1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

PODEMOS

1° SIMULADO - 1ª OSMM
NÍVEL 2 – 8º E 9º ANO

Esse simulado apresenta para vocês um estilo de como será a OSMM – OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA, primeira olimpíada regional que atenderá mais de 160 municípios.

A prova deverá ser feita na **Plataforma Papert** entre 30 de agosto e 19 de setembro. Até lá teremos um 2º Simulado.

Esse simulado não tem nenhum valor para fins de pontuação e as respostas não devem ser enviadas para nós. Esse simulado serve para conhecer a OSMM e seu estilo.

Alguns assuntos podem parecer estranhos para alguns professores, porém, selecionamos cuidadosamente os conteúdos, com base na BNCC e com temas recorrentes em olimpíadas de Matemática. Queremos que sirva de inspiração para introdução de novos assuntos na matemática escolar.

Abordamos assuntos que são tradicionalmente estudados na escola como números e operações, álgebra, geometria e medidas, mas apresentamos também nos diferentes níveis temas de Estatística (como quartis, box-plots, correlação, diagramas de dispersão, diagramas de radar, etc), de Combinatória (como combinações, permutações com elementos repetidos, permutações circulares, combinações completas, princípio da casa dos pombos), de Lógica Matemática (como proposições, conectivos, tabela verdade, leis de De Morgan), de Raciocínio Lógico-Matemático (como diagramas de Venn e Carroll, diagramas de Correlação Lógica, puzzles japoneses) e de Matemática Financeira (como juros compostos, equivalência de capitais e sistemas de amortização).

Se sinta a vontade para conectar o PODEMOS para dúvidas. A prova pode conter erros e incoerências, problemas de redação ou até mesmo erros de português. Por favor, não tenham receio de nos contactar para avisar.

Questão 1 – Farol de Sinais Luminosos

Um farol emite sinais luminosos fracos ou fortes. O sinal forte é emitido 15 vezes por hora, enquanto o sinal fraco é emitido 10 vezes a cada hora. Os sinais foram emitidos juntos às 13h55. Quando os sinais voltarão a ser emitidos simultaneamente?

a)14h7
b)14h10
c)14h15
d)14h20
e)Nenhuma das anteriores

Adaptada da FUVEST

Solução:

O sinal forte é emitido a cada $\frac{60}{15} = 4$ minutos e o sinal fraco é emitido a cada $\frac{60}{10} = 6$ minutos. Como $mmc(4,6) = 12$. Das 13h55 mais 12 minutos temos 14h7.

GABARITO: 'A'

Questão 2 – Compra Literária

Estão em promoção edições de luxo de "A Hora da Estrela", "Macunaíma" e "Grande Sertão de Veredas".

A Profa. Rosana comprou 5 edições de "A Hora da Estrela", 3 edições de "Macunaíma" e 1 edição de "Grande Sertão de Veredas" e pagou R$ 30.
A Profa. Adriana comprou 1 edição de "A Hora da Estrela", 2 edições de "Macunaíma" e 3 edições de "Grande Sertão de Veredas" e pagou R$ 40.

A diretora da escola resolveu comprar 17 edições de "A Hora da Estrela", 13 edições de "Macunaíma" e 9 edições de "Grande Sertão de Veredas".

Todos pagaram os mesmos valores para cada livro. Quanto a diretora pagou pelos livros?

a)R$ 140,00
b)R$ 170,00
c)R$ 220,00
d)R$ 540,00
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos equacionar as informações que temos, chamando "A Hora da Estrela" de x, "Macunaíma" de y e "Grande Sertão de Veredas" de z:

$$5x + 3y + z = 30$$
$$x + 2y + 3z = 40$$

Queremos achar o valor de $17x + 13y + 9z$

Precisamos achar uma combinação linear de $(5,3,1)$ e $(1,2,3)$ que gere (17,13,9).

Veja que:

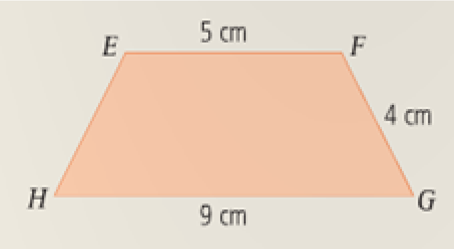
$$3(5x + 3y + z) + 2(x + 2y + 3z) =$$
$$= 15x + 9y + 3z + 2x + 4y + 6z =$$
$$= 17x + 13y + 9z$$

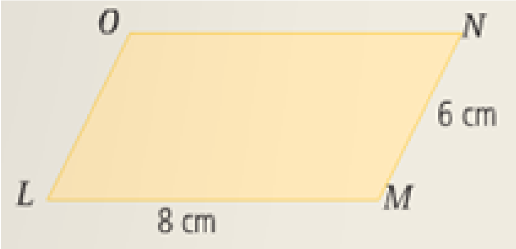
Então precisamos achar $3(30) + 2(40) = 90 + 80 = 170$

GABARITO: ‘B’

Questão 3 – Área dos Quadriláteros

Considere os quadriláteros a seguir, sem necessariamente proporção ou escala:





O trapézio EFGH é isósceles. O paralelogramo LMNO tem ângulos agudos iguais a 60º.

A razão entre as áreas do trapézio e a área do paralelogramo é igual a:

a)$\frac{7}{3}$
b)$\frac{3}{7}$
c)$\frac{3\sqrt{3}}{7}$
d)$\frac{7\sqrt{3}}{3}$
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a altura do trapézio isósceles.

$$\left(\frac{9-5}{2}\right)^2 + h^2 = 4^2$$

$$2^2 + h^2 = 4^2$$
$$h^2 = 16 - 4$$
$$h = \sqrt{12}$$
$$h = 2\sqrt{3}$$

A área do trapézio é:

$$A = \frac{(5+9)2\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

A altura do Losango também pode encontrada por trigonometria.

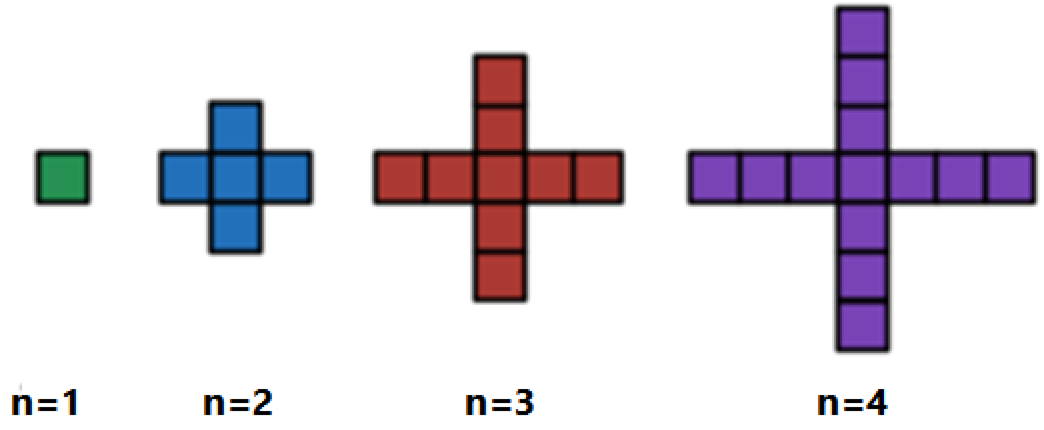
$$sen\ 60° = \frac{h}{6}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6}$$
$$h = 3\sqrt{3}$$

A razão é $\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

GABARITO: 'A'

Questão 4 – A Próxima Cruz

Veja as figuras a seguir:



Considerando a quantidade de quadradinhos: 1 para n=1, 5 para n=2, 9 para n=3, 13 para n=4, etc, qual é o termo geral dessa sequência para n?

a)$4n - 3$
b)$4n - 1$

c)$4n + 1$
d)$4n + 3$
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Há várias formas de pensar, mas uma delas é notar que há um quadradinho no "centro" e 4 braços com $n - 1$ quadradinhos:

Portanto o quantitativo é $4(n - 1) + 1 = 4n - 4 + 1 = 4n - 3$.

