

Ústav mechaniky těles, biomechaniky a mechatroniky  
Fakulta strojního inženýrství  
Vysoké učení v Brně

# KONSTITUTIVNÍ VZTAHY MATERIÁLŮ

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

# Kapitola 1

## Mechanika kontinua

### 1.1 Úvod

#### 1.1.1 Einsteinovo sčítací pravidlo

Einsteinovo sčítací pravidlo se používá pro zjednodušení obecných tenzorových zápisů. Vyskytuje-li se v některém členu opakovaný index (tzv. sčítací index, v našem případě index  $k$ ) pak se provádí sumace přes tento index. Např. obecný zápis Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření ve tvaru

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{X_j} + \frac{\partial u_j}{X_i} + \frac{\partial u_k}{X_j} \frac{\partial u_k}{X_i} \right] \quad (.1)$$

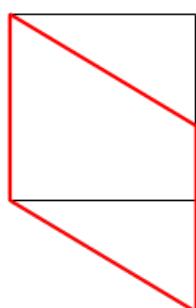
je třeba interpretovat následovně:

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{X_j} + \frac{\partial u_j}{X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{X_j} \frac{\partial u_k}{X_i} \right] \quad (.2)$$

#### 1.1.2 Shear

Jak „simple shear“, tak „pure shear“ je zvykem používat ve smyslu deformace. Oba stavy deformace jsou teoreticky ekvivalentní, v praxi tomu však tak nemusí být (není snadné pro obecný Poissonův poměr  $\mu$  realizovat příslušné stavy deformace, pro  $\mu = 0,5$  je to snazší).

##### Simple shear

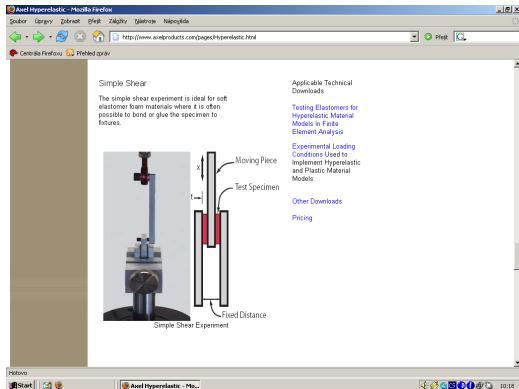


Obrázek 1.1: Simple shear

- černá je nedeformovaná geometrie

- červená je deformovaná geometrie
- třetí rozměr zůstává bez změny ( $\lambda_3 = 1$ )
- volumetrická změna = 0
- pozor: indukují se i normálová napětí (při velkých – „neinfinitezimálních“ – deformacích)
- hlavní osy tenzoru deformace se v průběhu vztahající úrovně deformace NATÁČEJÍ

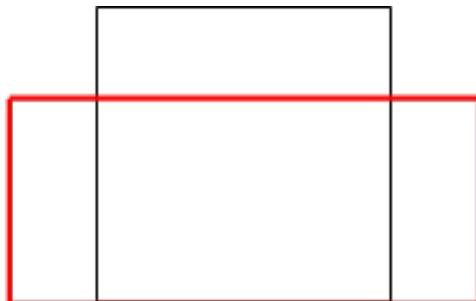
Praktická realizace:



Obrázek 1.2: Simple shear experiment

Test je vhodný pro poddajné pěnové materiály, u nichž nelze realizovat ekvivalenty čistého smyku v rovinné deformaci.

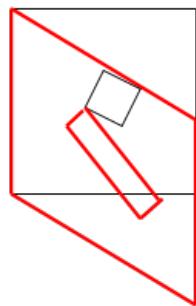
### Pure shear



Obrázek 1.3: Pure shear

- třetí rozměr zůstává bez změny ( $\lambda_3 = 1$ )
- volumetrická změna = 0 (v praxi při tzv. „pure shear“ testu není většinou splněno)
- praktická realizace: tahem v širokých čelistech na širokém vzorku nebo tlakem hranolového vzorku při zabránění jedné z příčných deformací
- hlavní osy deformace se v průběhu vztahající úrovně deformace nenatáčí

## Vysvětlení vzájemné ekvivalence obou testů



Obrázek 1.4: Vzajemná ekvivalence

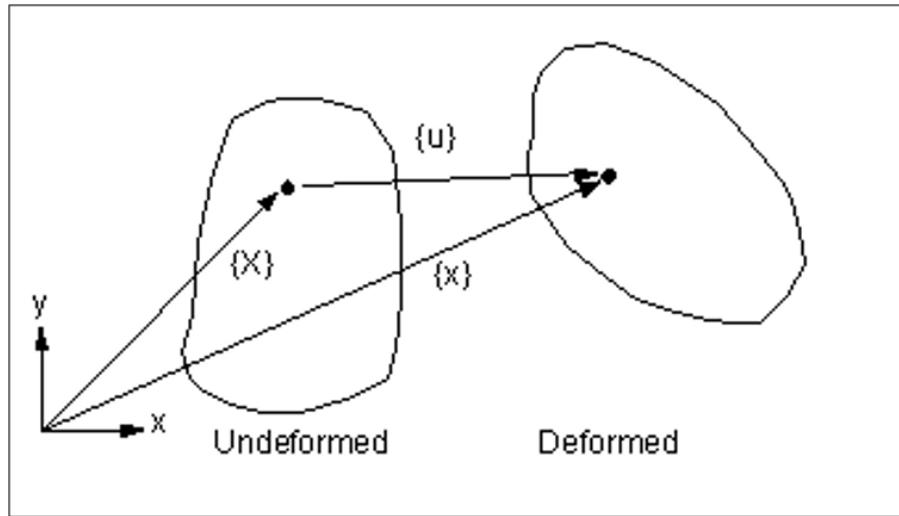
Na případu „simple shear“ lze pro danou úroveň deformace (gama) vždy nalézt na deformovaném vzorku ortogonální (pravoúhlý) element, kterému v nedeformované konfiguraci odpovídá rovněž ortogonální element. Tedy na takovém elementu neproběhl smyk vůči jeho hranám – element se pouze cely natočil, v jednom směru natáhl a v druhém stlačil (volumetrická změna = 0). Stav deformace pro tento element je z podstaty věci ekvivalentní stavu „pure shear“. Jediný rozdíl je v NATÁČENÍ hlavních os deformace, proto také zápis obou typů deformací do podoby deformačního gradientu je vzájemně odlišný – deformační gradient obsahuje totiž i rotaci tělesa („rigid body rotation“).

Obrázek 1.5: Možné rozpory při zájmě ekvivalentů smykové napjatosti

### 1.1.3 Význam pojmu „konečná deformace“

Termínem konečné deformace (finite strain) označujeme přetvoření, která na rozdíl od klasické teorie pružnosti nejsou nekonečně malá (infinitezimální). V praxi lze teorie založené na předpokladu malých (infinitezimálních, tedy nekonečně malých) přetvoření používat, pokud přetvoření nepřesáhnou cca 1%. V opačném případě je třeba používat teorie konečných (rozuměj nikoli nekonečně malých, tedy vlastně velkých) přetvoření.

#### 1.1.4 Označení deformovaných a nedeforovaných souřadnic



Obrázek 1.6: Souřadnice

## 1.2 Maticový zápis tenzorů

Symetrický tenzor druhého řádu  $3 \times 3$  se složkami  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  lze zapsat jako vektor se složkami  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & T_{22} & T_{23} \\ \text{sym.} & & T_{33} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T_a = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix}$$

a symetrický tenzor čtvrtého řádu  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  se složkami  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  lze zapsat jako matici  $6 \times 6$  se složkami  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$T_{ijkl} \quad \rightarrow \quad T_{ab} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ & & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ & & & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ & & \text{sym.} & & T_{55} & T_{56} \\ & & & & & T_{66} \end{pmatrix}$$

Při zápisu tenzoru napětí a tenzoru přetvoření pomocí vektorů je potřeba zachovat hodnotu hustoty elastické energie, která je produktem  $2E = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ . Tradiční Voigtův<sup>1</sup> zápis i méně používaný Kelvinův<sup>2</sup>-Mandelův<sup>3</sup> zápis toho dosahují různými mapováními.

<sup>1</sup>Woldemar VOIGT (němec, 1850—1919)

<sup>2</sup>William THOMSON – lord Kelvin (skot, 1824—1907)

<sup>3</sup>Jean MANDEL (francouz, 1907-1982)

### 1.2.1 Voigtův zápis

Tenzor napětí

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_a = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$

Tenzor přetvoření

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Tenzor tuhosti

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{ab} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ \text{sym.} & C_{1313} & C_{1112} \\ & C_{1212} \end{pmatrix}$$

Výhody:

- zachování hustoty elastické energie
- zachování složek tenzoru tuhosti

Nevýhody:

- napětí a přetvoření je mapováno různými způsoby
- norma tenzorů se nezachovává

### 1.2.2 Kelvinův-Mandelův zápis

Tenzor napětí

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_a = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\tau_{23} \\ \sqrt{2}\tau_{13} \\ \sqrt{2}\tau_{12} \end{pmatrix}$$

Tenzor přetvoření

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{23} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{13} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Tenzor tuhosti

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{ab} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ & & & & 2C_{1313} & 2C_{1112} \\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix}_{\text{sym.}}$$

Výhody:

- zachování hustoty elastické energie
- zachování normy tenzorů
- napětí a přetvoření je mapováno stejným způsobem

Nevýhody:

- složky tenzoru tuhosti se nezachovávají

## 1.3 Tenzory deformace

### 1.3.1 Tenzor deformačního gradientu

Obecně lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \leftrightarrow F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (.3)$$

V hlavním souřadnicovém systému jsou složkami tenzoru deformačního gradientu  $\hat{\mathbf{F}}$  poměrná protažení  $\lambda_i$

$$\lambda_1 = \frac{\partial x}{\partial X} \quad \lambda_2 = \frac{\partial y}{\partial Y} \quad \lambda_3 = \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (.4)$$

Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu je dán determinantem této matice  $\mathbf{F}$ , který lze nejsnáze určit z hlavních hodnot poměrných protažení pomocí vztahu

$$J = \det(\hat{\mathbf{F}}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (.5)$$

### Vlastnosti tenzoru deformačního gradientu

Tenzor deformačního gradientu je obecně nesymetrický, v důsledku toho existují dva v principu odlišné Cauchy-Greenovy tenzory deformace (levý a pravý).

Třetí invariant  $J$  tenzoru deformačního gradientu  $\mathbf{F}$  udává poměrnou objemovou změnu elementu, jak plyne z následujícího vztahu:

$$e = \frac{V_{\text{def}} - V_{\text{nedef}}}{V_{\text{nedef}}} = \frac{dx dy dz - dX dY dZ}{dX dY dZ} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial z}{\partial Z} - 1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1 = J - 1 \quad (.6)$$

Jako každý tenzor lze i tenzor deformačního gradientu tedy rozložit na část kulovou (změna objemu) a deviátorovou (změna tvaru).

U smluvních přetvoření byla kulová část tenzoru dána aritmetickým průměrem hlavních přetvoření. Podobně zde je kulová část dána průměrem hlavních souřadnic tenzoru, ovšem nikoli aritmetickým, nýbrž geometrickým, protože změna objemu je dána součinem těchto souřadnic.

Pro střední protažení platí

$$\lambda_s = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \sqrt[3]{J} = J^{\frac{1}{3}} \quad (.7)$$

### 1.3.2 Tenzor Cauchyho-Greenovy deformace

Tato definice nepracuje s přetvořeními, ale s poměrnými protaženími, podobně jako tenzor deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , z nějž se odvozuje pomocí vztahů:

Tenzor pravé Cauchyho-Greenovy deformace

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Leftrightarrow C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (.8)$$

Tenzor levé Cauchyho-Greenovy deformace

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \Leftrightarrow B_{ij} = F_{ik} F_{jk} \quad (.9)$$

Hlavními souřadnicemi tohoto tenzoru jsou kvadraty poměrných protažení v hlavních směrech

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (.10)$$

#### Invariante tenzoru Cauchyho-Greenovy deformace

Invariante tohoto tenzoru lze v hlavním souřadnicovém systému vyjádřit následovně:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (.11)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (.12)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (.13)$$

Zde  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu. Třetí invariant tedy i u tenzoru Cauchyho-Greenovy deformace vyjadřuje změnu objemu (je roven jedné, pokud se při deformaci objem nemění).

Tenzorový zápis těchto invariantů je následující <sup>4</sup>

$$I_1 = \text{Sp}(\mathbf{C}) \Leftrightarrow I_1 = C_{ii} \quad (.14)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [\text{Sp}(\mathbf{C})^2 - \text{Sp}(\mathbf{C}^2)] \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2} (C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ji}) \quad (.15)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (.16)$$

---

<sup>4</sup>\*G.A.Holzapfel:Nonlinear solid mechanics. Wiley, 2001, p. 25.

## Modifikované invarianty Cauchy-Greenova tenzoru deformace

Modifikované (též někdy označované jako redukované) invarianty Cauchy-Greenova tenzoru deformace se ve vztazích pro funkce měrné energie napjatosti používají pro popis deviátorové složky deformace. Tak jako deviátor tenzoru malých přetvoření vznikl odečtením středního přetvoření od jednotlivých složek délkových přetvoření, zde dostaneme příslušná poměrná protažení dělením jednotlivých složek středním protažením  $\lambda_s$ .

Pak dostaneme modifikovaná hlavní protažení z rovnice

$$\bar{\lambda}_p = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_p \quad (p = 1, 2, 3) \quad (17)$$

Modifikované invarianty Cauchy-Greenova tenzoru deformace jsou pak dány

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) J^{-\frac{2}{3}} = I_1 J^{-\frac{2}{3}} = I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} \quad (18)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_2^2 \bar{\lambda}_3^2 + \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_3^2 = (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2) J^{-\frac{4}{3}} = I_2 J^{-\frac{4}{3}} = I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} \quad (19)$$

### 1.3.3 Tenzor protažení (stretch tensor)

I v nedeformovaném stavu elementu může mít matice definující tenzor deformačního gradientu  $\mathbf{F}$  složky odlišné od jednotkové matice; je to dáno případnou rotací elementu v důsledku velkých deformací tělesa. Polární dekompozici tenzoru  $\mathbf{F}$  lze tento rozložit na tenzor rotace  $\mathbf{R}$  (vyjadřující rotaci tuhého tělesa) a tenzor protažení  $\mathbf{U}$  nebo  $\mathbf{V}$  (popisující deformaci tělesa). Tento tenzor je již symetrický a energeticky konjugovaný se symetrickou částí Biotova tenzoru napětí  $\mathbf{T}_B$ .

Polární dekompozice tenzoru  $\mathbf{F}$  pak spočívá v jeho rozložení na tenzor rotace  $\mathbf{R}$  a pravý nebo levý tenzor protažení (stretch tensor)  $\mathbf{U}$  nebo  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{R}^T\mathbf{F}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{R}^T \quad (20)$$

Zde se využívá ortogonality tenzoru rotace  $\mathbf{R}$ , pro který tedy inverzní matice se rovná matici transponované.

Tenzor rotace  $\mathbf{R}$  je v rovině (2D zjednodušení) definován vztahem

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

kde úhel  $\psi$  lze určit ze složek tenzoru deformačního gradientu pomocí vztahu

$$\psi = \arctan \left( \frac{F_{12} - F_{21}}{F_{11} + F_{22}} \right) \quad (22)$$

Pomocí tenzorů protažení  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  lze definovat tenzor pravé Cauchyho-Greenovy deformace  $C$

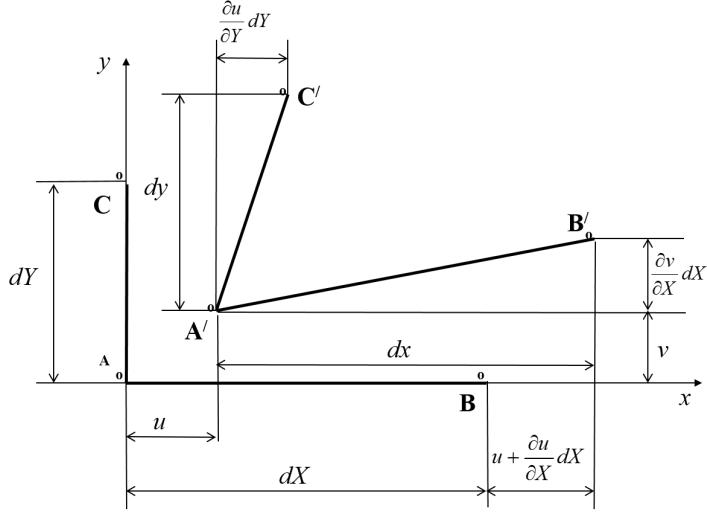
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}^2, \quad (23)$$

a tenzor levé Cauchyho-Greenovy deformace  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{FF}^T = \mathbf{VV}^T = \mathbf{V}^2. \quad (24)$$

Zde se navíc využívá faktu, že oba tyto tenzory jsou (na rozdíl od tenzoru deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ ) vždy symetrické. Hlavní složky tenzoru  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  jsou stejné a představují hlavní poměrná protažení (principal stretches).

## 1.4 Tenzory přetvoření



Obrázek 1.7: Přetvoření

### 1.4.1 Tenzor smluvního přetvoření (pro malé deformace)

Délková (označení viz obrázek 1.7):

$$\varepsilon_x = \frac{dx - dX}{dX} = \frac{dX + u + \frac{\partial u}{\partial X} dX - u - dX}{dX} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (25)$$

Pro ostatní složky analogicky:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (26)$$

Úhlová (zkosy):

$$\gamma_{xy} = \gamma_{AB} + \gamma_{AC} = \tan(\gamma_{AB}) + \tan(\gamma_{AC}) = \frac{\frac{\partial v}{\partial X} dX}{dX} + \frac{\frac{\partial u}{\partial Y} dY}{dY} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (27)$$

Pro ostatní složky analogicky:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \quad (28)$$

Vzhledem k tomu, že složkami tenzoru přetvoření jsou poloviční zkosity, lze napsat obecný tenzorový vztah

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (29)$$

kde souřadnicím  $X, Y, Z$  odpovídají  $X_i$  a posuvům  $u, v, w$  posuvy  $u_i$  (pro  $i = 1, 2, 3$ ).

### 1.4.2 Tenzor Greenova-Lagrangeova přetvoření

Přetvoření (poměrná deformace) je rovněž vztažena k původním (nedeformovaným) rozměrům, ale je respektováno i natáčení elementu. Pak je délkové přetvoření (označení viz obrázek 1.7):

$$\begin{aligned} E_x^L &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} dX\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} dX\right)^2} - dX}{dX} \\ &= \frac{\sqrt{\left(dX + u + \frac{\partial u}{\partial X} dX - u\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} dX\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} dX\right)^2} - dX}{dX} \end{aligned} \quad (.30)$$

Deformovaná délka elementu  $dx$  se zde počítá aplikací Pythagorovy věty ve 3D prostoru (není v obrázku zakresleno). Pro zjednodušení vztahu použijeme první dva členy binomické řady:

$$\sqrt{1 + \kappa} = 1 + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{8} + \frac{\kappa^3}{16} - \dots \quad (.31)$$

Pak dostaneme:

$$\begin{aligned} E_x^L &= \frac{dX \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2} - dX}{dX} \\ &= 1 + \frac{2\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2}{2} - 1 \\ &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (.32)$$

Pro ostatní složky délkových přetvoření platí analogicky:

$$\begin{aligned} E_y^L &= \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y}\right)^2 \right] \\ E_z^L &= \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (.33)$$

Zobecnění na všechny složky tenzoru přetvoření je možné pomocí tenzorového zápisu

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] \quad (.34)$$

Tento zápis používá Einsteinovo sčítací pravidlo.

### 1.4.3 Tenzor Almansihova-Hamelova přetvoření

Podle Almansihova se poměrné přetvoření vztahuje ke konečným (nedeformovaným) rozměrům. Pak délkové přetvoření lze vyjádřit (označení viz obrázek 1.7):

$$E_x^A = \frac{A'B' - AB}{A'B'} \quad (.35)$$

Podobným postupem jako pro tenzor Greenova-Lagrangeova přetvoření se dospěje k obecnému tenzorovému zápisu ve tvaru:

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \quad (.36)$$

Také tento zápis používá Einsteinovo sčítací pravidlo.

Praktické použití tohoto tenzoru je omezeno tím, že konečné (deformované) souřadnice obvykle předem neznáme.

#### 1.4.4 Tenzor logaritmického přetvoření (Cauchyho, Henckyho)

Nedostatky tenzorů konečných přetvoření:

- Green-Lagrange: změny délek jsou stále vztahovány k původním hodnotám, zatímco aktuální již mohou být v průběhu procesu zatěžování významně odlišné.
- Almansi-Hamel: změny délek jsou stále vztahovány ke konečným (deformovaným) hodnotám délek, zatímco aktuální od nich mohou být v průběhu procesu zatěžování ještě podstatně odlišné.

Cauchyho definice přetvoření je exaktnější v tom, že infinitezimální přírůstek délky vztahuje vždy k aktuální délce v daném stádiu zatěžovacího procesu.

Přetvoření úsečky o původní délce  $X_{i0}$ , která se vlivem zatížení mění na aktuální hodnotu  $X_i$  až dosáhne konečné (deformované) délky  $x_{ik}$ , určíme integrací přírůstků její délky  $dx_i$ :

$$E_{ij}^C = \int_{X_{i0}}^{x_{ik}} \frac{1}{x_i} dx_i = \ln(x)|_{X_{i0}}^{x_{ik}} = \ln(x_{ik}) - \ln(X_{i0}) = \ln\left(\frac{x_{ik}}{X_{i0}}\right) = \ln(\lambda_i) \quad (.37)$$

#### Složky tenzoru Cauchyho přetvoření

Složky tohoto tenzoru jsou rovny přirozeným logaritmům odpovídajících složek tenzoru deformačního gradientu.

$$E_{ij}^C = \ln(F_{ij}) = \frac{1}{2} \ln(C_{ij}) \quad (.38)$$

K exaktnímu vyjádření se využívá tenzor pravého protažení  $\mathbf{U}$ .

$$E_{ij}^C = \ln(U_{ij}) = \ln \sqrt{F_{ik} F_{jk}} \quad (.39)$$

Henckyho definice se liší využitím tenzoru levého protažení  $\mathbf{V}$ .

#### 1.4.5 Vzájemné přepočtové vztahy pro tenzory přetvoření

Nejvhodnější pro vzájemný přepočet tenzorů přetvoření jsou poměrná protažení  $\lambda_i$ , tedy složky tenzoru deformačního gradientu. Pro jednoduchost jsou uvedena jen hlavní přetvoření jako funkce hlavních poměrných protažení  $\lambda_i$ :

Smluvní přetvoření – vztah se odvozuje v základní PP:

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \quad (.40)$$

Green-Lagrange:

$$E_i^L = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right)^2 = \lambda_i - 1 + \frac{1}{2} (\lambda_i - 1)^2 = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad (.41)$$

příp. v maticovém vyjádření:

$$\mathbf{E}^L = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (.42)$$

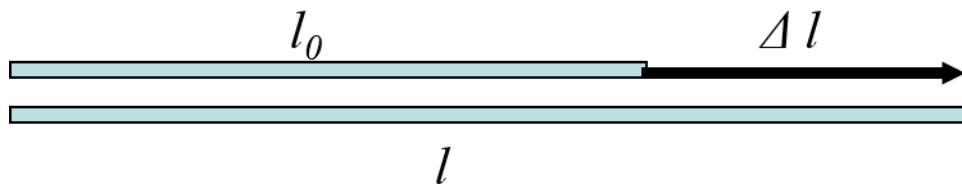
Almansi-Hamel:

$$E_i^A = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 = 1 - \lambda_i^{-1} - \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-1})^2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2}) \quad (.43)$$

Cauchy:

$$E_i^C = \ln(\lambda_i) \quad (.44)$$

### Rozdíly mezi jednotlivými definicemi tenzoru přetvoření



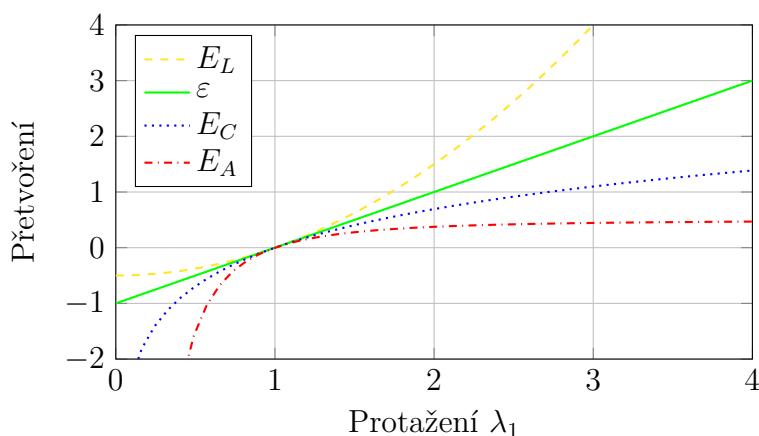
Obrázek 1.8: Protažení tyče

$$E^L = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad (.45)$$

$$E^A = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2}) \quad (.46)$$

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \lambda - 1 \quad (.47)$$

$$E^C = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \ln(\lambda) \quad (.48)$$



Obrázek 1.9: Porovnání tenzorů přetvoření při jednoosém tahu

## 1.5 Tenzory napětí

### 1.5.1 Tenzor Cauchyho napětí

Tenzor Cauchyho napětí (v praxi často skutečná napětí – true stress) je definován jako skutečná elementární síla vztažená na skutečnou (tj. deformovanou) plochu elementu podle vztahu (platí pro hlavní napětí):

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j dx_k} \quad (.49)$$

Konkrétně pro hlavní napětí ve směru 1 platí:

$$\sigma_1 = \frac{dF_1}{dx_2 dx_3} \quad (.50)$$

### 1.5.2 Tenzor prvního Piolova-Kirchhoffova napětí

Tenzor prvního Piolova-Kirchhoffova napětí (v praxi často smluvní napětí – engineering stress) je definován jako skutečná elementární síla vztažená na původní (tj. nedeformovanou) plochu elementu podle vztahu (platí pro hlavní napětí):

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dX_j dX_k} \quad (.51)$$

Konkrétně pro hlavní napětí ve směru 1 platí:

$$\tau_1 = \frac{dF_1}{dX_2 dX_3} \quad (.52)$$

### 1.5.3 Tenzor druhého Piolova-Kirchhoffova napětí

Tenzor druhého Piolova-Kirchhoffova napětí je definován jako elementární síla  $dF_{0i}$  vztažená na původní (tj. nedeformovanou) plochu elementu. Tato síla je však při přenášení na původní element změněna oproti skutečné síle  $dF_i$  stejným poměrem jako elementární rozměr v odpovídajícím směru. Ten se mění při zatížení podle vztahu

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i, \quad (.53)$$

resp. při zpětné transformaci do nedeformovaného tvaru

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_i. \quad (.54)$$

Podobně transformujeme i elementární sílu

$$dF_{0i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i, \quad (.55)$$

takže napětí je

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j dX_k} \quad (.56)$$

Konkrétně pro normálové napětí ve směru 1 platí:

$$S_i = \frac{dF_{01}}{dX_2 dX_3} = \frac{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dF_1}{dX_2 dX_3} \quad (.57)$$

Tento tenzor nemá jasný fyzikální význam, používá se proto, že je i pro velká přetvoření symetrický a je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem přetvoření.

### 1.5.4 Vzájemné přepočtové vztahy pro tenzory napětí

Nejvhodnější pro vzájemný přepočet tenzorů přetvoření jsou poměrná protažení  $\lambda_i$ , tedy složky tenzoru deformačního gradientu. V hlavním souřadnicovém systému platí následující vztahy:

Hlavní Cauchyho (skutečné) napětí lze vyjádřit pomocí 1.P.K. napětí

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j dx_k} = \frac{dF_i}{\lambda_j dX_j \lambda_k dX_k} = \frac{\tau_i}{\lambda_j \lambda_k} \quad (.58)$$

Pro nestlačitelný materiál platí  $\lambda_i \lambda_j \lambda_k = 1$  a tedy napětí jsou ve vztahu

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \lambda_k} = \tau_i \lambda_i \quad (.59)$$

Podobně lze vyjádřit 2.P.K. napětí

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j dX_k} = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i}{dX_j dX_k} = \frac{\frac{1}{\lambda_i} dF_i}{dX_j dX_k} = \frac{1}{\lambda_i} \tau_i \quad (.60)$$

Cauchyho napětí lze vyjádřit i pomocí 2.P.K. napětí

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \lambda_k} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j \lambda_k} S_i, \quad (.61)$$

nebo jednodušeji pro nestlačitelný materiál

$$\sigma_i = \lambda_i \tau_i = \lambda_i^2 S_i. \quad (.62)$$

### 1.5.5 Energeticky konjugované tenzory

Pro správné (jednoznačné) určení energie napjatosti je nutné pracovat se vzájemně si odpovídajícími tenzory napětí a přetvoření. Těmto dvojicím tenzorů říkáme energeticky konjugované tenzory. Jsou to tedy vzájemně přiřazené dvojice tenzorů napětí a přetvoření, jejichž vzájemnou kombinací lze dostat (i v případě velkých přetvoření a velkých posuvů) energii napjatosti.

Takto konjugované jsou např.

- Green-Lagrangeův tenzor přetvoření a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí,
- pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí,
- tenzor protažení  $\mathbf{U}$  (pravý) a Biotův tenzor napětí  $\mathbf{T}_B$  (symetrický, v těchto oporách není popsán),
- tenzor deformace daný vztahem  $\mathbf{F} - \mathbf{1}$  (jednotkový tenzor) a 1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí.

### 1.5.6 (Pseudo)invarianty tenzoru pravé Cauchyho-Greenovy deformace

Vztahují se pouze k deviátorové složce měrné energie napjatosti materiálu, protože vzhledem k předpokladu nulového průměru vláken a tedy jejich nulovému objemu nemohou vlákna ovlivňovat volumetrickou složku energie napjatosti. Byly zavedeny pro popis deformace vláken v závislosti na tenzoru pravé Cauchyho-Greenově deformace a směrových vektorech  $\mathbf{a}$  nebo  $\mathbf{b}$ , příp.

směrových tenzorech (nazývaných také „structural tensors“)  $\mathbf{A}$  nebo  $\mathbf{B}$  vláken, definovaných vztahem:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = a_i a_j$$

Samotné (pseudo)invarianty jsou definovány následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} \bar{I}_4 &= \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{a} & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_4 = a_i \bar{C}_{ij} a_j \\ \bar{I}_5 &= \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{a} & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_5 = a_i \bar{C}_{ij}^2 a_j \\ \bar{I}_6 &= \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{B} = \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{b} & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_6 = b_i \bar{C}_{ij} b_j \\ \bar{I}_7 &= \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{B} = \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{b} & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_7 = b_i \bar{C}_{ij}^2 b_j \\ \bar{I}_8 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{b} & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_8 = (a_k b_k) a_i \bar{C}_{ij} b_j \\ \bar{I}_9 &= \zeta = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_9 = (a_i b_i)^2 \end{aligned}$$

Dá se ukázat, že invarianty  $\bar{I}_4$  a  $\bar{I}_6$  vyjadřují protažení jednotlivých osnov význačných vláken, podobně jako invarianty vyššího stupně  $\bar{I}_5$  a  $\bar{I}_7$ , zatímco  $\bar{I}_8$  se vztahuje ke vzájemnému ovlivnění obou osnov vláken a  $\bar{I}_9$  je pouze geometrická konstanta.

# Kapitola 2

## Konstitutivní modely

### 2.1 Úvod

#### 2.1.1 Co jsou konstitutivní modely?

Už v PPI a PPII byly uvedeny základní (lineární) konstitutivní vztahy pro modelování závislostí mezi deformací a napětím. Tyto závislosti jsou dány vlastnostmi materiálu, které byly vytvořeny (konstituovány) přírodou, stvořitelem. V širším smyslu se k nim v mechanice kontinua počítají závislosti mezi dalšími veličinami odvozenými z napětí a přetvoření, souvisejícími se závislostí na čase, např. rychlostí deformace. Jejich matematický popis, ať už lineární nebo nelineární, musí být nutně do jisté míry zjednodušený, proto se pro něj používá označení konstitutivní vztahy nebo konstitutivní modely.

Konstitutivní model je tedy matematický, příp. grafický popis konstitutivní závislosti.

Konstitutivní závislosti (v mechanice) jsou příčinné závislosti mezi tenzory napětí a přetvoření, příp. s nimi matematicky souvisejícími veličinami, s uvažováním časových závislostí.

#### 2.1.2 Příklady konstitutivních modelů

S jakými konstitutivními modely jsme se již setkali?

- Ideálně tuhý materiál
- Lineárně elastický materiál (izotropní nebo anizotropní – vláknové kompozity) – Hookův zákon
- Elasticko-plastický materiál (ideálně, tj. bez zpevnění, anebo se zpevněním)
- Tuho-plastický materiál

Jaké další modely budou probírány v předmětu „Konstitutivní vztahy materiálu“?

