09$, $\frac{1000}{1,21} = 826,45$, $\frac{1000}{1,331} = 751,31$, $\frac{1000}{1,4641} = 683,01$, $\frac{1000}{1,1^8} = 466,51$

a) R$ 466,51
b) R$ 683,01
c) R$ 751,31
d) R$ 826,45
e) R$ 909,09

Adaptado de **Escriturário – Banco do Brasil – 2014 – CESGRANRIO**

Solução:
1ª Resolução

Vamos Aplicar a fórmula $M = C(1+i)^n$ para duas situações

Após dois meses:
M=1000, C=?, t=2, i=?

Após quatro meses:
M=1210, C=?, t=4, i=?

Nos dois casos, o capital e a taxa é a mesma, então:

$$M = C(1+i)^n$$

para cada caso

$$\begin{cases} 1000 = C(1+i)^2 \\ 1210 = C(1+i)^4 \end{cases}$$

Uma boa estratégia é encontrar o quociente das duas fórmulas. Melhor os maiores números ficarem 'por cima' (numerador)

$$\frac{1210}{1000} = \frac{C(1+i)^4}{C(1+i)^2}$$

Então, como o capital e 1+i não é zero, podemos simplificar as frações e teremos

$$1{,}21 = (1+i)^2$$
$$(1+i)^2 = 1{,}21$$
$$1+i = \sqrt{1{,}21}$$
$$1+i = 1{,}1$$
$$i = 0{,}1$$
$$i = 10\%$$

Achado o i, para achar o C basta substituir em uma das duas equações

$$1000 = C(1+i)^2$$
$$1000 = C(1{,}1)^2$$
$$1000 = C \cdot 1{,}21$$
$$C = \frac{1000}{1{,}21} \approx 826{,}45$$

2ª Resolução

Veja

Mês 0 – O QUE EU QUERO SABER - x
Mês 1 - ?
Mês 2 – 1000
Mês 3 - ?
Mês 4 – 1210

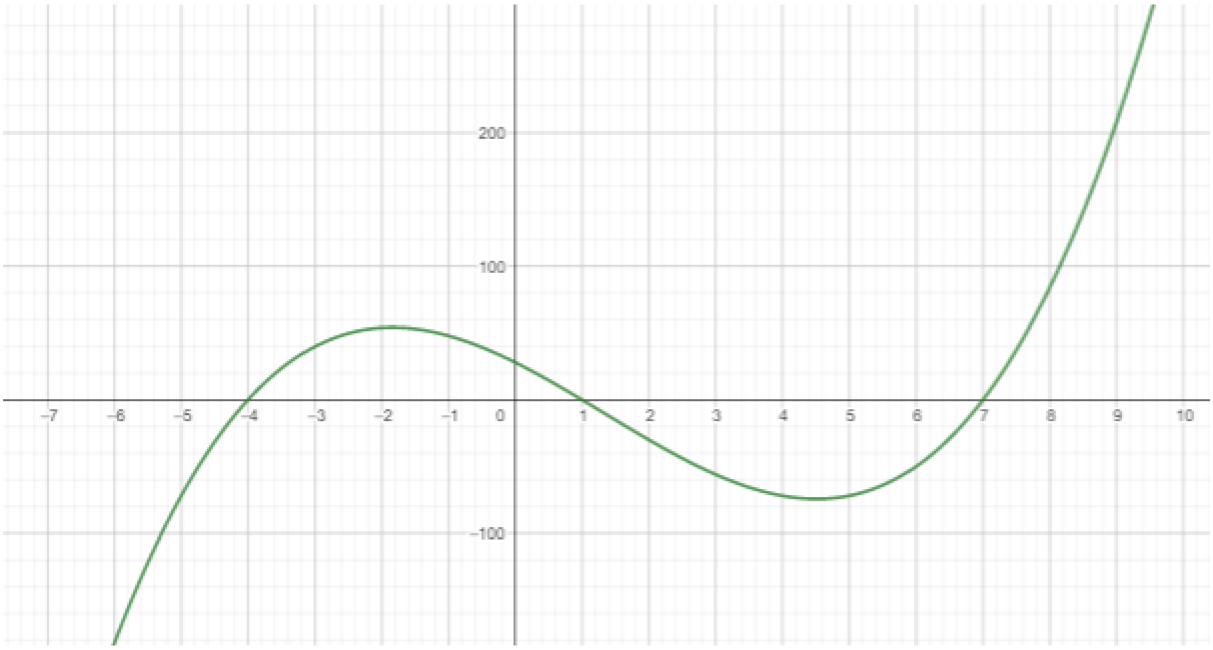
Sabemos que x, 1000 e 1210 são uma PG, então

$$\frac{1210}{1000} = \frac{1000}{x}$$
$$1210x = 1000000$$
$$x = \frac{1000000}{1210} \approx 826{,}45$$

