1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

PODEMOS

1° SIMULADO - 1ª OSMM
NÍVEL 1 – 6º E 7º ANO

Esse simulado apresenta para vocês um estilo de como será a OSMM – OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA, primeira olimpíada regional que atenderá mais de 160 municípios.

A prova deverá ser feita na **Plataforma Papert** entre 30 de agosto e 19 de setembro. Até lá teremos um 2º Simulado.

Esse simulado não tem nenhum valor para fins de pontuação e as respostas não devem ser enviadas para nós. Esse simulado serve para conhecer a OSMM e seu estilo.

Alguns assuntos podem parecer estranhos para alguns professores, porém, selecionamos cuidadosamente os conteúdos, com base na BNCC e com temas recorrentes em olimpíadas de Matemática. Queremos que sirva de inspiração para introdução de novos assuntos na matemática escolar.

Abordamos assuntos que são tradicionalmente estudados na escola como números e operações, álgebra, geometria e medidas, mas apresentamos também nos diferentes níveis temas de Estatística (como quartis, box-plots, correlação, diagramas de dispersão, diagramas de radar, etc), de Combinatória (como combinações, permutações com elementos repetidos, permutações circulares, combinações completas, princípio da casa dos pombos), de Lógica Matemática (como proposições, conectivos, tabela verdade, leis de De Morgan), de Raciocínio Lógico-Matemático (como diagramas de Venn e Carroll, diagramas de Correlação Lógica, puzzles japoneses) e de Matemática Financeira (como juros compostos, equivalência de capitais e sistemas de amortização).

Se sinta a vontade para conectar o PODEMOS para dúvidas. A prova pode conter erros e incoerências, problemas de redação ou até mesmo erros de português. Por favor, não tenham receio de nos contactar para avisar.

Questão 1 – Cotonetes do Sr. Oscar

Sr. Oscar chegou na farmácia e comprou um remédio e duas caixa de cotonetes e a farmacêutica ao cobrar informou o seguinte:
- O remédio ficou em R$ 11,70 e cada caixa de cotonete ficou em R$ 3,45.
- Vou te pagar com essas duas notas de R$ 10,00. Ok?
- Sim. O senhor tem R$ 0,10 para facilitar o troco?
- Tenho sim: pegue aqui.
- Vou lhe dar o troco em moedas de cinquenta centavo, ok?
- Perfeito.

Quantas moedas o Sr. Oscar recebeu de troco?

a)1
b)3
c)5
d)30
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Se o remédio ficou em 11,70 e cada caixa em 3,45, ele gastou:

$$11{,}70 + 2 \cdot 3{,}45 = 11{,}70 + 6{,}90 = 18{,}60$$

Como ele pagou com 2 notas de 10,00, ou seja, $R\$\ 20{,}00$, o troco deve ser:

$$R\$\ 20{,}00 - R\$18{,}60 = R\$\ 1{,}40$$

Com o troco, R$ 1,40 + R$ 0,10 = R$ 1,50. E será pago em moedas de 50 centavos:

$$R\$\ 1{,}50 \div R\$\ 0{,}50 = 3$$

GABARITO: ‘B’

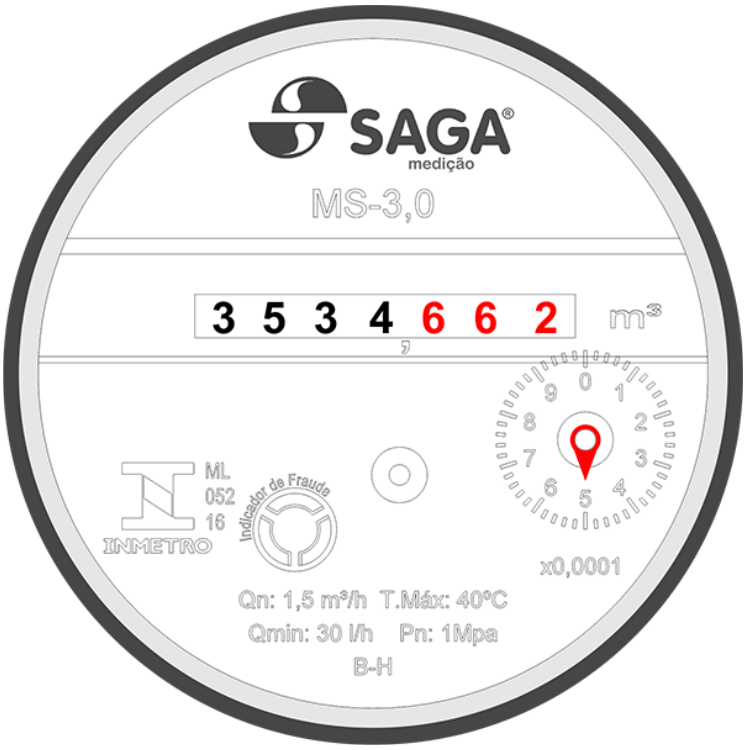
Questão 2 – Hidrometro

Veja um dos vários modelos de Hidrômetro:

Fonte: Almanaque do IPEM

Os Hidrômetros são muito variados. Acima apresenta-se um hidrômetro marcando um consumo de 3.534.859,4 L.

O Hidrômetro a seguir é diferente:



O novo disco só tem um círculo com ponteiro, e esse indica o consumo de:

a)Mililitros
b)Centilitros
c)Decilitros.
d)Litros
e)Decalitros.

Solução:

Note que esse modelo de hidrômetro possui 3 casas decimais, ou seja, indica os litros na sua contagem. O número do ponteirinho são os decilitros, que equivalem a $\frac{1}{10} = 0{,}1$ litro ou a $\frac{1}{10.000} = 0{,}0001$ litro.

GABARITO: 'C'

Questão 3 – 2021 Doses de Remédio

Carlos toma um remédio a cada dois dias e deverá toma-lo por 30 anos. A 1ª dose ele tomou numa segunda-feira, a 2ª dose numa quarta-feira, e assim sucessivamente.

Em que dia ele tomará a 2021ª dose?

a) Numa segunda-feira
b) Numa terça-feira
c) Numa quarta-feira
d) Num sábado
e) Nenhuma das anteriores

Solução:

Formamos um ciclo com 7 doses:

Segunda-feira, quarta-feira, sexta-feira, domingo, terça-feira, quinta-feira, sábado

Vamos achar o quociente e o resto da divisão de 2021 por 7: encontramos quociente 288 e resto 5, ou seja, o 288 x 7°=2016° cai num sábado, o 2017° numa segunda-feira, o 2018° numa quarta-feira, o 2019º numa sexta-feira, o 2020° num domingo, o 2021° numa terça-feira.