Também podemos observar braços com n quadradinhos onde os 4 se sobrepõe no centro. Aí teríamos $4n$ menos 3 dos braços sobrepostos.

GABARITO: 'A'

Questão 5 – Neymar alto e Messi gordo

Qual é a negação da proposição a seguir?

Neymar é alto ou Messi não é gordo

a)Neymar não é alto ou Messi é gordo.
b)Neymar não é alto e Messi é gordo.
c)Neymar é alto e Messi é gordo.
c)Neymar é alto e Messi não é gordo.
d)Nenhuma das anteriores.

Solução:

Utilizando as Leis de De Morgan resolvemos esse problema. A negação de "p E q" é "não p OU não q", então a negação é:

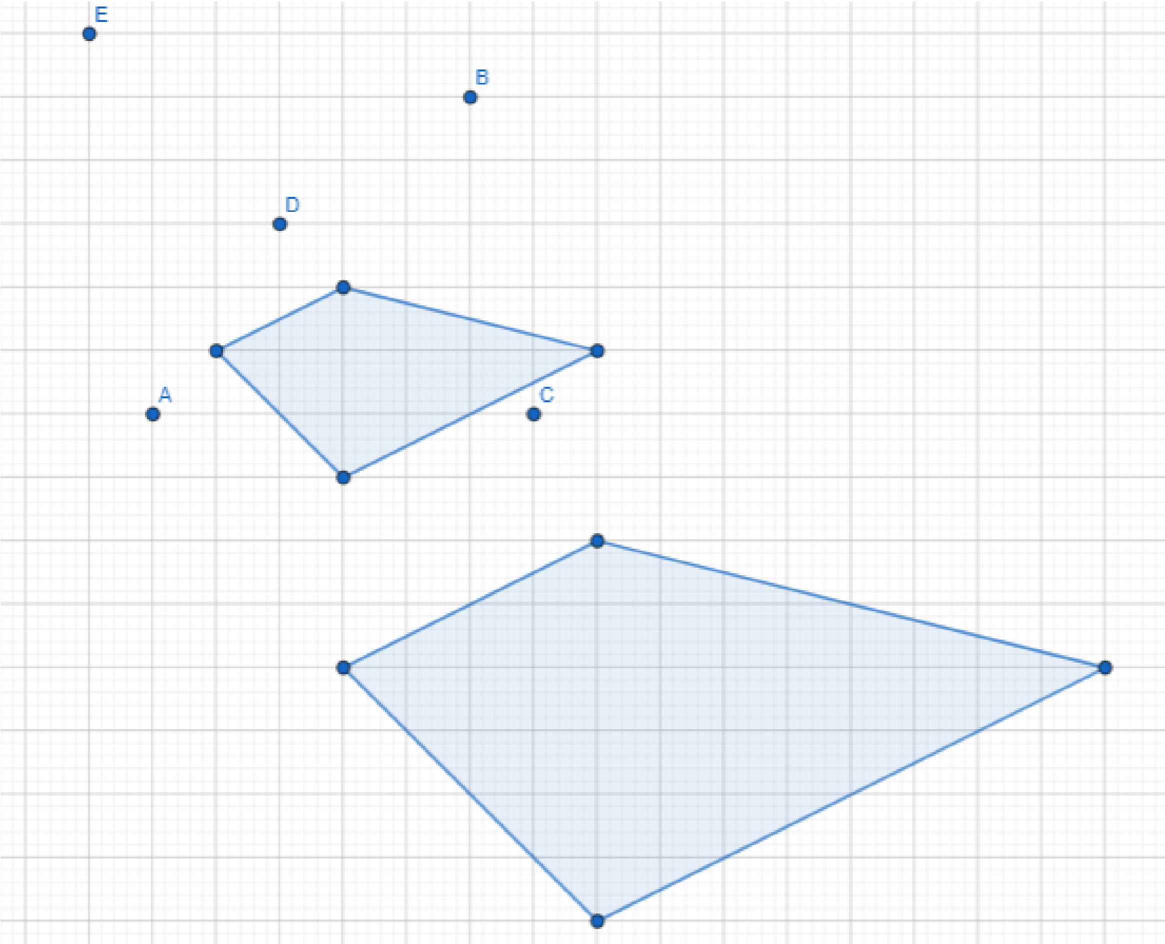
"Neymar não é alto **e** Messi é gordo".

Vale a pena conhecer as "Leis de De Morgan" para proposições e para operações com conjuntos.

GABARITO: 'B'

Questão 6 – Recuperando o Centro de Dilatação

Foi realizada uma dilatação (homotetia) na figura a seguir, que ampliou a figura:

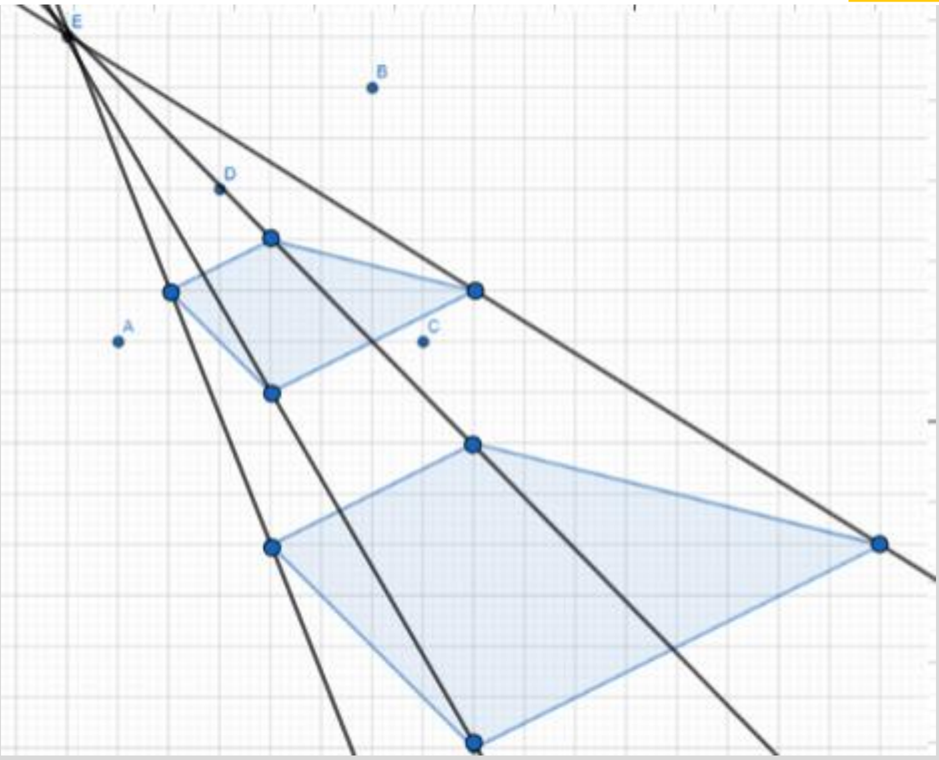


Qual é o centro de dilatação correspondente?

a)A
b)B
c)C
d)D
e)E

Solução:

Traçando as retas com os pontos homólogos é fácil de perceber:



GABARITO: ‘E’

Questão 7 – A Dona do Cachorro

Lara, Jéssica e Carla são três garotas, com idades de 8, 9 e 10 anos (não necessariamente nessa ordem) e que possuem animais de estimação: gato, cachorro e furão. Jéssica tem 8 anos, a garota que tem 10 anos tem um gato e Lara possui um furão.