- Viskoelastické modely materiálu (napětí a deformace jsou mj. funkcí času) s malými deformacemi i s velkými deformacemi (visko-hyperelastické)
- Hyperelastické modely materiálu (materiál vykazující velká elastická přetvoření) izotropní a anizotropní
- Elasticko-plastické modely materiálu
- Modely porušení

### 2.1.3 Existují konstitutivní modely tekutin?

- Ideální kapalina
- Newtonská kapalina
- Nenewtonské kapaliny – mezi smykovým napětím a rychlostí deformace platí jiné závislosti než proporcionální
- Ideální plyn
- Viskózní plyn

Tyto modely předpokládají jistou formu závislosti mezi napětími a rychlostí tvarových změn (přetvoření), proto je lze také zahrnout mezi konstitutivní modely.

### 2.1.4 Rozdělení konstitutivních modelů

Je užitečné zavést následující rozdělení konstitutivních modelů podle jejich složitosti:

- Základní konstitutivní modely – sem řadíme nejjednodušší konstitutivní modely, definující ideální látku v jejích základních skupenstvích – ideální tuhou látku, ideální kapalinu a ideální plyn.
- Jednoduché konstitutivní modely – Pod tímto pojmem jsou chápány ty konstitutivní modely, které popisují chování látek, jež se od „ideálních“ odlišují určitou jedinou vlastností, např. ideálně elastická látka, ideálně plastická látka, viskózní (newtonská) kapalina.
- Kombinované konstitutivní modely – Jsou to modely, které vzniknou kombinací dvou nebo více jednoduchých konstitutivních modelů. Využívají mj. tzv. reologických modelů k popisu chování např. těchto druhů látek: viskoelastických, elasticko-plastických, viskoplasticích a elasticko-viskoplasticích.

Konstitutivních modelů existuje velké množství. Aspoň částečný přehled o nich, včetně vzájemných souvislostí, poskytuje schéma konstitutivních modelů.

### 2.1.5 Charakteristiky základních konstitutivních modelů

- Ideálně tuhá látka
  - nekonečně velký odpor proti deformaci
  - deformace je pro daný problém nepodstatná
- Ideální kapalina
  - nulový odpor proti změně tvaru (nulová viskozita)
  - nekonečně velký odpor proti změně objemu (nestlačitelnost)
- Ideální plyn
  - nulový odpor proti změně tvaru
  - malý odpor proti změně objemu, daný stavovou rovnicí ideálního plynu

Závěr: Pro vzájemné odlišení látek v různých skupenstvích je nutné oddělovat objemovou a tvarovou složku deformace.

### 2.1.6 Rozlišování mezi objemovou a tvarovou složkou deformace

U konstitutivních modelů je obecně třeba oddělovat objemovou a tvarovou složku deformace.

Tak tomu je např. i u plasticity – podle podmínek plasticity je trvalá deformace dána pouze deviátorem tenzoru napětí, kulová část tenzoru napětí není schopna vyvolat trvalou deformaci. Jediným konstitutivním vztahem, který toto rozdělení nemusí dodržovat, je Hookův zákon (díky

platnosti principu superpozice pro lineární závislosti).

Tenzory přetvoření a+napětí je tedy třeba rozdělit takto:

- Tenzor přetvoření = volumetrická (kulová) část + deviátor tenzoru přetvoření
- Tenzor napětí = kulový tenzor napětí + deviátor tenzoru napětí

## 2.1.7 Typy závislostí vyjadřujících chování látek

Chování látek z pohledu mechaniky je komplexně popsáno těmito závislostmi:

- deformačně-napěťová odezva – konstitutivní závislost v užším slova smyslu – je závislost mezi tenzorem napětí a tenzorem přetvoření (nutnost použít tenzorového, resp. maticevýho počtu). Z praktických důvodů se často používají zjednodušené tvary tohoto vyjádření, platné pouze pro specifické případy napjatosti (jednoosá, dvojosá rovnoměrná, smyková, trojosá rovnoměrná).
- Creepová odezva – Je to závislost deformace na čase, označovaná jako tečení (creep). Obvykle se vyšetruje při statickém zatížení vyvolávajícím jednoosou napjatost danou napětím:

$$\sigma = \sigma_0 H(t), \quad \text{případně} \quad \sigma = \sigma_0 H(t) - \sigma_0 H(t - t_0), \quad (1)$$

kde  $H(t)$  je Heavisideova funkce, pro níž platí:

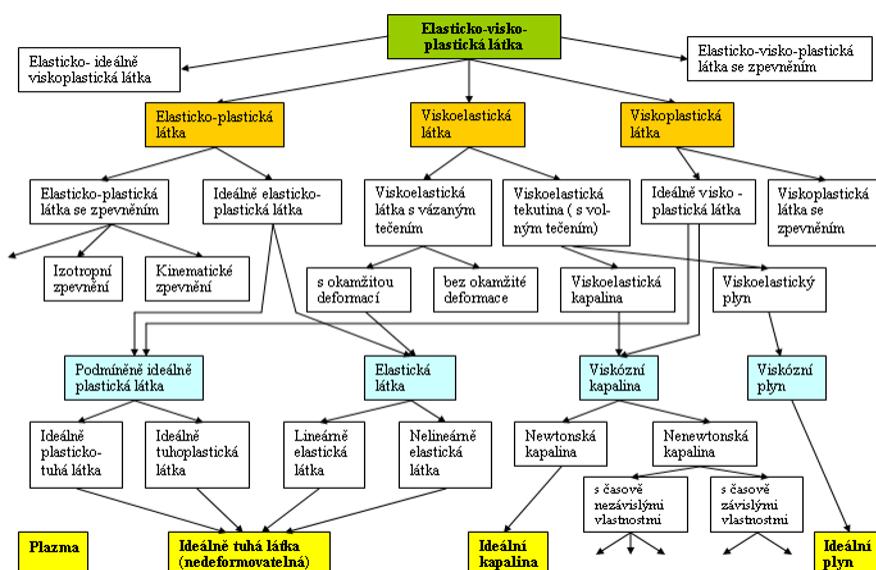
$$H = 0 \quad \text{pro} \quad t < 0, \quad H = 1 \quad \text{pro} \quad t \geq 0. \quad (2)$$

- Relaxační odezva – Je to závislost napětí na čase. Relaxační odezva se obvykle vyšetruje při stavu deformace daném přetvořením:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t), \quad \text{resp.} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 H(t) - \varepsilon_0 H(t - t_0), \quad (3)$$

kde  $H(t)$  je stejná Heavisideova funkce.

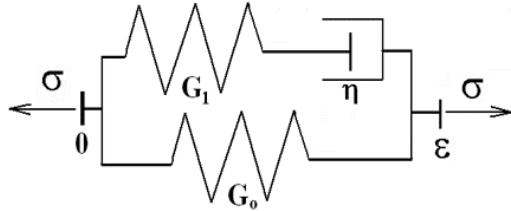
- Rychlostní odezva – U látek, které vykazují časovou závislost deformačně-napěťové odezvy na zatížení se uvádí i závislost napětí  $\sigma$  na rychlosti deformace  $\dot{\varepsilon}$  (tedy  $\sigma - \dot{\varepsilon}$ ).



Obrázek 2.1: Přehled konstitutivních modelů

## 2.1.8 Přechod k integrálnímu popisu viskoelastické látky

Obecnější modely lze vytvořit rozšířením Kelvinova modelu.



Obrázek 2.2: Standard linear solid

Jeho relaxace napětí je popsána rovnicí

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[ G_0 + G_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \right] = \varepsilon_0 K(t), \quad (.4)$$

kde  $K(t)$  je tzv. relaxační funkce.

Přidáváním dalších paralelních Maxwellových elementů do celkového počtu  $n$  ji lze zobecnit do tvaru

$$K(t) = \sum_{i=0}^n G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) = \sum_{i=0}^n G_i \exp(-t\nu_i), \quad (.5)$$

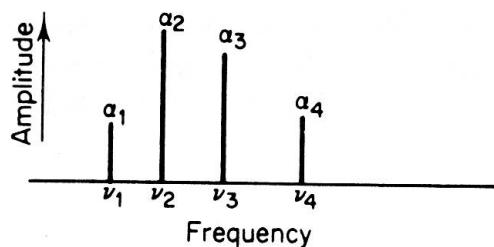
kde  $\nu_i = \frac{1}{\tau_i}$  je relaxační frekvence  $i$ -tého Maxwellova prvku.

Vynesením závislosti amplitud  $G_i$  jako funkce těchto frekvencí dostaneme diskrétní spektrum relaxačních funkcí.

### Diskrétní spektrum relaxačních funkcí

Amplitudy jednotlivých členů  $\alpha_i$  jsou zde normalizovány vůči celkovému modulu podle vztahu

$$\alpha_i = \frac{G_i}{\sum_{i=0}^n G_i} \quad (.6)$$



Obrázek 2.3: Diskrétní spektrum relaxačních funkcí

### Boltzmannova formulace

Nejobecnější formulace Boltzmannova vychází z těchto předpokladů:

- deformace je funkcí celé historie zatěžování až do vyšetřovaného času  $t$ ,

- existuje proporcionalita (lineární závislost) mezi přírůstkem napětí  $d\sigma(t)$  a přírůstkem deformace  $d\varepsilon(t)$ ,
- funkce  $\sigma(t)$  je spojitá a diferencovatelná.

Pak přírůstek napětí v krátkém časovém intervalu  $d\tau$  v časovém okamžiku  $\tau$  je  $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right) d\tau$ . Tento přírůstek napětí působí na těleso po celý zbývající časový interval  $(t - \tau)$  a k přetvoření v čase  $t$  přispívá přírůstek  $d\varepsilon(t)$ , jehož závislost na přírůstku napětí v čase je popsána funkcí  $K$ . Ta závisí na příslušném časovém intervalu  $(t - \tau)$ , takže platí

$$d\varepsilon(t) = K(t - \tau) \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} d\tau, \quad (.7)$$

kde funkce  $K(t - \tau)$  je označována jako krípová nebo retardační funkce, resp. také relaxační funkce přetvoření. Pokud položíme časový počátek do počátku pohybu (zatěžování), tak přetvoření lze určit integrací

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t - \tau) \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} d\tau. \quad (.8)$$

### Konvoluční integrál relaxační funkce

Zaměníme-li roli napětí a přetvoření (deformační zatěžování), pak dostaneme stejným postupem podobnou formulaci pro napětí:

$$\sigma(t) = \int_0^t C(t - \tau) \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} d\tau, \quad (.9)$$

kde funkce  $C(t - \tau)$  je relaxační funkce napětí. Zobrazení této funkce v závislosti na čase nebo frekvenci představuje spojité relaxační spektrum.

Při začátku zatěžování v čase  $t = -\infty$ , za předpokladu malých přetvoření i posuvů, lze popsat závislost mezi napětími a přetvořeními rozšířenými na tenzorové funkce závislé kromě času i na prostorových souřadnicích bodu  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  konvolučním integrálem

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (.10)$$

nebo jeho inverzním tvarem

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (.11)$$

kde  $G_{ijkl}$  je tenzorová relaxační funkce a  $J_{ijkl}$  je tenzorová krípová funkce.

V praxi nelze integrovat od času  $t = -\infty$ , volíme tedy počátek časové osy v okamžiku počátku pohybu, kdy těleso bylo nezatížené a nedeformované. Pak je např. konvoluční integrál pro napětí zredukován do tvaru

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, 0+) G_{ijkl}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t G_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (.12)$$

kde  $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, 0+)$  je limita funkce  $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t)$  pro  $t \rightarrow 0$  zprava. První člen na pravé straně rovnice představuje důsledek skokové změny přetvoření v čase  $t = 0$ ; podobný člen je třeba zavést v každém časovém okamžiku, kdy funkce  $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t)$  nemá derivaci (skokově se mění).

Zpracováno podle Funga<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Y.C. Fung: Biomechanics. Springer, 1993.

## 2.2 Alternativní vyjádření podmínky plasticity

### 2.2.1 Misesova mezní podmínka energetická formulace

Ekvivalentní napětí podle von Misesa je v kurzu PP na FSI v Brně odvozováno jako podmínka plasticity (HMH), založená na velikosti oktaedrického smykového napětí. Ke stejně podmínce lze však dospět i na základě energetického přístupu, kdy mezní stav (plasticity nebo pevnosti, podmínka je používána i jako pevnostní kriterium) nastane tehdy, když měrná deformační energie změny tvaru (deviátorová) dosáhne jisté mezní hodnoty, která je materiálovou charakteristikou. Ve velkých deformacích je ekvivalentní napětí skalární hodnotou Cauchyho tenzoru (skutečného) napětí.

V jednoosé napjatosti je měrná deformační energie

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (13)$$

a pro lineárně elastický materiál se dá zjednodušit do tvaru

$$w_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (14)$$

Pro víceosou napjatost je třeba do deformační energie zahrnout příspěvek všech složek tenzorů napětí a přetvoření. Přitom složky s nestejnými indexy spolu svírají pravý úhel, takže jejich příspěvek k deformační práci je nulový.

Měrnou energii lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} w_e = & \int_0^{\varepsilon_{11}} \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \int_0^{\varepsilon_{12}} \sigma_{12} d\varepsilon_{12} + \int_0^{\varepsilon_{13}} \sigma_{13} d\varepsilon_{13} + \int_0^{\varepsilon_{21}} \sigma_{21} d\varepsilon_{21} \\ & + \int_0^{\varepsilon_{22}} \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \int_0^{\varepsilon_{23}} \sigma_{23} d\varepsilon_{23} + \int_0^{\varepsilon_{31}} \sigma_{31} d\varepsilon_{31} + \int_0^{\varepsilon_{32}} \sigma_{32} d\varepsilon_{32} + \int_0^{\varepsilon_{33}} \sigma_{33} d\varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (15)$$

Tenzorovým zápisem lze zjednodušit do tvaru

$$w_e = \int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (16)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jsou tenzory druhého řádu a v indexovém zápisu platí Einsteinovo sčítací pravidlo.

Použijeme-li ve vztahu rozklad tenzorů napětí a deformace na jejich kulové a deviátorové složky, dostaneme měrnou energii napjatosti následovně:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{\varepsilon} \left( \boldsymbol{\sigma}' + \frac{\text{Sp}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{1} \right) : \left( d\boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{\text{Sp}(d\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \mathbf{1} \right) \\ &= \int_0^{\varepsilon'} \boldsymbol{\sigma}' : d\boldsymbol{\varepsilon}' + \int_0^{\varepsilon} \left( \frac{\text{Sp}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{1} \right) : \left( \frac{\text{Sp}(d\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \mathbf{1} \right) = w_d + w_V, \end{aligned} \quad (17)$$

kde čárka v horním indexu značí deviátorovou složku tenzoru.

Měrná energie napjatosti tedy sestává z části deviátorové  $w_d$  (energie změny tvaru) a objemové  $w_V$  (energie změny objemu).

Misesova podmínka vychází z deviátorové části energie napjatosti  $w_d$  (dané změnou tvaru), kterou lze tedy zapsat následovně:

$$w_d = \int_0^{\varepsilon'} \boldsymbol{\sigma}' : d\varepsilon' \Leftrightarrow \int_0^{\varepsilon'_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} \quad (.18)$$

Použijeme-li pro lineárně elastický materiál Hookeův zákon s oddělenou tvarovou a objemovou složkou, platí:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ii} = 2G\varepsilon'_{ij} + K\varepsilon_{ii} \quad (.19)$$

a tedy pro deviátorové složky napětí a přetvoření

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} \quad (.20)$$

nebo inverzní tvar pro hodnotu nebo přírůstek deviátoru deformace

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G} \quad d\varepsilon'_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \quad (.21)$$

Pak lze měrnou energii tvarové změny vyjádřit pomocí pouze napětí anebo pomocí přetvoření následovně:

$$w_d = \int_0^{\varepsilon'_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{4G} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = G \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} = G \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (.22)$$

Zavede-li se redukované napětí vztahem

$$\sigma_{\text{ekv}}^2 = \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') \Leftrightarrow \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad (.23)$$

který je založen na deviátoru ekvivalentní jednoosé napjatosti, pak lze deviátorovou část energie napjatosti  $w_d$  zapsat následovně:

$$w_d = \frac{\sigma_{\text{ekv}}^2}{6G}. \quad (.24)$$

Zavede-li se podobně redukované přetvoření podle Misesovy podmínky, lze energii vyjádřit také s jeho použitím

$$w_d = \frac{2}{3} G(1+\mu)^2 \varepsilon_{\text{ekv}}^2 = \frac{E(1+\mu)}{3} \varepsilon_{\text{ekv}}^2. \quad (.25)$$

### Misesova mezní podmínka jako izotropní zjednodušení podmínky Tsai-Hill pro kompozity

Misesova energetická podmínka je obecně používána i jako podmínka pevnosti u technických i biologických materiálů. Nejsnadněji lze shodu obou přístupů ukázat pomocí energetické podmínky Tsai-Hill uváděné<sup>2</sup> pro vláknové kompozity ve tvaru

$$\left( \frac{\sigma_L}{\sigma_{PL}} \right)^2 - \frac{\sigma_L}{\sigma_{PL}} \frac{\sigma_T}{\sigma_{PT}} + \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{PT}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{LT}}{\tau_P} \right)^2 < 1, \quad (.26)$$

kde indexy  $L, T$  označují hlavní směry materiálu a index  $P$  pevnost v daném směru. Tato podmínka byla odvozena Hillem na základě deviátorové energie deformace jako podmínka plasticity a modifikována Tsaiem na podmínku pevnosti.

---

<sup>2</sup>Agarval, Broutman: Vláknové kompozity. SNTL Praha, 1987

Po zjednodušení na materiál izotropní ( $\sigma_{PL} = \sigma_{PT} = \sigma_P$ ) a zavedení pevnosti ve smyku podle Misesovy podmínky ve tvaru

$$\tau_P = \frac{\sigma_P}{\sqrt{3}}, \quad (.27)$$

převedeme výše uvedenou nerovnici na tvar

$$\left( \frac{\sigma_L}{\sigma_{PL}} \right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_P}{\sigma_P^2} + \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_P} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3} \tau_{LT}}{\sigma_P} \right)^2 < 1. \quad (.28)$$

Výsledný tvar podmínky (platný pro rovinnou napjatost) pak je

$$\sqrt{\sigma_L^2 - \sigma_L \sigma_T + \sigma_T^2 + 3\tau_{LT}^2} < \sigma_P. \quad (.29)$$

Redukované (ekvivalentní) napětí podle Misesovy podmínky (HMH) se pro obecný souřadnicový systém obvykle uvádí ve tvaru<sup>3</sup>

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_L - \sigma_T)^2 + (\sigma_L - \sigma_{T'})^2 + (\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + 6(\tau_{LT}^2 + \tau_{LT'}^2 + \tau_{TT'}^2) \right]}, \quad (.30)$$

kde označení os  $x, y, z$  bylo pouze změněno na  $L, T, T'$ . Pro dvouosou napjatost v rovině  $LT$  pak dostaváme tvar

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_L^2 - \sigma_L \sigma_T + \sigma_T^2 + 3\tau_{LT}^2}, \quad (.31)$$

z nějž porovnáním s rovnicí (.29) plyne obvyklý tvar mezní podmínky

$$\sigma_{\text{red}} < \sigma_P, \quad (.32)$$

který se od obvyklé Misesovy podmínky plasticity liší jen použitou mezní hodnotou.

### 2.2.2 Misesova mezní podmínka vyjádřená pomocí přetvoření

Mezní podmínku podle von Misese lze odvodit také energetickým přístupem, kdy mezní stav (plasticity nebo pevnosti, podmínka je používána i jako pevnostní kritérium) nastane tehdy, když měrná deformační energie změny tvaru (deviátorová) dosáhne jisté mezní hodnoty, která je materiálovou charakteristikou.

Tuto energii napjatosti lze pak vyjádřit duálně pomocí napětí nebo přetvoření. Vyjádříme-li ji pomocí přetvoření, dospějeme k pojmu redukované (ekvivalentní) přetvoření, což je největší hlavní přetvoření při jednoosé napjatosti (tj. přetvoření ve směru působícího zatížení), které dává podle Misesovy podmínky stejnou bezpečnost vůči meznímu stavu jako vyšetřovaný víceosý deformačně-napěťový stav.

Pro deviátorové složky přetvoření a napětí platí obecný vztah

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2G\boldsymbol{\epsilon}', \quad (.33)$$

zatímco pro ekvivalentní jednoosou napjatost

$$\sigma_{\text{ekv}} = E\varepsilon_{\text{ekv}} = 2G(1+\mu)\varepsilon_{\text{ekv}}, \quad (.34)$$

takže ve vztahu pro redukované přetvoření je navíc člen  $\frac{1}{1+\mu}$ .

---

<sup>3</sup>Janíček, Ondráček Vrbka, Burša: Mechanika těles – Pružnost a pevnost I. CERM Brno, 2006.

## Misesova mezní podmínka pro ekvivalentní (redukované) přetvoření

Ekvivalentní přetvoření je definováno vztahem

$$\varepsilon_{\text{ekv}} = \frac{1}{1+\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \frac{6}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right]}. \quad (.35)$$

Pro oceli v plastické oblasti je Poissonovo číslo  $\mu = 0,5$ , takže platí

$$\varepsilon_{\text{ekv}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \frac{6}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right]}, \quad (.36)$$

případně ve 2D (rovinná deformace)

$$\varepsilon_{\text{ekv}} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{4} \gamma_{xy}^2}. \quad (.37)$$

## 2.3 Tekutiny

### 2.3.1 Stavová rovnice ideálního plynu

se obvykle zapisuje ve tvaru

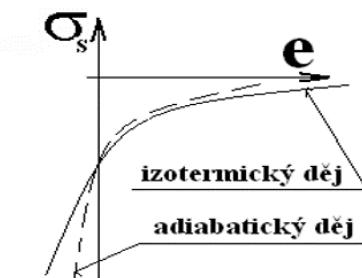
$$pv = rT, \quad (.38)$$

kde

- $p$  je tlak plynu,
- $v$  je měrný objem plynu,
- $r$  je měrná plynová konstanta,
- $T$  je absolutní teplota.

Vynásobíme-li uvedenou rovnici molovou hmotností látky  $M$ , změní se na levé straně měrný objem plynu na molový objem plynu a na pravé straně se změní měrná plynová konstanta na univerzální (molovou) plynovou konstantu  $R_m$ , jejíž hodnota je pro všechny ideální plyny stejná a činí  $R_m = 8,3143(12) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Známý  $p - V$  diagram izotermického (tj. hyperbola), resp. adiabatického (strmější adiabata) děje lze znázornit v souřadnicích střední napětí  $\sigma_s$  – poměrná změna objemu  $e$



Obrázek 2.4:  $\sigma_s - e$  diagram

### 2.3.2 Co je ideální plyn?

Charakteristické vlastnosti ideálního plynu:

- Nulová viskozita, tj. žádné vnitřní tření, nulový odpor proti změně tvaru – shodné s ideální kapalinou.
- Značná objemová stlačitelnost, a současně rozpínavost, tj. schopnost vyplnit celý disponibilní prostor. Odpor proti změně objemu je velmi malý a řídí se stavovou rovnicí ideálního plynu.

### 2.3.3 Co je ideální kapalina?

Charakteristické vlastnosti ideální kapaliny:

- Nulová viskozita, tj. žádné vnitřní tření, nulový odpor proti změně tvaru.
- Objemová nestlačitelnost, tj. nekonečně velký odpor proti změně objemu.

#### Tvar tenzoru napětí pro ideální kapalinu

- Všechna normálová napětí záporná a stejně velká – důsledek Pascalova zákona
- Smyková napětí nulová – důsledek nulové viskozity

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (.39)$$

# Kapitola 3

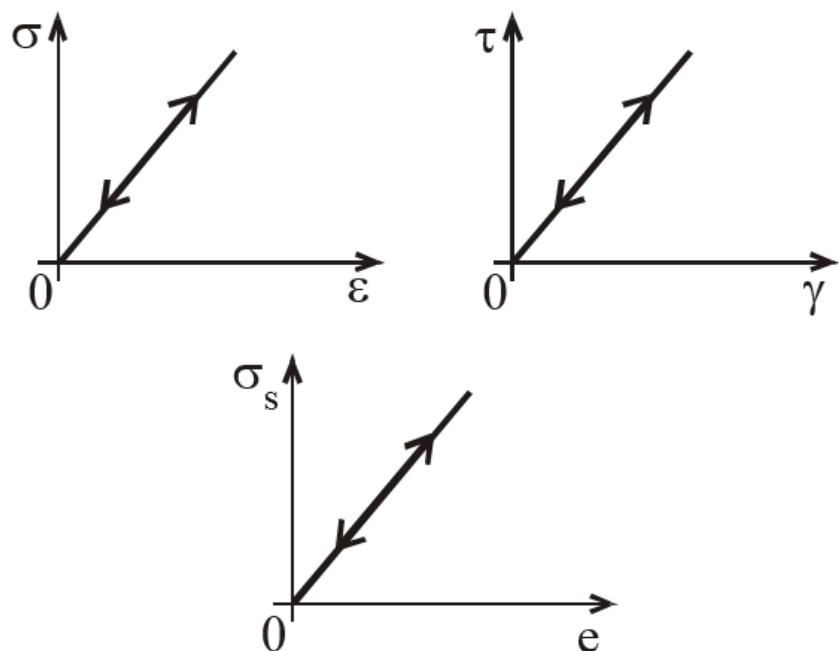
## Modely elastického chování

### 3.0.1 Úvod

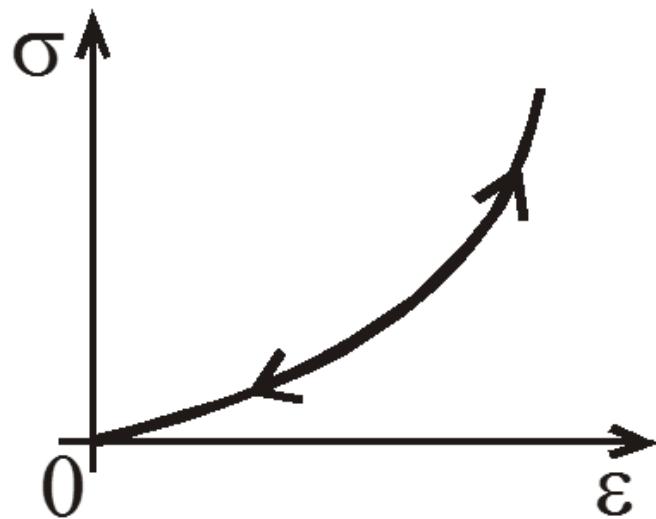
### 3.0.2 Co je to elasticita?

Elasticita je schopnost látky vrátit se po zatížení a odlehčení do původního tvaru. Podle tvaru deformačně-napěťové charakteristiky dělíme tyto látky na lineárně a nelineárně elastické.

Charakteristiky:



Obrázek 3.1: lineárně elastické látky



Obrázek 3.2: nelineárně elastické látky

### 3.0.3 Upravený tvar Hookova zákona

Vztahy vyjadřující vzájemnou závislost elastických konstant izotropního hookovského materiálu

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (.1)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (.2)$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = K - \frac{2}{3}G \quad (.3)$$

Vyjdeme ze tvaru s explicitně vyjádřenými napětími (viz PPII)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2G\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2G\varepsilon_1 + \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ &= 2G\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}\right) + K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2GD_{\varepsilon_1} + Ke \end{aligned} \quad (.4)$$

### 3.0.4 Hookův zákon v tenzorovém tvaru

Složkové rovnice Hookova zákona

$$\sigma_1 = 2GD_{\varepsilon_1} + Ke \quad (.5)$$

$$\sigma_2 = 2GD_{\varepsilon_2} + Ke \quad (.6)$$

$$\sigma_3 = 2GD_{\varepsilon_3} + Ke \quad (.7)$$

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} = 2GD_{\varepsilon_{12}} \quad (.8)$$

$$\tau_{23} = G\gamma_{23} = 2GD_{\varepsilon_{23}} \quad (.9)$$

$$\tau_{31} = G\gamma_{13} = 2GD_{\varepsilon_{13}} \quad (.10)$$

Deviátor tenzoru přetvoření

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_s & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_2 - \varepsilon_s & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_3 - \varepsilon_s \end{pmatrix} \quad (.11)$$

Obecný zápis Hookova zákona

$$\sigma_{ij} = 2GD_{s_{ij}} + \delta_{ij}Ke \quad (.12)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol.

$$\delta_{ij} = 1 \forall i = j \quad a \quad \delta_{ij} = 0 \forall i \neq j \quad (.13)$$

Analogický zápis Newtonova zákona

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{D}_{s_{ij}} + \delta_{ij}\kappa\dot{e} \quad (.14)$$

kde  $\kappa [Pa.s]$  je objemová („druhá“) viskozita

### 3.0.5 Závislost elastických konstant

Vztahy pro modul pružnosti ve smyku a Lamého konstantu  $\lambda$  byly odvozeny v PPII přímo ve tvarech

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (.15)$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (.16)$$

Modul objemové pružnosti je definován podobně jako v hydromechanice

$$K = \frac{\sigma_s}{e}, \quad (.17)$$

kde

$\sigma_s$  je střední napětí,

$e$  je poměrná změna objemu.

Pro tyto veličiny byly v PPII odvozeny vztahy

$$\sigma_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (.18)$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (.19)$$

do nichž dosadíme z Hookova zákona a dostaneme:

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_1(1-2\mu) + \sigma_2(1-2\mu) + \sigma_3(1-2\mu)] = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \quad (.20)$$

Dosazením do definičního vztahu pro  $K$  dostaneme

$$K = \frac{\sigma_s}{e} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}}{\frac{(1-2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{E}} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (.21)$$

Hookův zákon potřebujeme vyjádřit pomocí konstant, které mají analogii v hydromechanice, tedy pomocí  $K$  a  $G$ . Tak vyjádříme i Lamého konstantu  $\lambda$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{3}{3} = \frac{E(1+\mu) - E(1-2\mu)}{3(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{E}{3(1-2\mu)} - \frac{E}{3(1+\mu)} \frac{2}{2} = K - \frac{2}{3}G \quad (.22)$$

Obráceně, pokud známe  $K$  a  $G$ , tedy moduly pro objemovou a deviátorovou část deformace, můžeme dopočítat Poissonovo číslo  $\mu$  (které dává obvyklou představu o stlačitelnosti materiálu) ze vztahu

$$\mu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}. \quad (.23)$$

## Entropie

Entropie  $S$  je mírou pravděpodobnosti daného stavu; v termodynamice vratných dějů je definována následovně:

$$dS := \frac{dQ}{T} \quad (24)$$

Pro makromolekulární řetězec je entropie definována pomocí maximálního počtu dosažitelných (tvarových) konfigurací:

$$S := \ln(\text{maximální počet možných konfigurací}) \quad (25)$$

S rostoucí entropií určitého tvaru tedy roste pravděpodobnost, že se tento tvar řetězce reálně vyskytne. Pak pravděpodobnost  $P(E)$ , že vlákno s určitou energií  $W_{\text{bend}}$  se vyskytne právě v určité specifické konfiguraci (tvaru), lze vyjádřit vztahem

$$P(E) = \exp\left(-\frac{W_{\text{bend}}}{k_B T}\right), \quad (26)$$

kde pravá strana vyjadřuje Boltzmannův faktor<sup>12</sup>.

S rostoucí entropií určitého tvaru roste pravděpodobnost, že se tento tvar řetězce reálně vyskytne. Pro látky s nezanedbatelným vlivem entropie na elastické chování není rozhodující veličinou samotná deformační energie, ale Gibbsova volná energie.

## Gibbsova a Helmholtzova volná energie $G$

je největší množství energie uchované v soustavě za izotermických a izobarických (Gibbsova) nebo izovolumických (Helmholtzova) podmínek.

