WYZNACZANIE MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI PRZY POMOCY WAHADŁA TORSYJNEGO

1. Opis teoretyczny do ćwiczenia

zamieszczony jest na stronie www.wtc.wat.edu.pl w dziale DYDAKTYKA – FIZYKA – ĆWICZENIA LABORATORYJNE.

2. Opis układu pomiarowego

Obiektem badań jest pręt o długości l i średnicy $2r$, którego górny koniec jest sztywno zamocowany. Drugi dolny jest poddawany działaniu sił skręcających.

W dolnej części pręta zamocowane jest ramię o długości $2d$, na którego końcach znajdują się gniazda do zamocowania walców (ciężarków) o znanej masie.

Taki układ jest przykładem wahadła fizycznego i nosi nazwę wahadła torsyjnego. Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu skręcenia D pręta oraz obliczenie modułu jego sprężystości G, na podstawie pomiaru okresu drań wahadła w funkcji jego momentu bezwładności J.

3. Przeprowadzenie pomiarów

1. Zapoznać się z budową wahadła torsyjnego. Sprawdzić, czy wskazówka wahadła przed rozpoczęciem pomiarów znajduje się idealnie na środku tarczy (w punkcie 0^{O}).
2. Wykonywanie pomiarów przy użyciu fotokomórki: wychylić wskazówkę wahadła o ustalony kąt, wyzerować fotokomórkę (wyświetli się komunikat „ready”), puścić wahadło. Komunikat „error” pojawia się, gdy fotokomórka nie zostanie odpowiednio wyzerowana, należy wtedy powtórzyć powyższe czynności. Komunikat „pomiar w trakcie” oznacza prawidłowe działanie fotokomórki, po skończonym pomiarze wyświetli się czas 15 pełnych wahnięć t_i. Zalecane jest wykonywać wszystkie pomiary wychylając igłę wahadła naprzemiennie raz w prawo, raz w lewo.

3. Ustalamy zakres amplitudy, dla którego spełniony jest warunek stosowania prawa Hooke'a. W tym celu należy wzbudzić przy pomocy pary sił drgania torsyjne zadając początkową amplitudę (np. 5 stopni). Mierzymy wtedy czas 15 pełnych wahnięć i obliczamy okres T_p. Następnie zwiększamy amplitudę (np. o 5 stopni) i wyznaczamy kolejny czas 15 pełnych wahnięć i obliczamy okres T_n. Początkową amplitudę drgań zwiększamy aż do momentu, gdy kolejny czas 15 pełnych wahnięć będzie się różnił od początkowego ($T_p \neq T_n$). Do dalszych prób stosujemy największą z amplitud dla której czas 15 wahnięć jest równy początkowemu ($T_p = T_n$).
4. Ustalamy liczbę pełnych drgań, po wykonaniu których amplituda zmniejszy się dwa razy. W tym celu należy wzbudzić przy pomocy pary sił drgania torsyjne zadając ustaloną w punkcie 3 początkową amplitudę drgań. Wyciągnąć wnioski na temat tłumienia drgań wahadła torsyjnego.
5. Wprawić wahadło w drgania torsyjne z amplitudą ustaloną w punkcie 3 bez obciążania wahadła i zmierzyć czas trwania 15 okresów drgań t_1. Pomiar powtórzyć 15 razy.
6. Powtórzyć pomiary według punktu 4 dla wahadła obciążonego dwoma identycznymi walcami umieszczonymi symetrycznie kolejno w odległościach d = 5; 7,5; 10; 12,5; 15 cm.

4. Opracowanie wyników pomiarów

Wyznaczanie średniego okresu drgań torsyjnych i ich niepewności

Obliczenia wykonać dla wszystkich przypadków drgań.