Qual a idade da dona do Cachorro?

a) 7 anos
b) 8 anos
c) 9 anos
d) 10 anos
e) Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos preencher o diagrama de Associação (ou Correlação) Lógica:

		Animal			Idade		
		Gato	Cachorro	Furão	8 anos	9 anos	10 anos
Nome	Lara						
	Jéssica						
	Carla						
Idade	8 anos						
	9 anos						
	10 anos						

Retirando os dados:

		Animal			Idade		
		Gato	Cachorro	Furão	8 anos	9 anos	10 anos
Nome	Lara			S			
	Jéssica				S		
	Carla						
Idade	8 anos						
	9 anos						
	10 anos	S					

Completando informações automáticas:

		Animal			Idade		
		Gato	Cachorro	Furão	8 anos	9 anos	10 anos
Nome	Lara	N	N	S	N		
	Jéssica			N	S	N	N
	Carla			N	N		
Idade	8 anos	N					
	9 anos	N					
	10 anos	S	N	N			

Como Lara possui um Furão, e não um Gato, ela não pode ter 10 anos, sobrando apenas 9 anos, sendo essa a idade de Carla:

		Animal			Idade		
		Gato	Cachorro	Furão	8 anos	9 anos	10 anos
Nome	Lara	N	N	S	N	S	N
	Jéssica			N	S	N	N
	Carla			N	N	N	S
Idade	8 anos	N					
	9 anos	N					
	10 anos	S	N	N			

Disso eu concluo que Carla, com 10 anos, é dona do Gato e consigo completar o resto do diagrama.

		Animal			Idade		
		Gato	Cachorro	Furão	8 anos	9 anos	10 anos
Nome	Lara	N	N	S	N	S	N
	Jéssica	N	S	N	S	N	N
	Carla	S	N	N	N	N	S
Idade	8 anos	N	S	N			
	9 anos	N	N	S			
	10 anos	S	N	N			

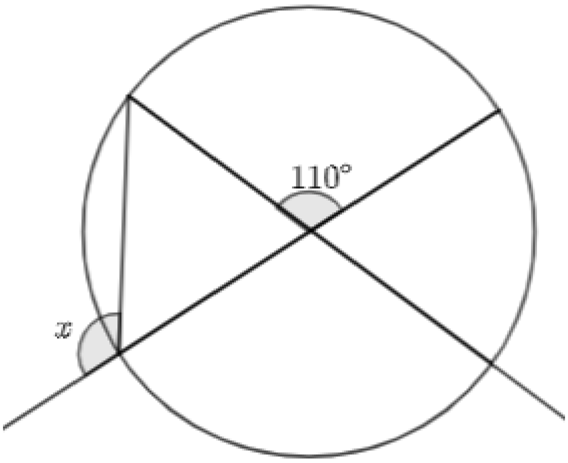
A dona do Cachorro tem 8 anos.

Nome	Animal	Idade
Lara	Furão	9 anos
Jéssica	Cachorro	8 anos
Carla	Gato	10 anos

GABARITO: ‘B’

Questão 8 – Ângulos na Circunferência - Segmentos

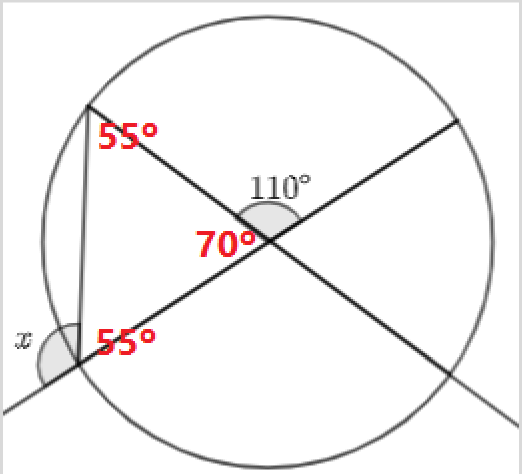
Determine o valor de x sendo o outro ângulo assinalado na figura central:



a)70°
b)110°
c)125°
d)135°
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

O ângulo de 110º é suplementar ao ângulo de 70º. Como o triângulo gerado é isósceles, temos os ângulos da base 55º:

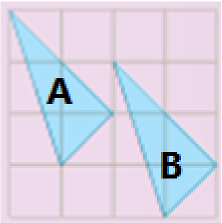


Portanto x é o suplemento de 180º, ou seja 125°

GABARITO: 'C'

Questão 9 – Vetor Transformação de Figura

Considere a translação da figura A para a figura B. Considere cada lado dos quadrados como 1 unidade. Qual foi o vetor que realizou a transformação de A em B?



a)(2,1)
b)(2,-1)
c)(1,2)
d)(1,-2)
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

A figura A foi 2 unidades para frente e uma para baixo, portanto, vetor (2,-1)

GABARITO: ‘B’

Questão 10 – Data Palíndroma

A última data palíndroma foi 12/02/2021. Quantos dias após essa data será a próxima data palíndroma?

a)345 dias
b)365 dias
c)375 dias
d)425 dias
e)Nenhuma das Anteriores

Solução:

A próxima data palíndroma é

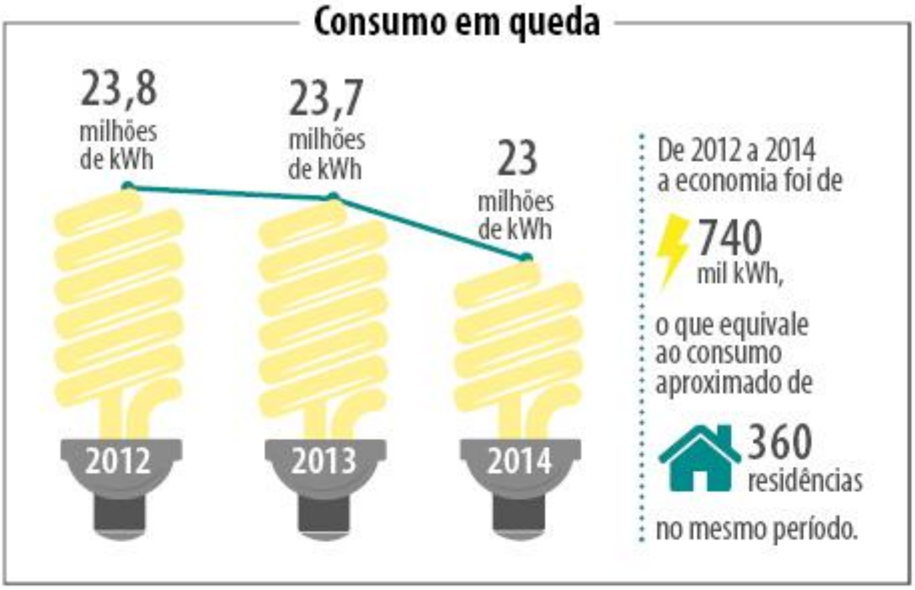
22/02/2022

Ou seja 365 + 10 dias.