GABARITO: 'D'

Questão 15 – Dominação de Termos

Seja o gráfico de $f(x)$:



Considerando que o coeficiente do termo dominante é 1, determine o coeficiente do termo do 2º grau.

a)4
b)-4
c)-25
d)28
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Essa função tem raízes -4, 1 e 7, portanto é do tipo

$$f(x) = (x+4)(x-1)(x-7)$$

já que sabemos que o coeficiente dominante é 1.

Portanto

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 28$$

Logo o coeficiente do termo do segundo grau é -4

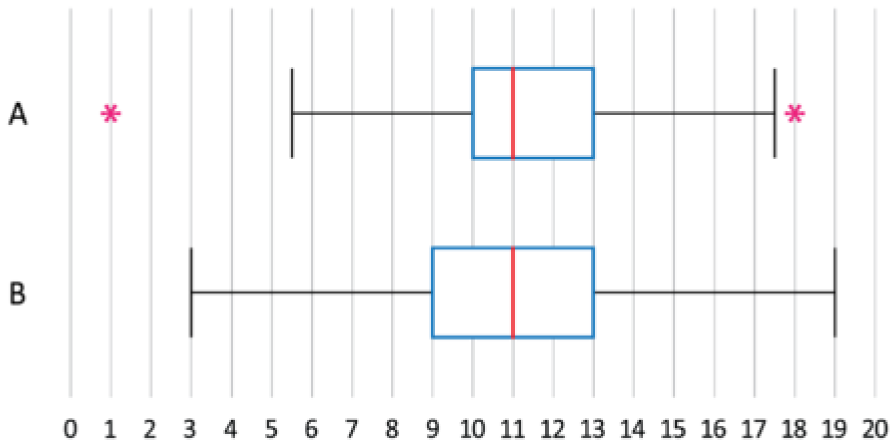
Também poderíamos fazer apenas a soma das raízes e encontrar seu oposto (Relações de Girardi)

$$-(-4+1+7)=-4$$

GABARITO: 'B'

Questão 16 – Diferença da Amplitude Interquartil

Considere os box-plots a seguir:



Fonte: Wikipédia

Qual é a diferença entre a amplitude interquartil de ambos os gráficos?

a)0
b)2
c)4
d)10
e)Nenhuma das anteriores

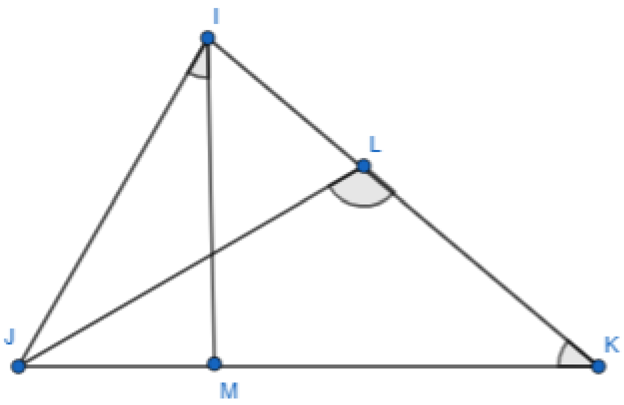
Solução:

A amplitude interquartil do gráfico A é 13-10=3 e do gráfico B é 13-9=4. Visualmente é fácil perceber que a diferença é 1.