1. Wyznaczyć okres drgań torsyjnych dla każdego pomiaru $\overline{T}_i = \frac{1}{k} t_i$
   gdzie *k* - ilość drgań w pojedynczym pomiarze.
2. Wyznaczyć wartość średnią okresów drgań torsyjnych $\overline{T}_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i$
   gdzie *n* – ilość wykonanych pomiarów, *d* – odległość obciążenia względem osi obrotu (*d* = 0 – brak obciążenia).
3. Wyznaczyć niepewność standardową złożoną okresu drgań torsyjnych $u(\overline{T}_d) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \overline{T}_d)^2}{(n-1)\, n} + \frac{(\Delta t)^2}{3}}$
   uwzględniającą wykonanie *n* pomiarów oraz niepewność maksymalną pomiaru czasu w pojedynczym pomiarze *Δt*.

Wyznaczanie modułu skręcenia i sprężystości oraz ich niepewności

Obliczenia wykonać dla wszystkich przypadków drgań.

4. Wykonać wykres $\overline{T}_d^2 = f(d^2)$,
   gdzie d^2 = 0; 25; 56,25; 100; 156,25; 225 cm^2
   i nanieść punkty pomiarowe wraz z niepewnościami wiedząc, że $u(\overline{T}_d^2) = 2\,\overline{T}_d \cdot u(\overline{T}_d)$
5. Przeprowadzić aproksymację metodą najmniejszych kwadratów przez punkty pomiarowe prowadząc prostą $y = \bar{a}x + \bar{b}$, gdzie $x = d^2$, $y = \overline{T}_d^2$. Parametry prostej oraz ich niepewności wyznaczamy z

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n \sum_{i=1}^{n} (x_i\ y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad u(\bar{a}) = \sigma_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad u(\bar{b}) = \sigma_{\bar{b}} = \sigma_{\bar{a}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Parametry prostej zapisać na wykresie.

6. Porównując otrzymane współczynniki prostej ze współczynnikami z zależności wynikającej z rozwiązania układu równań $\bar{T}_d^2 = f(J)$ dla d = 0 i dowolnego d:

   $\bar{T}_d^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D}$, gdzie $J = J_0 + 2md^2$, a m jest masą jednego z ciężarków

   czyli

   $$\bar{T}_d^2 = 4\pi^2 \frac{J_0}{D} + \frac{8\pi^2 m}{D} d^2$$

   stąd $\bar{T}_d^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} d^2 + \bar{T}_0^2$, dla $d=0$ $\bar{T}_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_0}{D}$

   $y = \bar{a}x + \bar{b}$, gdzie $x = d^2$, $y = \bar{T}_d^2$, $\bar{b} = \bar{T}_0^2$.

   wyznaczyć moduł skręcenia D i moment bezwładności J_0 wahadła bez dodatkowego obciążenia.

7. Wyznaczyć niepewność standardową względną $u_{c,r}(D) = \sqrt{\left(\frac{u(\bar{a})}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2}$.
8. Wyznaczyć niepewność standardową bezwzględną $u_c(D) = u_{c,r}(D) \cdot D$.
9. Wyznaczyć niepewność rozszerzoną $U(D) = 2u_c(D)$.
10. Wyznaczyć moduł sprężystości G korzystając ze związku $G = \frac{2l}{\pi r^4} D$.
11. Wyznaczyć niepewność standardową względną

$$u_{c,r}(G) = \sqrt{\left(u_{c,r}(D)\right)^2 + \left(4\frac{u(r)}{r}\right)^2 + \left(\frac{u(l)}{l}\right)^2}$$

12. Wyznaczyć niepewność standardową bezwzględną $u_c(G) = u_{c,r}(G) \cdot G$.
13. Wyznaczyć niepewność rozszerzoną $U(G) = 2u_c(G)$.

5. Podsumowanie

1. Zgodnie z regułami prezentacji wyników zestawić wyznaczone wielkości
$(D,\ u_c(D),\ u_{c,r}(D),\ U(D))$,
$(G,\ u_c(G),\ u_{c,r}(G),\ U(G))$ oraz wartości odniesienia D i G (właściwe dla stali lub aluminium).