- Gibbsova volná energie – Termodynamika plynů a par (konstantní tlak)

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S, \quad (27)$$

- Gibbsova volná energie – Obecný tvar pro všechna skupenství

$$\Delta G = \Delta E + p\Delta V - T\Delta S, \quad (28)$$

- Helmholtzova volná energie – Tvar platný pro tuhé skupenství (konstantní objem)

$$\Delta G = \Delta E - T\Delta S, \quad (29)$$

kde

$H$  je entalpie,

$E$  je vnitřní energie,

$T$  je absolutní teplota,

$p$  je tlak,

$V$  je objem (pro látky v tuhém skupenství považován za konstantní)

Pro izotermický děj odpovídá minimalizace volné energie spontánnímu procesu, tj.  $\Delta G < 0$  s nárůstem entropie. Je-li však vlákno natahováno, klesá počet možných konfigurací (na jedinou v plně napřímené konfiguraci), tedy klesá i entropie, což odpovídá procesu nespontánnímu, tj.  $\Delta G > 0$ .<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Fung, YC, 1993

<sup>2</sup>Boal, MC, 2002

<sup>3</sup>[2] Boal, MC, 2002; [3] Sean, E, 2010; [6] Mofrad, CM, 2006; [15] Mucke, JMB, 2004

### 3.0.6 Entropická elasticita

Při teplotě absolutní nuly jakékoli vlákno (řetězec, makromolekula) zaujímá tvar minimalizující jeho energii, což odpovídá přímému prutu, pokud rozhodující veličinou je celková deformační energie včetně energie vynaložené na ohybovou deformaci vlákna  $W_{\text{bend}}$

$$W_{\text{bend}} = \frac{K_f}{2} \int_0^L \frac{1}{R^2} ds = \frac{K_f}{2} \left( \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 ds \right) = K_f A, \quad (.30)$$

kde

$K_f = EJ$  je ohybová tuhost vlákna,

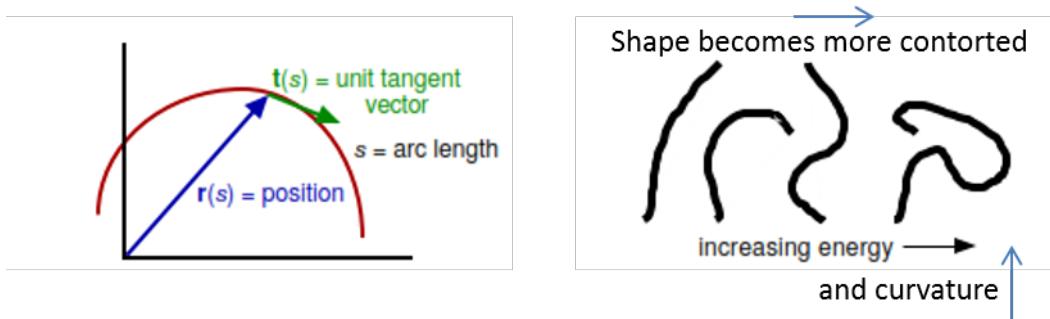
$ds$  element délky vlákna (křivočarý),

$L$  (contour length) je celková křivočará délka vlákna (v napřímeném tvaru rovná vzdálosti jeho konců),

$\frac{\partial t}{\partial s}$  je rychlosť zmény tečného vektoru podél délky  $s$  vlákna (lokální křivost  $\frac{1}{R}$ ).

$$P(E) = \exp \left( -\frac{W_{\text{bend}}}{k_B T} \right) = \exp \left( -\frac{K_f A}{k_B T} \right), \quad (.31)$$

kde pro malé  $K_f$  jde energie k nule nezávisle na hodnotě integrálu  $A$ .



Obrázek 3.3: Entropická elasticita

### Perzistentní délka – délka stálosti tvaru

Při nenulové absolutní teplotě  $T$  dochází k ohybu přímé tyče vlivem výměny energie s okolím (u molekul Brownův pohyb). Perzistentní délka (persistence length)  $L_p$  určuje délku, pod níž se (molekulární) řetězec chová jako tyč s +významnou ohybovou tuhostí, zatímco při délkách větších než  $L_p$  se chová jako ohebné vlákno.

$$L_p = \frac{K_f}{k_B T} = \frac{EJ}{k_B T} = \frac{E}{k_B T} \left( \frac{\pi}{64} d^4 \right), \quad (.32)$$

kde

$E$  je Youngův modul,

$d$  je průměr vlákna,

$J$  je kvadratický moment.

Pak u řetězce dochází k teplotním tvarovým fluktuacím; jeho tvar není jednoznačný, ale různé tvary jsou zaujímány s různou pravděpodobností.

$L \ll L_p$  (tuhá tyč):

- Řetězec se jeví přímý a poměrně tuhý (prut).
- Pro jeho chování je rozhodující ohybová energie, bez vlivu entropie.

$L \gg L_p$  (ohebné vlákno) nebo  $L \sim L_p$  (poloohebné vlákno):

- Řetězec zaujímá spíše zakřivené tvary a jeví se jako ohebné vlákno.
- Fluktuace tvaru a následně energie v termodynamické rovnováze se stávají významnými a entropická elasticita se stává rozhodující (elastomery).

## Entalpická a entropická elasticita

Pro krystalické látky vnější zatížení mění rovnovážné meziatomární vzdálenosti a zvyšuje vnitřní energii krystalu (entalpická elasticita).

Dlouhé ohebné molekuly elastomeru (gumy) jsou zakřivené a tepelná energie je udržuje ve stálém termálním pohybu. Následně se s deformací mění jejich entropie a vzniká elastické napětí (entropická elasticita).

Z porovnání entalpie, vnitřní energie a volné energie plyne, že pokud je příspěvek entropické elasticity zanedbatelný, redukuje se uvedený přístup na entalpickou („klasickou“) elasticitu, obvyklou u krystalických látek. Pokud je příspěvek entropické elasticity dominantní (u elastomerů), pak nárůst entropie (přirozený proces) odpovídá poklesu entalpie, resp. vnitřní energie (přirozený proces).

Entropická elasticita pocházející od protahování jednotlivých vláken termálními fluktuacemi se projevuje silnou nelinearitou. Proto silné deformační zpevnění struktury je považováno za známku entropické elasticity.

## Entropická elasticita u jednovláknového polymeru

Při nulové teplotě  $L_p \gg L$

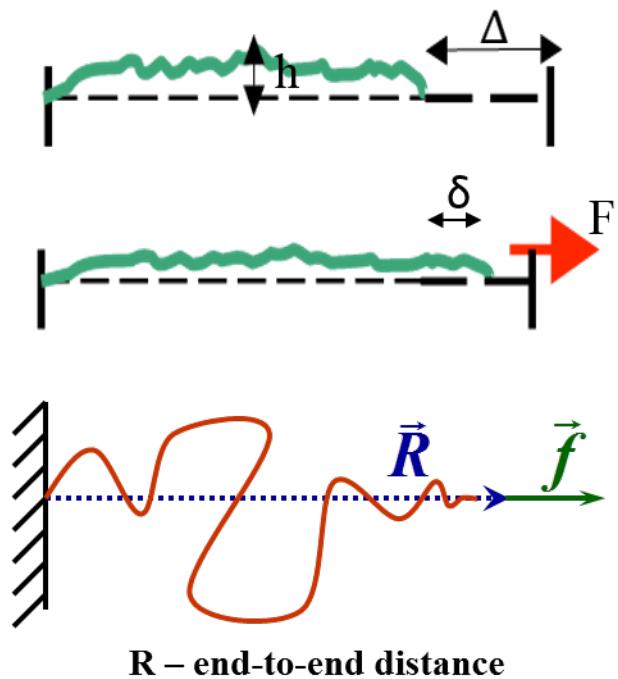


Obrázek 3.4: Jednovláknový kompozit při nulové teplotě

Ohybová tuhost

$$K_f = L_p K_B T \quad (.33)$$

Při nenulové teplotě  $L_p \ll L$

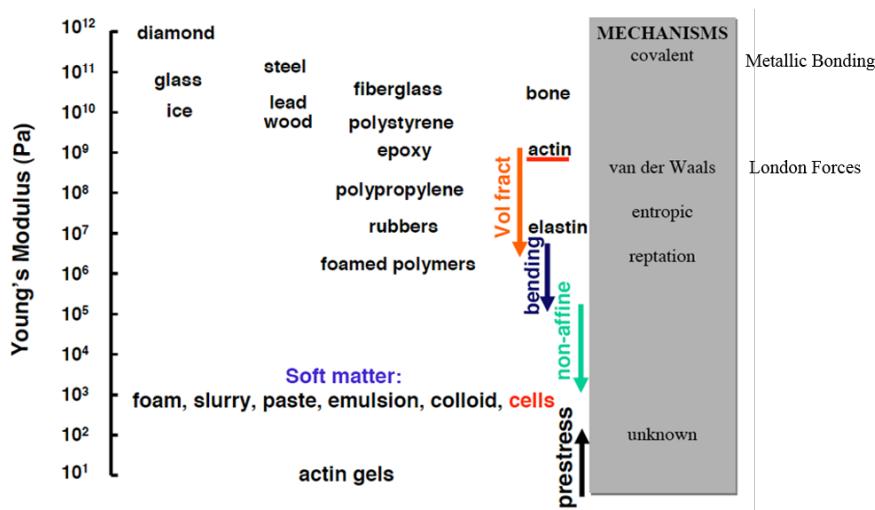


Obrázek 3.5: Jednovláknový kompozit při nenulové teplotě

Síla  $f$  se rovná derivaci Gibbsovy volné energie podle  $R$ <sup>4</sup>

$$f = \frac{\delta G}{\delta R} = \frac{3K_B T R}{L_p L} \quad (.34)$$

### Původ elasticity pro různé materiály



Obrázek 3.6: Elasticita různých materiálů

Pro krystalické látky vnější zatížení mění rovnovážné meziatomární vzdálenosti a zvyšuje vnitřní energii krystalu (entalpická elasticita).

<sup>4</sup>[2] Boal, Mechanics of the Cell, 2002; [17] Bustamante, Science, 1994

Dlouhé ohebné molekuly gumy jsou zakřivené a tepelná energie je udržuje ve stálém termálním pohybu. Následně se s deformací mění jejich entropie a vzniká elasticke napětí (entropická elasticita).<sup>5</sup>

## 3.1 Hyperelasticita – Konstitutivní vztahy elastomerů

Jako hyperelastické označujeme materiály vykazující konečná vratná přetvoření.

Konečná přetvoření jsou taková která nejsou infinitezimální tedy nekonečně malá. V praxi jsou to přetvoření větší než cca 1 %, chyba vzniklá jejich zanedbáním však roste nelineárně a stává se velmi významnou, dosáhnou-li přetvoření desítek procent.

### 3.1.1 Rozdíly oproti teorii malých deformací

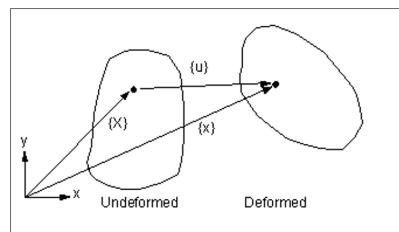
Definice délkových přetvoření pro malé deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (.35)$$

Definice normálových napětí pro malá přetvoření

$$\sigma_x = \frac{\partial F_x}{\partial Y \partial Z} \quad \sigma_y = \frac{\partial F_y}{\partial X \partial Z} \quad \sigma_z = \frac{\partial F_z}{\partial X \partial Y} \quad (.36)$$

Obě veličiny jsou vztaženy k původním (nedeformovaným) rozměrům elementu (obrázek).



Obrázek 3.7: Rozměry elementu

U velkých deformací jsou však skutečné (deformované) rozměry podstatně odlišné od původních a to je třeba respektovat. Proto jsou zavedeny různé definice tenzorů přetvoření i napětí.

### 3.1.2 Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa

- Pro malé deformace – smluvní přetvoření (engineering strain)
- Green-Lagrangeův tenzor přetvoření
- Almansiho-Hamelův tenzor přetvoření
- Cauchyho (logaritmický) tenzor přetvoření
- Tenzor deformačního gradientu
- Cauchy-Greenův tenzor deformace (pravý a levý)
- Tenzor protažení (stretch tensor)

Pro praktické použití jsou důležité vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů přetvoření.

<sup>5</sup>[1] Fung ,B, 1993; [2] Boal , MC, 2002; [6] Mofrad , CM, 2006; [24] Fabry, CGM, 2003

### 3.1.3 Tenzory popisující napjatost v bodě tělesa

- Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu
- Cauchyho tenzor napětí (skutečná napětí – true stress)
- Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu

Pro správné (jednoznačné) určení energie napjatosti je nutné pracovat se vzájemně si odpovídajícími tenzory napětí a přetvoření. Těmto dvojcím tenzorů říkáme energeticky konjugované tenzory. Takto konjugované jsou např.:.

- Green-Lagrangeův tenzor přetvoření a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí,
- Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí,
- Pro praktické použití jsou důležité vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů napětí.

### 3.1.4 Vymezení hyperelastických materiálů

Definice hyperelastického materiálu: Materiál nazýváme hyperelastickým, pokud existuje elastická potenciální funkce  $W$  (měrná deformační energie), která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření, resp. deformace a jejíž parciální derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí.

To lze vyjádřit např. následovně:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}}, \quad (.37)$$

kde

- $S_{ij}$  jsou složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
- $W$  je funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu
- $E_{ij}$  jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření
- $C_{ij}$  jsou složky pravého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru

Kontrolní otázka: Vyhovuje této definici hyperelasticity hookovský materiál? Odpověď.

### 3.1.5 Výpočet Cauchyho napětí u hyperelastických materiálů

Přepočet mezi tenzory napětí lze vyjádřit následovně:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{iR} S_{RS} F_{jS}, \quad (.38)$$

kde

- $S_{RS}$  jsou složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí,
- $\sigma_{ij}$  jsou složky Cauchyho tenzoru (skutečného) napětí.

Napětí vypočítané parciální derivací je 2. Piola-Kirchhoffovo, vynásobením složkou tenzoru deformačního gradientu dostaneme postupně 1. Piola-Kirchhoffovo a Cauchyho napětí (odpovídá přepočtu mezi tenzory napětí). Tak dostaneme vztah platný pro nestlačitelný materiál. Protože však je měrná energie napjatosti  $W$  vztážena na jednotku objemu v nedeformovaném stavu, pro stlačitelný materiál (objem se mění) je nutno výsledek vynásobit poměrem měrných hmotností, kde  $\rho_0$  odpovídá nedeformovanému a  $\rho$  deformovanému stavu.

### 3.1.6 Rozdělení deformace na objemovou a tvarovou složku

U všech hyperelastických konstitutivních modelů je stejně jako u většiny ostatních třeba odděleně modelovat objemovou a tvarovou (deviátorovou) složku deformace. Proto konstitutivní vztahy sestávají ze dvou částí:

- Vliv změny objemu na energii napjatosti popisují nejčastěji třetím invariantem tenzoru gradientu deformace  $J$  a konstantou popisující objemovou změnu (objemový modul pružnosti nebo jiná konstanta z něj odvozená). Kromě pěnových gum je změna objemu malá oproti změně tvaru a většinou vystačíme s jejím lineárním popisem.
- Vliv tvarové změny se popisuje nejčastěji pomocí modifikovaných invariantů některého z tenzorů přetvoření. Modifikace má za cíl právě oddělení tvarové změny (deviátorové složky tenzoru) od změny objemové (kulová složka tenzoru).

### 3.1.7 Přehled konstitutivních modelů respektujících velká přetvorení

#### Modely (hyper)elastické

Izotropní (též) nestlačitelné:

- Neo-Hooke
- Mooney-Rivlin
- Klosner-Segal
- Yeoh
- Polynomial
- Varga
- Ogden
- Van der Waals
- Arruda-Boyce
- Gent
- Pucci-Saccomandi
- Extended Tube
- Demiray

Izotropní stlačitelné

- Ogden (foam)
- Blatz-Ko (foam)
- Hill-Storakers (foam)

Anizotropní (též) nestlačitelné

- Polynomický
- Fung
- Choi-Vito
- Holzapfel, 2000
- Holzapfel, 2005
- Gasser (rozptyl směrů vláken, zjednodušená integrace)
- Microfiber (rozptyl směrů vláken, plná integrace)

## Modely neelastického chování

Modely s Mullinsovým efektem

- Ogden-Roxburgh
- Kachanov
- Miehe
- Marckmann

Visko-hyperelastické modely

- Bergström-Boyce

Elasto-plastické modely

- Ramberg-Osgood
- Chaboche

Creepové modely

- Norton

## Model Neo-Hooke

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru<sup>6</sup>

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2, \quad (.39)$$

kde

$G$  je počáteční modul pružnosti ve smyku, přičemž platí  $G = 2nkT$ , kde  $n$  je počet molekulárních řetězců v jednotkovém objemu,  $k$  je Boltzmanova konstanta a  $T$  je absolutní teplota,

$\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,

$d$  je parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  je objemový modul pružnosti,

$J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Vzhledem k tomu, že tvarová změna je u tohoto modelu popsána jedinou elastickou konstantou, je tento model použitelný do cca 30 %, kdy nelinearita není příliš výrazná. Model je lineární pro Cauchyho napětí a levý Cauchy-Greenův deformační tenzor.

Platí  $G = 2nkT$ , kde  $n$  je počet molekulárních řetězců v jednotkovém objemu,  $k$  je Boltzmanova konstanta a  $T$  absolutní teplota.

## Model Mooney-Rivlin 2-parametrický

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru

$$W = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2, \quad (.40)$$

kde

$c_{10}, c_{01}$  jsou materiálové parametry,

$\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,

---

<sup>6</sup>(Treloar, 1975, pro nestlačitelnost odvozen termodynamicky již 1934)

$\bar{I}_2$  je modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $d$  je parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  je objemový modul  
pružnosti,  
 $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Tento model je použitelný do cca 100 % přetvoření, pokud křivka přetvoření-napětí nevykazuje inflexi.

### Model Mooney-Rivlin 5-parametrický

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru

$$W = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) + c_{20} (\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{11} (\bar{I}_1 - 3) (\bar{I}_2 - 3) + c_{02} (\bar{I}_2 - 3)^2 + \frac{1}{d} (J - 1)^2, \quad (.41)$$

kde

$c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}$  jsou materiálové parametry,  
 $\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $\bar{I}_2$  je modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $d$  je parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  je objemový modul  
pružnosti,  
 $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Tento model je použitelný i tehdy, když křivka přetvoření-napětí vykazuje inflexi.

### Model Mooney-Rivlin 9-parametrický

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru

$$\begin{aligned} W = & c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) + c_{20} (\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{11} (\bar{I}_1 - 3) (\bar{I}_2 - 3) + c_{02} (\bar{I}_2 - 3)^2 \\ & + c_{30} (\bar{I}_1 - 3)^3 + c_{21} (\bar{I}_1 - 3)^2 (\bar{I}_2 - 3) + c_{12} (\bar{I}_1 - 3) (\bar{I}_2 - 3)^2 + c_{03} (\bar{I}_2 - 3)^3 + \frac{1}{d} (J - 1)^2, \end{aligned} \quad (.42)$$

kde

$c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{30}, c_{21}, c_{12}, c_{03}$  jsou materiálové parametry,  
 $\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $\bar{I}_2$  je modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $d$  je parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  je objemový modul  
pružnosti,  
 $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Tento model je použitelný i pro komplikované tvary křivek přetvoření-napětí.

### Model polynomický

Tento model je zobecněním modelů Mooney-Rivlin. Zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = \sum_{i+j=1}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^M \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}, \quad (.43)$$

kde

$c_{ij}$ ,  $d_k$  jsou materiálové parametry,

$\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,

$\bar{I}_2$  je modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,

$J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Pro  $M = 1$  a  $N = 1, 2, 3$  dostaneme jednotlivé modely Mooney-Rivlin. U těchto modelů je počáteční modul pružnosti ve smyku

$$G = 2(c_{10} + c_{01}). \quad (.44)$$

Pro počáteční objemový modul pružnosti zde platí vztah

$$K = \frac{2}{d_1}. \quad (.45)$$

### Model Ogden

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3) + \sum_{p=1}^N \frac{1}{d_p} (J - 1)^{2p}, \quad (.46)$$

kde

$\mu_p, \alpha_p, d_p$  jsou materiálové parametry,

$\bar{\lambda}_i (i = 1, 2, 3)$  jsou modifikovaná hlavní poměrná protažení, složky levého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,

$J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Pro  $N = 1$  a  $\alpha_p = 2$  dostaneme model Neo-Hooke.

U obecného Ogdenova modelu je počáteční modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^1 \alpha_p \cdot \mu_p. \quad (.47)$$

Pro počáteční objemový modul pružnosti zde platí vztah

$$K = \frac{2}{d_1}. \quad (.48)$$

Tento model dokáže popsat i extrémně velké deformace.

### 3.1.8 Zadávání vlastností hyperelastických materiálů v programových systémech MKP

Existují dvě základní možnosti zadávání vlastností hyperelastického materiálu do programových systémů MKP:

- Pomocí zadání experimentálních závislostí napětí-přetvoření, z nichž program vypočítá materiálové parametry zvoleného modelu. Volbu vhodného modelu provádíme obvykle na základě vizuálního porovnání experimentálních a vypočtených křivek a na základě vyčíslení celkové energetické chyby modelu.
- Pomocí přímého zadání elastických parametrů zvoleného modelu. Tento způsob lze použít:

- Při opakovaných výpočtech s materiélem, jehož konstanty jsme již dříve určili; vhodné jen při nepříliš odlišných deformačně-napěťových stavech.
- Pokud jsme konstanty modelu určili z experimentů jiným způsobem. Základem výpočtu konstant je metoda nejmenších čtverců, která hledá hodnoty konstant při minimalizaci kvadrátů odchylek. Při samostatném určování materiálových parameterů je možné použít sofistikovanější metody jejich určování, např. relativní odchylky místo absolutních, zvýraznění nebo potlačení některých částí deformačně napěťových křivek pomocí váhových koeficientů nebo změnou počtu zadávaných bodů experimentálních křivek (viz [www.hyperfit.wz.cz](http://www.hyperfit.wz.cz)).

### **3.1.9 Vstupní údaje potřebné pro identifikaci konstant hyperelastických modelů**

Pro určení materiálových parametrů se používají následující typy zkoušek:

1. Zkouška jednoosým tahem (v jednoosé tahové napjatosti)
2. Zkouška jednoosým tlakem (v jednoosé tlakové napjatosti)
3. Zkouška ekvibaxiální (ve dvouosé rovnoměrné napjatosti)
4. Zkouška smykem nebo krutem (ve smykové napjatosti)
5. Zkouška tahem při nulových příčných posuvech (v rovinné deformaci)
6. Zkouška tlakem při nulových příčných posuvech (v rovinné deformaci)
7. Zkouška objemové stlačitelnosti (v trojosé rovnoměrné napjatosti)

Některé z těchto zkoušek je v praxi velmi obtížné realizovat (např. zkouška prostým smykem – při velkých deformacích vznikají i normálová napětí, zkouška krutem na tenkostěnné trubce pro vyvolání homogenní smykové napjatosti zase vede ke ztrátě tvarové stability). Některé ze zkoušek jsou však pro nestlačitelný materiál vzájemně rovnocenné. Proto se v praxi provádějí jen některé z nich.

Proč jsou nutné zkoušky ve víceosé napjatosti?

### **3.1.10 Základní zkoušky pro identifikaci konstant hyperelastických modelů**

Pro určení materiálových parametrů hyperelastických konstitutivních modelů se v praxi nejčastěji používají následující základní typy zkoušek:

- Zkouška jednoosým tahem (v jednoosé tahové napjatosti). Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro tahovou zkoušku na plochých normalizovaných vzorcích ve tvaru oboustranné lopatky.
- Zkouška ekvibaxiální (ve dvouosé rovnoměrné napjatosti). Realizuje se na speciálních zkušebních strojích na plochých vzorcích kruhového nebo čtvercového tvaru.
- Zkouška tahem při nulových příčných posuvech (v rovinné deformaci). Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro tahovou zkoušku s použitím velmi širokých čelistí na plochých vzorcích obdélníkového tvaru s velmi malým poměrem délky ku šířce (cca 0,1).
- Zkouška objemové stlačitelnosti (v trojosé rovnoměrné napjatosti). Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro zkoušku tahem a tlakem na válcových vzorcích (nejčastěji průměr 29mm, výška cca 13mm), vtlačovaných těsným pístem do ocelové komůrky stejného tvaru a rozměrů.

### 3.1.11 Zadávání výsledků zkoušky do programových systémů MKP

Většina současných komerčních programových systémů MKP disponuje softwarem pro identifikaci materiálových parametrů jednotlivých hyperelastických modelů z naměřených experimentálních křivek napětí-přetvoření. Při jejich zadávání je třeba mít na paměti následující upozornění:

- Rozsah zkoušek (extrémní velikost přetvoření) by měl mírně přesahovat očekávaný rozsah přetvoření v řešeném výpočtovém modelu. Obvykle jej předem neznáme, jedná se tedy o iterační proces, kdy v prvním kroku zadáme raději maximální změřený rozsah přetvoření a na základě výsledků jej poté upravujeme. Příliš velký rozsah modelu totiž významně snižuje jeho přesnost.
- Nemáme-li k dispozici výsledky všech potřebných materiálových zkoušek, je velmi rizikantní používání zdánlivě přesnějších modelů používajících např. polynomy vyšších stupňů. Dosáhneme tím sice přesnější approximace zadaných křivek, ale výsledky pro jiné typy napjatosti mohou být zcela nesmyslné (nejsou podloženy experimentálními daty). Zásadně je možné takový výpočtový model použít jen pro řešení takových problémů, při nichž se nevyskytnou typy deformačně-napěťových stavů, pro něž nebyly zadány experimentální křivky. V opačném případě mohou být výsledky zcela chybné, podobně jako když rozsah přetvoření při určitém typu napjatosti (např. při jednoosém tahu) přesáhne rozsah realizovaný při experimentu.

### 3.1.12 Zásady pro práci s hyperelastickými modely v programových systémech MKP

- Vždy zevrubně prostudujeme manuál programu, abychom zjistili použitý tvar funkce pro energii napjatosti a význam jednotlivých materiálových parametrů, což je důležité pro jejich správné použití a orientační kontrolu jejich hodnot.
- Zjistíme, v jakých tenzorech napětí a přetvoření je třeba zadávat experimentální údaje.
- Zjistíme, v jakých tenzorech napětí a přetvoření obdržíme konečné výsledky.
- Při každé práci s novým konstitutivním modelem nebo novým programovým systémem vždy nejprve provedeme simulaci základních zadaných zkoušek materiálu, abychom na úloze se známými výsledky eliminovali chybný postup při tvorbě a zadávání modelu.

### 3.1.13 Vyhovuje hookovský materiál definici hyperelastických materiálů?

Funkce měrné energie napjatosti byla v lineární PP odvozena např. pro jednoosou napjatost ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} \sigma_1 : \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (.49)$$

a platí

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}. \quad (.50)$$

Podle rovnice (.50) pak derivace energie napjatosti podle přetvoření (pro malé deformace libovolně definovaného, např. smluvního přetvoření  $\varepsilon$ ) opravdu určuje odpovídající složku napětí (pro malé deformace opět podle libovolné definice tenzoru napětí), jak ukazuje následující výraz:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \right)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \right)}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{2} E \varepsilon = \sigma \quad (.51)$$

**Lineárně elastický materiál je tedy jen zvláštním případem materiálu hyperelastického.** Podobně lze vyjádřit napětí i pro víceosou napjatost.

### Energie napjatosti hookovského materiálu pro víceosou napjatost

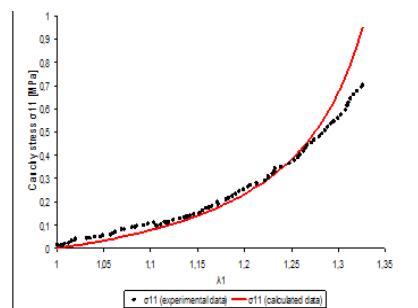
Funkci měrné energie napjatosti odvozenou v lineární PP pro jednoosou a smykovou napjatost lze zobecnit do tvaru

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (.52)$$

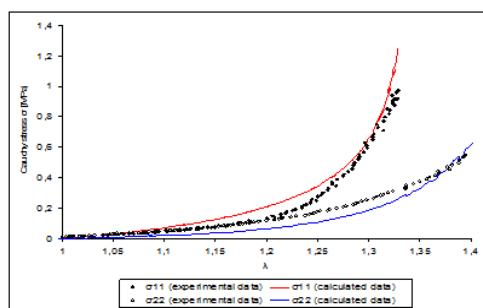
Při rozepsání tohoto vztahu do složek je třeba vzít v úvahu, že podle Einsteinova pravidla jsou oba indexy  $i$  a  $j$  sčítací. Parciální derivace této energie napjatosti podle kterékoli složky přetvoření určuje odpovídající složku napětí.

#### 3.1.14 Víceosé zkoušky elastomerů

Neplatí princip superpozice a každá složka napětí je funkcí několika složek přetvoření. Pro obecné vyjádření konstitutivních vlastností materiálu se proto používá měrná energie napjatosti, která je funkcí složek přetvoření.



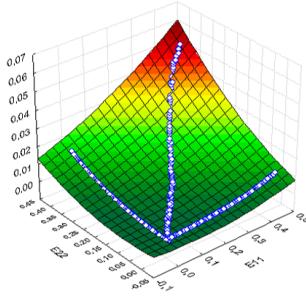
Obrázek 3.8: Jednoosá tahová zkouška (měkké biologické tkáně)



Obrázek 3.9: Dvouosá tahová zkouška (měkké biologické tkáně)

#### Měrná energie napjatosti jako funkce dvou složek přetvoření

Je tento materiál izotropní? Jakým typům zkoušek odpovídají experimentální body vyznačené v obrázku?



Obrázek 3.10: Měrná energie napjatosti

Použitá funkce pro energii napjatosti (Hayashi) má tvar:

$$W = -C \ln(1 - Q), \quad (.53)$$

kde

$$Q = \frac{1}{2}c_1 E_{11}^2 + \frac{1}{2}c_2 E_{22}^2 + c_3 E_{11} E_{22}$$

$E_{ii}$  jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření,

$C[\text{Pa}]$  je materiálový parametr definující tuhost materiálu,  
 $c_i$  jsou bezrozměrné materiálové parametry.