GABARITO: 'C'

Questão 11 – Senado Econômico

O Senado Federal fez um planejamento para reduzir seu consumo de energia elétrica e ao apresentar seus resultados mostrou o seguinte gráfico:



Fonte: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2015/11/30/economia-de-energia-no-senado-equivale-ao-consumo-de-360-residencias

Com base no gráfico é possível afirmar que:

a)A economia de 2013 para 2014 é superior a 3%.
b)A economia de energia de 2012 para 2013 foi superior a 0,5%.
c)A economia feita de 2014 a 2013 em termos percentuais é 7 vezes maior que a economia feita de 2013 a 2012.
d)No intervalo de 2012 a 2014 o senado consumiu mais que $10^{11}\ Wh$
e)O senado está supondo que uma residência consuma menos de 2.000 kWh por mês.

Solução:

a)FALSO. Vamos verificar de 23,7 para 23, quanto foi a economia: $\frac{23-23,7}{23,7} \approx 2,9\%$.
b)FALSO. Vamos verificar de 23,8 para 23,7, quanto foi a economia: $\frac{23,7-23,8}{23,8} \approx 0,42\%$.
c)VERDADEIRO. O quociente de $\frac{2,9}{0,4}$ é aproximadamente 7

d)FALSO. (23,8+23,7+23) milhões kWh = 70,5 milhões kWh = 70.500.000 kWh = 70.500.000.000 Wh = $7{,}05 \cdot 10^{10}$ Wh < 10^{11} Wh.
e)FALSO. Basta dividir 740 mil kWh por 360 $\frac{740.000}{360} > 2000 = \frac{720.000}{360}$

GABARITO: 'C'

Questão 12 – Equação Cúbica e suas Raízes

A equação a seguir tem como raízes a, b, c, tais que $a < b < c$:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$$

Podemos afirmar que $\frac{|a^2+b^2+c^2|}{b^5-2c}$ é igual a:

a)$\frac{a}{2}$
b)$\frac{|b|}{2}$
c)$c - a$
d)a^2
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$$

Vamos fatorar por agrupamento:

$$x^2(x-4) - 4(x-4) = 0$$
$$(x^2-4)(x-4) = 0$$

Mas $x^2 - 4$ é uma diferença entre dois quadrados:

$$(x-2)(x+2)(x-4) = 0$$

Portanto as raízes são $\{2, -2{,}4\}$
Como estão em ordem $a = -2$, $b = 2$ e $c = 4$.

Vamos calcular

$$\frac{|(-2)^2 + 2^2 + 4^2|}{2^5 - 2 \cdot 4} = \frac{|4+4+16|}{32-8} = \frac{24}{24} = 1$$

Vamos checar as respostas:
a)$\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1$
b)$\frac{|b|}{2} = \frac{|2|}{2} = 1$
c)$c - a = 4 — 2 = 4 + 2 = 6$
d)$a^2 = (-2)^2 = 4$

GABARITO: 'B'

Questão 13 – Melhor à Vista

Ao comprar um produto que custa R$ 1.200,00 eu tenho duas opções.

OPÇÃO 1: Comprar à vista, com desconto de 20%.

OPÇÃO 2: Comprar com uma entrada de 300,00 e mais 5 parcelas iguais de R$ 225,00.

Comprando a prazo vou pagar quantos reais a mais do que se eu comprasse a vista?

a)R$ 75,00
b)R$ 165,00
c)R$ 225,00
d)R$ 465,00
e)R$ 960,00

Solução:

Opção 1: $1200 \cdot 0{,}80 = 960$. O preço será R$ 960,00.

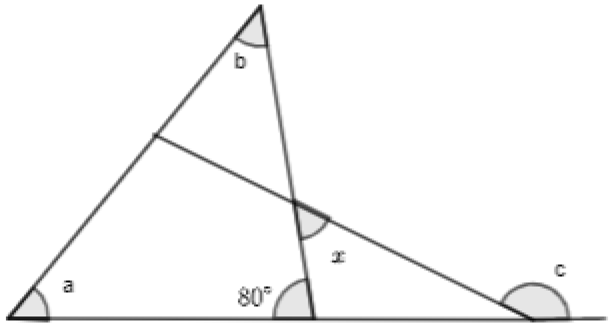
Opção 2: $300 + 5 \cdot 225 = 1425$. O preço será R$ 1425,00.

A diferença é 465,00.

GABARITO: ‘D’

Questão 14 – A Proporção dos Ângulos

Considere a figura a seguir sem escala:



Os ângulos a, b e c são diretamente proporcionais a 9, 3 e 18. Determine o valor de x.

a)10º
b)25º
c)45º
d)50º
e)Nenhuma das anteriores

Adaptado Livremente de Fundamentos de Matemática Elementar

Solução:

Sabemos pelo $a + b = 100°$, pois a soma dos ângulos internos é 180°.

Considere o suplemento do ângulo de 80°, que mede a+b=100°. Podemos verificar pelo Teorema do Ângulo Externo que $a + b + x = c$

Vamos dizer que

$$a = 9k$$
$$b = 3k$$
$$c = 18k$$

Portanto

$$9k + 3k + x = 18k$$
$$x = 6k$$

Também sabemos que:

$$9k + 3k = 100$$
$$k = \frac{100}{12} = \frac{50}{6}$$

Portanto

$$x = 6 \cdot \frac{50}{6} = 50$$

GABARITO: 'D'

Questão 15 – Quadrados e Triângulos em pontos

Num plano há 10 pontos, de tal forma que não há mais que 2 deles alinhados. Quantos triângulos e quadriláteros eu posso formar com vértices nesses pontos?

a)144
b)504
c)576
d)720
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Esse exercício exige que o estudante domine o conceito de Combinação, hoje na BNCC e nos programas da OBMEP. É combinação pois a ordem não importa, basta escolhermos 3 pontos para fazer um triângulo e 4 para fazer um quadrilátero.

Podemos construir $\binom{10}{3}$ triângulos e $\binom{10}{4}$ quadrados.

Esse símbolo $\binom{10}{3}$ é chamado binomial, e se calcula multiplicando o número de cima pelos seus números imediatamente abaixo em quantidade igual ao número de baixo, sobre 3! (que é 3x2x1):

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

O mesmo para o número de quadriláteros:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Podemos formar 330 figuras

GABARITO: 'E'

Questão 16 – Alexa de Ester

Ester gastou $\frac{1}{5}$ do que possuía comprando um telefone celular e $\frac{1}{4}$ do que sobrou comprando uma "Alexa". Do restante gastou $\frac{1}{3}$ com um Kindle. Sobrou R$ 720,00. Quanto ela possuía antes das compras? Some os dígitos do valor em reais.