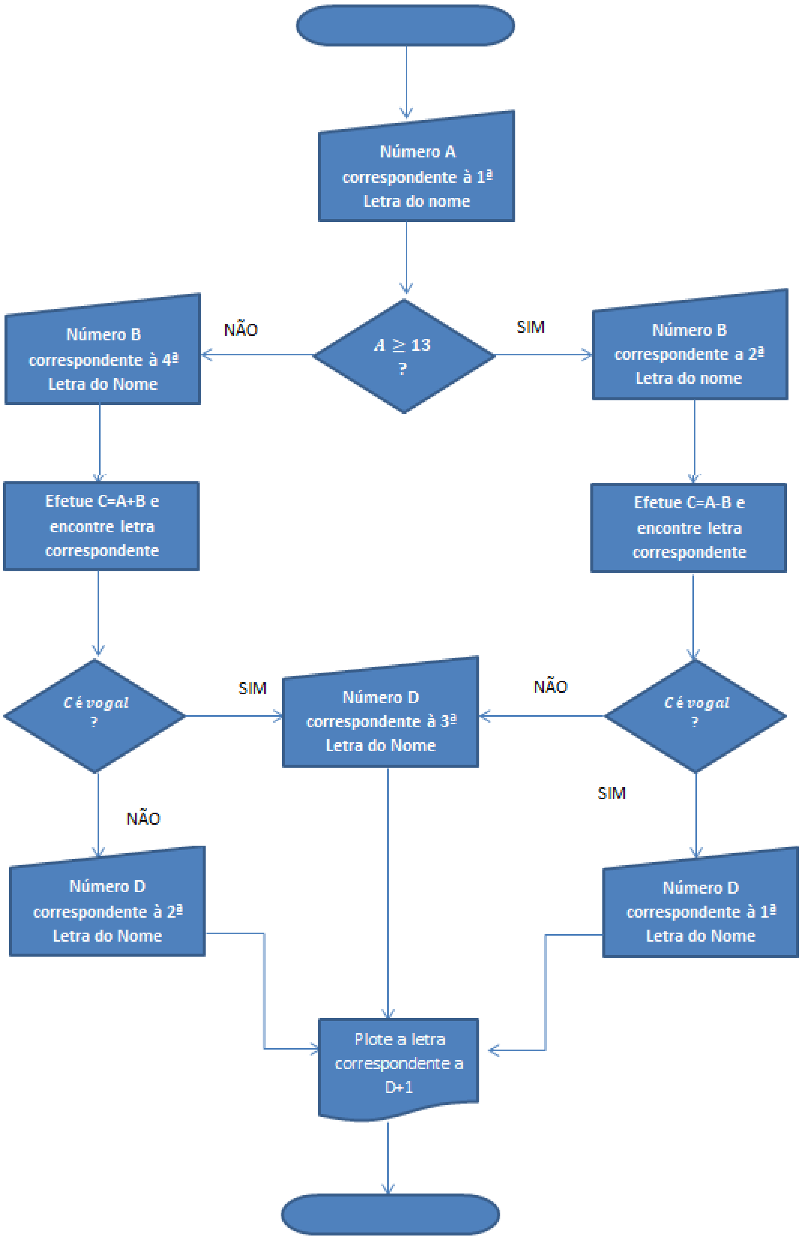
GABARITO: ‘B’

Questão 4 – Fluxograma de Bianca

Considere a seguinte correspondência de letras e números:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Veja o fluxograma:



Se Bianca inserir seu nome nesse fluxograma que letra será plotada?

a)A
b)B
c)J
d)K
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

BIANCA
O número A correspondente a b é 2, logo A=2.
Como b é menor que 13, logo B é correspondente é n, ou seja B=14
C=A+B, ou seja, C=2+14=16, corresponde a p, que é consoante.
D portanto corresponde a i, ou seja D=9.
A letra correspondente a D+1=10 é j.
Portanto a letra de Bianca será J.

GABARITO: 'C'

Questão 5 – Thiago Calculando

Thiago pensou em um número. Multiplicou por 3. Somou 12. Dividiu por 7. Obteve 15. Que número Thiago pensou?

a)7
b)27
c)31
d)39
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Se você conhece equações é possível equacionar:

$$\frac{3x+12}{7}=15$$

E a solução é imediata

$$3x + 12 = 105$$
$$3x = 93$$
$$x = 31$$

Alternativamente:

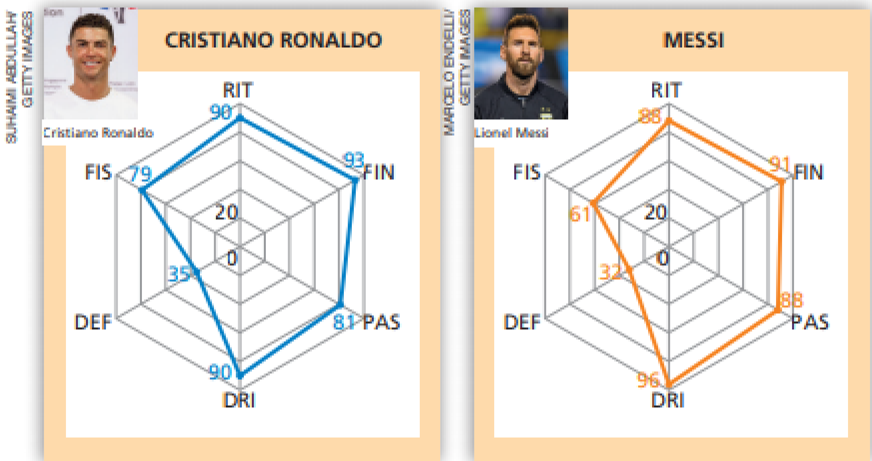
Você pode começar de trás para frente:

Que número dividido por 7 resulta em 15? 105
Que número somado com 12 resulta em 105? 93
Que número vezes 3 resulta em 93? 31

GABARITO: ‘C’