### Identifikace parametrů měrné energie napjatosti

Pro identifikaci parametrů je definována funkce ve tvaru

$$f_w = \sum_{k=1}^n (\psi_k - W_k)^2, \quad (.54)$$

kde  $\psi_k$  je deformační energie pro  $k$ -tý bod vypočítaná z navrženého konstitutivního modelu

$$\psi_k = \int_0^{E_{11}^k} S_{11} dE_{11} + \int_0^{E_{22}^k} S_{22} dE_{22} \quad (.55)$$

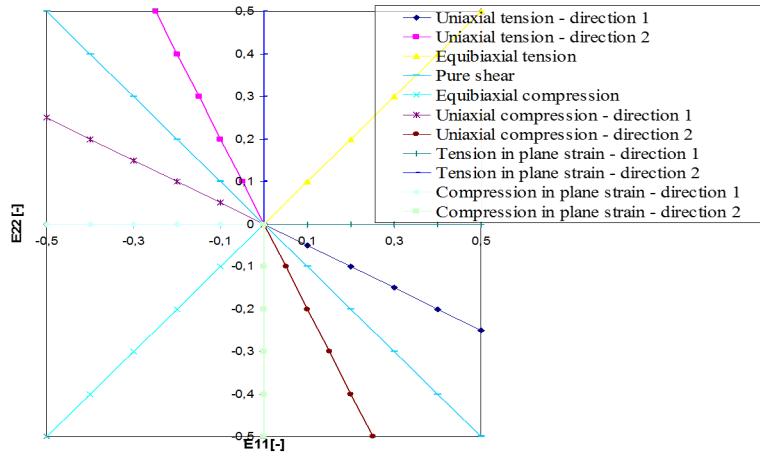
a  $W_k$  je deformační energie pro  $k$ -tý bod vypočítaná z experimentálních dat pomocí rovnice

$$W_k = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^k \frac{S_{jj}^i + S_{jj}^{i-1}}{2} (E_{jj}^i - E_{jj}^{i-1}) \quad (.56)$$

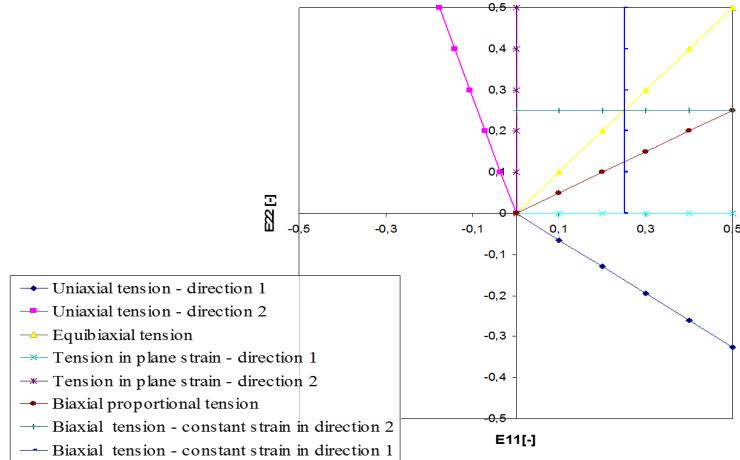
Pro konkrétní tvar konstitutivního modelu (např. logaritmickou funkci uvedenou na předchozí straně) se hledá taková kombinace jejích elastických parametrů, která minimalizuje funkci  $f_w$  – program Hyperfit<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup><http://hyperfit.wz.cz/>



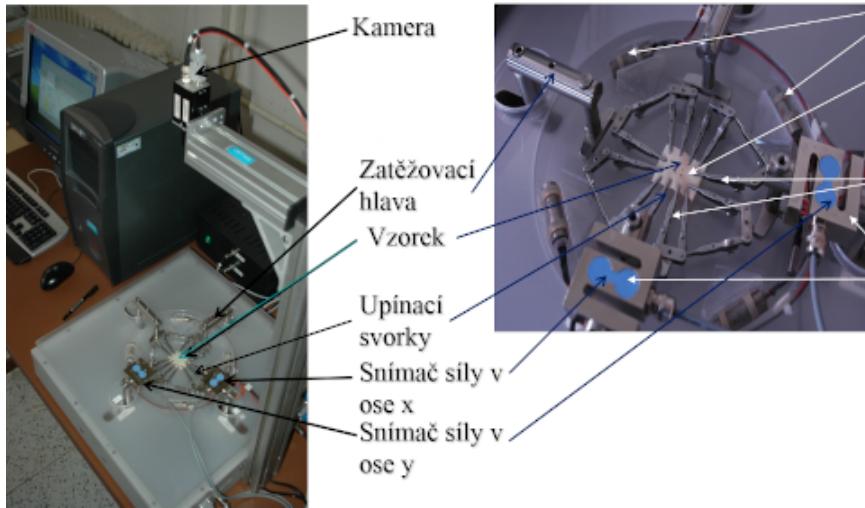
Obrázek 3.11: Znázornění různých typů zkoušek izotropního elastomeru v rovině dvou složek přetvoření



Obrázek 3.12: Znázornění různých typů zkoušek ortotropního elastomeru v rovině dvou složek přetvoření

Příklad konstitutivní rovnice ortotropního elastomeru

$$W = c_1 E_{11}^2 + c_2 E_{11} E_{22} + c_3 E_{22}^2 + c_4 E_{11}^3 + c_5 E_{11}^2 E_{22} + c_6 E_{11} E_{22}^2 + c_7 E_{22}^3 \quad (.57)$$



Obrázek 3.13: Zkušební stroj pro zkoušky elastomerů ve dvouosé napjatosti

## 3.2 Modely hyperelastického chování

### 3.2.1 Model Neo-Hooke

- NEO-HOOKE (1933-1934)
- vědním oborem, který dal vznik tomuto modelu je „statistická mechanika“
- odvozen z představy o entropickém chování polymerních řetězců za předpokladu Gaussovského (normálního) rozdělení hustoty pravděpodobnosti poloh koncových bodů řetězců při jejich deformaci
- jedná se tak vlastně o první model, respektující strukturu materiálu (ať velmi elementárně, téměř nedokonale)
- Ve tvaru

$$\psi = \frac{1}{2}G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (.58)$$

přičemž

$$G = NkT \sim \mu, \quad (.59)$$

kde

$N$  je počet řetězců na jednotku objemu (počet částic daného množství)

$k$  je Boltzmanova konstanta  $1,380\,648\,52 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

$T$  je termodynamická teplota (zkrátka teplota)

$\mu$  je modul pružnosti ve smyku (u nás značen  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , kde  $\mu$  je Poissonovo číslo)

Také platí stavová rovnice ideálního plynu:

$$pV = nRT = NkT \sim \mu \quad (.60)$$

Boltzmannova konstanta vyjadřuje vztah mezi teplotou a energií plynu. Vyjadřuje množství energie potřebné k zahřátí jedné částice ideálního plynu o jeden kelvin. Boltzmannova konstanta také úzce souvisí s entropií, protože stejně jako u entropie jde o množství energie na určitou teplotu. Byla pojmenována po rakouském fyzikovi Ludwigu Boltzmannovi, který se významně podílel na rozvoji statistické fyziky, kde tato konstanta hraje klíčovou roli.

Termodynamická teplota (též absolutní teplota nebo zkráceně teplota) je fyzikální stavová veličina dobře definovatelná protermodynamické systémy ve stavu termodynamické rovnováhy,

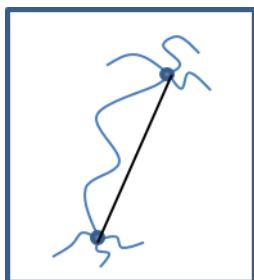
rostoucí s růstem vnitřní energie systému. Její nerovnost určuje směr samovolného (tedy bez konání práce) přestupu tepla od teplejšího systému k systému chladnějšímu, uvedou-li se do tepelného kontaktu.

## Odvození

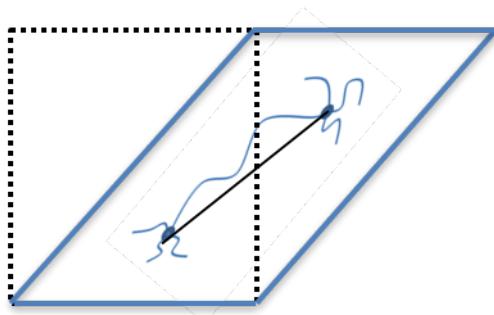
Pro objasnení tvorby tohoto modelu je výhodně uvést i základní kroky vedoucí k jeho finální podobě

Základní předpoklady:

- síť obsahuje obecně  $N$  řetězců na jednotku objemu
- žádná změna objemu během deformace (izochorický děj, nestlačitelný mat.)
- entropie sítě je dána součtem entropií jednotlivých řetězců
- koncové body mezi jednotlivými řetězci se při deformaci hýbou tak, jako by byly zality do elastického kontinua (affinní deformace)

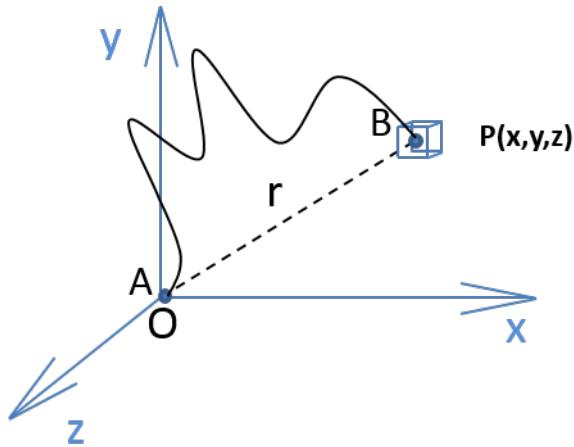


Obrázek 3.14: Sklon pod úhlem  $\alpha$



Obrázek 3.15: Sklon pod úhlem  $\alpha + \text{rotace}$

Gaussovské rozdělení hustoty pravděpodobnosti poloh koncových bodů řetězce



Obrázek 3.16:  $P(x, y, z)$

Kuhn (1934,1936) odvodil vztah, který reprezentuje pravděpodobnost, že složky vektoru  $r$  definovaného spojnicí koncových bodů vlákna budou ležet v intervalu:

$$odx do(x + dx) ody do(y + dy) odz do(z + dz) \quad (.61)$$

pravděpodobnost je

$$p(x, y, z) dx dy dz = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2(x^2 + y^2 + z^2)) dx dy dz \quad (.62)$$

přičemž

$$b^2 = \frac{3}{2} nl^2 \quad (.63)$$

a uvažuje se  $r \ll nl$

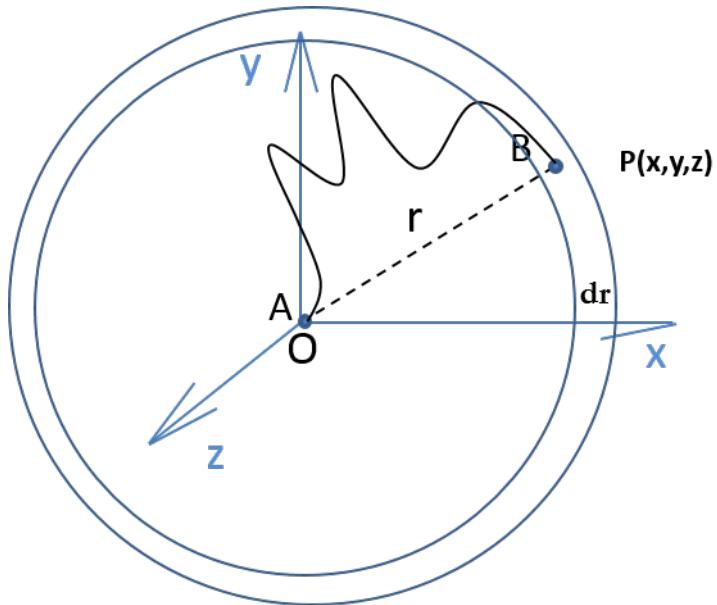
- předpoklad, že vzdálenost není v žádném případě srovnatelná s nataženým řetězcem ( $nl$ )
- nezahrnuje také efekt postupného protažení (pak nutné použít ne-Gaussovské rozdělení)

Funkce je sféricky symetrická  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , proto

$$p(x, y, z) dx dy dz = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2(r^2)) dx dy dz \quad (.64)$$

pak zřejmě platí  $p \rightarrow 1 \Leftrightarrow r \rightarrow 0$ .

Distribuce spojnice koncových bodů vlákna – distribuce  $r$  vektoru (ne složek!!!)



Obrázek 3.17: Distribuce  $r$

- uvažujme všechny směry ( $x, y, z$ ) stejně zastoupeny
- pak se bod B asi nepohybuje od  $x$  do  $x+dx$ , atd... ale je nutné aby se pohyboval např. po kulové skořepině s poloměrem  $r$  a elem. tloušťkou  $dr$ :

$$P(r) dr = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp(-b^2(r^2)) 4\pi r^2 dr = 4 \frac{b^3}{\pi^{1/2}} r^2 \exp(-b^2(r^2)) dr \quad (.65)$$

$P(r)$  je nulová při  $r = 0$  a dosahuje svého maxima ( $r_m$ ) při:

$$\left( 4 \frac{b^3}{\pi^{1/2}} r^2 \exp(-b^2 r^2) \right) = 0 \Rightarrow r_m = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2nl^2}{3}} \quad (\text{příliš se však nepoužívá}) \quad (.66)$$

Důležitější je spíše hodnota střední hodnoty kvadrátu  $r$ , definovaná

$$\bar{r}^2 = \frac{\int_0^\infty r P(r) dr}{\int_0^\infty P(r) dr} = \frac{3}{2b^2} = nl^2 \quad (.67)$$

nyní se budeme snažit zjistit entropii jednoho řetězce a entropii soustavy řetězců (celé sítě). Začneme Boltzmanem (1887), který navrhl entropii (pro spojité izolované kontinuum) ve tvaru

$$S = k \ln(\Omega), \quad (.68)$$

kde  $\Omega$  charakterizuje část fázové prostoru (neboli počet rozlišitelných (mikro)stavů daného systému

Pravděpodobnostní prostor pohybu koncového bodu již máme definovaný

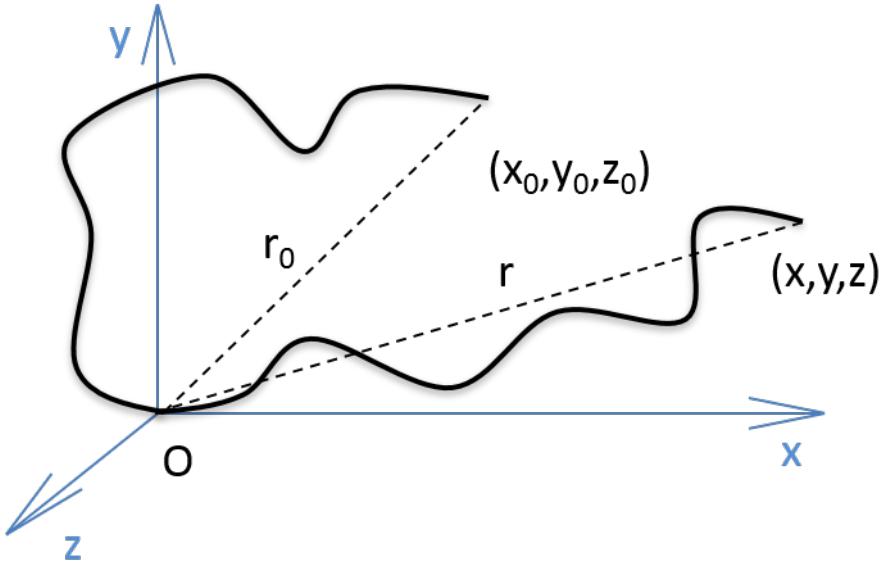
$$\Omega = p(x, y, z) d\tau = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp(-b^2(r^2)) d\tau, \quad (.69)$$

tedy

$$S = k \{ \ln [p(x, y, z) d\tau] \} = k \left\{ \ln \left( \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \right) - b^2 r^2 + \ln(d\tau) \right\} \quad (.70)$$

z čehož vyplýne

$$S = c - kb^2 r^2 \quad (.71)$$



Obrázek 3.18: Řetězec

- entropie řetězce v původním stavu:

$$S_0 = c - kb^2 r_0^2 = c - kb^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \quad (.72)$$

- entropie řetězce v deformovaném stavu

$$S = c - kb^2 r^2 = c - kb^2(\lambda_1^2 x_0^2 + \lambda_2^2 y_0^2 + \lambda_3^2 z_0^2) \quad (.73)$$

- příspěvek k celkové entropii od tohoto jednoho řetězce

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_0 - S = c - kb^2(\lambda_1^2 x_0^2 + \lambda_2^2 y_0^2 + \lambda_3^2 z_0^2) - c + kb^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \\ &= -kb^2 [x_0^2(\lambda_1^2 - 1) + y_0^2(\lambda_2^2 - 1) + z_0^2(\lambda_3^2 - 1)] \end{aligned} \quad (.74)$$

- Celková entropie sítě bude nejspíš součtem  $N$  příspěvků  $\Delta S$

$$S = \sum \Delta S = -kb^2 [\sum x_0^2(\lambda_1^2 - 1) + \sum y_0^2(\lambda_2^2 - 1) + \sum z_0^2(\lambda_3^2 - 1)] \quad (.75)$$

$b$  je sice funkci délky řetězce, nicméně pokud se předpokládá délka všech řetězců stejná, je  $b$  konstantou

Protože jsou směry vektoru  $r_o$  v nezatiženém stavu zcela náhodné, nelze předpokládat žádnou preferenci směru  $x$ ,  $y$ , nebo  $z$ . Tedy pravděpodobně platí

$$\sum x_0^2 + \sum y_0^2 + \sum z_0^2 = \sum r_0^2 \quad (.76)$$

a zároveň

$$\sum x_0^2 = \sum y_0^2 = \sum z_0^2 = \frac{1}{3} \sum r_0^2 \quad (.77)$$

nicméně

$$r_0^2 = N \bar{r}_0^2, \quad (.78)$$

kde  $\bar{r}_0^2$  je střední délka řetězců v nedeformovaném stavu.

Po dosazení do celkové energie

$$\begin{aligned} S &= \sum \Delta S = -\frac{1}{3} k N b^2 \bar{r}_0^2 [(\lambda_1^2 - 1) + (\lambda_2^2 - 1) + (\lambda_3^2 - 1)] \\ &= -\frac{1}{3} k N b^2 \bar{r}_0^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \end{aligned} \quad (.79)$$

kde

$$\bar{r}_0^2 = \frac{3}{2} b^2$$

je entropie

$$S = -\frac{1}{2}kN(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (.80)$$

Odvodili jsme entropii, ale potřebujeme energii ... otázkou tedy je, co dál? Pomůže nám tzv. volná energie (Helmholtzova)

$$\psi = U - TS \quad (.81)$$

Do které přispívají jak vnitřní energie (deformační energie přijata vychýlením se z rovnovážných poloh daných vazbami krystalové mřížky), tak entropie (pocházející ze změny charakteru uspořádání).

Ačkoliv se ani eleastomery nedeformují čistě entropicky, příspěvek od vnitřní energie je často možné zanedbat proti příspěvku od změny entropie.

$$\psi = -TS = \frac{1}{2}kNT(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = -\frac{1}{2}G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (.82)$$

## Applikace

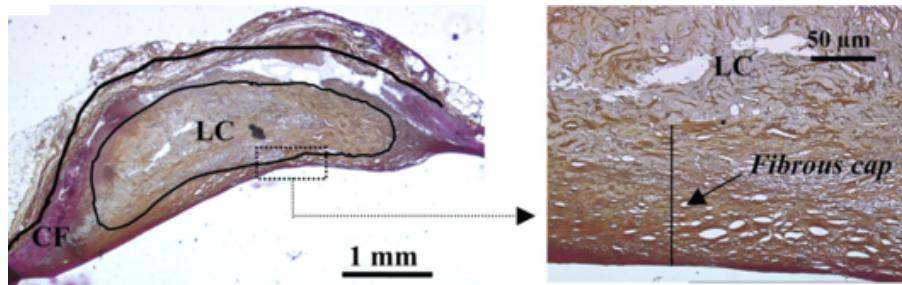
**TABLE 1**  
Non-exhaustive list of FE studies of patient-specific diseased human arteries detailing the method of geometry acquisition, the consideration of residual stresses, the used FE and material models.

FE study	Stress type <sup>a</sup>	Residual stress <sup>b</sup>	Imaging modality <sup>c</sup>	Vessel type	# Of patients	FE model	Material model <sup>d</sup>
Cheng et al. (1993)	CS	N	Histology	Coronary	24	Plane strain	Linear elastic, transversely isotropic
Huang et al. (2001)	MPS	N	Histology	Coronary	20	Plane strain	Mooney-Rivlin
Holzapfel et al. (2002)	AS,CS	N	hr-MRI	Iliac	1	3D	Nonlinear anisotropic Holzapfel et al. (2000); Gasser and Holzapfel (2002)
Kazemipur-Mofrad et al. (2003)	VMS	Y	Histology, MRI	Carotid bifurcation	4	3D, plane strain	Demiray (1972)
Patel et al. (2003)	CS	Y	Histology	Carotid	4	Plane strain	Mooney-Rivlin
Williamson et al. (2003)	MPS	Y	Histology	Coronary	1	Plane strain	Linear elastic, orthotropic+ Demiray (1972)
Chau et al. (2004)	ES	N	Histology, OCT	Coronary	-	Plane strain	Mooney Rivlin
Kazemipur-Mofrad et al. (2004)	-	-	IVUS, MRI	Carotid bifurcation	4	3D	Artery: rigid; Blood: INF
Holzapfel et al. (2005b)	CS	N	Histology, hr-MRI	External iliac	1	3D	Nonlinear anisotropic: Holzapfel et al. (2005a)
Imoto et al. (2005)	EQS	N	Idealized model, IVUS	Coronary	15	3D	Linear elastic, orthotropic
Ohayon et al. (2005)	CS	N	IVUS	Coronary	1	3D, plane strain	Linear elastic, orthotropic
Tang et al. (2005)	AS, CS, MPS	N	MRI	Coronary	1	3D	Artery: Mooney-Rivlin + Demiray (1972); Blood: INF
Li et al. (2006)	VMS	N	Histology, hr-MRI	Carotid	5	Plane strain	Ogden (1972); two terms
Gasser and Holzapfel (2007b)	MPS	N	Histology, hr-MRI	External iliac	1	Plane strain	Nonlinear anisotropic: Gasser et al. (2006)
Ohayon et al. (2007)	VMS	Y	Histology	Coronary	6	Plane strain	Neo-Hookean
Kock et al. (2008)	MPS	N	MRI	Carotid bifurcation	2	3D	Artery: neo-Hookean; Blood: INF
Li et al. (2008)	VMS	N	hr-MRI	Carotid	40	Plane strain	Ogden (1972); two terms
Ohayon et al. (2008)	VMS	N	IVUS	Coronary	24	Plane strain	Linear elastic, orthotropic
Gao et al. (2009)	VMS	Partially included	hr-MRI	Carotid bifurcation	4	3D	Artery: 5-parameter Mooney-Rivlin Blood: INF
Kiousis et al. (2009)	MPS	N	hr-MRI	Carotid bifurcation	1	3D	Nonlinear anisotropic: Holzapfel et al. (2005a)
Le Floc'h et al., (2009)	-	N	Idealized model, IVUS	Coronary	5	Plane strain	Hooke's law
Mortier et al. (2010)	CS	N	Rotational angiography	Coronary bifurcation	1	3D	Nonlinear anisotropic Holzapfel et al. (2005a)
Sadat et al. (2010)	VMS	N	hr-MRI	Carotid	50	Plane strain	Ogden (1972); two terms
Auricchio et al. (2011)	VMS	N	CTA	Carotid bifurcation	1	3D	5-parameter Mooney-Rivlin
Speelman et al. (2011)	VMS	N	Histology	Coronary	7	Plane strain	Neo-Hookean
Kelly-Arnold et al. (2013)	SCF	N	hr- $\mu$ CT	Coronary	66	3D (micro-calification study)	Hooke's law

**Table 2**

Nonlinear strain-energy functions for characterizing the biomechanical response of arterial tissues used in FE studies as displayed in Table 1 ( $I_1, I_2, I_4, I_6$ =invariants;  $c_1, c_2, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, \mu_p, a_p, a, b, k_1, k_2, \rho$ =material parameters;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ =principal stretches;  $\kappa$ =dispersion parameter;  $a_p, b, k_2, \rho$  and  $\kappa$  are dimensionless parameters while the remaining are stress-like material parameter).

	Strain-energy function
Neo-Hookean model	$\Psi = c_1(I_1 - 3)$
Mooney-Rivlin model	$\Psi = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)$
5-Parameter Mooney-Rivlin model	$\Psi = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) + c_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + c_{02}(I_2 - 3)^2$
Ogden (1972)	$\Psi = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{a_p} (\lambda_1^{a_p} + \lambda_2^{a_p} + \lambda_3^{a_p} - 3)$
Demiray (1972)	$\Psi = \frac{a}{b} \left\{ \exp \left[ \frac{b}{2}(I_1 - 3) \right] - 1 \right\}$
Holzapfel et al. (2000)	$\Psi = c_1(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_{21}} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \right\}$
Holzapfel et al. (2005a)	$\Psi = c_1(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_{21}} \sum_{i=4,6} [\exp \left\{ k_2[(1-\rho)(I_i - 3)^2] + \rho(I_i - 1)^2 \right\} - 1]$
Gasser et al. (2006)	$\Psi = c_1(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_{21}} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp[k_2(I_i^* - 1)^2] - 1 \right\}$ $I_i^* = \kappa I_i + (1 - 3\kappa) I_i$



$$W = a(I_1 - 3)$$

$$E_i \sim 6a$$

Materiál	$E$
fibrosis	500 kPa
core	5 kPa
artery	150 kPa

Obrázek 3.19: Ohayon (2007)

### Nenormální (neGaušovské) rozdělení pravděpodobnosti

- model Neo-Hook selhává při vyšších přetvořeních – predikuje lineární odezvu, ač realita je silně nelineární
- důvodem je Gaussovské rozdělení pravděpodobnosti poloh koncových bodů vláken
- řešením je tedy použít ne-gaussovské rozdělení z čehož vznikají modely, jež bývají souhrnně označovány jako modely s omezenou (někdy též limitovanou nebo konečnou) protažitelností řetězce – limiting chain extensibility
- jedním z nejznámějších je model Arruda-Boyce (1998) nebo model Gent

### 3.2.2 Model Mooney-Rivlin

#### Mooneyho formulace (1940)

- guma je nestlačitelná a izotropní v nedeformovaném stavu
- Hookeův zákon platí pro „simple shear“ nebo „simple shear“ s kombinací předchozího tlaku nebo tahu (simple shear v rovině kolmé na předchozí zatížení)

Čistě matematická formulace hustoty deformační energie ve tvaru:

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right), \quad (.83)$$

kde  $C_1$ [MPa] a  $C_2$ [MPa] jsou materiálové parametry.

Pokud  $C_2 = 0$ , pak existuje zřejmá podobnost s modelem Neo-Hook

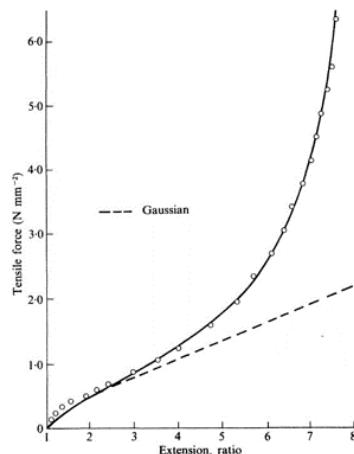
$$2C_1 = G = NkT, \quad (.84)$$

kde

$N$  je počet řetězců v objemu,

$k$  je Boltzmanova konstanta,

$T$  je termodynamická teplota.



Obrázek 3.20: Aproximace experimentu Mooneyho formulací

#### Rivlinova formulace (1948)

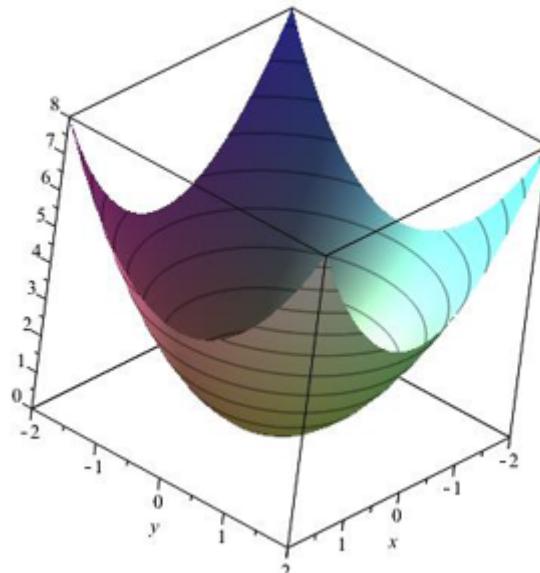
- guma je nestlačitelná a izotropní v nedeformovaném stavu
- + logický závěr: pokud je materiál izotropní, funkce deformační energie by měla být symetrická s ohledem na  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- navrženou  $W$  nesmí ovlivnit změna znaménka u dvou  $\lambda_i$  (souvisí s rotací tělesa o 180°)

Navržená  $W$  by tedy měla být konkavní (polykonkavní), Rivlin navrhuje „strain ellipsoid“

- Existence globálního minima energie
- Kladný přírůstek napětí při kladném přírůstku deformace

Pak lze zřejmě vytvořit určité vztahy, tj. invarianty, pro  $\lambda_i$ . Rivlin je navrhují, ve formě druhých mocnin následovně:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (.85)$$



Obrázek 3.21: Konvexní funkce

Nestlačitelnost umožňuje definovat předchozí dva invarianty jako:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \end{aligned} \quad (.86)$$

V podobě dvou nezávislých invariantů je tak navržena i energie napjatosti

$$W = \sum_{i=0,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \quad (.87)$$

přičemž  $(I_1 - 3)$  a  $(I_2 - 3)$  je navrženo schválнě, aby členy byly 0 při nulových deformacích a  $C_\infty = 0$  ze stejného důvodu.

Bohužel, bez nějaké „první“ znalosti o křivce  $\sigma - \varepsilon$  je velmi obtížné vybrat koeficienty  $i,j$  smysluplně. Většinou se berou první členy rozvoje.

$$\begin{aligned} i = 1, j = 0 : \quad W &= C_{10}(I_1 - 3)^1 = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad \dots \text{Neo-Hook} \\ i = 0, j = 1 : \quad W &= C_{01}(I_2 - 3)^1 = C_{01} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right) \quad \dots \text{nemá aplikaci} \end{aligned} \quad (.88)$$

Kombinace obou dává opět Mooneyho formulaci. Co další kombinace?

### 3.2.3 Model Yeoh

- YEOH (1993)
- vychází z Mooney-Rivlinovy formulace
- Yeoh dokázal, že celková energie napjatosti je více ovlivněna přírůstky  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  než  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  a tedy je navržena řada v podobě:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (.89)$$

- později bylo usouzeno, že se může vzít i vyšší počet členů

$$W = \sum_{i=1}^5 C_{i0}(I_1 - 3)^i \quad (.90)$$

## Důkaz

Vychází se z modelu Mooney-Rivlina (kapitola 3.2.2)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (.91)$$

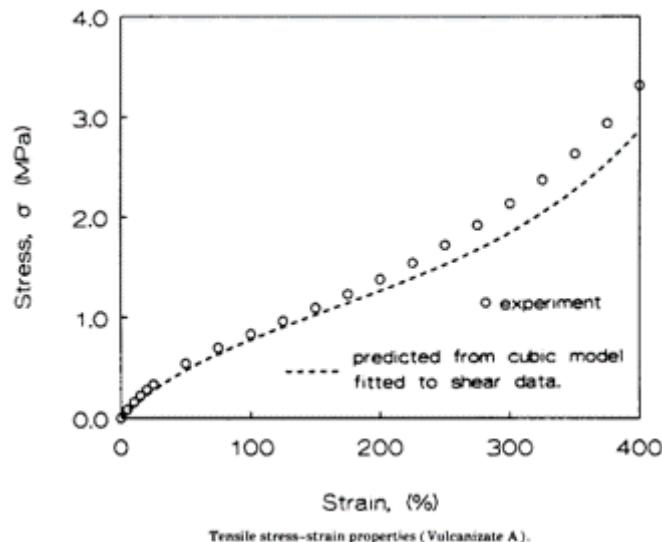
přičemž

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01} + C_{11}(I_2 - 3)$$

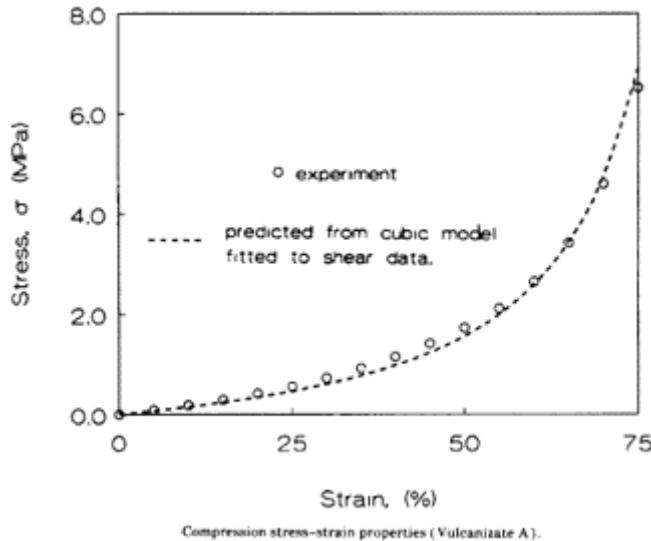
příspěvek je tedy nulový jen v případě, že  $C_{01} = 0$  a  $C_{11} = 0$ .

při dosazení zpět plyne původní forma konstitutivní rovnice ve tvaru:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (.92)$$



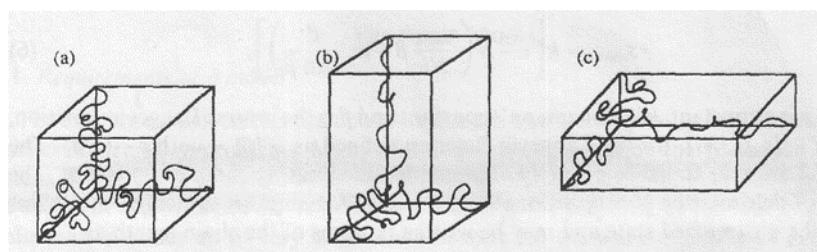
Obrázek 3.22: Aproximace experimentu (tah) modelem Yeoh



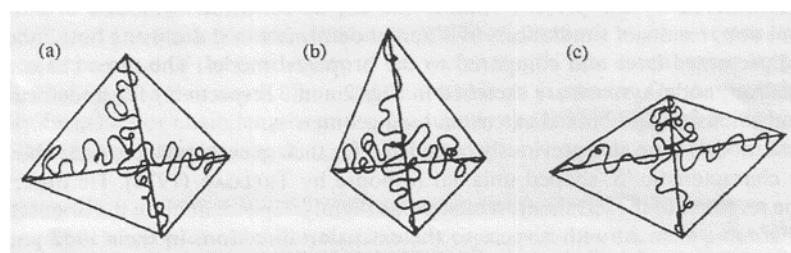
Obrázek 3.23: Aproximace experimentu (tlak) modelem Yeoh

### 3.2.4 Model Arruda-Boyce

Tento model<sup>8</sup> na rozdíl od předchozích modelů ryze fenomenologických vychází ze struktury materiálu, tvořené vláknitými zvlněnými řetězci makromolekul elastomeru. Při jejich protažení dochází postupně k jejich napřímování a tím ke zvyšování tuhosti elastomeru – deformačnímu zpevnění. Protože řetězce jsou v prostoru náhodně uspořádány (izotropní materiál), vyžaduje vyčíslení jejich příspěvku k deformační energii všeobecnou 3D integraci (přes kouli). Pro zjednodušení byla hledána taková uspořádání vláken, která při zachování symetrie podle hlavních materiálových rovin umožní jednodušší výpočty. Dříve navržená zjednodušení (třířetězcový model krychlový, čtyřřetězový model tetraedrický) tyto požadavky nesplňovala.