a)7
b)9
c)11
d)19
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

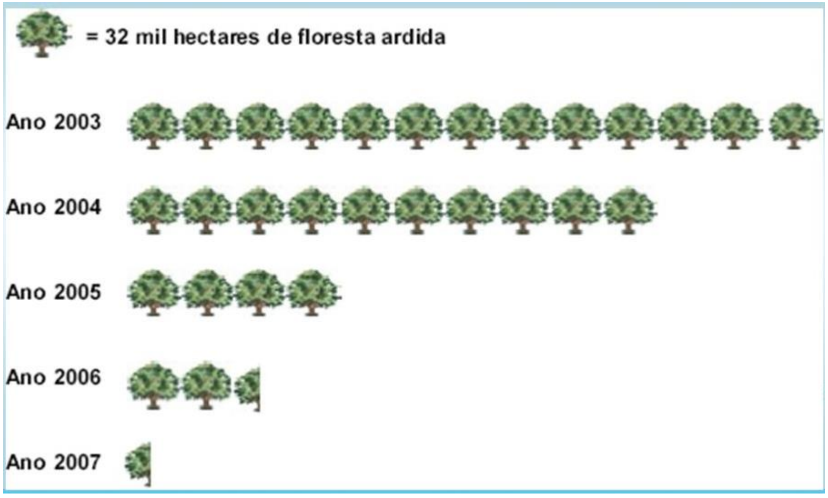
Vamos chamar a quantia dela de x

Celular custou $\frac{x}{5}$, então sobrou $\frac{4x}{5}$. Alexa custou $\frac{1}{4}\cdot\frac{4x}{5}=\frac{x}{5}$, o mesmo preço que o celular (poxa que Alexa cara!!!). Sobrou então $\frac{3x}{5}$, e ela gastou $\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{5}=\frac{x}{5}$. Ela gastou $\frac{3x}{5}$ e sobrou $\frac{2x}{5}$, que equivale a 720. Portanto $x=720\cdot\frac{5}{2}=1800$. Ester possuía R$ 1800,00.

A soma dos dígitos é 9.

GABARITO: ‘B’

Questão 17 – Florestas Ardidas



Fonte da Imagem: https://slideplayer.com.br/amp/1266692/

O “Pictograma” indica o número de hectares de florestas queimados (“ardida” em português de Portugal).

Podemos afirmar, com base no gráfico, que:

I- De 2003 para 2004, 30% menos florestas foram queimadas.
II- Em 2004 cerca de $3{,}2\cdot 10^9$ m² de florestas foram queimadas.
III- Em 2003 queimaram mais de meio quilômetro quadrado de floresta.
IV- No ano de 2007 foram queimadas cerca de 16 mil hectares de florestas.

Quantas afirmações são corretas?

a)0
b)1
c)2
d)3
e)4

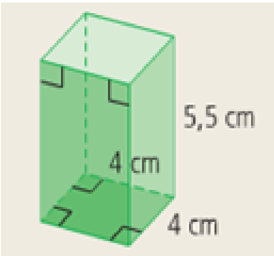
Solução:

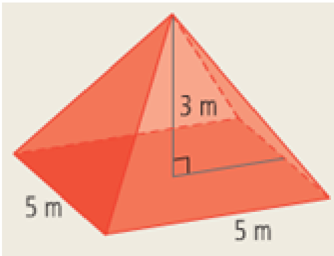
I – FALSO. De 2003 a 2004 cai de 13 para 10, $\frac{10-13}{13} \approx 23\%$. É estranho ser falso, pois de 10 para 13 há de fato aumento de 30%, mas de 13 para 10 a redução é de 23%.
II – VERDADEIRO. 10 x 32 = 320 mil hectares, isto é 320.000 ha = 3.200.000.000 m² = $3{,}2 \cdot 10^9 m^2$.
III – VERDADEIRO. 13 x 32 = 416. 416.000 ha = 4.160.000.000 m². Isso equivale a 4.160 km²
IV – VERDADEIRO. Isso é bastante intuitivo.

GABARITO: ‘D’

Questão 18 – Analisando propriedades dos sólidos

Considere prisma e pirâmide quadrangulares a seguir:





Na pirâmide estão indicadas altura e apótema da base.

Considere as afirmações:

Júlio: A área da superfície do prisma é igual a 120 cm².
Bhryan: A área da superfície da pirâmide é de aproximadamente 33 m².
Bruno: O volume do prisma é igual a 88 mL
Luiza: O volume da pirâmide é igual a 25.000 L

Quantos deles estão corretos?

a)1
b)2
c)3
d)4
e)5

Solução:

Área do PRISMA.

São 4 faces laterais de áreas 5,5 x 4 = 22 com as 2 bases de áreas 4 x 4 = 16. Calculando, temos

$$A_{prisma} = 4 \cdot 22 + 2 \cdot 16 = 88 + 32 = 120$$

Júlio está correto

Área da PIRÂMIDE

Primeiramente precisamos calcular o apótema da pirâmide, que é altura da face lateral, vamos chamar de h minúsculo: $h^2 = 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ e $h = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$. São 4 faces laterais com área $5 \cdot \frac{\sqrt{61}}{2} = \frac{5\sqrt{61}}{2}$ e uma base de área 5x5=25.

$$A_{pirâmide} = 3 \cdot \frac{5\sqrt{61}}{2} + 25 = \frac{15\sqrt{61}}{2} + 25 \approx 83{,}6$$

Bhryan está errado. Note que não era necessário fazer todos os cálculos. Se a base mede 25 m², é fácil verificar que não é possível que todas as faces laterais tenham apenas 8 m². Para isso, a altura das bases precisava ser menor que 1m, o que é evidente que é falso.

Volume do PRISMA

Basta multiplicar as três dimensões, pois é um prisma quadrangular

$$V_{prisma} = 4 \cdot 4 \cdot 5{,}5 = 88$$

Porém é 88 cm³ e não mL. Porém, 1 cm³=1 mL.

Bruno está correto.

Volume da PIRÂMIDE.

Basta multiplicar a área da base 25, pela altura 3, e dividir por 3

$$V_{pirâmide} = \frac{25 \cdot 3}{3} = 25$$

A resposta é 25 m³, como 1 m³=1.000 L, então o volume é 25.000 L.

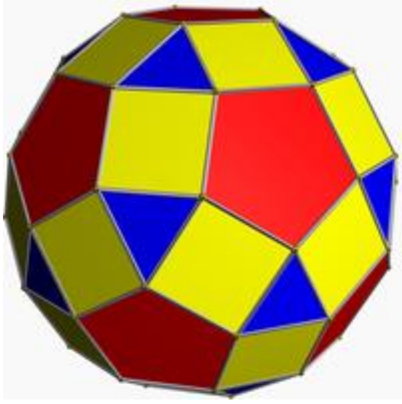
Luiza está correta.

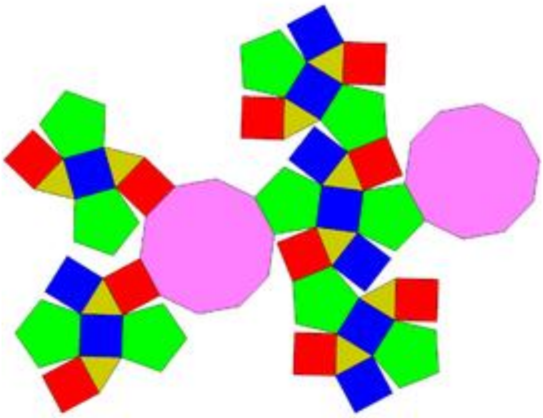
Apenas Bhryan errou.

GABARITO: ‘C’

Questão 19 – Rombicosidodecaedro

Veja o rombicosidodecaedro, poliedro arquimediano, e sua planificação:





Podemos afirmar que ele possui:

a)62 faces, 60 vértices, 120 arestas
b)62 faces, 58 vértices, 122 arestas
c)64 faces, 60 vértices, 122 arestas
d)72 faces, 60 vértices, 130 arestas
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Primeiramente vamos contar, na planificação as faces:

20 triângulos equiláteros, 30 quadrados e 12 pentágonos regulares.

De cada vértice partem 4 arestas.