Questão 6 – CR7 e Messi Aranha

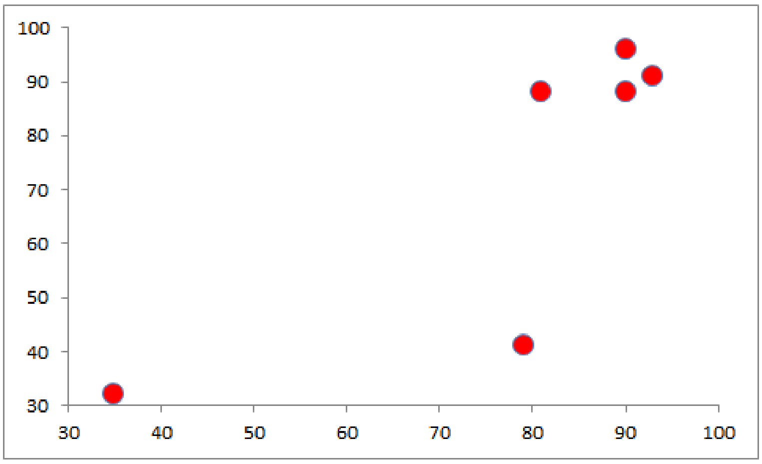
Veja a avaliação de dois jogadores em um jogo de videogame nos critérios: ritmo (RIT), finalizações (FIN), passes (PAS), dribles (DRI), defesa (DEF) e físico (FIS). Cada jogador tem uma pontuação de 0 a 100 para cada um dos critérios.



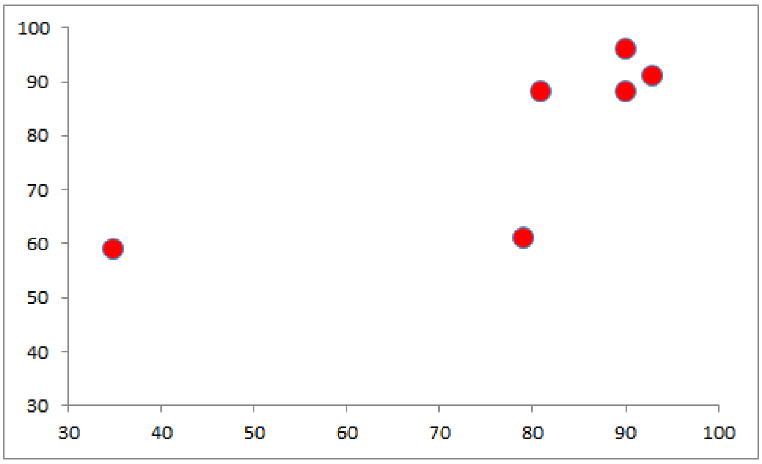
Fonte das imagens: livro "Conexões" de Fábio Martins Leonardo (2020)

Qual diagrama de dispersão representa a correlação entre as avaliações de Cristiano Ronaldo e de Messi?

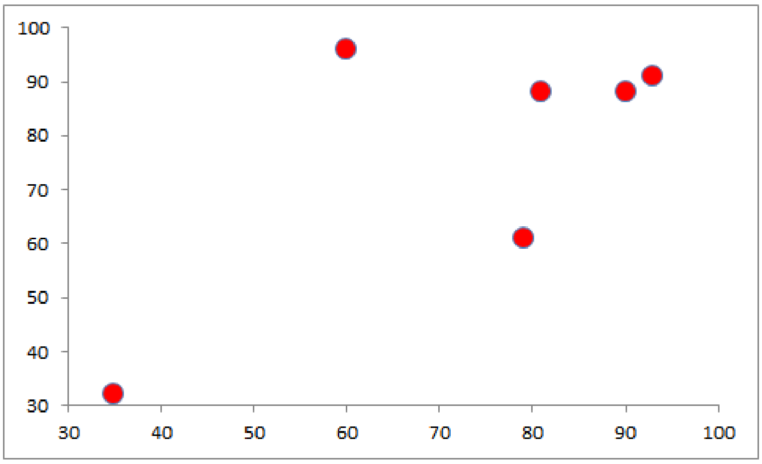
a)


100
90
80
70
60
50
40
30
30 40 50 60 70 80 90 100

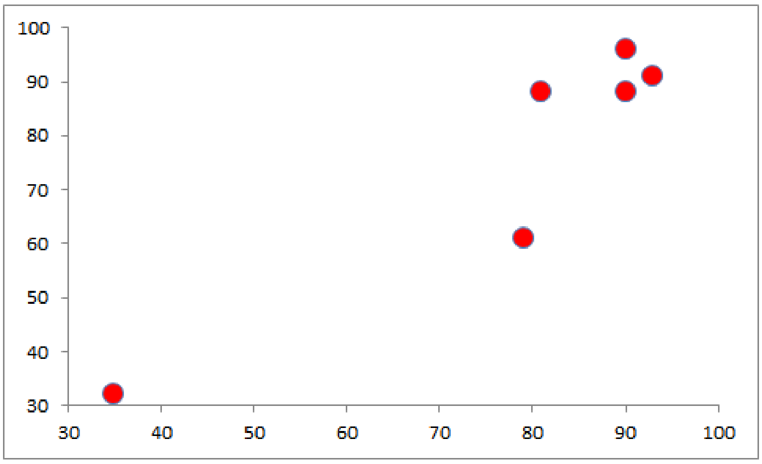
b)


100
90
80
70
60
50
40
30
30 40 50 60 70 80 90 100

c)


100
90
80
70
60
50
40
30
30 40 50 60 70 80 90 100

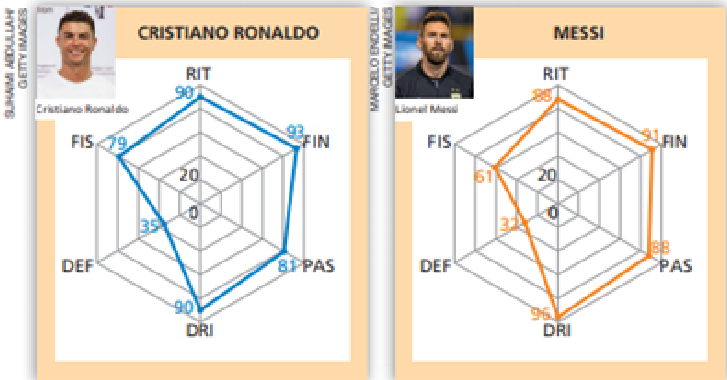
d)