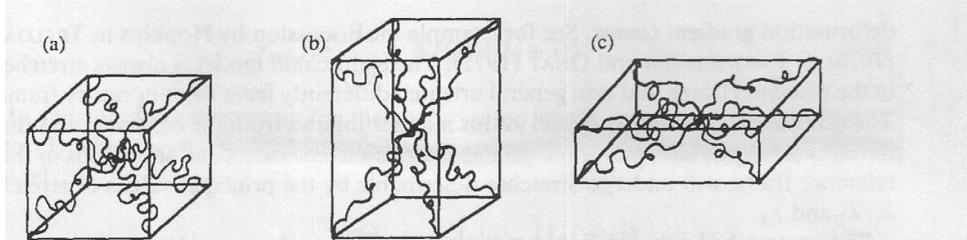
Obrázek 3.24: Třířetězcový model krychlový



Obrázek 3.25: Čtyřřetězcový model tetraedrický

<sup>8</sup>Arruda EM, Boyce MC: A three-dimensional constitutive model for large stretch behavior of rubber elastic materials. J. Mechanics and Physics of Solids, 1993, Vol. 41/2, pp. 389-412.

Model Arruda-Boyce zavádí hexagonální buňku (krychli) s rohy propojenými s jejím středem pomocí osmi molekulárních řetězců – proto někdy nazýván „8-chain model“. U něj se všechny řetězce při jakémkoli deformačním modu protahují.



Obrázek 3.26: Osmiřetěžcový model krychlový

Molekulární řetězce elastomerů nejsou na rozdíl od krystalických materiálů spojeny kovalentními vazbami a uplatňuje se u nich jiný deformační mechanismus. Vhodným modelem je řetězec tuhých článků vzájemně spojených rotačními vazbami, které minimalizují ohybovou tuhost řetězce. Pak je jeho tvar výsledkem náhodných tepelných fluktuací a o pravděpodobnosti určitého tvaru molekulárního řetězce rozhoduje entropie – jedná se o entropickou elasticitu.

Pro protažení řetězce definované obvyklým způsobem

$$\lambda_{\text{chain}} = \frac{r_{\text{chain}}}{r_0} \quad (.93)$$

kde  $r_0 = l\sqrt{N}$  je počáteční délka řetězce, daná statisticky délkou článku řetězce  $l$  a počtem článků  $N$ . Limitní délka řetězce a limitní protažení řetězce je pak

$$r_L = lN \quad \lambda_L = \frac{r_L}{r_0} = \sqrt{N} \quad (.94)$$

Model vychází z předpokladu afinní deformace (deformace řetězců-vláken je identická s deformačí okolní matrice).

Použijeme-li pro tvar řetězce Gaussovou statistiku, dostaneme pro model Neo-Hooke energii napjatosti ve tvaru:

$$W = \frac{1}{2}G(\bar{I}_1 - 3) = \frac{1}{2}G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (.95)$$

kde

- $G = nk_B T$  je počáteční modul pružnosti ve smyku,
- $n$  je hustota řetězce (počet řetězců v jednotkovém objemu)
- $k_B$  je Boltzmannova konstanta,
- $T$  je absolutní teplota.

Použitím Langevinovy statistiky dostaneme konfigurační entropii pro délku řetězce  $r_{\text{chain}}$ :

$$S_{\text{chain}} = k_B \left\{ c - N \left[ \frac{r_{\text{chain}}}{Nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right] \right\} \quad (.96)$$

kde  $c$  je konstanta a  $\beta$  je inverzní Langevinova funkce definovaná vztahem

$$\beta = \Im \left( \frac{r_{\text{chain}}}{Nl} \right) \quad (.97)$$

pro

$$\Im(\beta) = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \quad (.98)$$

Použití Langevinovy statistiky umožnuje správně započítat limitní protažení strukturních řetězců  $\lambda_L$ . Deformační práce při izotermickém ději je pak úměrná změně entropie při protažení řetězců a dá se vyjádřit následovně

$$W = nk_B T N \left[ \frac{r_{\text{chain}}}{Nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right] = G \lambda_L \left\{ \lambda_{\text{chain}} \beta - \lambda_L \ln \left[ \frac{\sinh(\beta)}{\beta} \right] \right\} \quad (.99)$$

Složky napětí dostaneme standardním způsobem derivací podle složek deformačního tenzoru. Protože materiál je nestlačitelný, figuruje ve vztahu hydrostatický tlak jako další proměnná (Lagrangeův multiplikátor), která se musí určit z okrajových podmínek.

Deformace různě orientovaných řetězců je při každém deformačním stavu různá, takže pro určení celkové deformační práce je nutné pro každý takový stav provádět integraci přes distribuci různě orientovaných řetězců. Při deformaci dochází k rotaci jednotlivých řetězců, takže pro určení jejich protažení (stretch tensor) je třeba provést polární dekompozici tenzoru deformačního gradientu a poté určit hlavní souřadnice tenzoru protažení. Derivací této práce podle hlavních protažení (hlavní složky tenzoru protažení) dostaneme 1. Piola-Kirchhoffovo napětí a následně skutečné napětí  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{dW}{d\lambda_i} + p \quad (.100)$$

kde  $p$  je Lagrangeův multiplikátor s fyzikálním významem tlaku, který se určí z okrajových podmínek. Ten lze eliminovat vyjádřením rozdílu hlavních napětí

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \lambda_1 \frac{dW}{d\lambda_1} - \lambda_2 \frac{dW}{d\lambda_2} \quad (.101)$$

Výhodou modelu je kromě (kubické) symetrie podle všech hlavních rovin, že všechny řetězce jsou při jakémkoli deformačním stavu protahovány (dáno podmínkou nestlačitelnosti materiálu).

V nedehformovaném stavu je délka kteréhokoli z řetězců v krychli o hraně  $a_0$  dána vztahem:

$$2r_0 = \sqrt{3a_0^2} = \sqrt{3}a_0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_0 \quad (.102)$$

Vektorově je ho možné napsat v hlavním souřadnicovém systému tenzoru protažení (konkrétně pro řetězec směřující do 1. kvadrantu):

$$\vec{r}_0 = \frac{a_0}{2}\vec{i} + \frac{a_0}{2}\vec{i} + \frac{a_0}{2}\vec{k} \quad (.103)$$

V dehformovaném stavu bude vektorový zápis:

$$\vec{r}_{\text{chain}} = \lambda_1 \frac{a_0}{2}\vec{i} + \lambda_2 \frac{a_0}{2}\vec{i} + \lambda_3 \frac{a_0}{2}\vec{k} \quad (.104)$$

a velikost vektoru řetězce v dehformovaném stavu bude

$$r_{\text{chain}} = \frac{a_0}{2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \quad (.105)$$

Pak protažení tohoto řetězce je

$$\lambda_{\text{chain}} = \frac{r_{\text{chain}}}{r_0} = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{I_1}{3}} \quad (.106)$$

Dosazením (.106) do (.99) dostaneme energii  $W$  jako funkci  $I_1$ .

Protažení jakéhokoli řetězce  $\lambda_{\text{chain}}$  při jednoosém tahu i tlaku vychází z podmínky nestlačitelnosti materiálu

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}. \quad (.107)$$

Pak dosazením do (.106) dostaneme pro protažení řetězce

$$\lambda_{\text{chain}} = \frac{r_{\text{chain}}}{r_0} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}}{3}} \quad (.108)$$

Lze snadno ukázat, že tato hodnota je větší než jedna pro jakékoli  $\lambda_1$ , tedy všechny řetězce se natahují.

Aplikujeme-li nyní pro popis náhodné prostorové distribuce řetězců polynomický rozvoj inverzní Langevinovy funkce a použijeme jeho prvních pět členů, dostaneme deformační energii:

$$W = nk_B T \left[ \frac{1}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20N}(\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2}(\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000N^3}(\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4}(\bar{I}_1^5 - 243) \right] \quad (.109)$$

Dosazením dříve odvozeného vztahu  $\alpha_L = \sqrt{N} \Rightarrow N = \lambda_L^2$  a přidáním členu popisujícího energii objemové části deformace dostaneme výsledný vztah:

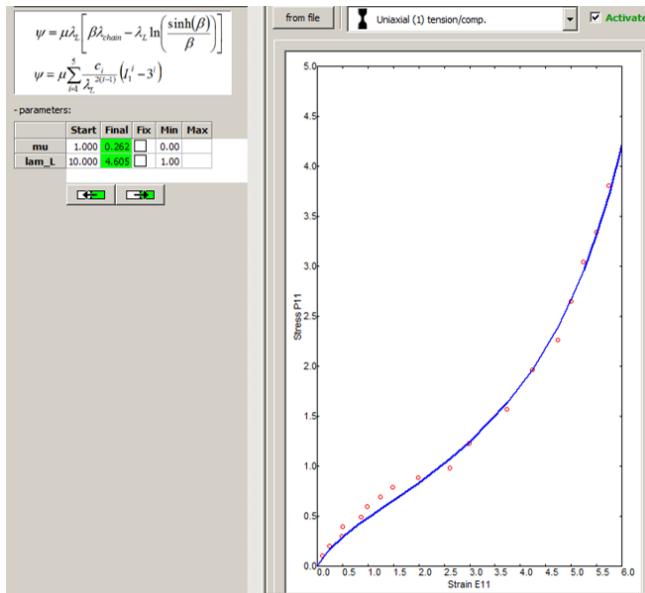
$$W = G \left[ \frac{1}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_L^2}(\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_L^4}(\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_L^6}(\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_L^8}(\bar{I}_1^5 - 243) \right] + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln(J) \right) \quad (.110)$$

kde  $d = \frac{2}{K}$ .

Pro  $\lambda_L \rightarrow \infty$  se model redukuje na model Neo-Hooke.

## Výhody modelu Arruda-Boyce

- Model je téměř izotropní (nepatrna závislost na orientaci reprezentativní krychle resp. řetězců vůči směru zatížení) a má vysokou míru symetrie vůči hlavním rovinám protažení.
- V každém zatěžovacím stavu se všechny řetězce podílejí na přenosu zatížení. Jejich protažení se vzájemně liší a díky jejich natáčení limitní protažení struktury přesahuje limitní protažení řetězce  $\lambda_L$ , které je však rozhodující pro zpevňování v kterémkoli směru a deformačním modu.
- Model má pouze 2 materiálové parametry pro deviátorovou část a je schopen popsat zatěžovací křivku s inflexí (zpevňující).
- Na rozdíl od fenomenologických modelů mají oba parametry jasně definovaný fyzikální význam.
- Díky strukturní povaze modelu má výbornou predikční schopnost; i když použijeme pro určení jeho parametrů jen určitý typ napjatosti (např. jednoosou tahovou), dává rozumné výsledky i pro jiné typy napjatosti.



Obrázek 3.27: Proložení reálné experimentální křivky modelem Arruda-Boyce

### 3.2.5 Co je to predikční schopnost?

Nejsou-li k dispozici všechny potřebné mechanické zkoušky při různých typech napjatosti, je model nedostatečně experimentálně podložen. Nejčastěji jsou konstanty modelu určeny jen z jednoosé tahové zkoušky a model musí predikovat (předpověď) chování materiálu při jiném (víceosém) typu napjatosti. Přesnost, s jakou to model dokáže, se nazývá jeho predikční schopností.

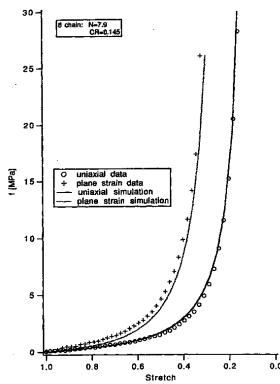
Odhad polohy deformačně-napěťových křivek ve dvouosé napjatosti vůči křivce určené z jednoosé tahové zkoušky je možno udělat pro malé deformace z Hookova zákona

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda e = 2G\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (111)$$

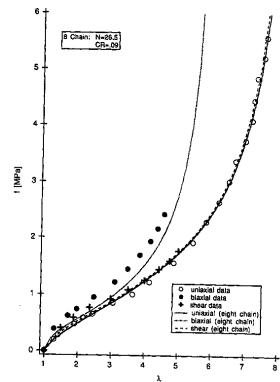
Při tahovém zatížení ve směru 1 je tedy tuhost v tomto směru při rovinné deformaci ( $\varepsilon_2 = 0$ ) vždy větší než při jednoosé napjatosti (zde je  $\varepsilon_2$  záporné a tuhost odpovídá modulu pružnosti  $E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ ). Při dvouosé napjatosti ( $\varepsilon_2$  kladné) pak je tuhost ještě vyšší. Pouze pro úplnou nestlačitelnost materiálu ( $e = 0$ ) jsou odezvy při všech uvedených zkouškách (v oblasti malých přetvoření) stejné.

Odezva izotropního materiálu při dvouosé napjatosti tedy není nikdy poddajnější než při jednoosé napjatosti. Na druhé straně také nebývá mnohonásobně tužší.

## Predikční schopnost modelu Arruda-Boyce



Obrázek 3.28: Konstanty modelu určeny pouze z jednoosé tlakové zkoušky



Obrázek 3.29: Konstanty modelu určeny pouze z jednoosé tahové zkoušky

### 3.2.6 Model Ogden pro pěnové pryže

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\beta_i} \left( 1 - J^{\beta_i} \right), \quad (112)$$

nebo pro velmi stlačitelné elastomery svazuje objemovou a deviátorovou část energie napjatosti vztahem (použit v ANSYSu)

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left[ J^{\frac{\alpha_i}{3}} \left( \bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} \right) - 3 \right] + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left( J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right), \quad (113)$$

kde

- $\mu_i, \alpha_i, \beta_i$  jsou materiálové parametry,
- $\bar{\lambda}_i (i = 1, 2, 3)$  = modifikovaná hlavní poměrná protažení,
- $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Pro  $\beta_i = 0$  dostaneme nestlačitelný model Ogden.

Model je použitelný jen v tlaku ( $J < 1$ ) (u pěny se nepředpokládá).

### 3.2.7 Model Blatz-Ko pro pěnové pryže

Tento model navržený pro pěnové pryže zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru

$$W = \frac{G}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right), \quad (114)$$

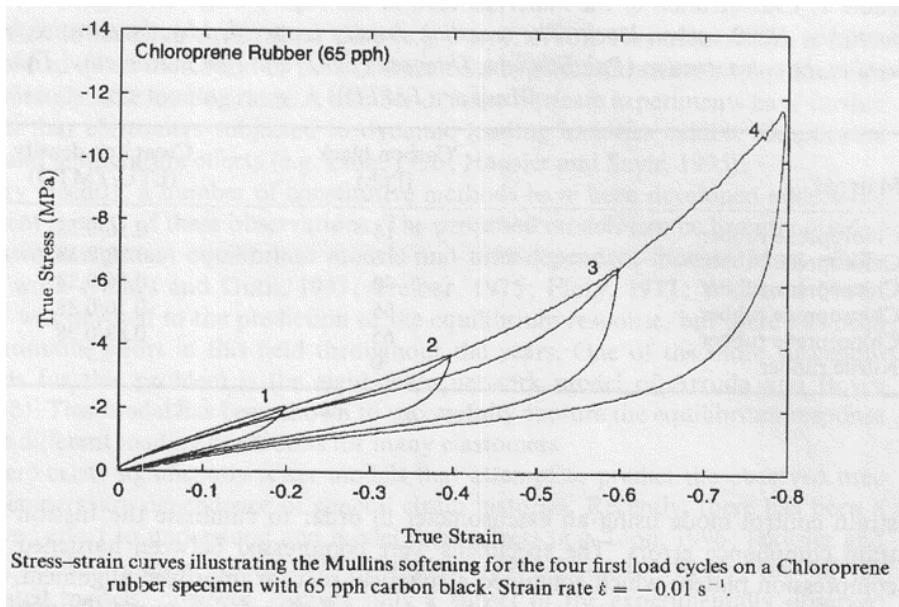
kde

$G$  je modul pružnosti ve smyku,

$I_2, I_3$  jsou invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace.

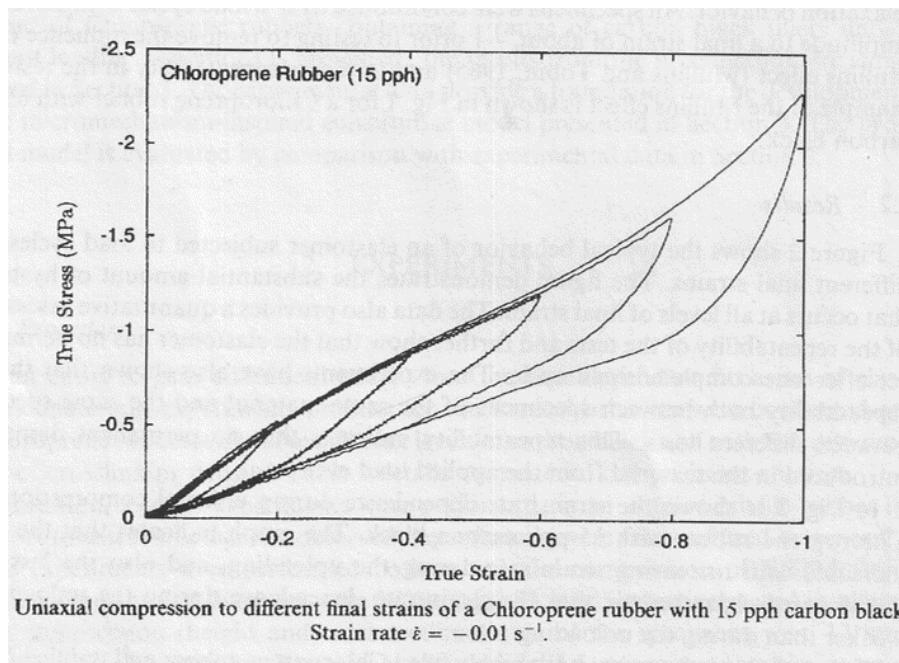
## 3.3 Modely neelastického chování

### 3.3.1 Tlakové zkoušky pro chloroprenovou gumi s hysterezí a závislostí na rychlosti zatěžování



Obrázek 3.30: Guma s velkým obsahem plniva vykazuje významný Mullinsův efekt a významnou hysterezí (viskoelasticitu).

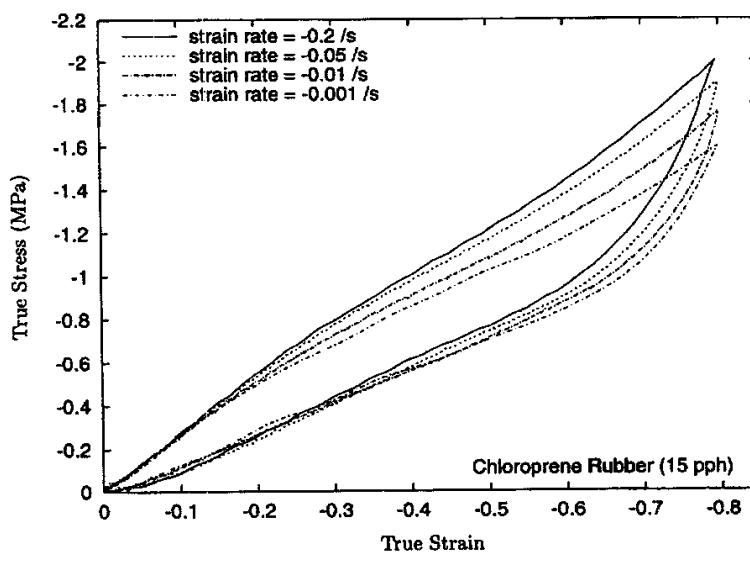
Mullinsův effekt je změkčení materiálu vlivem předchozího zatížení, při němž dojde k poškození vzájemných vazeb (zesítování) mezi vlákny v materiálu. To se projeví při následujících zatěžovacích cyklech nižší tuhosti materiálu, dokud se nedosáhne maximální hodnoty deformace (deformační energie) z předchozího zatěžování. Nad touto hodnotou se materiál vrací na tzv. „panenskou“ křivku prvního cyklu.



Obrázek 3.31: Guma s malým množstvím plniva, nepatrným Mullinsovým efektem, ale významnou hysterezí.

#### Time-dependent behavior of elastomers

935



Obrázek 3.32: Tlakové zkoušky pro chloroprenovou gumi při různých rychlostech zatěžování – visko-hyperelasticita

### 3.3.2 Model Ogden-Roxburgh

Tento pseudoelastický model<sup>9</sup> byl navržen v roce 1999 pro popis Mullinsova efektu, který je významný zvláště u plněných elastomerů. Model sestává z funkce měrné energie napjatosti  $\psi_0$

<sup>9</sup>Ogden RW, Roxburgh DG (1999): A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. Proc. Royal Society London A, Vol. 455, pp. 2861-2877.

pro popis panenské materiálové křivky, která se modifikuje při odlehčovacím a dalších zatěžovacích cyklech korekčním faktorem (damage parameter)  $\eta$ , snižujícím úroveň napětí v závislosti na předcházející maximální hodnotě zatížení  $\psi_0^{\max}$ :

$$\psi(\mathbf{F}, \eta) = \eta\psi_0(\mathbf{F}) + \Phi(\eta), \quad (.115)$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left( \frac{\psi_0^{\max} - \psi_0}{m + \beta\psi_0^{\max}} \right), \quad (.116)$$

kde

$\operatorname{erf}()$  označuje chybovou funkci (error function),

$\mathbf{F}$  je tenzor deformačního gradientu,

$\Phi(\eta)$  je korekční funkce zajišťující, aby se faktorem  $\eta$  redukovalo napětí (získané parciální derivací podle složky přetvoření) a nikoli hustota deformační energie,

$r [-] \geq 1$  je materiálový parametr určující míru poškození (snížení napětí) vůči panenskému stavu materiálu,

$m [Pa]$  je materiálový parametr určující závislost poškození (snížení napětí) na rozsahu předchozí deformace (strmost návratu k panenské křivce, příkrá pro nízká  $m$ , pozvolná pro vysoká  $m$ ),

$\beta [-]$  je materiálový parametr měnící strmost návratu k panenské křivce v závislosti na velikosti předchozího zatížení.

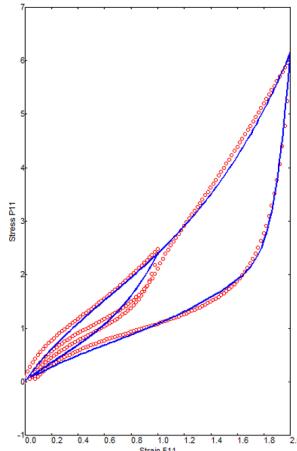
## Vlastnosti modelu

Tento pseudoelastický model (v ANSYSu označovaný jako CDF – continuum damage function) je založen na korekčním faktoru (damage parameter)  $\eta$ , který snižuje napětí při daném přetvoření v závislosti na maximální deformační energii (resp. max. přetvoření) dosažené v předchozí historii zatěžování.

Tato korekční funkce je specifická pro každý element modelu (přesněji pro každý integrační bod), podle jeho předchozí maximální deformační energie, tedy nezávisle na specifickém deformačně-napěťovém stavu. Teprve je-li toto maximum překročeno, pokračuje zatěžovací proces po panenské křivce a odlehčovací křivka se následně změní.

Model z principu není schopen postihnout:

- rozdíl mezi odlehčovací a následnou zatěžovací křivkou (hysterezi v opakovaných zátežných cyklech),
- trvalou plastickou deformaci,
- spojitý a hladký přechod z korigované na panenskou křivku; na rozdíl od reality nastává při přechodu její zlom (nespojitost derivace).

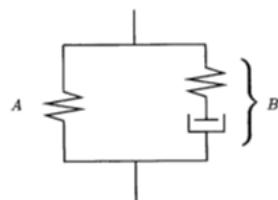


Obrázek 3.33: Aproximace experimentu modelem Ogden-Roxburgh

### 3.3.3 Model Bergstrőm-Boyce

Tento model<sup>1011</sup> byl navržen v roce 1998 pro popis časově závislého chování elastomerů ve velkých deformacích. Vychází z hyperelastického modelu Arruda-Boyce a rozšiřuje jej o popis závislosti mechanické odezvy na rychlosť deformace (viskohyperelasticitu); tím umožňuje popsat hysterezi deformačně-napěťových křivek, stejně jako tečení a relaxaci napětí.

Podobně jako model Arruda-Boyce vychází z modelu prostorové sítě makromolekulárních řetězců, jejichž deformace je řízena entropickou elasticitou. K původní osmiřetězcové síti modelu Arruda-Boyce, popisující hyperelastickou odezvu, tedy termodynamicky rovnovážný stav, přidává druhou síť reprezentující odchylky od rovnovážného stavu. Odpovídá to reologickému modelu Kelvin (standard linear solid), kde řetězec A reprezentuje rovnovážnou část deformační práce a řetězec B nerovnovážnou část.



Obrázek 3.34: Kelvinův reologický model

### Dekompozice deformačního tenzoru

Paralelní části reologického modelu mají stejnou deformaci, tedy platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B \quad (.117)$$

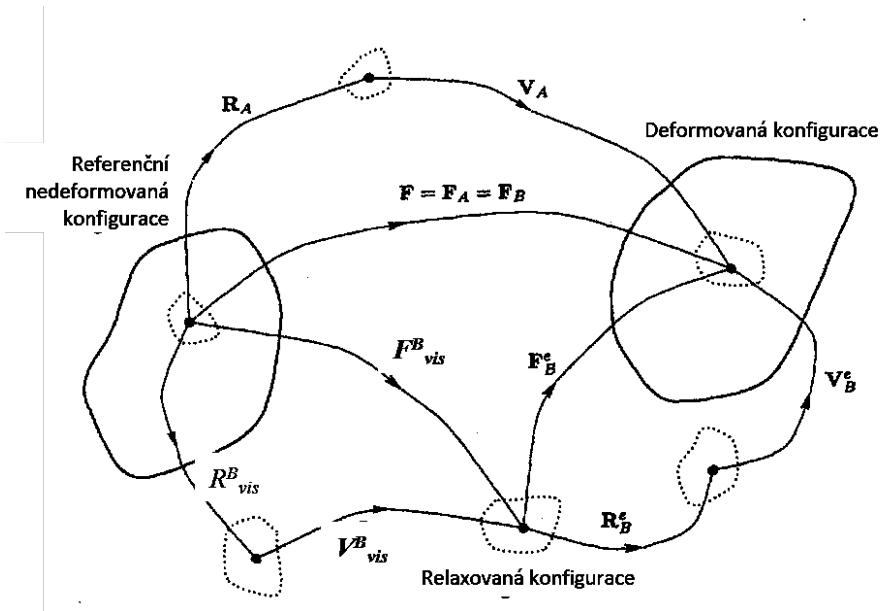
Pro řetězec B lze deformaci rozložit na část elastickou a neelastickou (viskózní)

$$\mathbf{F}^B = \mathbf{F}_{\text{el}}^B \mathbf{F}_{\text{vis}}^B \quad (.118)$$

<sup>10</sup>Bergström JS, Boyce MC (1998): Constitutive Modeling of the Large Strain Time-dependent Behavior of Elastomers, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45 (5), pp. 931-954.

<sup>11</sup>Bergström, J. S., Boyce, M. C. (2001): Constitutive Modeling of the Time-Dependent and Cyclic Loading of Elastomers and Application to Soft Biological Tissues, Mechanics of Materials 33, pp. 523-530.

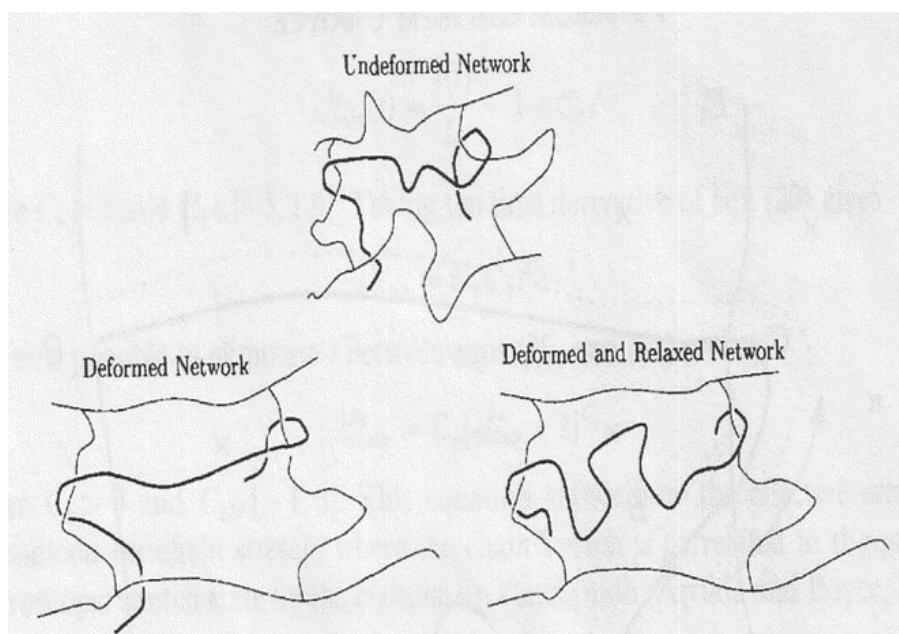
Na každý z deformačních tenzorů je možné aplikovat jeho polární dekompozici (viz obr.)



Obrázek 3.35: Polární dekompozice

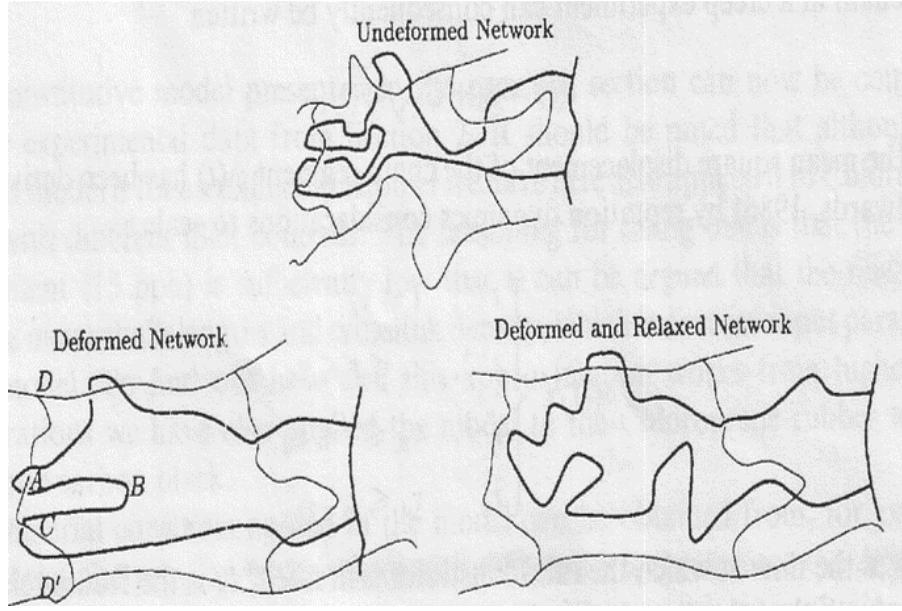
### Princip relaxace modelu Bergstrőm-Boyce

Relaxaci napětí lze nejsnadněji vysvětlit existencí volného řetězce v síti makromolekul, jehož deformace se „plazivým“ pohybem pomalu vrací do více zvlněného (a tedy přirozenějšího) stavu.



Obrázek 3.36: Volný řetězec v síti

Přestože se volné řetězce v makromolekulární síti elastomerů nevyskytují, mohou tam existovat téměř volné (náhodně ohnuté) konci řetězců (obr. vpravo), které se chovají podobně. Po deformaci se napnou a postupně se vracejí do více zvlněného stavu s vyšší entropií.



Obrázek 3.37: Téměř volné konce řetězců

### Rovnice modelu Bergström-Boyce

Pro část A podle reologického schématu se používá popis Arruda-Boyce, viz rov. (.99)

$$W^A = G^A \lambda_L^A \left\{ \lambda_{\text{chain}} \beta^A - \lambda_L^A \ln \left[ \frac{\sinh(\beta^A)}{\beta^A} \right] \right\} \quad (.119)$$

Pro popis části B se po dekompozici deformačního gradientu na elastickou a viskózní část použije pro elastickou část B analogická rovnice jako pro A

$$W_{\text{el}}^B = G^B \lambda_L^B \left\{ \lambda_{\text{chain}}^{\text{el}} \beta^B - \lambda_L^B \ln \left[ \frac{\sinh(\beta^B)}{\beta^B} \right] \right\}, \quad (.120)$$

zatímco viskózní část je popsána následujícím vztahem mezi napětím a rychlosí deformace

$$\dot{\gamma} = \gamma_0 \left( \varepsilon_{\text{chain}}^{\text{vis}} \right)^C \left( \frac{\tau}{\tau_{\text{base}}} \right)^m, \quad (.121)$$

který lze upravit do tvaru používaného v ANSYSu:

$$\dot{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\tau_{\text{base}}^m} \left( \lambda_{\text{chain}}^{\text{vis}} - 1 + \delta \right)^C \tau^m. \quad (.122)$$

ANSYS zde využívá ještě rovnici

$$\lambda_L = \sqrt{N}. \quad (.123)$$

### Konstanty modelu Bergström-Boyce v ANSYSu

Dohromady je ve všech třech částech modelu (reologického schématu) těchto 7 materiálových parametrů (značení podle ANSYSu):

Počáteční smykový modul části A	$G_A$ ('C1')
Počet článků řetězce části A	$N_A$ ('C2')
Počáteční smykový modul části B	$G_B$ ('C3')
Počet článků řetězce části B	$N_B$ ('C4')
Creepový parametr	$\frac{\gamma_0}{\tau_{base}^m}$ ('C5')
Exponent creepové deformace	$C$ ('C6')
Exponent efektivního napětí	$m$ ('C7')

$\delta$  ve vztahu pro viskózní část je matematická konstanta o malé hodnotě (typicky  $\delta \leq 0,01$ ), která odstraňuje singularitu napětí pro nulové deformace.