GABARITO: 'E'

Questão 17 – Perpendiculares e Bissetrizes

Considere a seguinte figura:



Dados:

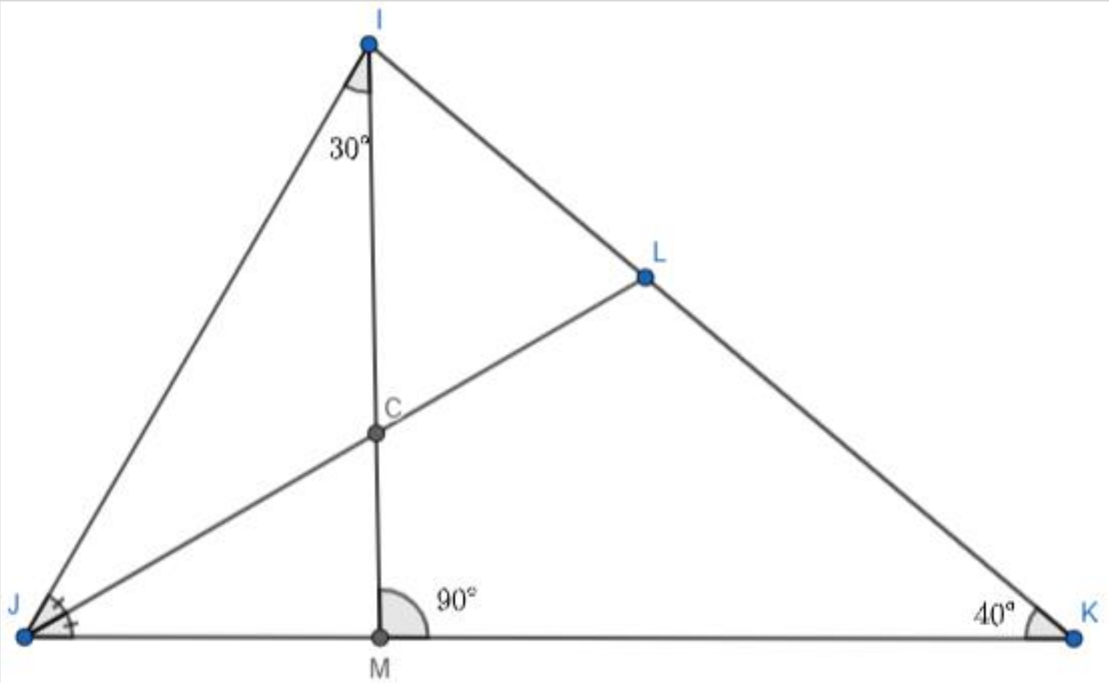
- IM é altura do triângulo ABC
- JL é bissetriz do triângulo ABC.
- $J\hat{I}M$=30°
- $I\hat{K}J$=40°

Determine o valor de $J\hat{L}K$.

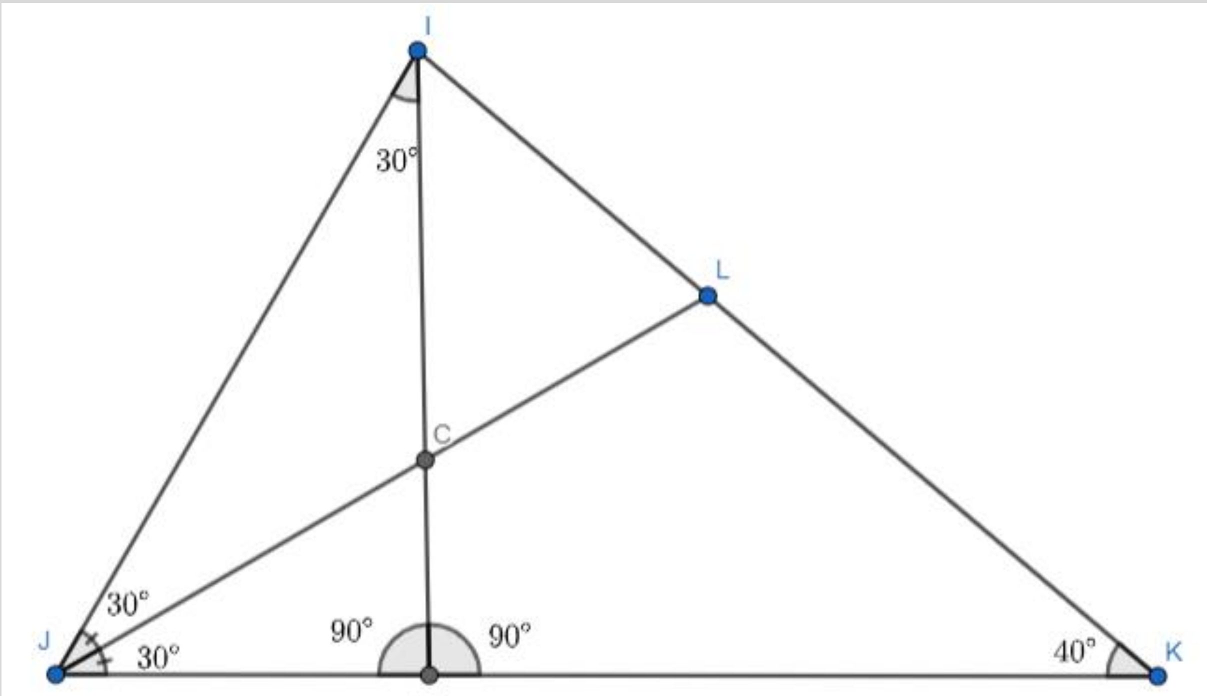
a)90°
b)100º
c)110º
d)120º
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos retirar os dados:



Podemos descobrir, quase imediatamente os seguintes dados:



A soma dos ângulos internos do triângulo JKL é 180º, portanto o ângulo a ser buscado é 110°.

GABARITO: 'C'

Questão 18 – Gráficos dos Sistemas de Equações do 2º Grau

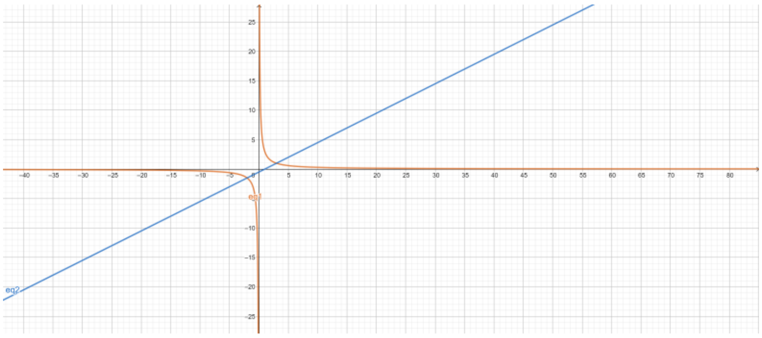
Associe os sistemas com os gráficos respectivos:

A- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$

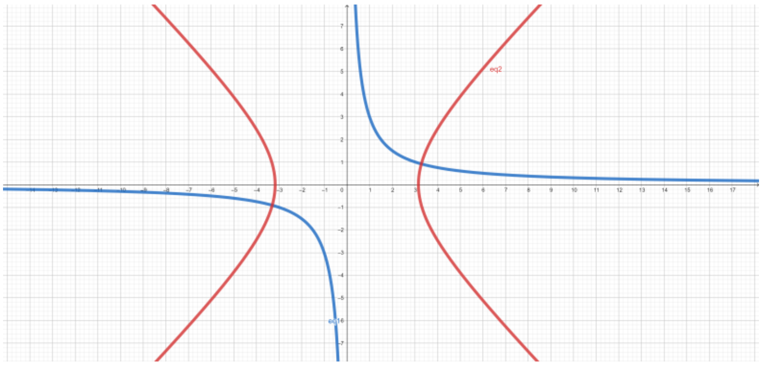
B- $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$

C- $\begin{cases} xy = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

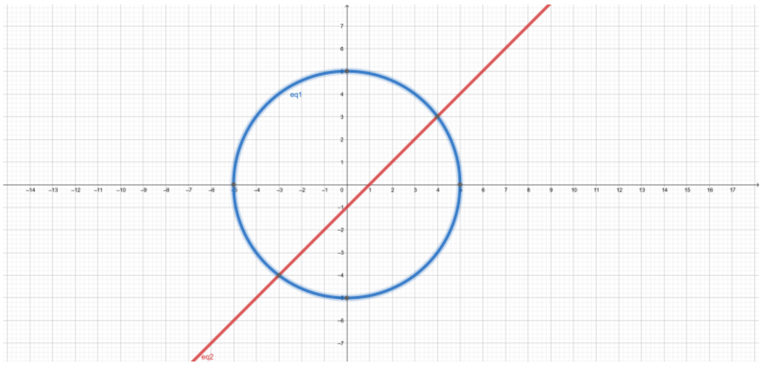
I-



II -



III -



a)I-A, II-B, III-C
b)I-B, II-A, III-C
c)I-C, II-B, III-A
d)I-C, II-A, III-B
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

O único sistema que possui apenas equações do 2º grau é a B, portanto II-B.