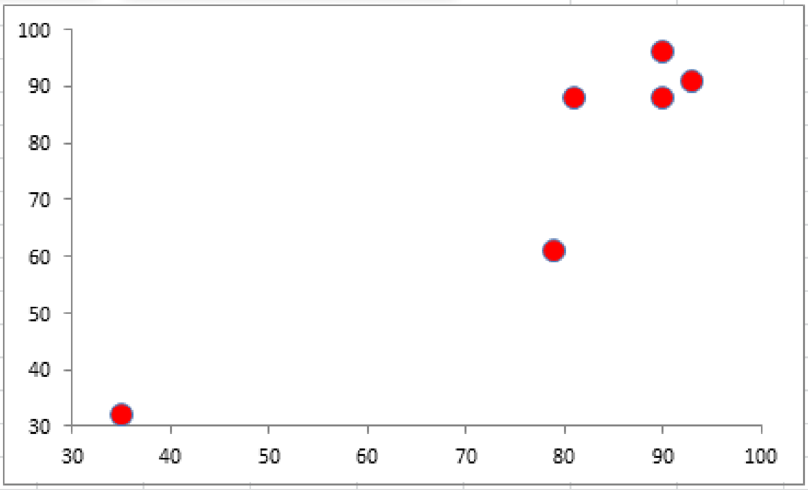
e) Nenhum dos gráficos anteriores

Solução:

Basta plotar os dados do gráfico de radar em um plano cartesiano:



RIT	90	88
FIS	79	61
DEF	35	32
DRI	90	96
PAS	81	88
FIN	93	91



Verifique, pois há semelhanças visuais entre os gráficos

GABARITO: ‘D’

Questão 7– Consumo Amazônico

Veja o gráfico do consumo elétrico residencial elaborado pelo governo do Amazonas:

Segundo o gráfico, quais são os equipamentos respectivamente com menor e maior potência elétrica?

a)DVD e Ar-condicionado
b)DVD e Chuveiro
c)Iluminação e TV
d)Iluminação e Chuveiro
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Esse gráfico está no site oficial do Amazonas, mas provavelmente está incorreto.

Colocando numa tabela, e calculando a Potência pelo quociente do consumo e do tempo:

	Consumo	Tempo	Potência
DVD	24	2	12
Lavadoura	1,76	1	1,76
Iluminação	3,45	5	0,69
Ferro	7,2	1	7,2
Computador	15,12	8	1,89
Ventilador	17,52	8	2,19
TV	130,45	5	26,09
Geladeira	56,88	24	2,37
Chuveiro	88	0,533333	165
Ar condicioniado	193,76	8	24,22

A maior potência será a da TV e a menor o da iluminação.

GABARITO: ‘C’

Questão 8 – La Bola De Papel

Uma bola de futebol é composta por 20 “gomos” hexagonais e 12 “gomos” pentagonais. Abaixo um molde de papel.

Fonte da Imagem: Giga Matemática

Sete costureiras vão ajudar na produção de bolas de futebol e já recebem os gomos prontos, só precisando costurar as arestas para uni-las. Para costurar cada aresta elas gastam 28 cm de linha.

Cada uma dessas costureiras produziu 6 bolas em um dia, e para isso, estavam a sua disposição 60 rolos de linha, cada um com 40 metros de comprimento.

Elas usaram o mínimo de rolos possível, deixando os que sobraram intactos na embalagem. Quantos rolos sobraram na embalagem?

a)13
b)14
c)15
d)26
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Precisamos achar o número de arestas dessa bola:

$$\frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = \frac{120 + 60}{2} = 90$$

Em cada aresta vai se gastar 28 cm, ou seja, $90 \cdot 28\ cm = 2520\ cm = 25{,}2\ m$.

São 7 costureiras produzindo cada uma 6 bolas são $7 \cdot 6 = 42$ costureiras. O gasto diário portanto é de $25{,}2 \cdot 42 = 1058{,}4\ m$.

Cada rolo possui 40 metros, portanto, elas utilizaram $\left\lceil \frac{1058{,}4}{40} \right\rceil = 27$ (usei a notação de teto, pois, se tiver qualquer coisa acima do inteiro deve-se abrir um rolo a mais.

São 60 rolos, portanto sobraram $60 - 27 = 33$ rolos intactos.

GABARITO: 'E'

Questão 9 – Você já foi a Guaxupé?

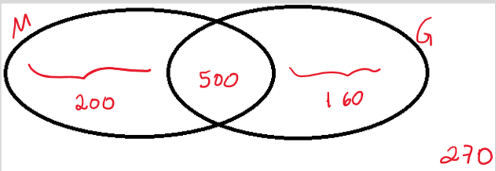
Foi feita uma enquete entre os participantes da OSMM se eles já haviam visitado as vizinhas cidades de Muzambinho e Guaxupé. 200 visitaram apenas Muzambinho, 160 visitaram apenas Guaxupé, 500 visitaram as duas cidades e 270 não visitaram nenhuma das duas cidades. Quantos alunos responderam essa enquete?

a) 830
b) 860
c) 1130
d) 1250
e) Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos resolver pelos diagramas de Venn.

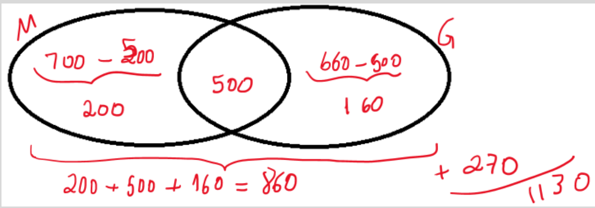
Retiramos os dados e preenchemos os diagramas:



Note que **apenas** 200 e apenas 160 ficam em baixo do colchete.

Ter visitado apenas Muzambinho – você assinala em baixo / Ter visitado Muzambinho – você assinala em cima. Note que a sutil diferença muda tudo!

De resto, é só usar o raciocínio e preencher os diagramas de Venn:



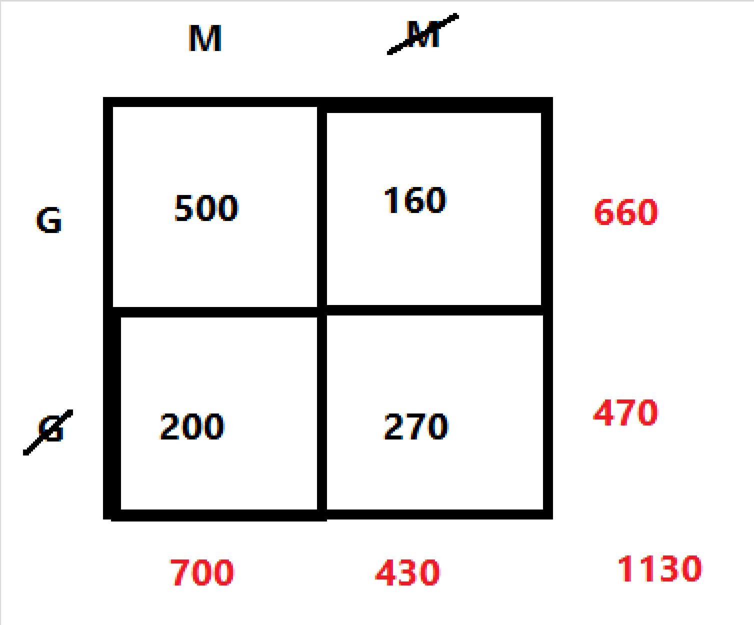
Portanto temos que 1130 responderam a enquete.