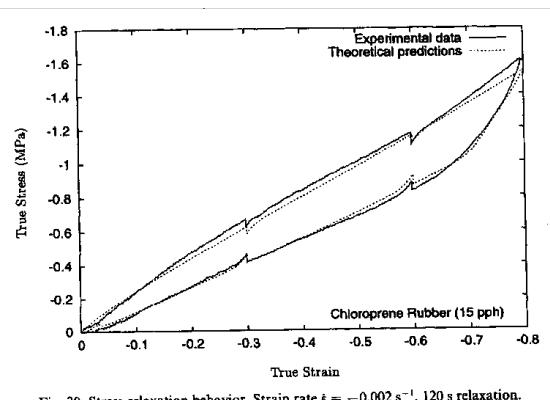


Fig. 20. Stress relaxation behavior, Strain rate  $\dot{\epsilon} = -0.002 \text{ s}^{-1}$ , 120 s relaxation.

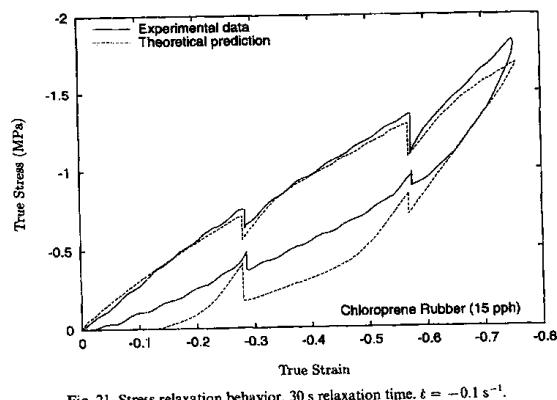


Fig. 21. Stress relaxation behavior, 30 s relaxation time,  $\dot{\epsilon} = -0.1 \text{ s}^{-1}$ .

Obrázek 3.38: Aproximace jednoosé tlakové zkoušky s relaxací během zatěžování i odlehčování při různých rychlostech deformace

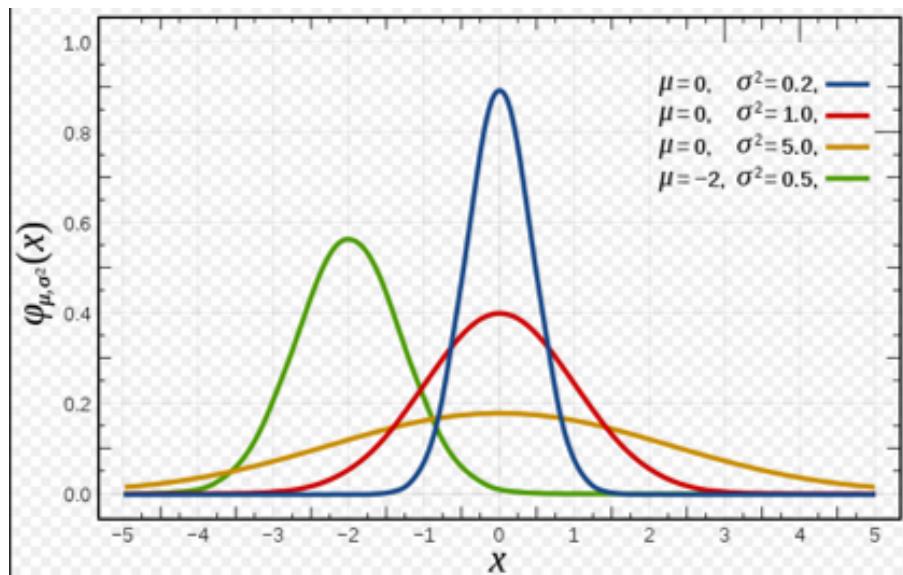
### 3.3.4 Chybová funkce (error function)

- vychází z distribuční funkce (CDF – cumulative distribution function),
- používá se ve statistice pro predikci chování nějakého vzorku vzhledem ke střední hodnotě souboru.

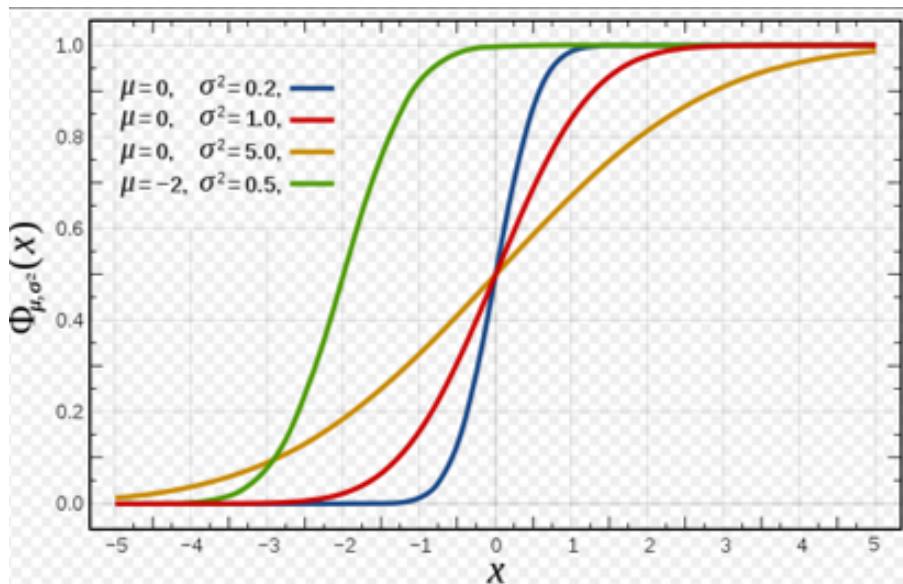
#### Vztah CDF a hustoty pravděpodobnosti

Funkce hustoty pravděpodobnosti  $f_x$  s mediánem  $\mu$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma$  je v relaci s CDF vztahem

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi_x(t) dt; \quad \phi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} \quad (.124)$$

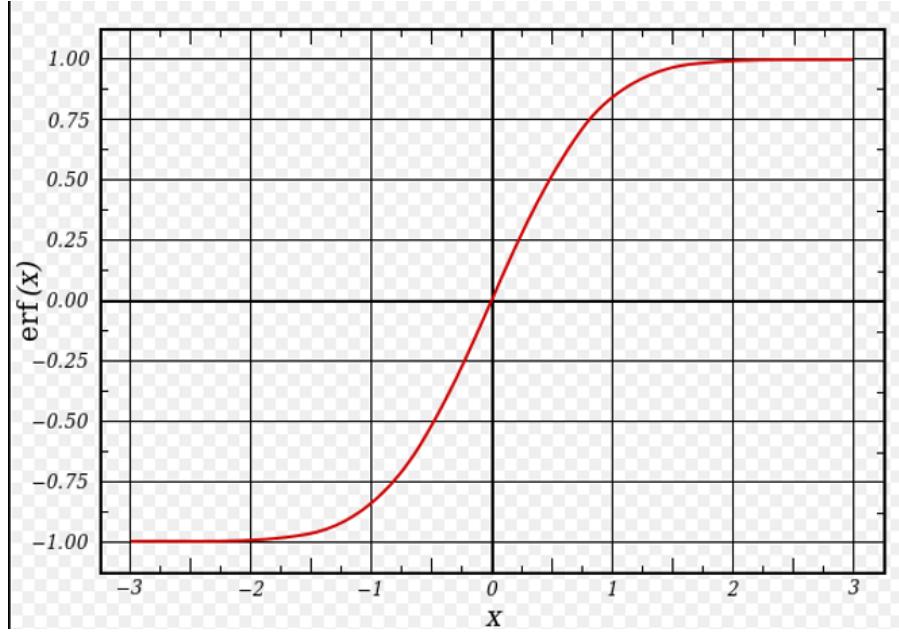


Obrázek 3.39:  $\Phi(x)$  – funkce hustoty pravděpodobnosti



Obrázek 3.40:  $\Phi(x)$  – distribuční funkce (CDF)

Chybová funkce vyhodnocená pro  $\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}$  (za podmínky normálního Gaussova rozdělení chyb se směrodatnou odchylkou  $\sigma$ ) udává pro absolutní hodnoty  $x$  pravděpodobnost, že měření leží ve vzdálenosti menší než  $x$  od střední hodnoty.



Obrázek 3.41: Grafické znázornění chybové funkce

### Matematické vyjádření chybové funkce

Byla zavedena v matematice (nazývaná také Gauss error function) je speciální neelementární funkce sigmoidního tvaru, vyskytující se v pravděpodobnosti, statistice nebo parciálních diferenciálních rovnicích popisujících difuzi. Je definována takto:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (125)$$

Byla zavedena v teorii měření (využívající statistiku a pravděpodobnost) a název se používá i při jejím přenosu do jiných oblastí matematiky, které nemají žádný vztah k charakteristikám chyb měření.

Chybová funkce se vztahuje k CDF (popisuje prostřednictvím integrálu normálního rozdělení průběh měrné energie napjatosti  $\Phi$ ) rovnicí

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (126)$$

čímž měníme rozsah hodnot z intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$  platného pro  $\operatorname{erf}(x)$  na interval  $\langle 0; 1 \rangle$ , který platí pro distribuční funkci  $\Phi(x)$ .

### 3.3.5 Anizotropní hyperelastické modely

Používají se pro popis chování vláknových kompozitů s elastomerovou matricí (nejčastěji guma) vyztuženou vlákny. V základní verzi předpokládají rovnoměrné rozložení maximálně dvou osnov rovnoběžných vláken s nulovou ohybovou tuhostí. Předpokládají tedy nekonečně malý průměr vláken, prakticky se dají použít pro vlákna textilní nebo kovová ve formě splétaného lanka. Pro vlákna s významnou ohybovou tuhostí (například ocelové dráty v běhoucí vrstvě některých pneumatik) jsou potřebné složitější konstitutivní modely (např. založené na Cosseratově teorii elasticity).

Pro matematický popis příspěvku vláken k měrné energii napjatosti kompozitu používají další invarianty deformačního tenzoru. Obvykle se používají invarianty (nazývané také „pseudoinvarianty“) pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $\mathbf{C}$ , označované symboly  $I_4$ – $I_9$  v jeho modifikované podobě, tedy popisující pouze deviátorovou složku deformace.

Podobně jako u izotropních elastomerů se měrná energie skládá z části objemové  $W_{\text{vol}}$  a části deviátorové (izovolumické)  $W_{\text{dev}}$ , která se dá dále rozložit na izotropní příspěvek matrice  $W_{\text{iso}}$  a anizotropní příspěvek vláken  $W_{\text{aniso}}$ .

$$W = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{dev}}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\mathbf{C}) + W_{\text{aniso}}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (.127)$$

Pro izotropní část energie napjatosti  $W_{\text{iso}}$  lze použít kterýkoli adekvátní model (neo-Hooke, Mooney-Rivlin, …), pro anizotropní část  $W_{\text{aniso}}$  se zavádějí nejčastěji modely polynomické, příp. exponenciální (pro měkké biologické tkáně).  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  zde představují takzvané „strukturní tenzory“ definující směry dvou osnov vláken.

### Polynomický anizotropní hyperelastický model

Tento model je naprogramován v ANSYSu v následujícím tvaru:

$$W = W_{\text{dev}} + \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (.128)$$

Pro objemovou část energie napjatosti je zde použit model formulovaný pro izotropní matrici, zatímco deviátorová část měrné energie napjatosti  $W_{\text{dev}}$  je popsána takto:

$$\begin{aligned} W_{\text{dev}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = & \sum_{i=1}^3 (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^3 (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^6 (\bar{I}_4 - 3)^k \\ & + \sum_{l=1}^6 (\bar{I}_5 - 3)^l + \sum_{m=1}^6 (\bar{I}_6 - 3)^m + \sum_{n=1}^6 (\bar{I}_7 - 3)^n + \sum_{o=1}^6 (\bar{I}_8 - 3)^o, \end{aligned} \quad (.129)$$

kde

- $a_i, b_j$  jsou materiálové parametry izotropní části (matrice)  $W_{\text{iso}}$ ,
- $c_k, d_l, e_m, f_n, g_o$  jsou materiálové parametry anizotropní části (vláken)  $W_{\text{aniso}}$ ,
- $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  jsou redukované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $\mathbf{C}$ ,
- $\bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6, \bar{I}_7, \bar{I}_8, \bar{I}_9$  jsou pseudoinvarianty deformačního tenzoru  $\mathbf{C}$  a strukturních tenzorů  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , zatímco  $I_9$  je jen konstanta zajišťující nulovou energii v nedeformovaném stavu.

Model kromě prvních dvou členů využívá pouze sudé mocniny invariantů, takže zahrnuje ve své deviátorové části celkem 21 materiálových parametrů.

### Zjednodušení polynomického modelu

Pro praktické použití je třeba zvolit jednodušší verzi modelu, aby se daly z experimentu určit jeho parametry. Nejjednodušší formulaci dostaneme, pokud pro izotropní část (matrici) použijeme model neo-Hooke (obvykle akceptovatelný, protože vlákna neumožňují extrémně velké deformace) a pro obě osnovy vláken zvolíme jednoparametrickou formulaci:

$$W_{\text{dev}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_1 (\bar{I}_1 - 3) + c_1 (\bar{I}_4 - 3)^2 + e_1 (\bar{I}_6 - 3)^2 \quad (.130)$$

Ještě jednodušší forma modelu existuje pro jednosměrový kompozit, tedy s jedinou osnovou vláken; pak poslední člen uvedené rovnice vypadne. Jsou-li naopak obě osnovy vláken identické

co do tuhosti vláken a jejich obsahu v materiálu (včetně rozložení po tloušťce, které je ovšem předpokládáno ideálně rovnoměrné), pak platí  $e_1 = c_1$  a model má rovněž jen 2 materiálové parametry, jeden pro matrici a druhý pro vlákna.

Poznámka 1: Model je často formulován jako nestlačitelný, pak se redukované invarianty shodují s neredukovanými a v jejich označení chybí pruh nad  $I$ .

Poznámka 2: První mocninu invariantů  $\bar{I}_4$  a  $\bar{I}_6$  nelze ve funkci používat, protože pro záporné deformace vláken (v tlaku, tj.  $\lambda < 1$ ) by dávala zápornou deformační energii.

### Model HGO (Holzapfel)

Jedná se o anizotropní exponenciální model<sup>12</sup> určený pro měkké biologické tkáně (např. cévní) vyztužené dvěma osnovami identických zvlněných vláken.

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6, J) = \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + W_{\text{aniso}}(\bar{I}_4, \bar{I}_6) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (131)$$

Pro (izotropní) matrici je zde použit model neo-Hooke v její objemové i deviátorové části, zatímco anizotropní část měrné energie napjatosti  $W_{\text{aniso}}$  se mění podle znaménka příslušných invariantů; vzhledem ke zvlnění výzvužných vláken se tato uplatní jen tehdy, jsou-li vlákna namáhána v tuhu. Matematická formulace je tedy následující:

$$W_{\text{aniso}}(\bar{I}_4, \bar{I}_6) = \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6}^6 \left\{ \exp \left[ k_2 (\bar{I}_i - 1)^2 \right] - 1 \right\} & \text{pro } \bar{I}_4 > 1, \bar{I}_6 > 1 \\ \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp \left[ k_2 (\bar{I}_4 - 1)^2 \right] - 1 \right\} & \text{pro } \bar{I}_4 > 1, \bar{I}_6 < 1 \\ \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp \left[ k_2 (\bar{I}_6 - 1)^2 \right] - 1 \right\} & \text{pro } \bar{I}_4 < 1, \bar{I}_6 > 1 \\ 0 & \text{pro } \bar{I}_4 < 1, \bar{I}_6 < 1 \end{cases} \quad (132)$$

kde

$c, k_1, k_2, d$  jsou materiálové parametry,  
 $\bar{I}_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6$  jsou redukované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace.

---

<sup>12</sup>Holzapfel, Gasser,Ogden: A new constitutive framework for arterial wall mechanics, Journal of Elasticity, 2000

# Kapitola 4

## Modely viskoelastického chování

### 4.1 Úvod

#### 4.1.1 Co je to viskozita?

Viskozita je vlastnost kapaliny (tekutiny), charakterizující její odpor proti tvarovým změnám. Je definována v hydromechanice dvěma způsoby:

**Dynamická viskozita**  $\eta$ , jako konstanta úměrnosti mezi gradientem rychlosti v kapalině a odpovídajícím smykovým napětím v ní, a to v podobě Newtonova zákona viskozity

$$\tau = \eta \frac{dc}{dn}, \quad (.1)$$

kde

$\tau$  [Pa] je smykové napětí,

$\eta$  [Pa s] je tzv. dynamická viskozita,

$\frac{dc}{dn}$  [ $s^{-1}$ ] je gradient rychlosti kapaliny.

Kromě dynamické viskozity se v hydromechanice definuje i tzv. **kinematická viskozita**  $\nu$  [ $m^2 s^{-1}$ ] a to vztahem

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (.2)$$

kde

$\rho$  [ $kg m^{-3}$ ] je hustota (měrná hmotnost) kapaliny.

#### 4.1.2 Newtonův zákon viskozity

vyjadřuje lineární závislost mezi gradientem rychlosti a smykovým napětím v tekutině a obvykle se uvádí ve tvaru:

$$\tau = \eta \frac{dc}{dn} \quad (.3)$$

Tenzorový zápis pro smyková napětí:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \nabla \mathbf{c}, \quad (.4)$$

jehož složky lze zapsat v maticovém tvaru

$$\tau_{ij} = \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial X_1} & \frac{\partial c_1}{\partial X_2} & \frac{\partial c_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial c_2}{\partial X_1} & \frac{\partial c_2}{\partial X_2} & \frac{\partial c_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial c_3}{\partial X_1} & \frac{\partial c_3}{\partial X_2} & \frac{\partial c_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (.5)$$

kde

$\tau$  [Pa] je smykové napětí,  
 $\eta$  [Pa s] je tzv. dynamická viskozita,  
 $\nabla c$  [ $s^{-1}$ ] je gradient rychlosti tekutiny.

Po zahrnutí i normálových napětí (tlaku) platí:

$$\sigma_{ij} = p I + \eta \operatorname{grad}(c) = p I + \eta \frac{c_i}{X_j} \quad (6)$$

Kapaliny, jejichž chování lze popsat Newtonovým zákonem viskozity označujeme jako newtonské. Viskoza je jejich materiálovou charakteristikou, která je ovšem teplotně závislá.

### 4.1.3 Jaký je vztah mezi gradientem rychlosti a úhlovou deformací?

Tvar Newtonova zákona viskozity známý z hydromechaniky lze modifikovat následovně:

$$\tau = \eta \frac{dc}{dn} = \eta \frac{\partial c_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)}{\partial y} = \eta \frac{\partial \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)}{\partial t} = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \eta \dot{\gamma}, \quad (7)$$

kde

$\tau$  [Pa] je smykové napětí,  
 $\eta$  [Pa s] je tzv. dynamická viskozita,  
 $\frac{dc}{dn}$  [ $s^{-1}$ ] je gradient rychlosti kapaliny.

## 4.2 Reologické modely viskoelasticity

### 4.3 Teorie viskoelasticity

#### 4.3.1 Co znamená pojem viskoelasticita?

Viskoza – vlastnost kapaliny (tekutiny) – známe z hydromechaniky

Elastica – vlastnost tuhé látky (tělesa) – známe z pružnosti a pevnosti

Viskoelasticita – spojení vlastností tekutiny a tuhé látky do společného konstitutivního modelu. Elastická látka i viskózní tekutina pak mohou být chápány jako jeho zvláštní případy.

#### 4.3.2 Podstata viskoelastického chování

Materiál (každý) je v procesu zatěžování uveden do nerovnovážného stavu, kdy změny v rozdílení atomů naruší silovou rovnováhu. Je-li silová rovnováha obnovena velmi rychle (doba pro její dosažení je zanedbatelná), pak se odezva na zatížení jeví jako okamžitá a časově nezávislá (elastický materiál).

Není-li doba potřebná pro dosažení rovnovážného stavu zanedbatelná, pak se odezva materiálu jeví závislá na čase a materiál považujeme za viskoelastický. Po zatížení se nachází ve stavu termodynamicky nerovnovážném a rovnovážného stavu dosahuje teoreticky až za nekonečně dlouhou dobu.

### 4.3.3 Osnova teorie lineární viskoelasticity

1. Vysvětlení základních pojmu
2. Analogie mezi mechanikou kapalin a těles
3. Základní vztahy lineární viskoelasticity
4. Popis chování viskoelastických látek pomocí nejjednodušších reologických modelů na základě jejich diferenciálních rovnic
  - při statickém zatěžování
  - při dynamickém (harmonickém) zatěžování
5. Využití teorie lineární viskoelasticity v MKP – zadávání parametrů viskoelastických konstitutivních modelů v ANSYSu

### 4.3.4 Předpoklady lineární viskoelasticity

- Materiál je izotropní
- Jsou splněny podmínky linearity, především malé deformace (přetvoření do 1%)

(pro velká časově závislá vratná přetvoření je třeba použít modely visko-hyperelastické)

### 4.3.5 Analogie mechaniky těles a hydromechaniky

Mechanika těles: Cauchyho rovnice rovnováhy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + o_x = 0 \quad (.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + o_y = 0 \quad (.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (.10)$$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (.11)$$

$$\vec{\sigma} = \vec{A}\rho \quad (.12)$$

Mechanika kapalin – Eulerova rovnice hydrostatiky

$$A_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (.13)$$

$$A_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (.14)$$

$$A_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (.15)$$

Kontrolní otázka: Zkuste zapsat v maticovém tvaru tenzor napětí pro ideální kapalinu

### 4.3.6 Tvar tenzoru napětí pro ideální kapalinu

- Všechna normálová napětí záporná a stejně velká – důsledek Pascalova zákona
- Smyková napětí nulová – důsledek nulové viskozity

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (.16)$$

### 4.3.7 Analogie konstitutivních parametrů

Mechanika těles

- modul pružnosti v tahu  $E [Pa]$
- Poissonovo číslo  $\mu [-]$
- Lamého konstanta  $\lambda [Pa]$
- modul pružnosti ve smyku  $G [Pa]$

$$\tau = G\gamma \quad (.17)$$

- objemový modul pružnosti  $K [Pa]$

$$K = \frac{\sigma_z}{e} = \frac{\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}}{\frac{\Delta V}{V}} \quad (.18)$$

Mechanika kapalin

- modul objemové stlačitelnosti  $\varepsilon$

$$\varepsilon = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} [Pa] \quad (.19)$$

- dynamická viskozita  $\eta$

$$\tau = \eta \frac{dc}{dn} = \eta \dot{\gamma} \quad (.20)$$

Jaký je vztah mezi gradientem rychlosti v kapalině a rychlostí úhlové deformace tuhé látky?

Protože elastické vlastnosti izotropního materiálu jsou popsány dvěma nezávislými elastickými konstantami  $G$  a  $K$ , ostatní jsou závislé. Pro společný popis je třeba vyjádřit Hookův zákon pomocí  $G$  a  $K$ . viz 3.0.3

### 4.3.8 Způsoby popisu lineárně viskoelastického chování látek

1. Spojitý popis pomocí konvolučních integrálů (matematicky komplikovanější, vysvětlení je založeno na zobecnění reologických modelů uvedených dále).
2. Zjednodušený popis pomocí reologických modelů, tvořených kombinací základních reologických prvků.

### 4.3.9 Reologické modely viskoelastického chování

- Musíme odděleně modelovat tvarovou (konstanty  $G$ ,  $\eta$ ) a objemovou (konstanty  $K$ ,  $\kappa$ ) změnu.
- Chování reologických modelů si ukážeme na deviátorové části tenzoru napětí a přetvorení, tedy na tvarové změně (závislosti smykového napětí a zkusu). Stejným způsobem se modeluje i objemová změna.
- Pro obě části lze použít stejného typu modelu, ale objemová změna se často modeluje jako čistě elastická, protože u objemové změny je její viskózní složka podstatně méně významná.

Nº	Název	Modeluje vlastnost	Schéma	Matematický popis
1	Lineární pružina (Hookeův prvek)	Lineární elasticitu		$\sigma = E \varepsilon$ $\tau = G \gamma$
2	Nelineární pružina	Nelineární elasticitu		$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$
3	Kapalinový lineární tlumič (Newtonův prvek)	Lineární viskozitu		$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}'$
4	Kapalinový nelineární tlumič (Nortonův prvek)	Nelineární viskozitu		$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}'^{(1/N)}$
5	Blokátor deformace	Blokování deformace prvku do prahové hodnoty napětí		$\varepsilon = 0$ pro $\sigma \in (-\sigma_B, +\sigma_B)$
6	Omezovač deformace	Blokování pohybu prvku nad prahovou hodnotou přetvoření		$\sigma = 0$ pro $\varepsilon \in (-\varepsilon_B, +\varepsilon_B)$

Obrázek 4.1: Základní prvky reologických modelů

#### 4.3.10 Nejjednodušší reologické modely viskoelastické látky

##### Maxwellův model



Obrázek 4.2: Maxwellův model

Diferenciální rovnice

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} = G \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (21)$$

kde  $\tau = \frac{\eta}{G}$  [s] je časová konstanta přechodového děje.

Pro konstantní silové zatížení  $\sigma_0$ , tedy creep, dostaneme řešením diferenciální rovnice odezvu

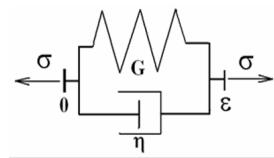
$$\eta(t) = \frac{\sigma_0}{G} + \frac{\sigma_0}{\eta} t. \quad (22)$$

Deformace tedy roste lineárně s časem, tzv. volný creep.

Pro konstantní deformační zatížení  $\varepsilon_0$  dostaneme řešením diferenciální rovnice exponenciální odezvu pro relaxaci napětí

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 \exp^{-\frac{t}{\tau}} \quad (23)$$

## Kelvinův-Voigtův model



Obrázek 4.3: Kelvinův-Voigtův model

Diferenciální rovnice

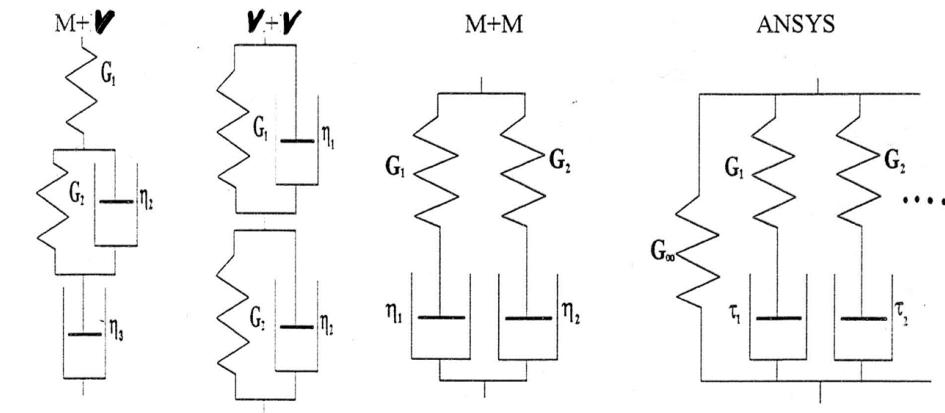
$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\epsilon}{\tau} = \frac{\sigma}{G}, \quad (4.24)$$

kde  $\tau = \frac{\eta}{G}$  [s] je časová konstanta přechodového děje.

Pro konstantní silové zatížení  $\sigma_0$  dostaneme řešením diferenciální rovnice creepovou odezvu

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left( 1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (4.25)$$

Deformace se tedy blíží exponenciálně k asymptotické hodnotě – vázaný creep. Skokové změny deformace nelze dosáhnout (nutno  $\sigma \rightarrow \infty$ ).

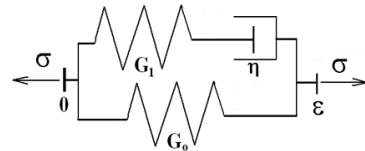


Obrázek 4.4: Příklady složitějších reologických modelů viskoelastického chování

			Nejjednodušší model	Konstanty modelu			
Typ chování	Volné tečení	Okamžitá elasticke deformace		M+V v sérii	V+V v sérii	M+M paralel	ANSYS M+pruz. paralelně
1	ano	ano		$G_2 = \infty$ $\eta_2 = \infty$	$G_1 = 0$ $\eta_2 = 0$ není nutné	$(G_2 = 0$ $\eta_2 = 0)$ není nutné	$G_\infty = 0$ $G_1 \neq 0$ $\tau_1 \neq 0$
2	ne	ano		$\eta_3 = \infty$	$\eta_1 = 0$	$\eta_1 = \infty$	$G_\infty \neq 0$ $G_1 \neq 0$ $\tau_1 \neq 0$
3	ano	ne		$G_1 = \infty$	$G_2 = 0$	$G_1 = \infty$	$G_\infty = 0$ $G_2 \neq 0$ $\tau_2 \neq 0$ $G_1 \gg G_2$ $\tau_1 \ll \tau_2$
4	ne	ne		$G_1 = \infty$ $\eta_3 = \infty$	$(G_2 = 0$ $\eta_2 = 0)$ není nutné	$\eta_1 = \infty$ $G_2 = \infty$	$G_\infty \neq 0$ $G_1 \sim \infty$ $(G_1 \gg G_\infty)$ $\tau_1 \ll \eta_1/G_\infty$

Obrázek 4.5: Reologické modely pro základní typy viskoelastického chování

### Standard linear solid

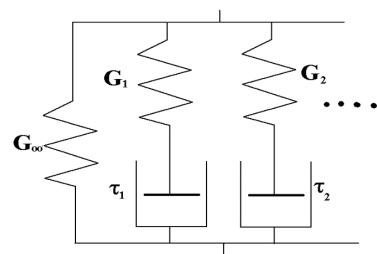


Obrázek 4.6: Standard linear solid

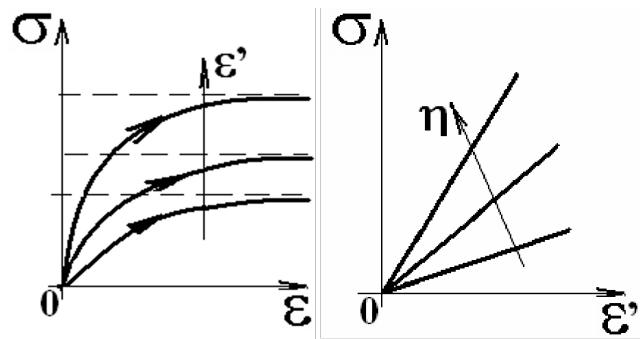
Diferenciální rovnice

$$\sigma + \tau_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt} = G_0 \left( \varepsilon + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (26)$$

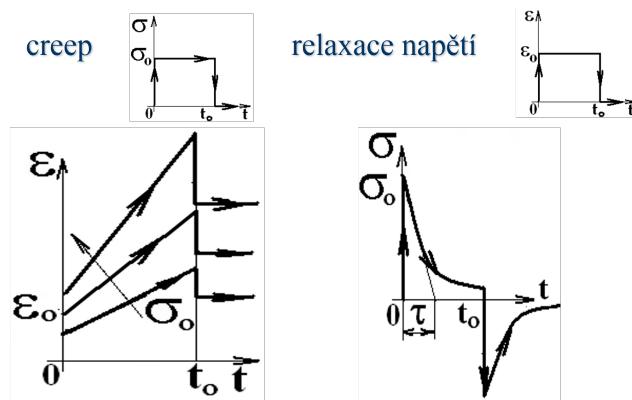
kde relaxační doba při konstantní deformaci je  $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{G_1}$  a retardační doba při konstantním napětí je  $\tau_{12}\sigma = \frac{\eta}{G_0} \left( 1 + \frac{G_0}{G_1} \right)$



Obrázek 4.7: Zobecněný Maxwellův model v ANSYSu



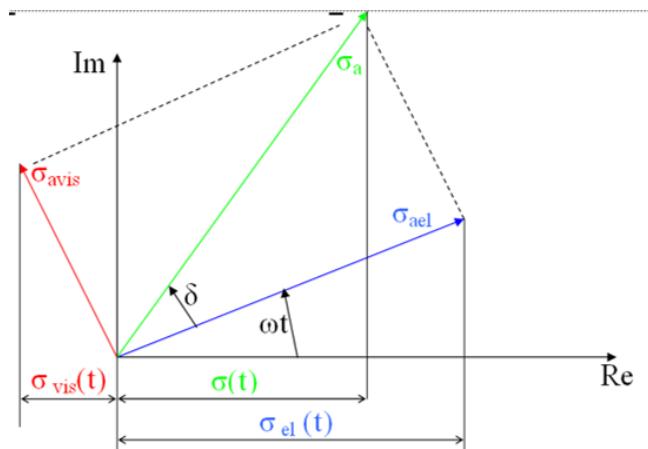
Obrázek 4.8: Deformačně-napěťové závislosti (tahová zkouška) Maxwellova modelu



Obrázek 4.9: Odezva Maxwellova modelu při statickém zatížení

#### 4.3.11 Znázornění harmonického zatěžování v komplexní rovině pro Kelvinův-Voigtův model s řízenou deformací

Umožňuje vyjádření komplexního modulu pružnosti Odezva na harmonický průběh napětí  $\sigma = \sigma_a \cos(\omega t)$  Deformace viskózního členu předbíhá deformaci o  $\frac{\pi}{2}$ .