O sistema A possui uma circunferência, portanto III-A.

Então I-B, II-C, III-A.

GABARITO: 'E'

Questão 19 – Quem fez corretamente a Equação Irracional

Dois estudantes resolviam a seguinte equação:

$$\sqrt{3}x = x + 1$$

Solução do primeiro estudante:

$$\sqrt{3}x = x + 1$$
$$\sqrt{3}x - x = 1$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$
$$S = \left\{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right\}$$

Solução do segundo estudante

$$\sqrt{3}x = x + 1$$
$$\left(\sqrt{3}x\right)^2 = (x + 1)^2$$
$$3x^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Sobre as resoluções, podemos afirmar que:

a)O primeiro estudante fez de maneira incorreta.
b)Os dois estudantes fizeram corretamente.
c)Os dois estudantes fizeram corretamente, mas o segundo estudante esqueceu de verificar as condições de existência sob o radicando errando ao apresentar a solução.
d)Os dois estudantes fizeram corretamente, mas o primeiro estudante esqueceu de checar se as raízes eram realmente soluções da equação
e)O segundo estudante fez de maneira incorreta.

Solução:

Os procedimentos dos estudantes estão corretos (dos dois). Acontece que o segundo estudante esqueceu de verificar se as raízes satisfazem a equação.

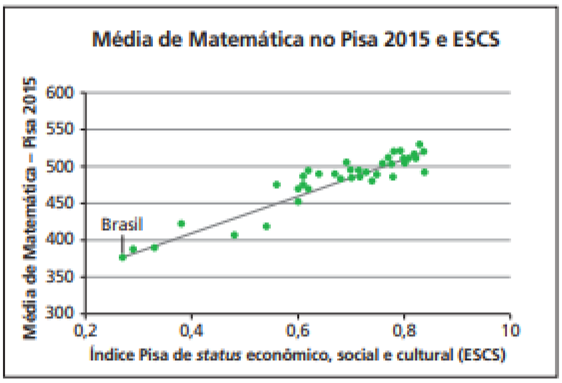
Note que

$$\sqrt{3}x \neq x + 1$$
$$\sqrt{3}\frac{1-\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 1$$
$$\frac{\sqrt{3}-3}{2} \neq \frac{1-\sqrt{3}+2}{2}$$
$$\frac{\sqrt{3}-3}{2} \neq \frac{-\sqrt{3}+3}{2}$$

GABARITO: 'D'

Questão 20 – Pearson no Pisa

Veja o seguinte diagrama de dispersão:



Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/_uploads/_posts/302.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

O coeficiente de correlação de Pearson nesse gráfico é um valor em qual intervalo?

a)$r < -1$
b)$r = -1$
c)$-1 < r < 0$
d)$r = 0$
e)$0 < r < 1$

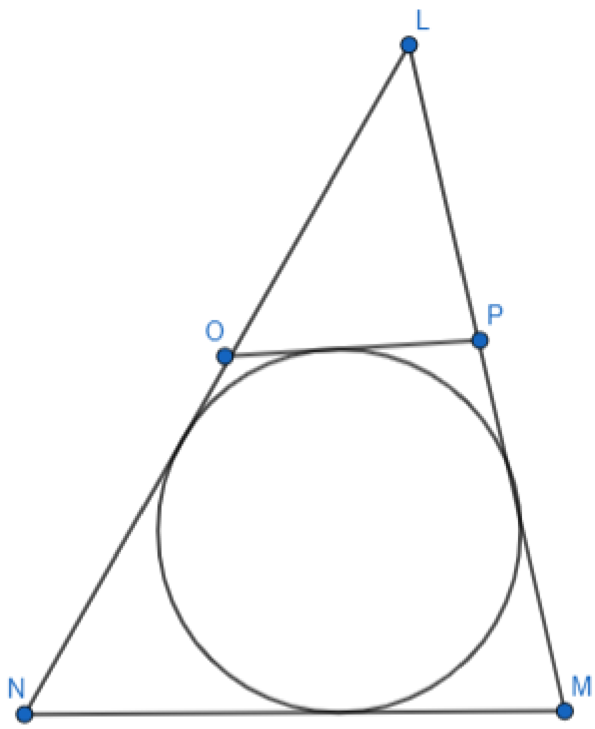
Solução:

Trata-se de uma correlação positiva. Note que não existe correlação maior que 1. A correlação não é perfeita então não é 1.