Solução alternativa:

Armamos os dados no Diagrama de Carroll

	M	~~M~~
G	500	160
~~G~~	200	270

Note que basta somar os 4 dados, mas, para responder, vamos preencher o diagrama:



GABARITO: ‘C’

Questão 10 – A média de idade dos Estudantes

A média das idades dos estudantes de uma turma de 39 alunos é de 7,8 anos. Um novo aluno, mais velho, se matriculou na turma, que passou a ter média de 7,88 anos. Qual é a idade desse novo aluno?

a)8 anos
b)9 anos
c)10 anos
d)11 anos
e)12 anos

Solução:

A soma das idades dos 39 alunos é $39 \cdot 7{,}8$.

A nova soma é $39 \cdot 7{,}8 + x$, sendo x a idade desse novo aluno, a média é portanto:

$$\frac{39 \cdot 7{,}8 + x}{40} = 7{,}88$$
$$304{,}2 + x = 315{,}2$$
$$x = 315{,}2 - 304{,}2$$
$$x = 11$$

GABARITO: ‘D’

Questão 11 – Cucos descontrolados

Três relógios-cuco estão em funcionamento em uma loja e cantam simultaneamente ao meio dia. O primeiro relógio canta de 15 em 15 minutos. O segundo relógio canta de 20 em 20 minutos. O terceiro relógio canta de 24 em 24 minutos. Quantas vezes os três relógios-cuco cantam juntos em um dia?

a)12
b)24
c)36
d)60
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Eles cantam juntos a cada $mmc(15,20,24)$ minutos.

O valor do $mmc(15,20,24) = 120$

Portanto eles cantam juntos a cada 2 horas. Portanto 12 vezes a cada 24 horas.

GABARITO: ‘A’

Questão 12 – Viajando Fusos Horários

O Horário de Brasília é UTC-3 e o do país de Bangladesh é UTC+6. Se um avião sair 8h da manhã de um avião em Brasília e for até Bangladesh, num vôo super-sônico de 20 horas, que horas será em Bangladesh quando ele chegar lá?

a)12h do dia anterior
b)7h da noite do mesmo dia
c)4h da madrugada do dia seguinte
d)1h da tarde do dia seguinte
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

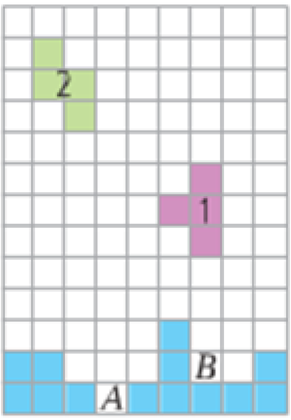
Quando é 8h em Brasília, em Bangladesch é 8+3+6=17 h.

Como a viagem dura 20 horas, 17+20=37, 37-24=13. Será 1h da tarde do dia seguinte.

GABARITO: ‘D’

Questão 13 – Transformações Tétricas

Tetris é um videogame inventado em 1984, no qual as transformações isométricas devem ser aplicadas repetidamente a 4 figuras diferentes para que se encaixem. Considerando o movimento que aparece à direita, quais transformações isométricas você deve realizar para fazer a figura 1 se encaixar corretamente em A? E para ajustar a figura 2 em B?



a)Figura 1 – Translação segundo o vetor (-2,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário.
Figura 2 – Translação segundo o vetor (6,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário

b)Figura 1 – Translação segundo o vetor (-2,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário.
Figura 2 – Translação segundo o vetor (6,0) e Rotação de 90º no sentido horário

c)Figura 1 – Translação segundo o vetor (-1,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário.
Figura 2 – Translação segundo o vetor (6,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário

d)Figura 1 – Translação segundo o vetor (-2,0) e Rotação de 90º no sentido horário.
Figura 2 – Translação segundo o vetor (6,0) e Rotação de 90º no sentido anti-horário

e)Nenhuma das anteriores

Adaptado do livro AVENDAÑO, Eduardo Bórques; NAVARRO, Florencia Darrigrandi; NAVARRO, Mario Zañartu. **Matemática 8º Educación Básica: Texto del Estudiante.** Providencia, Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, 2010.

Solução:

A Figura 1 precisa ser deslocada 2 unidades para trás e fazer uma rotação de 90° em sentido anti-horário.
A Figura 2 precisa ser deslocada 6 unidades para frente e fazer uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

GABARITO: ‘A’

Questão 14 – Bebendo Suco

Uma jarra cheia de suco é colocada numa balança e aparece no visor 1,115 kg. Eu bebi 1/3 do suco e coloquei novamente na balança, que indicou 930 g. Qual é a massa da jarra vazia?

a) 185
b) 370
c) 555
d) 560
e) 655

Adaptado de Concurso Professor Orientador de Aprendizagem Telecurso 2000 Ensino Médio– SESI-SP/2004

Solução:

Uma jarra cheia possui 1115 g. Eu bebi 1/3 do suco, e restou 930, portanto, 1/3 do suco é igual a 1115-930=185 g. A massa do suco é portanto 185 x 3 = 555 g. A massa da jarra é portanto 1115-555=560.

GABARITO: ‘D’

Questão 15 – Dígito do RG

Leia um texto publicado no jornal “A Folha de S. Paulo” há mais de 20 anos:

Entenda o dígito na carteira de identidade
José Luiz Pastore Mello*

Especial para a Folha
Há três anos, perdi minha carteira de identidade (RG), o que me obrigou a pedir a emissão da segunda via ao Estado.

Quando recebi o novo documento, notei que havia sido acrescido um dígito ao final do número do meu antigo RG. Segundo o funcionário que me atendeu, os novos registros estão sendo emitidos com esse dígito (dígito de controle) e os antigos estão sendo atualizados.