Obrázek 4.10: Kelvinův-Voigtův model v komplexní rovnice

$\delta$  – fázový posuv

Ztrátový faktor  $\tan(\delta)$  je nepřímo úměrný úhlové frekvenci zatěžování

$$\tan(\delta) = \frac{G}{\eta\omega} \quad (.27)$$

Z grafu lze vyjádřit přetvoření

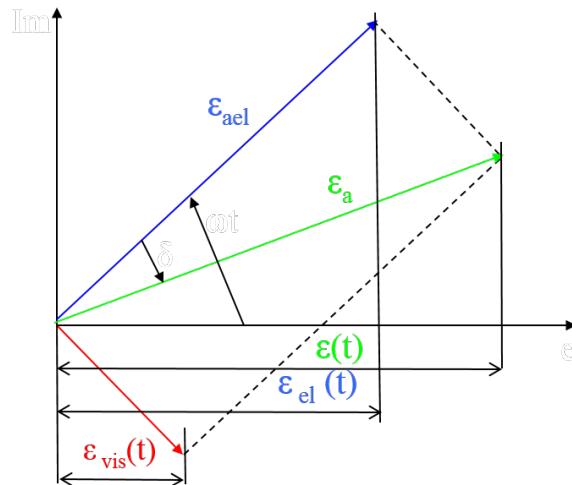
$$\sigma(t) = \sigma_a \cos(\omega t + \delta), \quad (.28)$$

kde amplituda  $\varepsilon_a$  je dáná

$$\sigma_a = \sqrt{(G\varepsilon_a)^2 + (\eta\omega\varepsilon_a)^2}. \quad (.29)$$

#### 4.3.12 Znázornění harmonického zatěžování v komplexní rovině pro Maxwellův model s řízeným napětím

Umožňuje vyjádření komplexního modulu pružnosti Odezva na harmonický průběh napětí  $\sigma = \sigma_a \cos(\omega t)$  Deformace viskózního členu ze zpožďuje za napětím o  $\frac{\pi}{2}$ .



Obrázek 4.11: Maxwellův model v komplexní rovnici

$\delta$  – fázový posuv

Ztrátový faktor  $\tan(\delta)$  je nepřímo úměrný úhlové frekvenci zatěžování

$$\tan(\delta) = \frac{G}{\eta\omega} \quad (.30)$$

Z grafu lze vyjádřit přetvoření

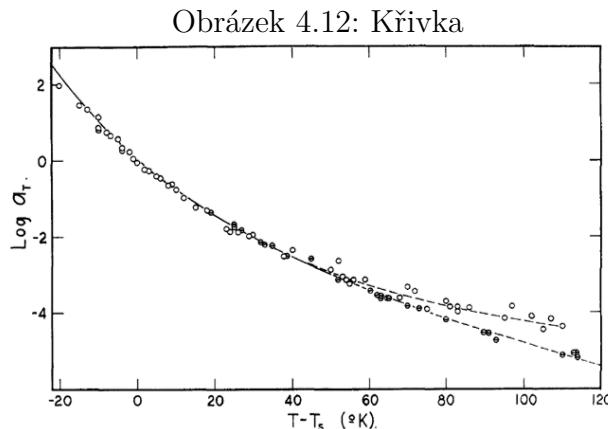
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_a \cos(\omega t - \delta), \quad (.31)$$

kde amplituda  $\varepsilon_a$  je dáná

$$\varepsilon_a = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{G}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\eta\omega}\right)^2}. \quad (.32)$$

### 4.3.13 Závislost viskoelasticity na teplotě

Popisuje se na základě experimentů<sup>1</sup>.



$$a_T = \frac{\tau_T}{\tau_{T_{\text{ref}}}}$$

$T_s = T_{\text{ref}}$  – referenční teplota

### 4.3.14 Popis závislosti viskoelasticity na teplotě

Na základě uvedené závislosti mezi teplotou a změnou viskozity (časové konstanty), která je přibližně stejná pro většinu polymerů i jiných látek, formulovali WILLIAMS, LANDAL a FERRY rovnici ve tvaru:

$$\log_{10} a_T = \frac{c_1(T - T_{\text{ref}})}{c_2 + T - T_{\text{ref}}}, \quad (.33)$$

kde

$T$  je aktuální teplota,

$T_{\text{ref}}$  je referenční teplota,

$C_1[\text{K}^{-1}], C_2[\text{K}]$  jsou materiálové parametry.

$T_{\text{ref}}$  se volí obvykle cca 50 °C nad teplotou skelného přechodu  $T_g$  a vztah platí v intervalu ( $T_g$  ;  $T_g + 100$ ) [K].

Vztah (.33) odpovídá popisu v menu ANSYSu. V návodě ANSYSu (a zřejmě i reálně naprogramován) je vztah

$$\log_{10} a_T = \frac{-c_1(T - T_{\text{ref}})}{c_2 + T - T_{\text{ref}}}, \quad (.34)$$

s mínumsem (a další konstantou, která zůstává nulová) a používá (zřejmě omylem) ln místo log.

### 4.3.15 Praktické využití modelů lineární viskoelasticity

- Při měření a používání elastických konstant je nutné brát v úvahu rychlosť zatěžování (resp. rychlosť deformace – běžná tahová zkouška má rychlosť přetvoření řádu  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ ).
- Při výpočtech je nutno pracovat odděleně s kulovou a deviátorovou složkou tenzorů  $T_\sigma$  a  $T_\varepsilon$ , neboť mají různé časové konstanty, tedy různý podíl elastické a viskózní složky.

<sup>1</sup>M.L. Williams, R.F. Landel, and J.D. Ferry. "The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids". Journal of the American Chemical Society. Vol. 77. 3701-3706. 1955

- I jednoosá napjatost (při tahové zkoušce) se skládá ze složky kulové a deviátorové!
- Viskoelastický model vysvětluje
  - tečení (volný i vázaný creep)
  - relaxaci napětí
  - hysterezi (bez zbytkové trvalé deformace)
- Z chování materiálu při určitém typu zatěžování (např. skoková změna napětí při krípopové zkoušce) a odpovídající modelové představy lze předpovědět chování při jiných typech zatěžování (např. při dynamickém namáhání).
- Možnost numerického řešení viskoelastického chování pomocí MKP – např. v ANSYSu zobecněný Maxwellův model použitý v modelech viskoelastického chování tzv. "Prony series" nebo v prvcích VISCO88 (rovinný) a VISCO89 (prostorový).
- Neznáme-li objemovou viskozitu, nejreálnějším předpokladem je čistě elastické chování v objemové složce, tedy objemová (druhá) viskozita blížící se nekonečnu.
- Neznáme-li objemový modul pružnosti a víme pouze, že materiál je téměř nestlačitelný, volíme objemový modul pružnosti o několik řádů vyšší než smykový. Chyba způsobená neznalostí konkrétní hodnoty objemového modulu pružnosti je pak obvykle zanedbatelná.

#### 4.3.16 Komplexní modul pružnosti viskoelastické látky

Obecně se jedná výhradně o modul pružnosti ve smyku  $G$ , příp. objemový modul pružnosti  $K$ . Pro modul pružnosti v tahu  $E$  lze použít jedině v případě jednodimenzionálního problému, nelze pak aplikovat na víceosou napjatost.

Závislost mezi napětím a přetvořením je ovlivněna rychlosťí (frekvencí) zatěžování, tedy na ní závisí i moduly pružnosti. Pro modul pružnosti ve smyku tedy platí:

$$G(\omega) = \frac{\sigma(\omega t)}{\varepsilon(\omega t)} \quad (.35)$$

Pro silové zatěžování (Maxwellův model) s harmonickým průběhem napětí, který vyjádříme pomocí komplexních čísel, platí:

$$\sigma(\omega t) = \sigma_a [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \sigma_a \exp(i\omega t) \quad (.36)$$

Protože deformace se zpožduje za napětím, je deformační odezva popsána vztahem:

$$\varepsilon(\omega t) = \varepsilon_a [\cos(\omega t - \delta) + i \sin(\omega t - \delta)] = \varepsilon_a \exp[i(\omega t - \delta)] \quad (.37)$$

#### Složky komplexního modulu pružnosti viskoelastické látky

Dosazením exponenciálních tvarů komplexních vyjádření napětí a přetvoření do vztahu pro modul pružnosti ve smyku dostaneme:

$$G(\omega) = \frac{\sigma_a \exp(i\omega t)}{\varepsilon \exp[i(\omega t - \delta)]} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \exp[i\delta(\omega)] = G_a \exp[i\delta(\omega)] \quad (.38)$$

Exponenciální tvar komplexního modulu můžeme pak převést zpět na tvar goniometrický:

$$G(\omega) = G_a \{ \cos[\delta(\omega)] + i \sin[\delta(\omega)] \} = G_{\text{Re}}(\omega) + i G_{\text{Im}}(\omega) = G'(\omega) + i G''(\omega) \quad (.39)$$

kde

$G_{\text{Re}} = G'$  je složka ve fázi, odpovídající elastickému chování materiálu, tedy elastický modul,

$G_{\text{Im}} = G''$  je složka mimo fázi, odpovídající viskóznímu chování materiálu, tedy ztrátový modul (*loss modulus*).

Komplexní modul je závislý na frekvenci zatěžování; jeho amplituda udává poměr amplitud napětí a deformace a fázový úhel definuje fázový posuv mezi napětím a deformací.

### Komplexní modul pružnosti pro deformační zatěžování

K analogickému výsledku dospějeme i pro deformační zatěžování (Voigtův model) s harmonickým průběhem přetvoření:

$$\varepsilon(\omega t) = \varepsilon_a [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \varepsilon_a \exp(i\omega t) \quad (.40)$$

Napětí se předbíhá před deformací o fázový posuv  $\delta$ , takže průběh napětí je popsán rovnicí:

$$\sigma(\omega t) = \sigma_a [\cos(\omega t - \delta) + i \sin(\omega t - \delta)] = \sigma_a \exp[i(\omega t - \delta)] \quad (.41)$$

takže dospějeme ke stejnemu vyjádření komplexního modulu pružnosti

$$G(\omega) = \frac{\sigma(\omega t)}{\varepsilon(\omega t)} = \frac{\sigma_a \exp[i(\omega t + \delta)]}{\varepsilon_a \exp(i\omega t)} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \exp[i\delta(\omega)] = G_a [\cos(\delta) + i \sin(\delta)] \quad (.42)$$

Tangenta fázového posuvu  $\delta$  je mírou disipace energie při deformaci materiálu a nazývá se **ztrátový faktor**.

### Složky komplexního modulu pružnosti pro jednoduché modely

Maxwellův model:

$$G_a = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{G_2} + \frac{1}{\eta^2 \omega^2}}} \quad \tan(\delta) = \frac{G}{\eta \omega} \quad (.43)$$

S rostoucí frekvencí zatěžování fázový úhel (i ztrátový faktor) klesá.

Voigtův model:

$$G_a = \sqrt{G^2 + \eta^2 \omega^2} \quad \tan(\delta) = \frac{\eta \omega}{G} \quad (.44)$$

S rostoucí frekvencí zatěžování fázový úhel (i ztrátový faktor) roste.

Kelvinův model:

$$G_a = G_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2}} \quad \tan(\delta) = \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon} \quad (.45)$$

Závislost fázového úhlu (ztrátového faktoru) na frekvenci vykazuje lokální extrém (viz dále).

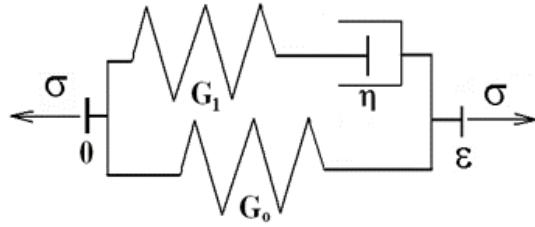
Ve všech případech amplituda komplexního modulu pružnosti roste s rostoucí frekvencí zatěžování, tedy **materiál se vždy při rychlejším zatěžování jeví jako tužší**.

### Určení složek komplexního modulu pružnosti v Kelvinově modelu

$$G(\omega) = \frac{\sigma(\omega t)}{\varepsilon(\omega t)} = G_0 \frac{1 + \omega^2 \tau_{12} \sigma \tau_{12} \varepsilon + i \omega (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \quad (.46)$$

$$G_a(\omega) = G_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2}} \quad \tan [\delta(\omega)] = \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon} \quad (4.47)$$

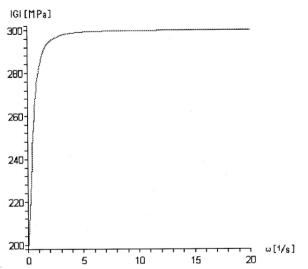
Zvolené parametry modelu jsou  $G_0 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\tau_\sigma = 3 \text{ s}$ ,  $\tau_\varepsilon = 2 \text{ s}$ .



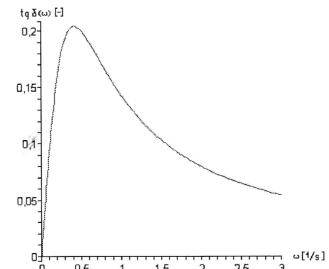
Obrázek 4.13: Kelvinův model

Pro tyto parametry ( $\eta$  a  $G_1$  jsou zadány nepřímo pomocí časových konstant) jsou dále vykresleny závislosti amplitudy komplexního modulu pružnosti  $G_a$  a ztrátového faktoru  $\tan(\delta)$  (vykazuje extrém pro  $\omega_{\text{ex}} = 0,408 \text{ rad s}^{-1}$ ) na úhlové frekvenci zatěžování  $\omega$ .

Amplituda a ztrátový faktor komplexního modulu pružnosti jako funkce úhlové frekvence zatěžování v Kelvinově modelu



Obrázek 4.14: Amplituda modulu pružnosti



Obrázek 4.15: Ztrátový faktor

#### 4.3.17 Konstitutivní modely pro viskoelastické materiály s velkými deformacemi

Matematické formulace viskoelastických konstitutivních modelů respektujících velké deformace jsou analogické formulacím hyperelastickým. Protože se však jedná o stavy termodynamicky nerovnovážné, místo funkce měrné energie napjatosti se používá Helmholtzova volná energie

$$\psi = U - TS, \quad (4.48)$$

kde

$T$  je absolutní teplota,  
 $S$  je entropie.

Pro elastické materiály jsou obě energie totožné.

Tato energie se vyjadřuje v obecném tvaru:

$$\psi = \psi_{\text{vol}}^\infty(J) + \psi_{\text{iso}}^\infty(\bar{C}) + \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(\bar{C}, \Gamma_\alpha) \quad (4.49)$$

kde

$\psi_{\text{vol}}^\infty$  je objemová složka Helmholtzovy volné energie,  
 $\psi_{\text{iso}}^\infty$  je její izochorická (deviátorová) složka,  
 $\bar{C}$  je deviátorová část pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  
 $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu,  
 $Y_\alpha$  je množina funkcí popisujících nevratnou část Helmholtzovy volné energie,  
 $\Gamma_\alpha$  je množina funkcí popisujících časovou závislost deformace.

Pro matematický popis lze využívat reologických modelů podobně jako u lineární viskoelasticity, např. model Bergström-Boyce. Podrobnosti lze nalézt např. v níže uvedené literatuře.<sup>2 3 4</sup>

---

<sup>2</sup>Bergström JS, Boyce MC (1998): Constitutive Modeling of the Large Strain Time-dependent Behavior of Elastomers, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45 (5), pp. 931-954.

<sup>3</sup>Bergström, J. S., Boyce, M. C. (2001): Constitutive Modeling of the Time-Dependent and Cyclic Loading of Elastomers and Application to Soft Biological Tissues, Mechanics of Materials 33, pp. 523-530. Simo, J.C., "On fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects", Comput. Meth. In Appl. Mech. Eng., Vol. 60, pp. 153-173 (1987).

<sup>4</sup>G.A. Holzapfel, "On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 39, pp. 3903-3926 (1996).

# Kapitola 5

## Modely plastického chování

### 5.1 Úvod

#### 5.1.1 Doporučená literatura

- J. Hůlka: Výpočtová predikce tvárného porušování. Disertační práce VUT Brno, 2014.
- Kubík P.: Implementace, kalibrace a využití podmínek tvárného lomu v programech MKP. Disertační práce VUT Brno, 2015.
- články v časopisech uvedené u jednotlivých modelů.

Plastické (tvárné) materiály vykazují kromě malých elastických přetvoření konečná (tj. velká) nevratná přetvoření. V jejich důsledku je nutné pro část tahové křivky mezi  $R_e$  a  $R_m$  přepočítat smluvní hodnoty napětí a přetvoření na „skutečné napětí – logaritmické přetvoření“.

Nad hodnotou  $R_m$  se vytvoří krček a v něm vzniká víceosá napjatost, kdy je třeba použít redukované napětí a přetvoření a jednoduchý přepočet není možný (vliv geometrie krčku, tedy jeho průměru a poloměru zaškracení, na pole napjatosti).

#### 5.1.2 Popis plastické deformace

Nejvíce rozšířená teorie předpokládá nestlačitelný materiál, takže popisuje pouze deviátorovou složku elastických a plastických deformací. K popisu pružně-plastického chování materiálu je nutné znát:

1. Mezní podmínku plasticity
  - Tresca
  - von Mises
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
2. Model plastického tečení – křivka zpevnění pro jednoosou napjatost, příp. proporcionální zatěžování (flow curve)
  - Ramberg-Osgood
  - Voce 4
  - Norton – model viskoplastického creepu
  - Johnson-Cook – viskoplastický model s vlivem teploty
3. Model zpevnění materiálu
  - Izotropní (nevzhodné pro cyklické zatěžování)
  - Kinematické (popisuje Bauschingerův efekt) – model Chaboche

#### 4. Model plastického porušení

- Johnson-Cook
- Bai-Wierzbicki

### Modely plastického porušení

1. Svázáné modely plasticity – zahrnují porušení do modelu plastického tečení, resp. popisují plastické chování za mezí pevnosti na základě popisu průběhu porušování (continuum damage mechanics – CDM).
  - Gurson-Tvergaard-Needleman – model<sup>123</sup> pro porézní kovy
2. Nesvázáné – modelují pouze porušení
  - Johnson-Cook – závislost lomového přetvoření na rychlosti deformace a teplotě.
  - Bai-Wierzbicki

## 5.2 Podmínky plasticity

### 5.2.1 Podmínka plasticity Mohr-Coulomb

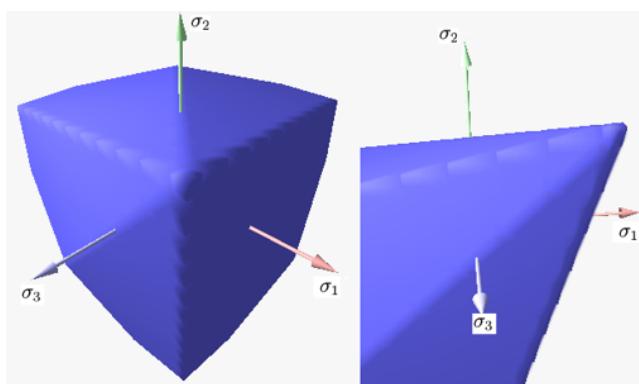
Představuje rozšíření Trescovy podmínky na materiály s různou mezí kluzu v tahu a tlaku. Její redukované napětí je dáno rovnicí

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{MC}} = \frac{m+1}{2} \max \left[ |\sigma_I - \sigma_{II}| + K(\sigma_I + \sigma_{II}); |\sigma_I - \sigma_{III}| + K(\sigma_I + \sigma_{III}); |\sigma_{II} - \sigma_{III}| + K(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \right], \quad (.1)$$

kde

$$m = \frac{R_e^{\text{tlak}}}{R_e^{\text{tahu}}} \quad \text{a} \quad K = \frac{m-1}{m+1}$$

a v Haighově prostoru hlavních napětí představuje pravidelný šestiboký jehlan.



Obrázek 5.1: Podmínka plasticity Mohr-Coulomb v Heighově prostoru

<sup>1</sup>A. Gurson, “Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media,” no. September, 1975.

<sup>2</sup>V. Tvergaard and A. Needleman, “Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar,” Acta Metall., vol. 32, no. I, pp. 157–169, 1984.

<sup>3</sup>K. Nahshon and J. W. Hutchinson, “Modification of the Gurson Model for shear failure,” Eur. J. Mech. - A/Solids, vol. 27, no. 1, pp. 1–17, Jan. 2008.

Pozor! Pro výpočet součinitele bezpečnosti je třeba použít mez kluzu v tlaku!

$$k = \frac{R_e^{\text{tlak}}}{\sigma_{\text{red}}^{\text{MC}}} \quad (.2)$$

Pro  $m = 1$  dostaneme standardní tvar Trescovy podmínky.

### 5.2.2 Podmínka plasticity Drucker-Prager

Představuje de facto rozšíření Misesovy podmínky na materiály s různou mezí kluzu v tahu a tlaku. Redukované napětí podle této podmínky je dánov rovnicí

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{DP}} = \frac{m-1}{2} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{m+1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]} \quad (.3)$$

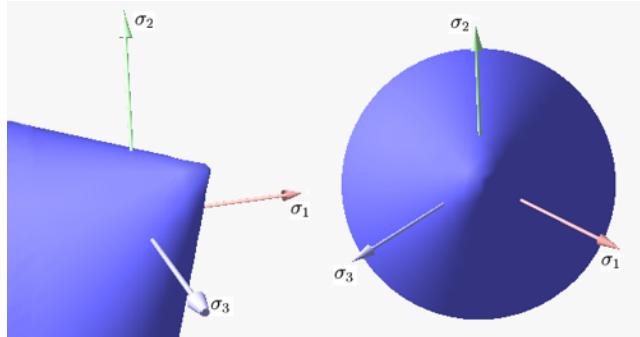
nebo

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{DP}} = \frac{m-1}{2} I_1 + \frac{m+1}{2} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (.4)$$

kde

$$m = \frac{R_e^{\text{tlak}}}{R_e^{\text{tah}}}$$

a v Haighově prostoru hlavních napětí představuje kužel s osou v normále oktaedrické roviny.



Obrázek 5.2: Podmínka plasticity Drucker-Prager v Heighově prostoru

Pozor! Pro výpočet součinitele bezpečnosti je třeba použít mez kluzu v tlaku!

$$k = \frac{R_e^{\text{tlak}}}{\sigma_{\text{red}}^{\text{DP}}} \quad (.5)$$

Pro  $m = 1$  dostaneme standardní tvar Misesovy podmínky.

## 5.3 Modely tečení

### 5.3.1 Model plastického tečení Ramberg-Osgood

Tento model<sup>4</sup> vyjadřuje explicitně logaritmické přetvoření jako funkci skutečného napětí nezávislou na čase; je vhodný pro materiály bez výrazné meze kluzu.

---

<sup>4</sup>Ramberg, W., Osgood, W. R. "Description of stress-strain curves by three parameters", Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC, 1943

Je popsán rovnicemi

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n, \quad (.6)$$

nebo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n, \quad (.7)$$

kde

- $\varepsilon$  je (celkové) přetvoření,
- $E$  je Youngův modul,
- $\sigma_y$  je mez kluzu ( $R_{p0.2}$ ),
- $n$  je parametr modelu,
- $K$  je parametr modelu.

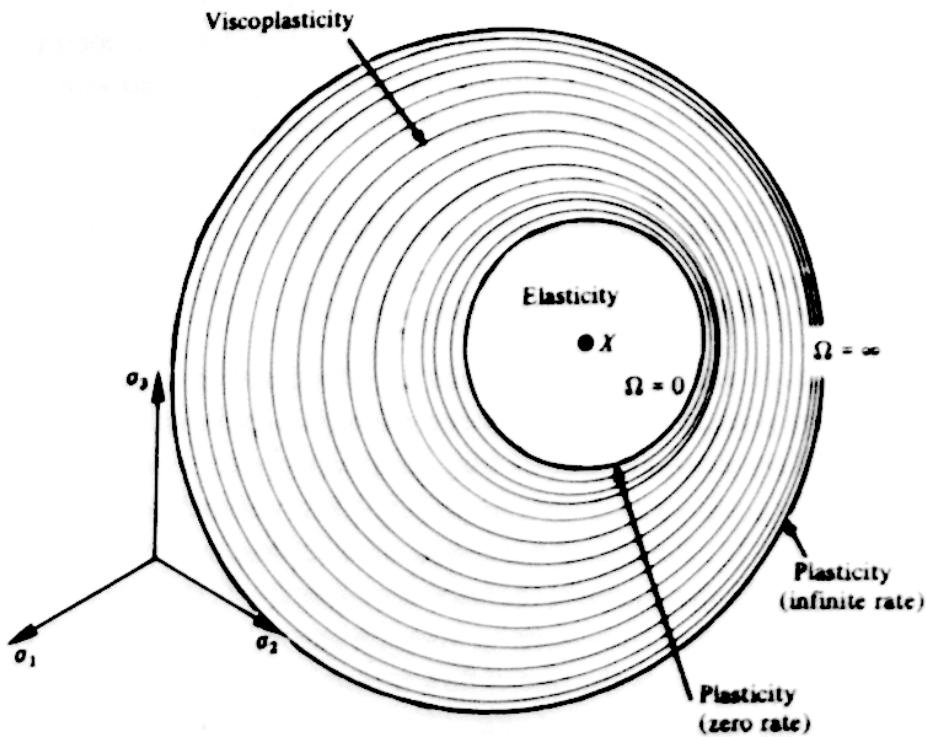
Model popisuje celou křivku elastické deformace i zpevnění jedinou obecně nelineární mocninou funkcí, protože pracuje pouze s celkovým přetvořením. Pro víceosou napjatost se použije jako skalárni hodnota  $\sigma$  redukované von Misesovo napětí a výsledné  $\varepsilon$  je redukované přetvoření.

### Použitelnost modelu plastického tečení

Plastické tečení často významně závisí na rychlosti zatěžování, tedy je de facto viskoplastické. Mezní plocha plasticity pak závisí na rychlosti zatěžování.

Plastické modely, které nezohledňují rychlosť zatěžování, lze použít:

- při velmi (nekonečně) malých rychlostech zatěžování – vnitřní křivka na obrázku 5.3 (nedojde k porušení termodynamické rovnováhy),
- při velmi vysokých rychlostech zatěžování – vnější křivka na obrázku 5.3 (rázové děje),
- při absolutní teplotě do  $\frac{1}{4}$  teploty tavení kovu, kdy je rozdíl mezi oběma křivkami zanedbatelný.



Obrázek 5.3: Závislost mezní plochy plasticity na rychlosti zatěžování

### 5.3.2 Lode

#### Lodeho parametr

Dalším významným parametrem pro tvárné porušení vztaženým ke stavu napjatosti je Lodeho parametr  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (.8)$$

Lodeho parametr nabývá hodnot v intervalu  $-1 \leq \mu \leq 1$  a charakterizuje typ napjatosti z hlediska polohy hlavního napětí  $\sigma_2$  vůči  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$  (v Mohrově diagramu to je relativní vzdálenost napětí  $\sigma_2$  od středu nevětší kružnice). Jeho význam se různí podle materiálů, je velký např. u hliníkových slitin, u ocelí pak při nízkých faktorech triaxiality napětí.

Název	$\mu$	Hlavní napětí
Smyková	0	$\sigma_3 = -\sigma_1; \sigma_2 = 0$
Jednoosá tahová	-1	$\sigma_1 > 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$
Dvouosá tahová rovnoměrná	1	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0; \sigma_3 = 0$
Jednoosá tlaková	1	$\sigma_3 < 0; \sigma_2 = \sigma_1 = 0$
Dvouosá tlaková rovnoměrná	-1	$\sigma_3 = \sigma_2 < 0; \sigma_1 = 0$
Trojosá rovnoměrná	Neurčitý výraz 0/0	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$

## Lodeho úhel

Alternativním vyjádřením Lodeho parametru je Lodeho úhel  $\theta$ , který představuje normalizovaný arkustangens Lodeho parametru  $\mu$ ; lze jej také vyjádřit pomocí normalizovaného třetího invariantu deviátoru napětí  $\xi$ :

$$\theta = \arctan \left( \frac{\mu}{\sqrt{3}} \right) \quad (.9)$$

nebo

$$\theta = -\frac{1}{3} \arcsin (\xi), \quad (.10)$$

kde

$$\xi = \left( \frac{r}{\sigma_{\text{Mises}}} \right)^3 = \frac{27}{2} \frac{\det \mathbf{S}}{\sigma_{\text{Mises}}^3},$$

přičemž

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt[3]{\frac{27}{2} \det \mathbf{S}} = \sqrt[3]{\frac{27}{2} (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)},$$

kde

- $\mathbf{S}$  reprezentuje deviátor tenzoru napětí,
- $\sigma_{\text{Mises}}$  je střední (hydrostatická) složka napětí,
- $\sigma_m$  je redukované napětí podle von Misesovy podmínky plasticity.

Lodeho úhel nabývá hodnot v intervalu  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ , normalizovaný třetí invariant deviátoru napětí je v intervalu  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Především v mezních podmínkách porušení má faktor triaxiality napětí a Lodeho parametr velký význam, protože ovlivňují vznik porušení. Experimentální ověřování mezních podmínek je třeba proto provádět při různých hodnotách těchto parametrů; lze je měnit typem namáhání vzorku (tah, tlak, biaxální tah-tlak, krut, různé jejich kombinace) nebo změnou jeho geometrie (poloměru vrubu).

### 5.3.3 Faktor triaxiality napětí

Střední napětí (hydrostatická – kulová) složka tenzoru napětí nemá významný vliv na mezníku, ale má značný vliv na tvárné porušení. Jeho normalizovaná hodnota se nazývá faktor triaxiality napětí.

Faktor triaxiality napětí  $\eta$  je rozhodující pro přechod od tvárného ke křehkému porušení a objevuje se spolu s Lodeho parametrem v některých mezních podmínkách, resp. konstitutivních modelech. Je dán poměrem kulové a deviátorové části tenzoru napětí, konkrétně středního a Misesova napětí, podle vztahu:

$$\eta = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\text{HMH}}}, \quad (.11)$$

kde

- $\sigma_s$  je střední napětí, reprezentující kulovou (hydrostatická) složku napjatosti,
- $\sigma_{\text{HMH}}$  je redukované napětí podle Misesovy podmínky plasticity (deviátorová složka napjatosti).

Z vlastností uvedených složek napětí plyne, že  $\eta$  je nulové pro smykovou napjatost (nulová střední složka napětí, čistý deviátor) a dosahuje extrémních hodnot  $\pm\infty$  pro rovnoměrnou trojosou napjatost v tahu (tlaku).

Změní-li se znaménko všech složek napětí, nezmění se velikost triaxiality, ale změní se jen znaménko faktoru triaxiality napětí.