GABARITO: 'E'

Questão 21– Triângulo LOP

O triângulo LMN tem perímetro igual a 20 cm. A base MN possui 8 cm. O círculo está inscrito no quadrilátero MNOP. Determine o perímetro do triângulo LOP. (Figura fora de escala).



a)4 cm
b)8 cm
c)12 cm
d)16 cm
e)Nenhuma das anteriores

Inspirado em **Fundamentos de Matemática Elementar**.

Solução:

Pelo Teorema de Pitot sabemos que MN+OP=NO+MP.
Ou seja: 8+OP=NO+MP. 8=NO+MP-OP (equação 1)

Sabemos também que LO+NO+LP+MP+MN=20, ou seja:
8+LO+NO+LP+MP=20
LO+NO+LP+MP=12 (equação 2)

Queremos saber o valor de OL+OP+LP

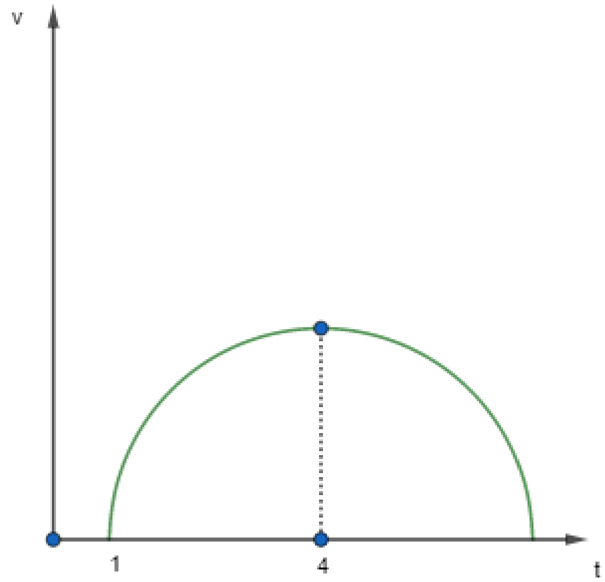
Vamos subtrair a equação 1 da equação 2

LO+NO+LP+MP-NO-MP+OP=12
LO+LP+OP=12

GABARITO: 'C'

Questão 22 – Trajetória em Círculos

O gráfico a seguir descreve a velocidade (em m/s) de um corpo em função do tempo (em s). Esse gráfico tem o formato de uma semicircunferência.



Qual foi a distância percorrida por esse corpo de 1 a 7 segundos?

a)3π
b)$\frac{9}{2}\pi$
c)6π
d)8π
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

A distância percorrida por um corpo é igual a área sobre o gráfico da função que define o percurso note que $\Delta s = V_m \Delta t$, isso mostra que é a área se fosse uma reta. Mas imagine "infinitas" retas, e uma tendência para esse valor.

Logo a distância percorrido é $\Delta s = \frac{\pi(4-1)^2}{2} = \frac{\pi 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$

GABARITO: 'B'

Questão 23 – As Chaves e as Portas

Num jogo você tem 10 chaves para abrir 10 portas, cada chave abre uma única porta e todas chaves abrem uma porta. Quantas vezes, no mínimo, você deve testar essas chaves para abrir todas as portas? (Suponha que você não tem nenhuma sorte)

a)20
b)45
c)55
d)100
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Na 1ª porta testamos na pior das hipóteses 10 chaves. Sobram 9 chaves para 2ª porta e assim sucessivamente, portanto, o número de tentativas e aberturas é

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$$

GABARITO: 'C'

Questão 24 – Camisetas e Cabides

De quantas maneiras podemos pendurar 6 camisetas diferentes em 4 cabides?

a)648
b)720
c)6480
d)60480
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Trata-se de todas as combinações completas $CR_{6,4} = P_{6-1+4}^{6-1,4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$

GABARITO: 'E'

Questão 25 – Cosseno Sazonal

Suponha que o preço de terminado produto sazonal seja dado pela seguinte função:

$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ janeiro, $x = 2$ fevereiro, e assim por diante.