Na ocasião, não obtive uma resposta satisfatória sobre o motivo da mudança. Assim, guardei a curiosidade por três anos. Somente dias atrás, ao ler um livro sobre teoria da informação, compreendi o que realmente está em jogo com o acréscimo do dígito de controle, fato que compartilho com o leitor devido ao seu interesse matemático.

Segundo estatísticas, 90% dos erros cometidos por aqueles que precisam digitar grandes quantidades de números extensos -por exemplo, vários números de RG- são de dois tipos: erros singulares (digita-se apenas um algarismo errado, como 7328 em vez de 7326) ou de transposição (troca-se a ordem de um par de algarismos, por exemplo, registra-se 9465 em vez de 9456).

Para identificarem erros de um desses dois tipos, os sistemas modernos de informação propõem o acréscimo de um dígito de controle capaz de identificar se o número digitado contém ou não algum erro. No caso do nosso RG, o cálculo do dígito de controle começa com a soma do produto do último algarismo por 9 com o produto do penúltimo por 8 e assim sucessivamente até o primeiro algarismo. Para descobrir o dígito de controle do seu RG, basta procurar um número entre 0 e 10 que, multiplicado por 100 e acrescido à soma feita inicialmente, dará resto 0 na divisão por 11. Por exemplo, um RG número 3.021.415 terá dígito de controle igual a 4 porque (5.9+1.8+4.7+1.6+2.5+0.4+3.3 +100.4) dividido por 11 resulta resto 0. Pode-se demonstrar matematicamente que qualquer número de RG que seja digitado incorretamente por um erro singular ou de transposição causará uma incompatibilidade com o dígito de controle não resultando resto zero na divisão por 11.

Agora é a sua vez: pegue o seu RG e confira se o dígito de controle foi calculado corretamente (se o RG indica dígito de controle X, interprete isso como 10).

*José Luiz Pastore Mello é mestre em ensino de matemática pela USP e professor do Colégio Santa Cruz

Esse texto refere-se apenas aos RGs de alguns estados, como São Paulo.

Calcule o dígito de um RG fictício de número 4.121.322.

a)0
b)2
c)5
d)X
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

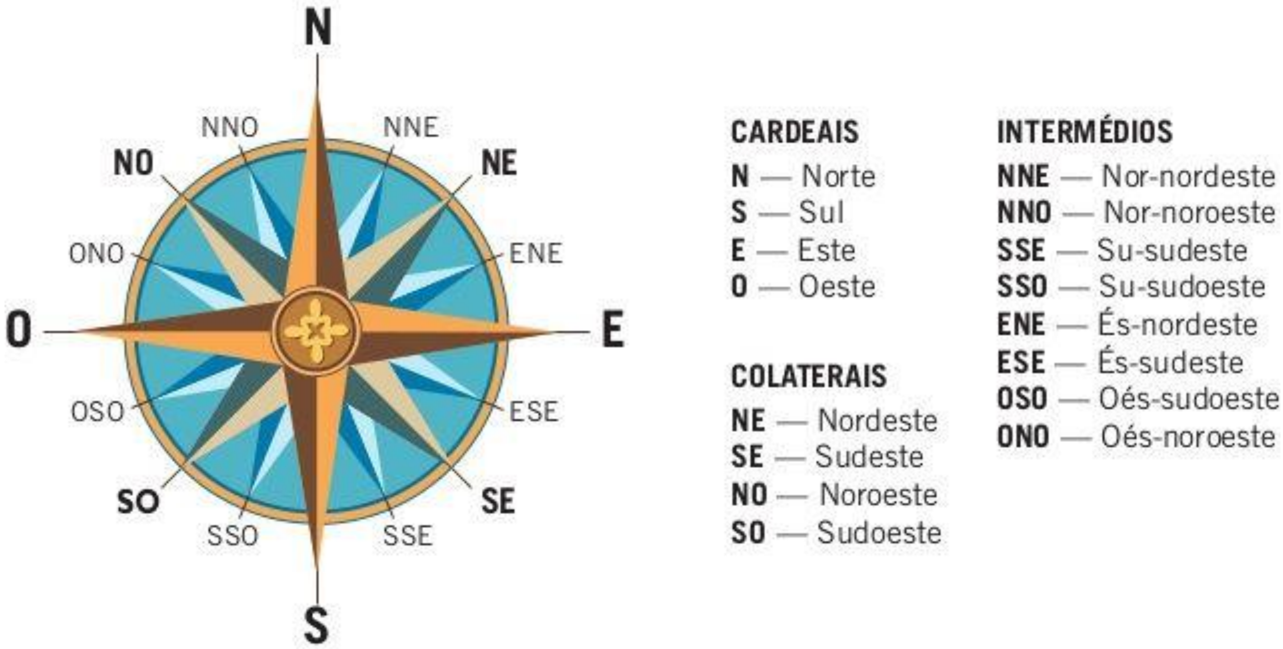
Vamos calcular $2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 18 + 16 + 21 + 6 + 10 + 4 + 12 = 87$

A divisão de 87 por 11 dá quociente 7 e resto 10, portanto o dígito é “X”.

GABARITO: ‘D’

Questão 16 – Rosa dos Ventos 2

Veja a Rosa dos Ventos:



Fonte: Pin Educação

Paula está olhando para Su-Sudoeste (SSO) e faz um giro no sentido horário de 45º. Ela estará olhando para:

a)Oés-sudoeste (OOS)
b)Oés-noroeste (ONO)
c)Sudoeste (SO)
d)Sudeste (SE)
e)Nenhuma das anteriores

