Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

AGH University of Science
and Technology

PODSTAWY METOD KOMPUTEROWYCH W OBLICZENIACH INŻYNIERSKICH

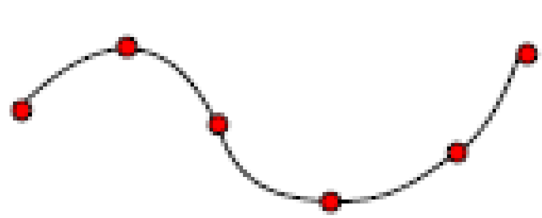
Wykład 3 – Interpolacja, Aproksymacja

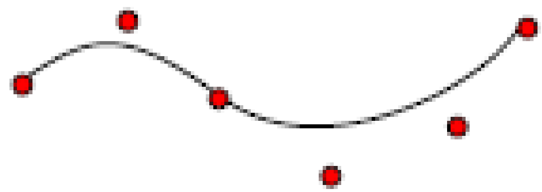
Data

agh.edu.pl

Wszystkie udostępniane materiały, skrypty, notatniki są wyłącznie przeznaczone do użytku prywatnego w celu łatwiejszego opanowania wiedzy.

Nie wolno ich rozprzestrzeniać, ani umieszczać w Internecie.





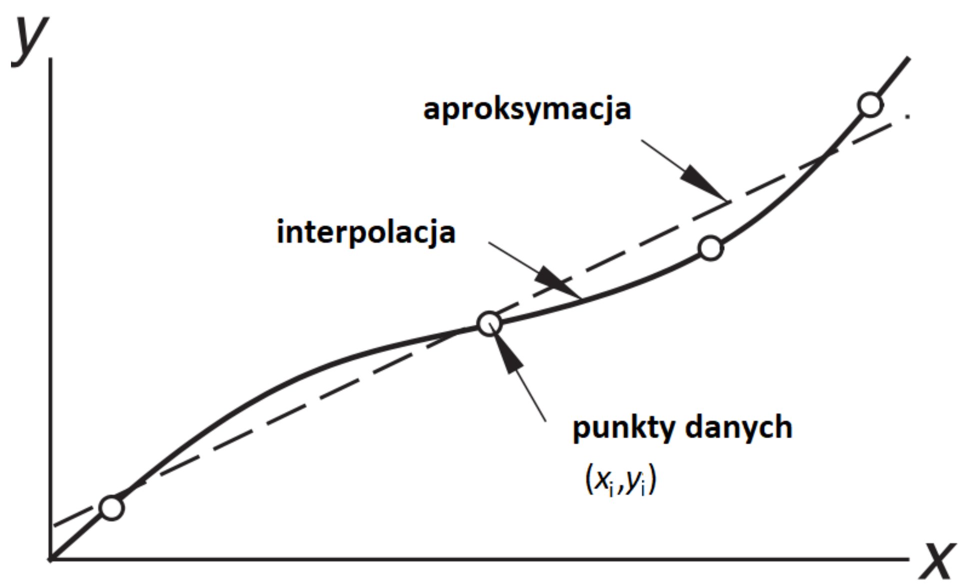
INTERPOLACJA **APROKSYMACJA**

Wprowadzenie

Praktycznie w każdym problemie inżynierskim, a w szczególności w obliczeniach inżynierskich mamy styczność z danymi w postaci dyskretnego zbioru danych np.:

$x_0 , x_1 ,..., x_n$
$y_0 , y_1 ,..., y_n$

Źródłem danych mogą być pomiary, eksperymenty lub obliczenia numeryczne.

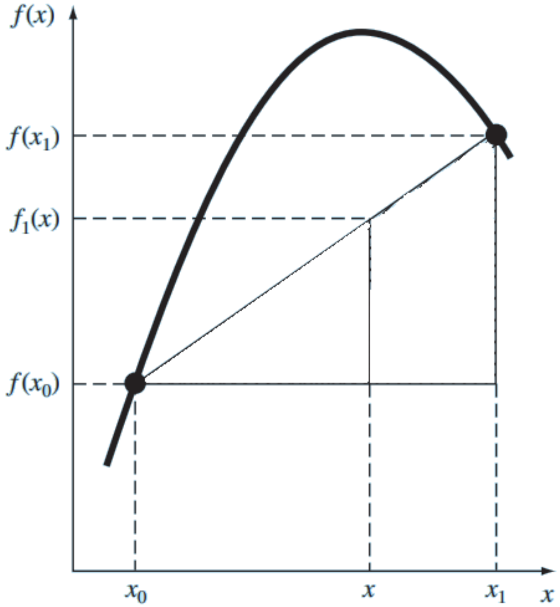


Interpolacja

Najprostszą formą interpolacji jest interpolacja wielomianowa.