Agora estamos aptos para calcular os elementos:

$$F = 20 + 30 + 12 = 62$$

$$A = \frac{20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 12 \cdot 5}{2} = \frac{60 + 120 + 60}{2} = \frac{240}{2} = 120$$

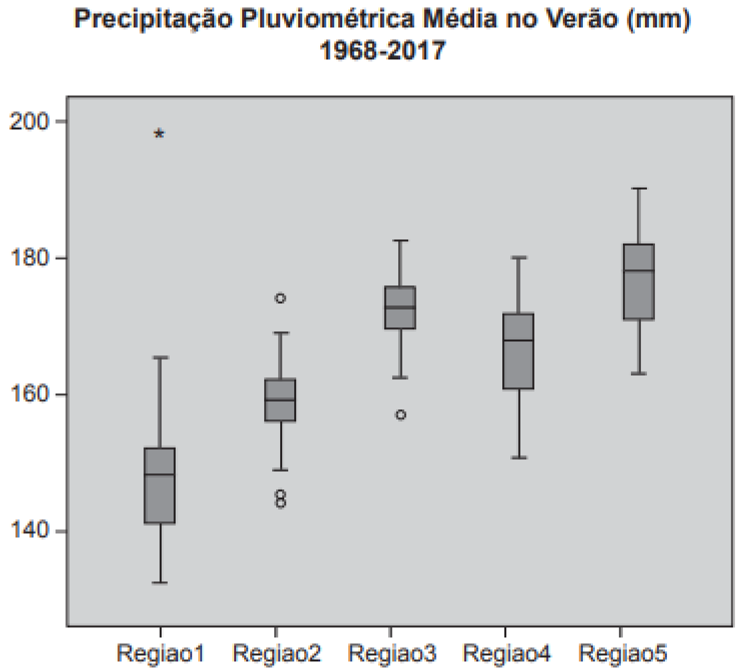
$$V = \frac{20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 12 \cdot 5}{4} = \frac{60 + 120 + 60}{4} = \frac{240}{4} = 60$$

Também poderíamos calcular dois elementos e depois usar a relação de Euler, V+F-A=2.

GABARITO: ‘A’

Questão 20 – Box-plot de Precipitação

Veja gráficos box-plot sobre precipitação pluviométrica em cinco regiões do estado do Rio de Janeiro foram coletados para os meses de verão (janeiro a março) entre 1968 e 2017.



Um estagiário, sem cuidado, organizou os dados, sem anotar qual região se tratava. Depois montou uma tabela com os nomes das regiões como A, B, C, D e E, pois ele não sabe qual é qual região.

	Região A	Região B	Região C	Região D	Região E
Média	170	149	177	159	165
Mediana	172	148	178	159	167
Desvio Padrão	5,7	6,5	7,0	10,2	5,9
Mínimo	157	138	161	142	148
Máximo	178	195	190	175	180
Quartil 1	170	142	170	158	159
Quartil 2	174	152	180	162	170

As Regiões 1, 2, 3, 4 e 5 correspondem respectivamente às regiões:

a)A, D, B, E, C
b)B, A, D, C, E
c)B, D, A, E, C
d)B, D, E, A, C
e)E, C, A, B, D

Adaptado de CESGRANRIO

Solução:

Precisamos encontrar correspondências e isso pode ser feito de muitas maneiras. Um dos modos bem eficientes é olhar as medianas. As medianas entre 150 e 160 são das Regiões 1 e 2. Portanto a Região 1 é B e a Região 2 é D. A Região 3 tem mediana maior que a da Região 4 e menor que da Região 5, portanto a Região 3 é A, a Região 4 é E a Região 5 é C, portanto B, D, A, E, C. Mas há outras formas de verificar essa correspondência.

GABARITO: 'C'

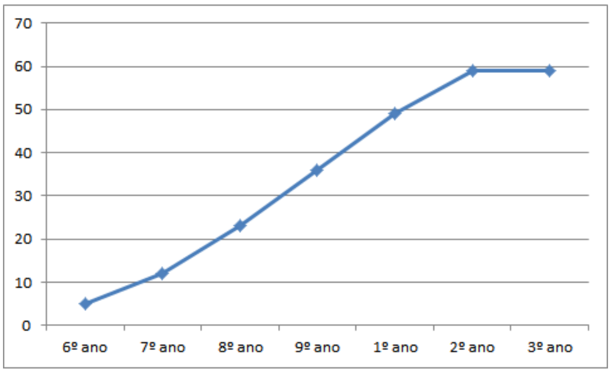
Questão 21 – Ogiva de Galton

Considere a tabela de frequências absolutas de alunos de uma escola que foram classificados para 2ª fase de uma olimpíada:

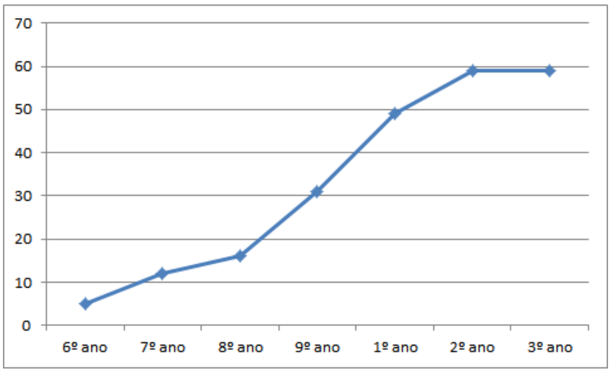
Série	Frequência
6º ano	5
7º ano	7
8º ano	11
9º ano	13
1º ano	13
2º ano	10
3º ano	3

Assinale a Ogiva de Galton (gráfico de frequências acumulados) correspondente a essa tabela de frequências:

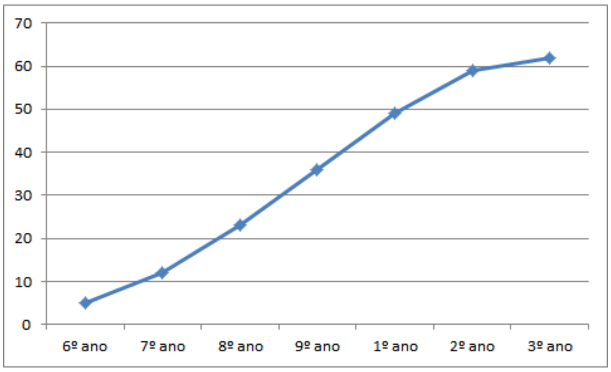
a)



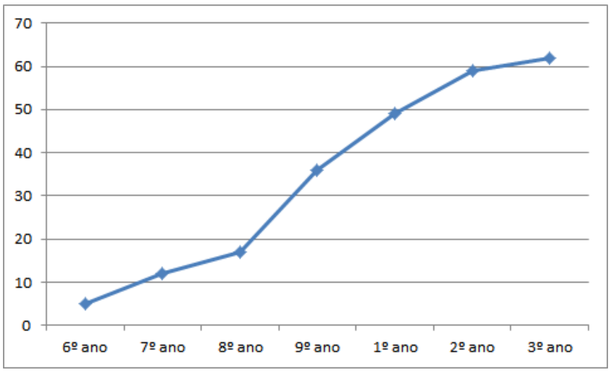
b)



c)



d)



e) Nenhuma das anteriores

Solução:

Vamos encontrar as frequências acumuladas:

Série	f	f_A
6º ano	5	5
7º ano	7	12
8º ano	11	23
9º ano	13	36
1º ano	13	49
2º ano	10	59
3º ano	3	62

Podemos eliminar as ogivas de A e B, pois não há crescimento.