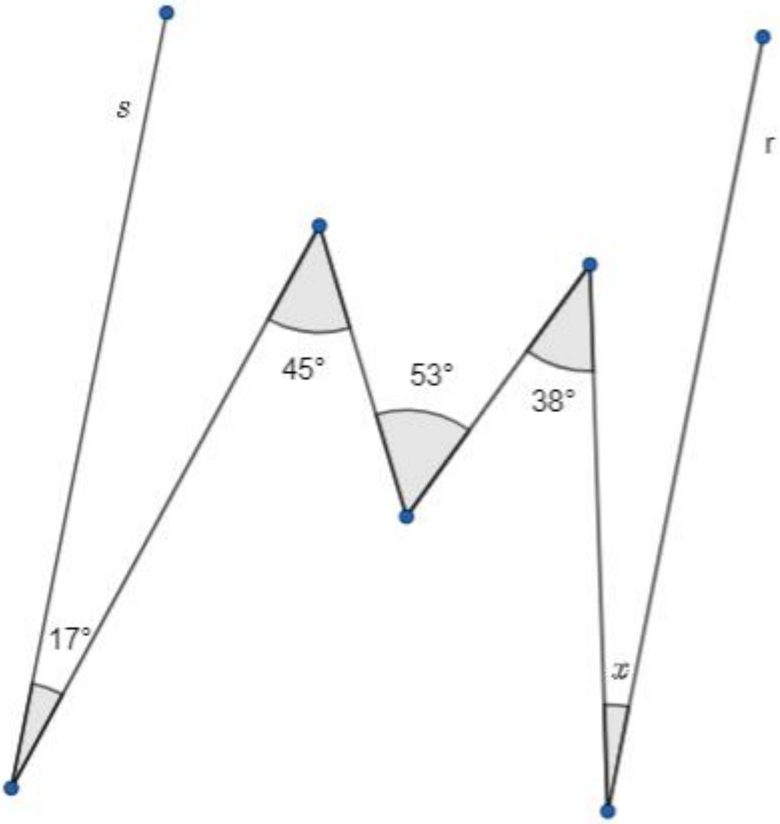
Solução:

Su-Sudoeste tem coordenada 180º+ ¼ de 90º. Movendo 45º vamos para 180° + ¾, que é na coordenada OSO.

GABARITO: ‘E’

Questão 17 – Vários Bicos, Várias Pontas

Veja a figura a seguir:



Sabendo que $r \parallel s$, podemos afirmar que o valor de x é igual a:

a)10º
b)13º
c)17º
d)24º
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Há várias formas de resolver esse problema, como, por exemplo, traçando mais três paralelas às retas r e s, passando por três pontos assinalados.

Porém, há o chamado "Teorema de Bicos e Pontas" que mostra que a soma dos bicos e das pontas é igual:

$$x + 53° + 17° = 45° + 38°$$
$$x = 13°$$

GABARITO: 'B'

Questão 18 – As Five Na Van

Keyla, Ellen, Lica, Tina e Benê vão viajar em uma Van com três bancos, cada banco com três lugares. Vão viajar Keyla e seu filho Tonico, as 4 outras meninas e mais 3 estranhos. Keyla e Tonico precisam ocupar o mesmo banco. Nenhuma das 5 meninas querem sentar num banco com um estranho!

De quantas maneiras as 9 pessoas podem sentar nessa Van com as condições impostas?

a) 928.
b) 1152.
c) 1828.
d) 2412.
e) 3456.

Solução:

Os três estranhos devem sentar juntos num mesmo banco. Há 3 bancos onde eles podem sentar, e eles podem se permutar (ou seja, de 3!=6 maneiras). Há 3 x 6 = 18 maneiras de posicionar os estranhos.

Vamos considerar Keyla e Tonico uma pessoa só (e os lugares deles podem ser permutados de 2!=2 maneiras). Considerando 2 bancos restantes após os estranhos se sentaram, os dois possuem 4 maneiras de se sentar nos bancos, como eles se permutam, 8 maneiras.

Sentando os 3 estranhos, Keyla e Tonico, temos 18x8=144 maneiras.

Sobram 4 lugares para as outras, então 144x4x3x2x1=3456 opções.

GABARITO: ‘E’

Questão 19 – O Objeto de Mariana

Ana e Mayara possuem um ritmo fixo de trabalhos e trabalham 8 horas por dia, das 8h até 12h e depois das 14h até as 18h, sem perder tempo. A chefe delas, Mariana, percebeu que Ana produzia um objeto em 3 dias enquanto Mayara gastava 2 dias no mesmo objeto. Aí ela decidiu colocar ambas para trabalharem juntas – percebendo que a produtividade delas é a mesma. Elas começaram a fazer juntas um objeto 8h de segunda-feira. Que horas vão terminar o objeto?

a)Na segunda-feira, 17h.
b)Na terça-feira, 9h36
c)Na terça-feira, 12h
d)Na quarta-feira, 12h
e)Nenhuma das anteriores

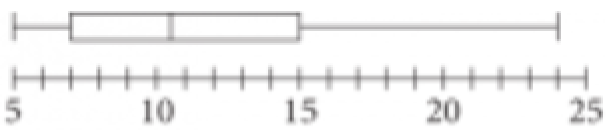
Solução:

Em 1dia, Ana faz $\frac{1}{3}$ do trabalho e Mayara faz $\frac{1}{2}$ do trabalho. Ambas, portanto, em 1 dia, fazem $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ do trabalho. Portanto, elas vão fazer todo o trabalho (1) em $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ dias, ou seja em $\frac{6}{5}$ de dia. Então elas vão gastar 1 dia + $\frac{1}{5}$ da carga horária de 8 horas. $\frac{8}{5}h = 1\frac{3}{5}h = 1h36\,min$

GABARITO: ‘B’

Questão 20 – Festa Jovem

Considere o seguinte box-plot que indica as idades de um grupo de familiares em uma festa:



É **FALSO** afirmar que:

a)A amplitude interquartil das idades é igual a 8.
b)A pessoa mais nova na festa tem 5 anos.
c)A quantidade de participantes nessa festa é ímpar.
d)Exatamente metade dos participantes possui 10 anos ou menos.
e)Não há ninguém na festa com mais de 30 anos.

Solução:

a) VERDADEIRO. Como Q1=7 e Q3=15, a amplitude interquartil é 15-7=8.
b) VERDADEIRO. É o mínimo do box-plot.
c) FALSO. A mediana é 10,5, e não existe idade fracionária, portanto, para se calcular a mediana precisou-se achar a média dos dois valores centrais, e só há 2 valores centrais quando a quantidade é par.
d) VERDADEIRO. Pois a mediana é 10.
e) VERDADEIRO. O máximo é 24 anos.

GABARITO: 'C'

Questão 21 – Cadernos e Borrachas

Um caderno e duas caixas de lápis de cor custam o mesmo que oito borrachas. Um caderno e uma borracha custam o mesmo que uma caixa de lápis de cor. Quantas borrachas podem ser compradas pelo mesmo preço que uma caixa de lápis de cor?

a)3
b)4
c)5
d)6
e)7

Solução:

Vamos equacionar: caderno x, caixa de lápis de cor y e borrachas z.

$$x + 2y = 8z$$
$$x + z = y$$

Como queremos relacionar borrachas e lápis de cor, vamos eliminar x

$$x = 8z - 2y$$
$$x = y - z$$

Igualando:

$$8z - 2y = y - z$$
$$-2y - y = -z - 8z$$
$$-3y = -9z$$
$$y = 3z$$

Podemos comprar 3 borrachas.