Essa variação se deve ao fato de que quando a produção é maior o preço é menor e vice-versa. Quanto maior a produção, menor o preço; quanto menor a produção, maior o preço.

Em que mês a produção será máxima e em que mês que a produção será mínima?

a)Produção máxima em agosto e mínima em janeiro.
b)Produção máxima em janeiro e mínima em agosto.
c)Produção máxima em janeiro e mínima em julho.
d)Produção máxima em julho e mínima em janeiro.
e)Nenhuma das anteriores.

Exercício inspirado no OBMEP NA ESCOLA 2021.

Solução:

O valor máximo da função é igual a $8 + 5 = 13$, já o valor mínimo é dado por $8 - 5 = 3$, pois $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) \leq 1$. Basta, portanto, encontrar quando os valores de cosseno são iguais a -1 e 1.

$$\cos(y) = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$$

$$\cos(y) = -1 \Rightarrow y = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$$

Portanto

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = 1$$

Quando

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = 2k\pi \Rightarrow \frac{x-1}{6} = 2k \Rightarrow x - 1 = 12k \Rightarrow x = 12k + 1 \Rightarrow x \equiv 1(mod\ 12)$$

Logo o mês de preço máximo é **janeiro.** Produção mínima.

Para achar o preço mínimo:

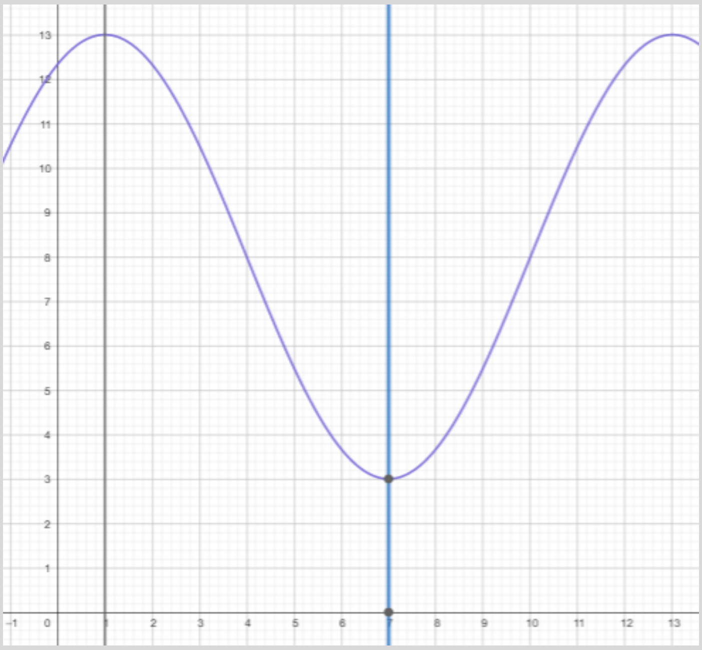
$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$$

Quando

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = (2k+1)\pi \Rightarrow \frac{x-1}{6} = 2k + 1 \Rightarrow x - 1 = 12k + 6 \Rightarrow x = 12k + 7 \Rightarrow x \equiv 7(mod\ 12)$$

Logo o preço mínimo é **julho.** Produção máxima.

Veja o gráfico da função:



GABARITO: 'D'

1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

VALOR DE CADA QUESTÃO NA PROVA OFICIAL (essa é apenas um simulado):

Questão 1	28,4
Questão 2	28,6
Questão 3	28,9
Questão 4	29,3
Questão 5	29,8
Questão 6	30,4
Questão 7	31,1
Questão 8	31,9
Questão 9	32,8
Questão 10	33,8
Questão 11	34,9
Questão 12	36,1
Questão 13	37,4
Questão 14	38,8
Questão 15	40,3
Questão 16	41,9
Questão 17	43,6
Questão 18	45,4
Questão 19	47,3
Questão 20	49,3
Questão 21	51,4
Questão 22	53,6
Questão 23	55,9
Questão 24	58,3
Questão 25	60,8

As questões possuem valores diferentes para diferenciar o máximo possível as notas.