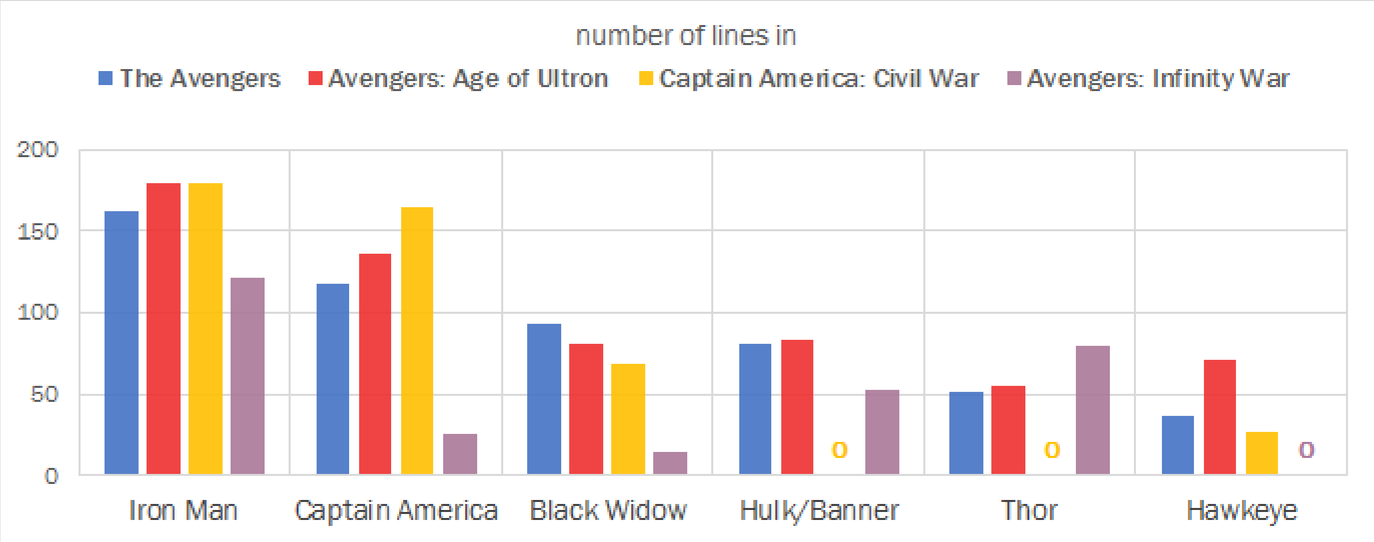
A frequência acumulada do 8º ano é 23, portanto podemos descartar D.

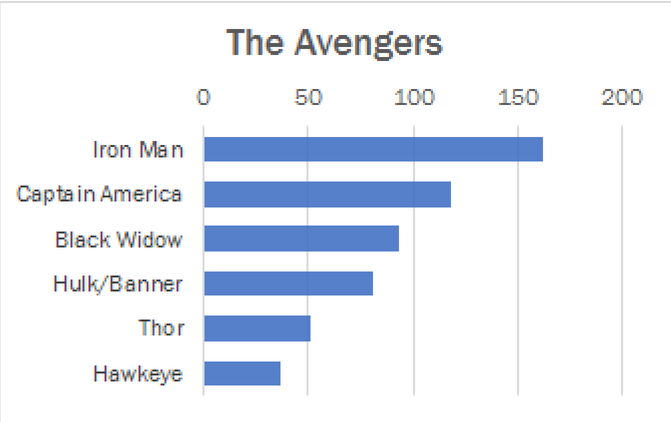
Checando, o gráfico C é a ogiva procurada.

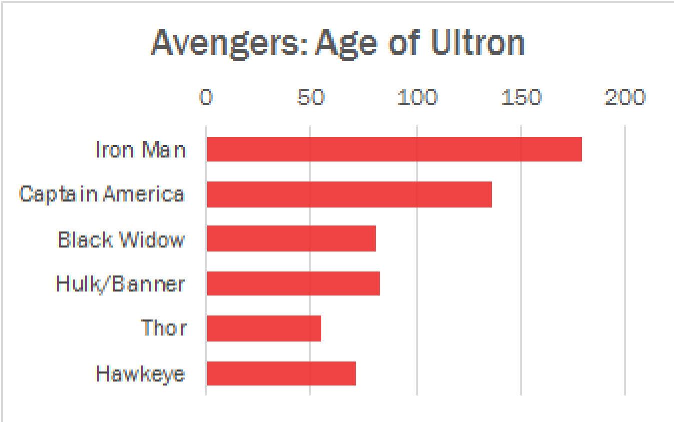
GABARITO: ‘C’

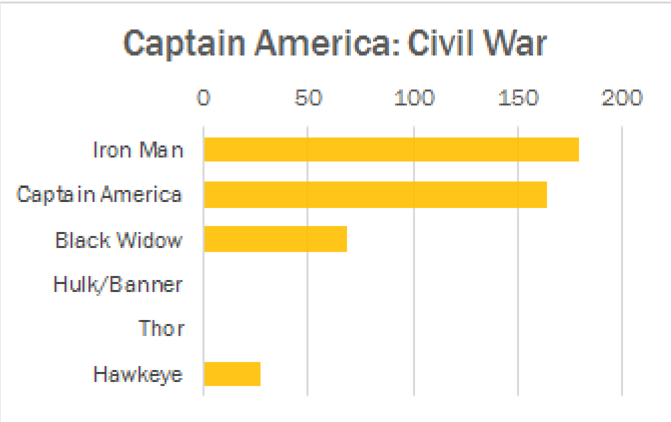
Questão 22 – A Fala do Homem de Ferro

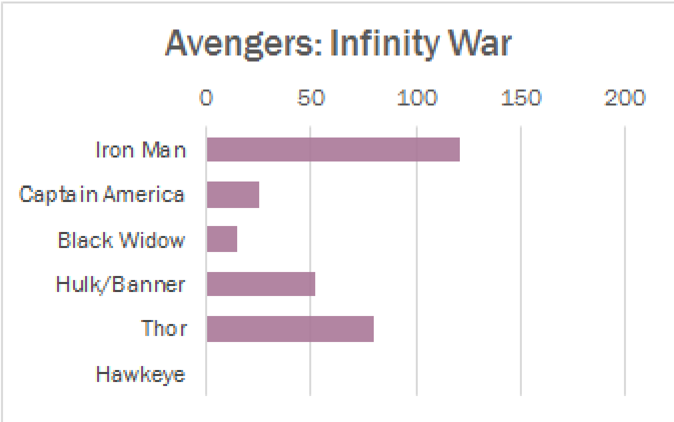
Um fã calculou quantas falas cada personagem possui nos filmes dos Vingadores:











Ele analisou as falas do Homem de Ferro (*Iron Man)*, Capitão América, Víuva Negra (*Black Widow)*, Hulk /Bruce Banner, Thor e Falcão (*Hawkeye*). Veja mais em: https://observatoriodocinema.uol.com.br/filmes/2018/09/fa-faz-levantamento-e-descobre-quem-e-o-heroi-com-mais-falas-nos-filmes-dos-vingadores-confira

Em quais são os dois filmes onde a frequência relativa de falas do Homem de Ferro é a maior?

a)The Avengers e Avenges: Age of Ultron
b)Avenges: Age of Ultron e Captain America: Civl War
c)Captain America: Civl War e Avengers: Infinty War
d)Avengers: Infinty War e The Avengers
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

A frequência "The Avengers" é aproximadamente 160. A soma dos escores é aproximadamente 160+115+90+80+50+40=535.

$$f = \frac{160}{535} \approx 30\%$$

A frequência de "Avengers: Age of Ultron" é aproximadamente 180. A soma dos escores é aproximadamente 180+140+80+80+60+75=615.

$$f = \frac{180}{615} \approx 29\%$$

A frequência de "Capitain América: Civil Ar" é aproximadamente 180. A soma dos escores é aproximadamente 180+160+60+0+0+30=430.

$$f = \frac{430}{180} \approx 42\%$$

A frequência de "Avengers: Infinity War" é aproximadamente 120. A soma dos escores é aproximadamente 120+25+15+55+80+0=295.