GABARITO: 'A'

Questão 22 – Éramos 6 Filhos de Antônia

Antônia possui seis filhos, todos com idades diferentes. Três deles são crianças (de 0 a 11 anos) e três deles são adolescentes (de 12 a 17 anos). O produto das idades dos seis filhos é de 183600.

Qual é a soma das idades de seus filhos?

a)55
b)57
c)60
d)63
e)Há mais de um resultado possível

Solução:

Vamos fatorar $183.600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17$

É inequívoco que um dos filhos precisa ter 17 anos.
Como há 2 filhos ainda entre 12 e 17 anos, as idades de 13 e 14 anos são impossíveis, pois não há fatores 13 e 7. Podemos ter então filhos de 15 e 16 anos.

Temos então três filhos de 15, 16 e 17 anos, e vamos dividir os fatores de 183.600 e verificar o que sobrou:

$$3^2 \cdot 5$$

Sobram como fatores 9 e 5 que podem ser idades dos filhos. Mais outro filho tem 1 ano.

15+16+17+9+5+1=63

GABARITO: 'D'

Questão 23 – Dígito das Unidades de 2021 potências

Qual é o dígito das unidades de

$$1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + 4^{2021} + 5^{2021}$$

a)0
b)4
c)5
d)8
e)9

Solução:

O algarismo das unidades de 1^{2021} é 1 e de 5^{2021} é 5.

Vamos verificar o padrão dos outros números da base:

Para a base 2:
$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32$. Forma ciclos de 4.
Portanto $2021 \equiv 1(mod\ 4)$, portanto 2^{2021} tem dígito das unidades de $2^1 = 2$. 2.

Para a base 3
$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 81$. Forma ciclos de 2.
Portanto $2021 \equiv 1(mod\ 2)$, portanto 3^{2021} tem dígito das unidades de $3^1 = 3$. 3.

Para a base 4
$4^1 = 4,\ 4^2 = 16,\ 4^3 = 64$. Forma ciclos de 2.
Portanto $2021 \equiv 1(mod\ 2)$, portanto 4^{2021} tem dígitos das unidades de $4^1 = 4$. 4.

$$1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + 4^{2021} + 5^{2021} \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5(mod\ 10)$$

Mas 1+2+3+4+5=15

Portanto, o dígito é 5.

GABARITO: ‘C’

Questão 24 – Guerra na Terra Média

Em uma guerra na Terra Média, 1/4 dos guerreiros eram anões, 3/5 eram hobbits e somente 9 eram elfos. Quantos eram os guerreiros?

a)20
b)40
c)60
d)80
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos equacionar, chamando x de guerreiros:

$$\frac{x}{4} + \frac{3x}{5} + 9 = x$$

Resolvendo a equação:

$$\frac{5x}{20}+\frac{12x}{20}+\frac{180}{20}=\frac{20x}{20}$$
$$5x+12x-20x=-180$$
$$-3x=-180$$
$$x=60$$

GABARITO: ‘C’

Questão 25 – As Dúvidas que os Garotos Tem

Thiago, Felipe e João Pedro precisavam de ajuda na resolução de problemas matemáticos. Cada um deles procurou um especialista diferente (matemático, estatístico e físico) para resolver problemas também diferentes (de geometria, de álgebra e de probabilidade).

1. O garoto que procurou o matemático esperava uma orientação sobre geometria.
2. Thiago não procurou nem o matemático nem o estatístico.
3. João Pedro procurou o estatístico, mas não buscava resolver o problema de probabilidade.

Quem buscou a resolução dos problemas de geometria, álgebra e probabilidade são respectivamente:

		Especialista			Problema		
		matemático	estatístico	físico	geometria	álgebra	probabilidade
Nome	Thiago						
	Felipe						
	João Pedro						
Problema	geometria						
	álgebra						
	probabilidade						

a)Felipe, João Pedro e Thiago
b)Felipe, Thiago e João Pedro
c)João Pedro, Felipe e Thiago
d)João Pedro, Thiago e Felipe
e)Thiago, Felipe e João Pedro

Solução:

Vamos retirar os dados e inserir no diagrama de Correlação Lógica:

		Especialista			Problema		
		matemático	estatístico	físico	geometria	álgebra	probabilidade
Nome	Thiago	N	N				
	Felipe						
	João Pedro		S				N
Problema	geometria	S	N	N			
	álgebra	N					
	probabilidade	N					

Torna-se evidente que Thiago procurou o físico e portanto Felipe procurou o matemático.

		Especialista			Problema		
		matemático	estatístico	físico	geometria	álgebra	probabilidade
Nome	Thiago	N	N	S			
	Felipe	S	N	N			
	João Pedro	N	S	N			N
Problema	geometria	S	N	N			
	álgebra	N					
	probabilidade	N					

Como João Pedro não busca resolver um problema de probabilidade, podemos colocar N na intersecção de estatística e probabilidade e o resto do diagrama é evidente.

		Especialista			Problema		
		matemático	estatístico	físico	geometria	álgebra	probabilidade
Nome	Thiago	N	N	S	N	N	S
	Felipe	S	N	N	S	N	N
	João Pedro	N	S	N	N	S	N
Problema	geometria	S	N	N			
	álgebra	N	S	N			
	probabilidade	N	N	S			

Tabela:

Nome	Especialista	Problema
Thiago	Físico	Probabilidade
Felipe	Matemático	Geometria
João Pedro	Estatístico	Álgebra

GABARITO: ‘A’

1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

PODEMOS

VALOR DE CADA QUESTÃO NA PROVA OFICIAL (essa é apenas um simulado):

Questão 1	28,4
Questão 2	28,6
Questão 3	28,9
Questão 4	29,3
Questão 5	29,8
Questão 6	30,4
Questão 7	31,1
Questão 8	31,9
Questão 9	32,8
Questão 10	33,8
Questão 11	34,9
Questão 12	36,1
Questão 13	37,4
Questão 14	38,8
Questão 15	40,3
Questão 16	41,9
Questão 17	43,6
Questão 18	45,4
Questão 19	47,3
Questão 20	49,3
Questão 21	51,4
Questão 22	53,6
Questão 23	55,9
Questão 24	58,3
Questão 25	60,8

As questões possuem valores diferentes para diferenciar o máximo possível as notas.