2. Przeanalizować uzyskane rezultaty:
a) która z niepewności wnosi największy wkład do niepewności złożonej $u_c(G)$,
b) czy spełniona jest relacja $u_{c,r}(G) < 0{,}12$,
c) czy spełniona jest relacja $|G_{teoria} - G| < U(G)$.

3. Wnioski z analizy rezultatów.
a) Uzasadnić z jakiego materiału jest wykonany badany pręt.
b) Wyciągnąć wnioski na temat występowania i przyczyn błędów: grubych, systematycznych i przypadkowych.
c) Zaproponować działania zmierzające do podniesienia dokładności wykonywanych pomiarów.
d) Wyjaśnić czy cele ćwiczenia zostały osiągnięte.

6. Przykładowe pytania

1. Omówić I. zasadę Newtona dla bryły sztywnej w ruchu obrotowym.
2. Omówić II. zasadę Newtona dla bryły sztywnej w ruchu obrotowym.
3. Omówić III. zasadę Newtona dla bryły sztywnej w ruchu obrotowym.
4. Omówić ruchu harmoniczny tłumiony.
5. Omówić metody wyznaczania moment bezwładności ciał sztywnych.
6. Omówić zasadę zachowania momentu pędu.
7. Omówić zasadę zachowania pędu.
8. Zdefiniować pojęcia: prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe.
9. Zdefiniować pojęcia: moment sprężystości sprężyny, moment bezwładności ciała.
10. Zdefiniować pojęcie inercjalnego układu odniesienia.
11. Omówić drganie układów mechanicznych.
12. Omówić twierdzenie Steinera.
13. Omówić prawo Hooke'a.

Zespół w składzie…..

cele ćwiczenia:

- wyznaczenie modułu skręcenia *D* pręta,
- wyznaczenie modułu sprężystości materiału *G*,

1. Wartości teoretyczne wielkości wyznaczanych lub określanych:

Moduł sprężystości stali .... Moduł sprężystości aluminium ....

....

2. Potwierdzić na stanowisku wartości parametrów i ich niepewności!

Wymiary pręta: długość l = 480 mm, u(l) = 1 mm; …………………………………………………

oraz promień r = 1,0 mm, u(r) = 0,03 mm, ...

Masa każdego z ciężarków m = 61,695 g, u(m) = 0,002 g, ...

………………………………………………………………………………………………………

3. Pomiary i uwagi do ich wykonania.

Niepewność maksymalna pomiaru czasu Δt ....

Niepewność maksymalna pomiaru położenia ciężarków Δd = 1 mm …..

Pomiar okresu drgań przeprowadzany dla k = ………………………… okresów drgań

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Kartę pomiarów proszę drukować dwustronnie

Kąt [stopnie]	**10**	15	**20**	25	**30**	35
t [s]						
$\mathbf{T = \frac{t}{15}}$						
Kąt [stopnie]	**40**	45	**50**	55	**60**	65
t [s]						
$\mathbf{T = \frac{t}{15}}$						

Z pomiaru wstępnego nr 1 do pomiaru wstępnego 2 przyjąć największy z kątów

dla okresu drgań które jest zbliżone do okresów drgań dla pozostałych mniejszych kątów.

Liczba pełnych okresów drgań dla przyjętego kąta …….. stopni, po których amplituda spada o połowę wynosi:	
bez obciążenia ………..	z obciążeniem (na d=15 cm) ………...

Pomiary zasadnicze – pomiar czasu drgania m okresów

czas k = ... okresów drgań	**Bez obciążania**	**Z obciążeniem rozłożonym symetrycznie względem osi obrotu**				
		d = 5 cm	**d = 7,5 cm**	**d = 10 cm**	**d = 12,5 cm**	**d = 15 cm**
t_1						
t_2						
t_3						
t_4						
t_5						
t_6						
t_7						
t_8						
t_9						
t_{10}						
t_{11}						
t_{12}						
t_{13}						
t_{14}						
t_{15}						

Data i podpis osoby prowadzącej

Kartę pomiarów proszę drukować dwustronnie