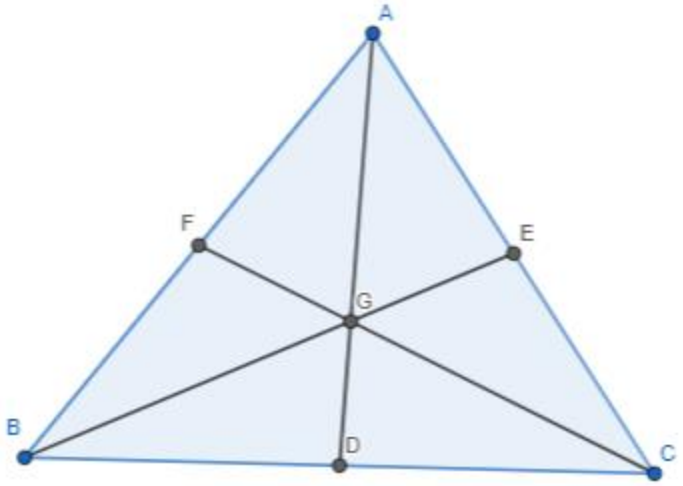
$$f = \frac{120}{295} \approx 41\%$$

São dados aproximados, pois sequer nós temos os valores exatos.

GABARITO: 'C'

Questão 23 – Baricentro Legal

Considere que AF=5, AB=10, AC=6, AE=3, AG=4, FG=3, BE=9 na figura abaixo, sem proporção:



Podemos afirmar que AD+CF+EG é igual a:

a)12
b)15
c)17
d)20
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

O Baricentro divide a mediana numa razão de 2:1 na direção vértice-lado, ou seja $\frac{2}{3}$ do percurso do baricentro ao vértice e $\frac{1}{3}$ do percurso do baricentro ao lado.

AF=5 e AB=10, AC=6 e AE=3, são informações para garantir que G é baricentro. Não é necessário falar nada sobre o lado restante, uma vez que as três medianas se encontram no mesmo ponto (o baricentro).

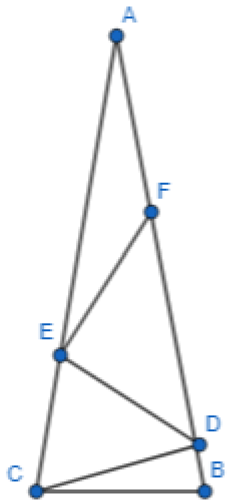
Se AG=4, isso é 2/3 da mediana, portanto, AD=6.
Se FG=3, isso é 1/3 da mediana, portanto CG=6.
Se BE=9, isso é a mediana, portanto EG=3.

AD+CF+EG=6+6+3=15.

GABARITO: 'B'

Questão 24 – Isósceles até Demais

Dado que BC=CD=DE=EF=FA, termine a medida de $C\hat{A}B$.



a)10º
b)15º
c)35º
d)40º
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

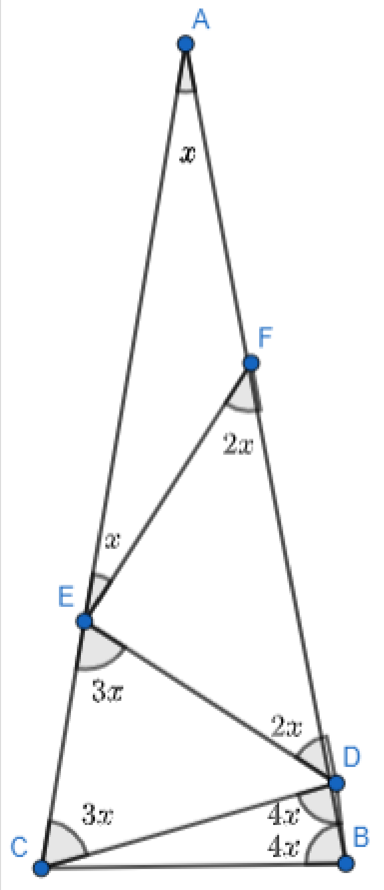
Vamos chamar o ângulo $C\hat{A}B$ de x. Como o triângulo AEF é isósceles, então $A\hat{E}F$ também mede x. Pelo teorema do ângulo externo o ângulo $E\hat{F}D$ mede $2x$.

Como DEF é isóscels com vértice em E, o ângulo $F\widehat{D}E$ também mede $2x$. Para determinar o ângulo $C\hat{E}D$ vamos pensar que esse ângulo mais o oposto pelo vértice do ângulo $A\hat{E}F$ medem $4x$ pelo teorema do ângulo externo. Portanto esse ângulo $C\hat{E}D$ mede $3x$ (que é $4x - x$ do ângulo $A\hat{E}F$.

Como CDE é isósceles, o ângulo $D\hat{C}E$ mede $3x$. Usando o mesmo raciocínio anterior, o ângulo $B\widehat{D}C$ mede $4x$ (pois o oposto pelo vértice de $E\widehat{D}F$ é o que falta para $B\widehat{D}C$ seja o ângulo externo do triângulo.

Como o triângulo BCD é isóceles, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede $4x$.

Veja a figura:



Como o triângulo ABC é isósceles, $A\hat{C}B$ também mede 4x, portanto temos 3 ângulos de um triângulo:

$$4x + 4x + x = 180°$$
$$9x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{9}$$
$$x = 20°$$

GABARITO: 'E'

Questão 25 – Criança em Rodas

Doze crianças brincam de roda, são 6 meninos e 6 meninas, seguindo a seguinte regra: meninos não podem ficar do lado de meninos e nem meninas podem ficar do lado de meninas. De quantas maneiras essas crianças podem organizar as rodas?

a)240
b)720
c)864
d)8640
e)Nenhuma das anteriores

Solução:

Primeiro colocamos as meninas, ou seja, é uma permutação circular $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$ maneiras.

Agora precisamos colocar os meninos. Restam 6 lugares, que podemos preencher de $P_6 = 6! = 720$ maneiras.

Ou seja, o número de modos é $120 \cdot 720 = 86.400$

GABARITO: 'D'

1ª OLIMPÍADA SUL MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2021

PODEMOS

VALOR DE CADA QUESTÃO NA PROVA OFICIAL (essa é apenas um simulado):

Questão 1	28,4
Questão 2	28,6
Questão 3	28,9
Questão 4	29,3
Questão 5	29,8
Questão 6	30,4
Questão 7	31,1
Questão 8	31,9
Questão 9	32,8
Questão 10	33,8
Questão 11	34,9
Questão 12	36,1
Questão 13	37,4
Questão 14	38,8
Questão 15	40,3
Questão 16	41,9
Questão 17	43,6
Questão 18	45,4
Questão 19	47,3
Questão 20	49,3
Questão 21	51,4
Questão 22	53,6
Questão 23	55,9
Questão 24	58,3
Questão 25	60,8

As questões possuem valores diferentes para diferenciar o máximo possível as notas.