Název	$\eta$	Hlavní napětí
Smyková	0	$\sigma_3 = -\sigma_1; \sigma_2 = 0$
Dvouosá s opačnými znam. hl. napětí	$0 < \eta < \frac{1}{3}$	$\sigma_1 > 0 > \sigma_3; \sigma_2 = 0$
Jednoosá tahová	$\eta = \frac{1}{3}$	$\sigma_1 > 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$
Dvouosá tahová nerovnoměrná	$\frac{1}{3} < \eta < \frac{2}{3}$	$0 < \sigma_2 < \sigma_1; \sigma_3 = 0$
Dvouosá tahová rovnoměrná	$\eta = \frac{2}{3}$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0; \sigma_3 = 0$
Trojosá tahová polorovnoměrná	$\eta > \frac{2}{3}$	$0 < \sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2$
Trojosá tahová polorovnoměrná	$\eta = 1$	$0 < \sigma_1 = \sigma_2; \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{4}$
Trojosá tahová polorovnoměrná	$\eta = \frac{10}{6} \approx 1,67$	$0 < \sigma_1 = \sigma_2; \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{2}$
Trojosá tahová rovnoměrná	$\eta \rightarrow \infty$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$

Obrázek 5.4: Závislost součinitele triaxiality napětí  $\eta$  na typu napjatosti

Název	$\eta$	Hlavní napětí
Smyková	0	$\sigma_3 = -\sigma_1; \sigma_2 = 0$
Dvouosá s opačnými znam. hl. napětí	$0 > \eta > -\frac{1}{3}$	$0 < \sigma_1 <  \sigma_3 ; \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$
Jednoosá tlaková	$\eta = -\frac{1}{3}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$
Dvouosá tlaková nerovnoměrná	$-\frac{1}{3} > \eta > -\frac{2}{3}$	$\sigma_1 = 0; \sigma_3 < \sigma_2 < 0$
Dvouosá tlaková rovnoměrná	$\eta = -\frac{2}{3}$	$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_3 < 0$
Trojosá tlaková polorovnoměrná	$\eta < -\frac{2}{3}$	$0 > \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
Trojosá tlaková polorovnoměrná	$\eta = -1$	$\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{4}; \sigma_2 = \sigma_3 < 0$
Trojosá tlaková polorovnoměrná	$\eta = -\frac{10}{6} \approx -1,67$	$\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{2}; \sigma_2 = \sigma_3 < 0$
Trojosá tlaková rovnoměrná	$\eta \rightarrow -\infty$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$

Obrázek 5.5: Závislost součinitele triaxiality napětí  $\eta$  na typu napjatosti (tlakové)

## 5.4 Modely zpevnění

### 5.4.1 Model plastického zpevnění Voce4

Tento model je jedním z řady modelů testovaných autorem na různých slitinách a vykazuje nejlepší shodu s experimenty pro řadu materiálů s výraznou mezí kluzu. V souřadnicích skutečné napětí vs. logaritmické přetvoření je dán rovnicí:

$$\sigma = \sigma_y + C_1 [1 - \exp(-k_1 \varepsilon)] + C_2 [1 - \exp(-k_2 \varepsilon)] \quad (12)$$

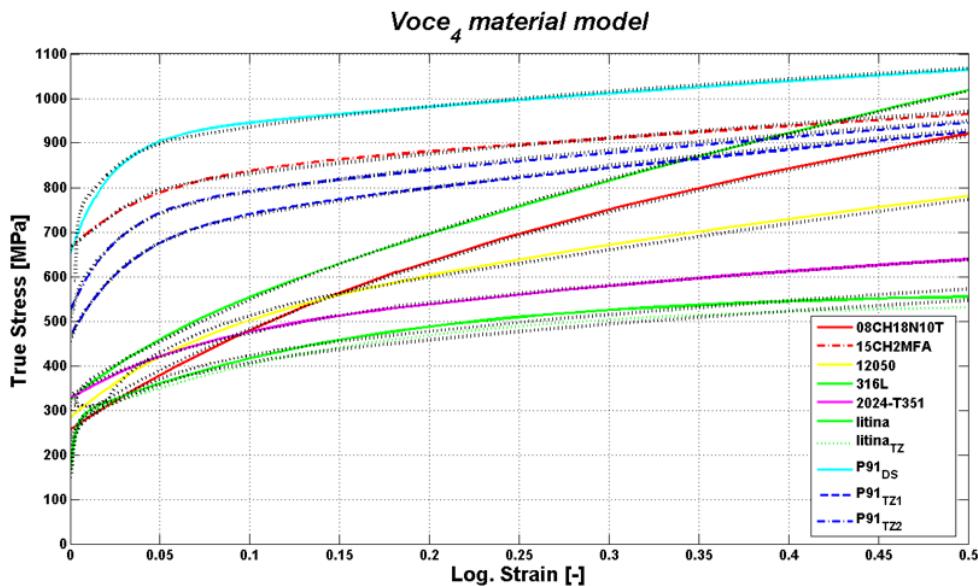
kde

$\sigma_y$  je mez kluzu,

$\varepsilon$  je redukované plastické přetvoření

$C_1, C_2 [MPa], k_1, k_2 [-]$  jsou další parametry modelu.

## Porovnání modelu Voce4 s experimenty



Obrázek 5.6: Porovnání modelu Voce4 s experimenty (výsledky experimentů tečkované)

- Austenitické oceli
  - 08CH18N10T (ruská vysokolegovaná ocel používaná na jaderných zařízeních)
  - 15CH2MFA (ruská vysokolegovaná ocel používaná na jaderných zařízeních)
  - AISI 316L (americká vysokolegovaná ocel používaná na energetických zařízeních)
- Feritické oceli
  - ČSN 41 2050 – konstrukční uhlíková ocel vhodná pro zušlechtování a kalení
  - P91 – X10CrMoVNb91 – žárupevná, korozně odolná vůči páře, zplodinám hoření a H<sub>2</sub>, v základním a dvou tepelně zpracovaných stavech.
- Tvárná litina EN-GJS-400-18U-LT – s kuličkovým grafitem, která se používá na komponenty větrných elektráren a její tažnost je min.  $A = 18\%$ , v základním stavu a tepelně zpracovaná.
- Dural 2024-T351 – je slitina hliníku Al-Cu-Mg, hojně využívaná v letectví, je charakteristická svou vysokou pevností.

### 5.4.2 Použití viskoplastických modelů

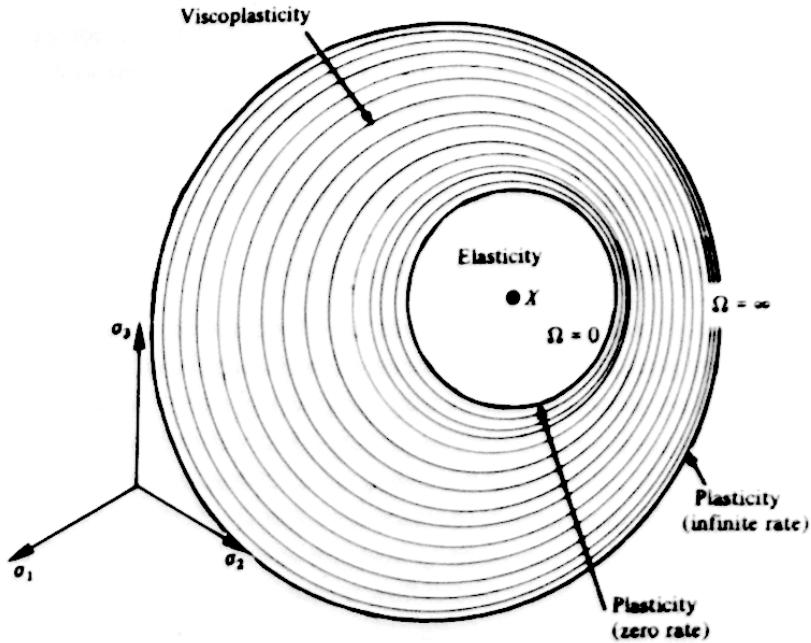
Pokud plastická deformace významně závisí na rychlosti zatěžování, jedná se o chování viskoplastické (viz obr. 5.4.2).

Viskoplastické modely umožňují popsat mezní plochy plasticity pro široké rozmezí rychlostí zatěžování, od nekonečně malých (rovnovážný stav) po velmi vysoké (rázové děje). U kovů jsou potřebné, pokud absolutní teplota překročí  $\frac{1}{4}$  teploty tavení kovu.

#### Model (visko)plasticity Johnson-Cook

Tento viskoplastický model<sup>5</sup> zohledňuje vliv rychlosti deformace a teploty na plastické chování materiálu a je navíc schopen popsat také porušení. Jeho křivka zpevnění je dána rovnicí pro

<sup>5</sup>Johnson G. R., Cook W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. Engineering Fracture Mechanics, 1985, vol. 21, pp. 31-48.



Obrázek 5.7: Závislost mezní plochy plasticity na rychlosti zatěžování

redukované (Misesovo) napětí

$$\bar{\sigma} = [\sigma_y + K(\bar{\varepsilon}_p)^n] [1 + C \ln(\dot{\varepsilon}^*)] [1 - (T^*)^m], \quad (.13)$$

kde

$\bar{\varepsilon}_p$  je redukované plastické přetvoření,

$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0}$  je bezrozměrná rychlosť redukovaného plastického přetvoření,

$\dot{\varepsilon}_p$  je rychlosť redukovaného plastického přetvoření,

$\dot{\varepsilon}_0$  je referenční rychlosť přetvoření, obvykle při standardní tahové zkoušce (měla by být kvazistatická),

$T^* = \frac{T-T_0}{T_m-T_0}$  se nazývá homologická teplota, kde  $T$ ,  $T_m$ ,  $T_0$  značí aktuální teplotu, teplotu tavení a pokojovou teplotu [K].

$\sigma_y$  je mez kluzu,

$K$  [MPa],  $n$  [-]  $< 1$ ,  $C$  [-],  $m$  [-] jsou další parametry modelu.

## Materiálové zkoušky pro viskoplastický model

Pro identifikaci modelu je třeba experimentálně určit závislost na rychlosti zatěžování a na teplotě; jsou nutné minimálně následující zkoušky:

- Kvazistatická zkouška za pokojové teploty  
Při ní je  $\dot{\varepsilon} = 1$  a  $T^* = 0$ , takže fitujeme jen koeficienty v první závorce ( $K$ ,  $n$ ).
- Kvazistatická zkouška za zvýšené teploty  
Pokud proběhne při stejné rychlosti deformace, můžeme exponent teplotního změkčení určit ze vztahu

$$m = \frac{\log(1 - R)}{\log(T_1^*)}, \quad (.14)$$

kde

$$R = \frac{1 - (T_1^*)^m}{1 - (T_2^*)^m}$$

Obrázek 5.8: Vliv zvýšení teploty o 200 K na deformačně-napěťovou křivku

- Dynamická zkouška za pokojové teploty

Z této zkoušky se určí konstanta  $C$  (pro  $T^* = 0$ ) pro bezrozměrnou rychlosť redukovaného plastického přetvoření určenou z obou zkoušek jako

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \quad (15)$$

### 5.4.3 Model Norton

Tento model<sup>6</sup> popisuje sekundární tečení kovů na základě jejich visko-plastického chování, do něhož zahrnuje závislost na teplotě. Jeho rychlosť creepového přetvoření je popsána rovnicí

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} \exp\left(-\frac{C_3}{T}\right), \quad (16)$$

kde

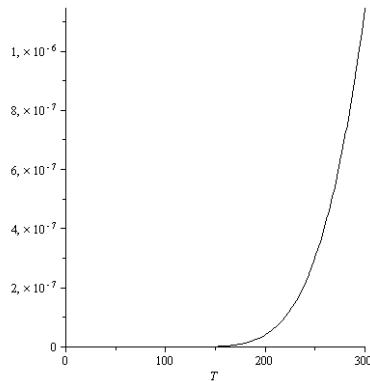
$\sigma$  je ekvivalentní napětí (Misesovo)

$\dot{\varepsilon}_{cr}$  je rychlosť ekvivalentního creepového přetvoření

$T[K]$  je absolutní teplota

$C_1[\text{Pa}^{-C_2}/\text{s}], C_2[-], C_3[\text{K}]$  jsou materiálové parametry.

Výstupem modelu není přímo velikost, ale jen rychlosť přetvoření. Abychom dostali přetvoření v daném okamžiku, je třeba ji ještě integrovat v čase od výchozího (nedeformovaného) stavu.



Obrázek 5.9: Závislost rychlosti krípové deformace na teplotě (parametry zvoleny náhodně)

### 5.4.4 Model kinematického zpevnění Chaboche

Pro monotonní jednoosé zatěžování tento model<sup>7</sup> používá rovnici:

$$\sigma = \sigma_y + \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{\gamma_i} [1 - \exp(-\gamma_i \varepsilon_p)], \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \quad (17)$$

<sup>6</sup>Norton, F. H. "The Creep of Steel at High Temperature", McGraw-Hill, 1929

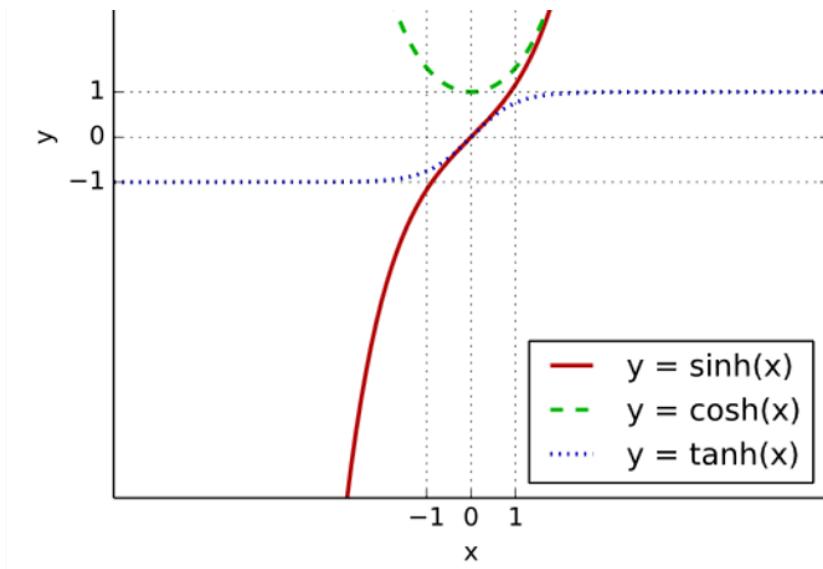
<sup>7</sup>Chaboche, J. L., Dang-Van, K. Cordier, G. "Modelization of strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel" In: Transactions of the 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, No. Div L in 11/3, 1979

Pro cyklické zatěžování s amplitudou napětí  $\sigma_a$  a přetvoření  $\varepsilon_a$  má rovnice tvar:

$$\sigma_a = \sigma_y + \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{\gamma_i} \tanh(\gamma_i \varepsilon_{ap}), \quad \varepsilon = \frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon_{ap} \quad (.18)$$

kde

- $\sigma_y$  je mez kluzu,
- $\varepsilon_p$  je plastické přetvoření,
- $\varepsilon_{ap}$  je amplituda plastického přetvoření,
- $M$  je zvolený stupeň modelu,
- $C_i$  [MPa],  $\gamma_i$  [-] jsou další parametry modelu.



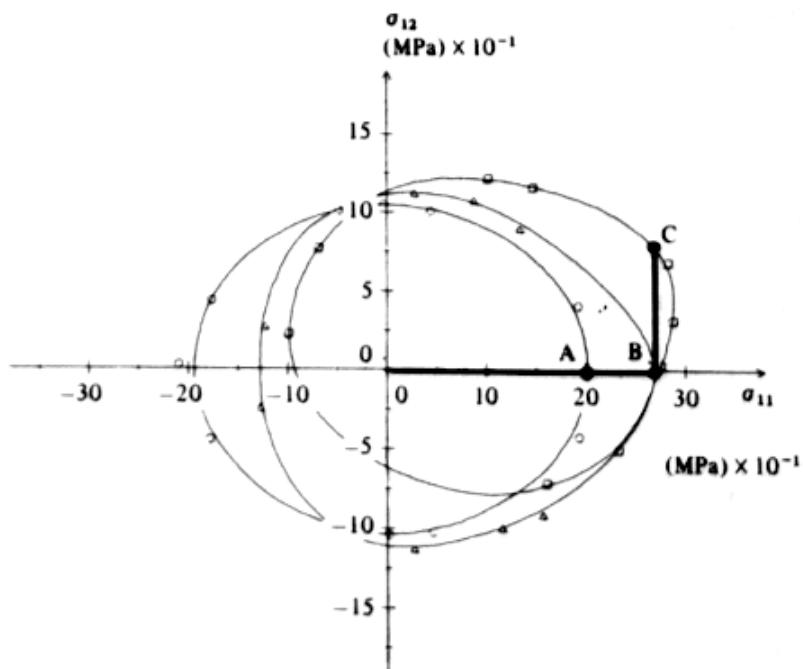
Obrázek 5.10: Průběhy hyperbolických funkcí

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (.19)$$

### Kinematické zpevnění při víceosé napjatosti

Pro víceosou napjatost se posun mezní plochy řídí tenzorovou proměnnou.

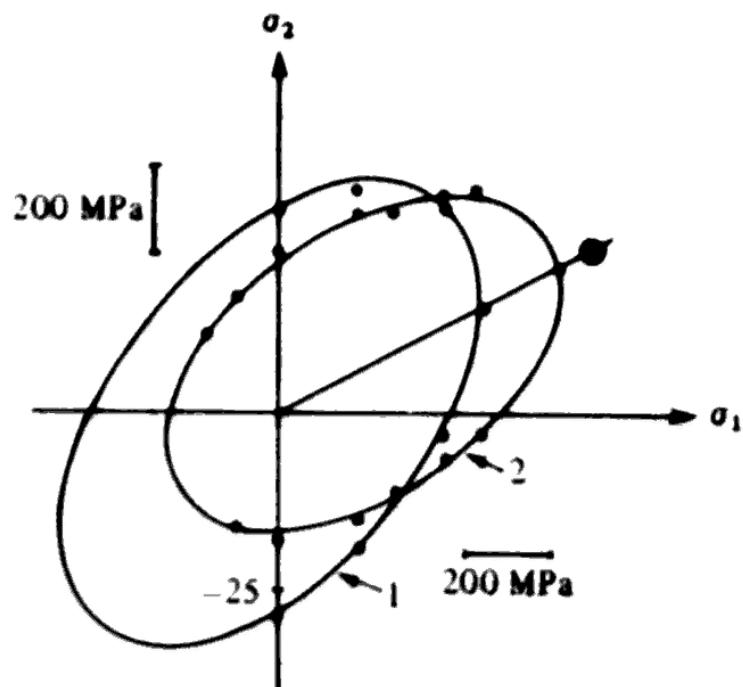
- A – prvotní plocha plasticity (bez zpevnění).
- B – následná plocha plasticity se zpevněním v tahu.
- C – následná plocha plasticity se zpevněním v tahu a krutu (prutová napjatost).



Obrázek 5.11: Závislost následné mezní plochy plasticity na předchozím zatížení v tahu a krutu pro hliníkovou slitinu 2024.

Při víceosé napjatosti dochází ke kombinaci různých typů zpevnění:

- izotropní změkčení – zmenšení následné plochy plasticity,
- anizotropní zpevnění – rotace prvočí plochy plasticity,
- kinematické zpevnění – posun následné plochy plasticity.



Obrázek 5.12: Modifikace následné mezní plochy plasticity pro ocel 1Cr-1/2Mo-1/4V.

Obrázek 5.13: Průběh deformačně-napěťové křivky nad mezí kluzu (jen plastická deformace)

## 5.5 Modely porušení

### 5.5.1 Model porušení Bai-Wierzbicki

Model<sup>8</sup> popisuje přesněji závislost porušení na deformačně napěťovém stavu, ale nezahrnuje vliv teploty a rychlosti deformace. Kumulaci poškození popisuje opět parametr poškození počítaný integrálem

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}_p} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_f(\eta, \bar{\theta})}, \quad (20)$$

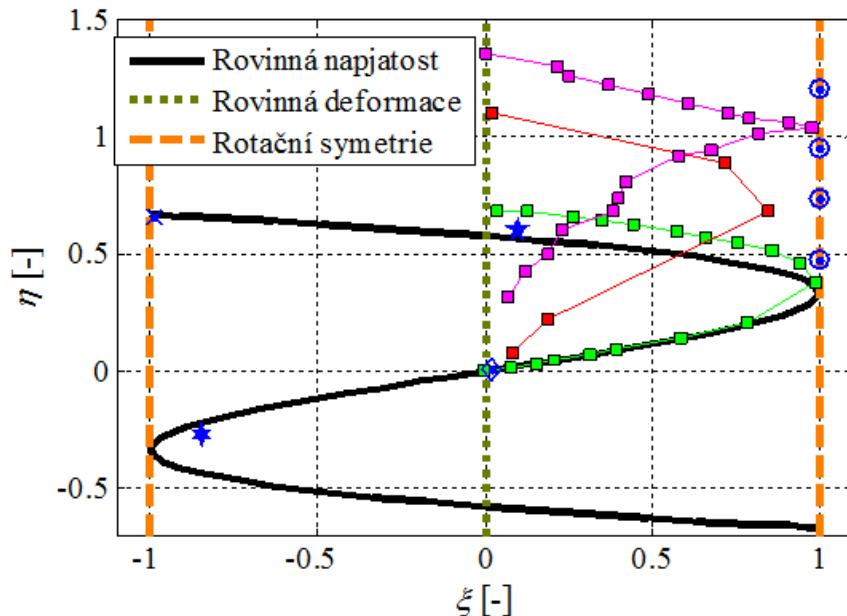
kde lomové přetvoření  $\bar{\varepsilon}_f$  je funkcí triaxiality napětí  $\eta$  a normalizovaného Lodeho úhlu  $\bar{\theta}$ .

Model pro ně zavádí následující tvar:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_f(\eta, \bar{\theta}) = & \left\{ \frac{1}{2} [N_1 \exp(-N_2\eta) + N_5 \exp(-N_6\eta)] - N_3 \exp(-N_4\eta) \right\} \bar{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2} [N_1 \exp(-N_2\eta) - N_5 \exp(-N_6\eta)] \bar{\theta} + N_3 \exp(-N_4\eta) \end{aligned} \quad (21)$$

kde  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  a  $N_6$  jsou bezrozměrné parametry modelu.

Porušení nastane, když parametr poškození dosáhne jednotkové hodnoty ( $D = 1$ ).



Obrázek 5.14: Typy napjatostí kalibračních těles v prostoru Lodeho parametrů – součinitel triaxiality napětí

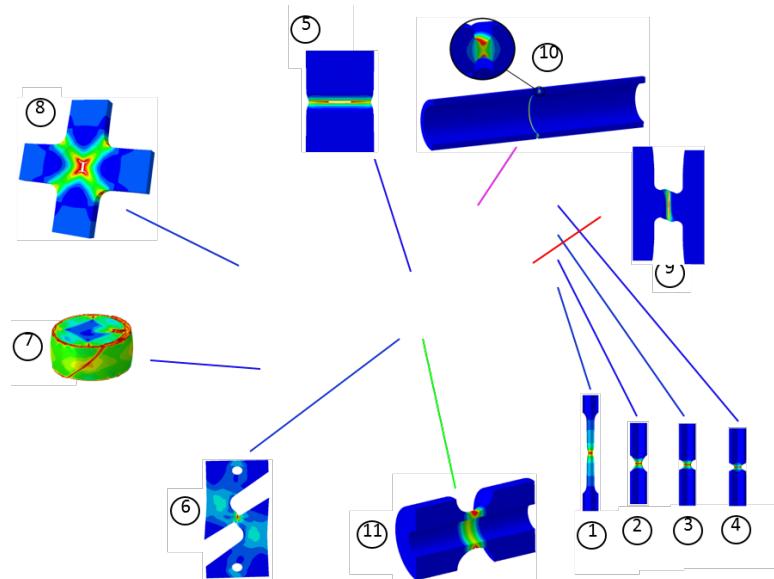
### Kalibrační tělesa modelů plasticity a porušení

Tahová zkouška vzorku s vrubem umožňuje měnit jen součinitel triaxiality.

Složitější vzorky:

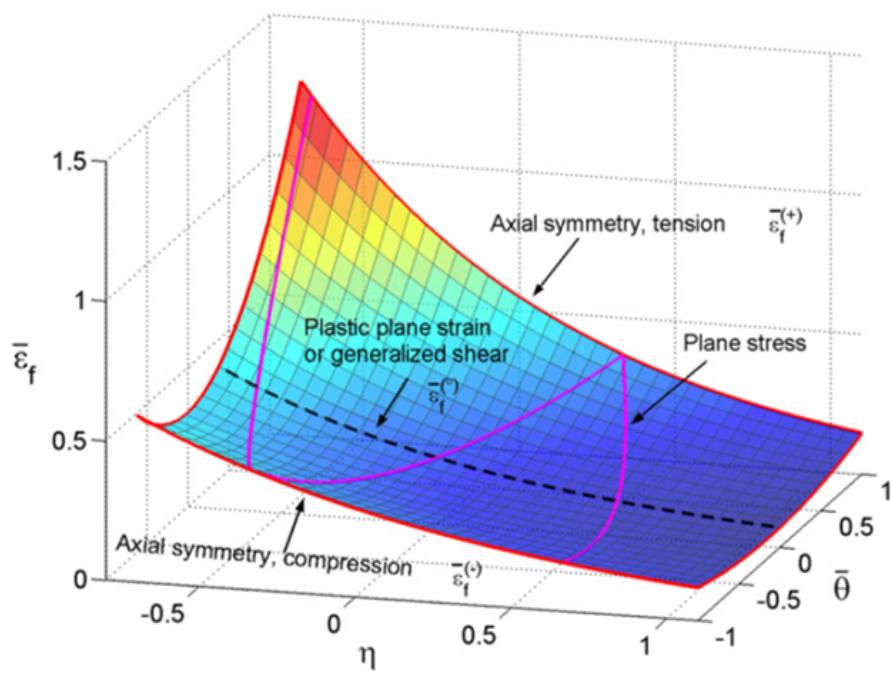
<sup>8</sup>Bai Y., Wierzbicki T.: A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. International Journal of Plasticity, 2008, vol. 24, pp. 1071-1096.

- Plech se dvěma symetrickými vruby v tahu a smyku
- Zkouška rovnoměrným dvousým tahem (ekvibiaxiální)
- Pěchování válcových vzorků
- Trubka se dvěma ostrými vruby zevnitř a zvenku



Obrázek 5.15: Kalibrační tělesa modelů

Lomové přetvoření lze zobrazit v prostoru s osami  $\eta - \bar{\theta} - \bar{\varepsilon}_f$ .



Obrázek 5.16: Grafická interpretace modelu

### 5.5.2 Model porušení Johnson-Cook

Tento model<sup>9</sup> plastického porušení podobně jako stejnojmenný viskoplastický model zohledňuje vliv rychlosti deformace a teploty, navíc také triaxiality napětí  $\eta$ . Pro popis kumulace poškození zavádí parametr poškození  $D$  ve tvaru

$$D = \sum \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_f(\eta, \dot{\varepsilon}^*, T^*)}, \quad (.22)$$

kde

$\Delta \bar{\varepsilon}_p$  je rozkmit redukovaného plastického přetvoření,

$\bar{\varepsilon}_f$  je lomové přetvoření,

$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0}$  je bezrozměrná rychlosť redukovaného plastického přetvoření,

$\dot{\varepsilon}_p$  je rychlosť redukovaného plastického přetvoření,

$\dot{\varepsilon}_0$  je referenční rychlosť přetvoření, obvykle při tahové zkoušce,

$T^* = \frac{T-T_0}{T_m-T_0}$  se nazývá homologická teplota, kde  $T$ ,  $T_m$ ,  $T_0$  značí aktuální teplotu, teplotu tavení a pokojovou teplotu [K].

Pro lomové přetvoření  $\bar{\varepsilon}_f$ , které je funkcí triaxiality napětí  $\eta$ , rychlosti deformace a teploty, model zavádí následující tvar:

$$\bar{\varepsilon}_f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta)] [1 + D_4 \ln(\dot{\varepsilon}^*)] [1 + D_5 T^*], \quad (.23)$$

kde  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ , a  $D_5$  jsou bezrozměrné parametry modelu.

Porušení nastane, když parametr poškození dosáhne mezní (jednotkové) hodnoty  $D = 1$ .

Parametry modelu pro řadu materiálů lze nalézt v:

Johnson G. R., Holmquist T. J. Test data and computational strength and fracture model constants for 23 materials subjected to large strain, high strain rates, and high temperature. Los Alamos National Laboratory: Technical Report LA-11463-MS, 1989.

---

<sup>9</sup>Johnson G. R., Cook W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. Engineering Fracture Mechanics, 1985, vol. 21, pp. 31-48.

# Příloha A

## Zkouškové otázky

1. Uveďte základní skupiny konstitutivních modelů látek s ohledem na směrovou závislost vlastností, na velikost a vratnost deformací a jejich časovou závislost?
2. Jak jsou definovány ideálně tuhá látka, ideální kapalina a ideální plyn?
3. Co je to kulová složka tenzoru a deviátor tenzoru? Uveďte příklad.
4. Jak je definován hyperelastický materiál?
5. Jaká je základní struktura funkcí popisujících měrnou energii napjatosti hyperelastických materiálů, jaké matematické funkce se nejčastěji používají?
6. Jak je definován objemový modul pružnosti?
7. Jaké znáte elastické konstanty lineárně pružného izotropního homogenního materiálu?
8. Jaké znáte definice tenzoru deformace (nejen přetvoření) při velkých deformacích?
9. Co je polární dekompozice tenzoru deformačního gradientu?
10. Jaké znáte definice tenzoru napětí při velkých deformacích?
11. Jak se vzájemně přepočítavají smluvní a skutečné hodnoty tenzorů přetvoření a napětí?
12. Co jsou modifikované (redukované) invarianty tenzoru deformace?
13. Co jsou to modifikovaná (redukovaná) poměrná protažení  $\bar{\lambda}_i$ ?
14. Co jsou to energeticky konjugované tenzory? Uveďte příklad.
15. Uveďte příklad konstitutivního modelu hyperelastického materiálu a vysvětlete význam veličin.
16. Určete fyzikální rozměry jednotlivých parametrů konstitutivního modelu zadaného rovnicí pro měrnou deformační energii.
17. Pro konstitutivní model zadaný rovnicí pro měrnou deformační energii určete, jaký typ chování popisuje.
18. Jaký typ modelu použijete pro popis zadané tahové křivky materiálu?
19. Čím se model Arruda-Boyce principiálně liší od fenomenologických polynomických konstitutivních modelů?
20. Jaký model dostaneme, pokud v se modelu Arruda-Boyce limitní protažení řetězců  $\lambda_L$  blíží nekonečnu?
21. Jaké materiálové zkoušky jsou potřebné pro úplný popis mechanického chování izotropního hyperelastického málo stlačitelného materiálu?
22. Co je označováno termínem „pure shear“ (čistý smyk)?
23. Uveďte mechanické zkoušky ekvivalentní zadaných typům zkoušek pro hyperelastický ne-stlačitelný materiál.
24. Jaká je základní struktura konstitutivních modelů anizotropního hyperelastického materiálu, s jakými veličinami tyto modely pracují?
25. Rozepište danou tenzorovou rovnici, ve které je použito Einsteinovo sčítací pravidlo.
26. Převedte dané složky tenzoru druhého řádu na jednoindexovou notaci.
27. Provedte zadanou tenzorovou operaci (tenzorový součin vektorů, úzení tenzorů 2. řádu).

28. Vyjádřete měrnou energii napjatosti lineárně elastického materiálu pomocí napětí.
29. Co je to entropická elasticita, jaká je její základní energetická veličina, kdy se uplatňuje?
30. Co je to perzistentní délka vlákna?
31. Jaké další (pseudo)invarianty deformačního denzoru se používají pro popis anizotropního hyperelastického materiálu (oproti izotropnímu), uveďte definici a fyzikální význam aspoň jednoho z nich.
32. Co je Mullinsův efekt, vysvětlete na tahovém diagramu.
33. Jaké typy chování materiálu lze popsát jeho viskoelastickým modelem?
34. Vyjádřete Newtonův zákon viskozity pomocí úhlového přetvoření.
35. Které materiálové charakteristiky se používají v lineárně viskoelasticích modelech? Kolik z nich je nezávislých?
36. Nakreslete reologická schemata aspoň tří nejjednodušších reologických modelů a popište jejich materiálové charakteristiky.
37. Napište maticový tvar tenzoru napětí pro ideální kapalinu podle konvencí mechaniky těles.
38. Jaké základní prvky se používají pro tvorbu reologických modelů?
39. Co je to časová konstanta materiálu (relaxační doba, retardační doba), jak se určí?
40. Popište chování Maxwellova (Voigtova, Kelvinova) modelu viskoelastickej látky při skokové změně napětí nebo deformace.
41. Co je to komplexní modul pružnosti?
42. Nakreslete příklad diskrétního a spojitého spektra relaxačních funkcí, popište osy.
43. Jaké typy konstitutivních modelů jsou potřebné pro úplný popis chování pružně-plastického materiálu až do porušení při monotoním a cyklickém zatěžování?
44. Jaký výsledek dostanete, jestliže v podmínce plasticity Mohr-Coulomb (Drucker-Prager) zadané rovnicí pro redukované napětí použijete stejnou mez pružnosti pro tah a tlak ( $m = 1$ )?
45. Co je faktor triaxiality napětí? Jakých nabývá hodnot?
46. Co je Lodeho parametr nebo úhel? V jakém rozmezí se pohybují jeho hodnoty?
47. Určete faktor triaxiality napětí pro zadanou napjatost.