Zawsze możemy skonstruować unikalny wielomian stopnia *n*, który przechodzi przez *n + 1* różnych punktów danych.

<u>Prosty przykład na początek</u>: Najprostszą formą interpolacji jest połączenie dwóch punktów danych linią prostą. Technika ta, zwana **interpolacją liniową**.



Wykorzystując podobieństwo trójkątów możemy zapisać:

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

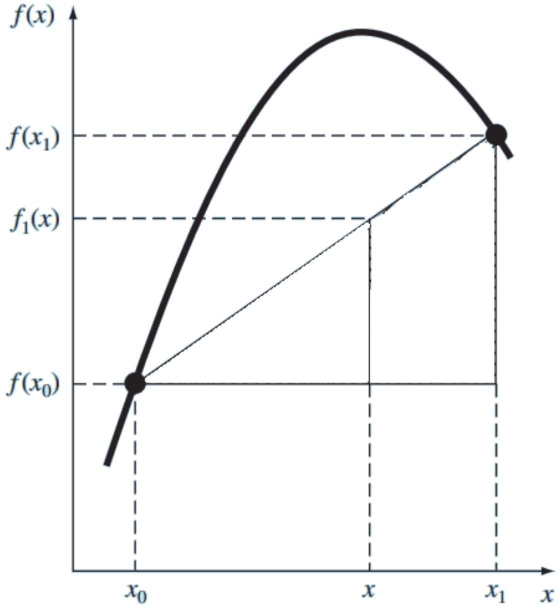
Przybliżenie pochodnej metodą różnic skończonych

Interpolacja liniowa

Najprostszą formą interpolacji jest interpolacja wielomianowa.

Zawsze możemy skonstruować unikalny wielomian stopnia *n*, który przechodzi przez *n + 1* różnych punktów danych.

<u>Prosty przykład na początek</u>: Najprostszą formą interpolacji jest połączenie dwóch punktów danych linią prostą. Technika ta, zwana **interpolacją liniową**.



Wykorzystując podobieństwo trójkątów możemy zapisać:

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0)$$

Przybliżenie pochodnej metodą różnic skończonych

Interpolacja liniowa

Interpolacja linowa

Przykład:

Wyznaczmy wartość logarytmu naturalnego z wykorzystaniem interpolacji liniowej.

W pierwszym kroku wyliczmy wartości w przedziale <ln1, ln6=1.79176>
Następnie, powtórzmy wyliczenia w węższym przedziale <ln1, ln3=1.09861>
Załóżmy, że interesuje nas wartość dla argumentu równego 2 (ln2≈0.69314).

Rozwiązanie: Bazując na wzorze $f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0)$

dla <ln1, ln6=1.79176> otrzymujemy:

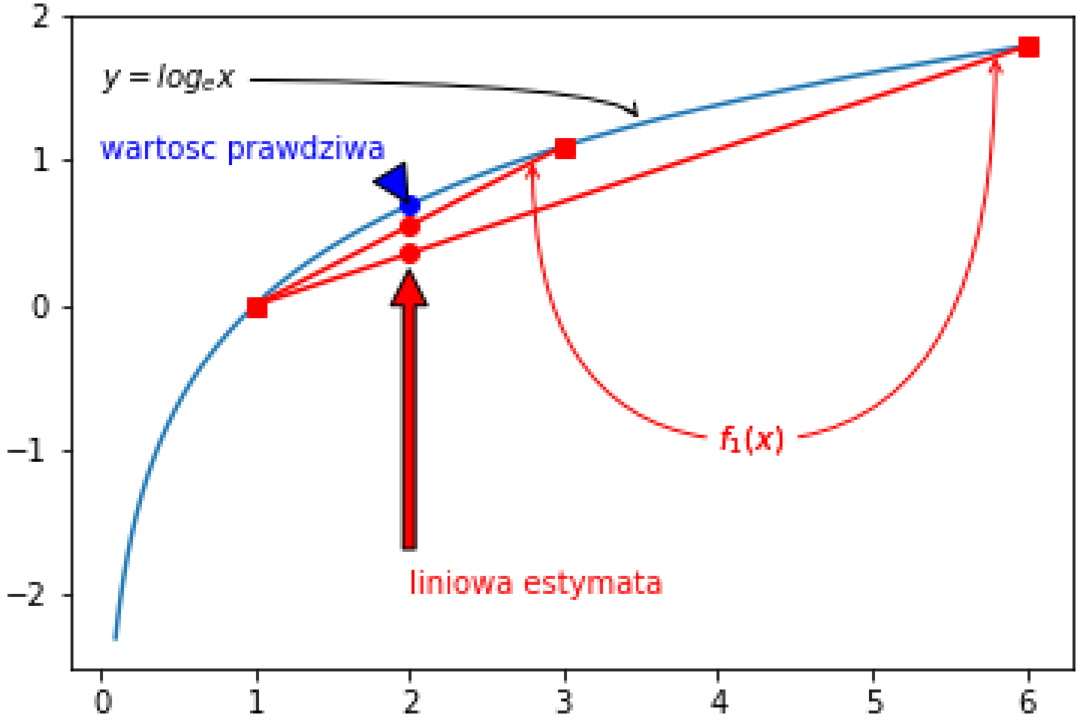
$f_1(2) = f(1) + \frac{f(6)-f(1)}{6-1}(2 - 1)$= 0+ $\frac{1.79176-0}{6-1}(2 - 1)$= 0.358352 (błąd 48%)

dla <ln1, ln3=1.09861> otrzymujemy:

$f_1(2) = f(1) + \frac{f(3)-f(1)}{3-1}(2 - 1)$= 0+ $\frac{1.09861-0}{3-1}(2 - 1)$= 0.549305 (błąd 21%)

Interpolacja liniowa

Graficzna interpretacja przykładu:



Zmniejszenie szerokości przedziału powoduje lepsze przybliżenie funkcji ciągłej za pomocą aproksymacji liniowej.

Przykład:
`W3_1_Linear.ipynb`

Interpolacja kwadratowa

Jak zobaczyliśmy interpolacja liniowa przy dużych odległościach między punktami generuje duży błąd. Jednym z rozwiązań jest „łączenie” punktów wielomianami wyższego stopnia (jeżeli dysponujemy odpowiednią liczbą punktów).

<u>Interpolacja kwadratowa:</u> Jeżeli dysponujemy 3 punktami, to możemy interpolować z wykorzystaniem wielomianu stopnia drugiego. W tym celu funkcję możemy przedstawić w formie

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)\,(x - x_1)$$

wymnażając nawiasy możemy doprowadzić do szkolnej formy:

$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ gdzie $\begin{aligned} a_0 &= b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_1 x_0 \\ a_1 &= b_1 - b_2 x_0 + b_2 x_1 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$

Interpolacja kwadratowa

W prosty sposób możemy wyznaczyć współczynniki b_0, b_1, b_2 w zależności:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)\ (x - x_1)$$

1. Dla b_0 po podstawieniu $x = x_0$ otrzymujemy $b_0 = f(x_0)$

2. Wstawiając $b_0 = f(x_0)$, dla $x = x_1$ otrzymujemy $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

3. Ostatecznie, podstawiając $b_0\ i\ b_1$ z poprzednich kroków dla $x = x_2$ otrzymujemy:

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolacja kwadratowa

Interpolacja kwadratowa

Przykład:

Przeanalizujmy raz jeszcze poprzedni przykład:

Wyznaczmy wartość logarytmu naturalnego z wykorzystaniem interpolacji tym razem kwadratowej.

Mamy 3 punkty:

(1,0)

(3, ln3=1.09861)

(6, ln6=1.79176)

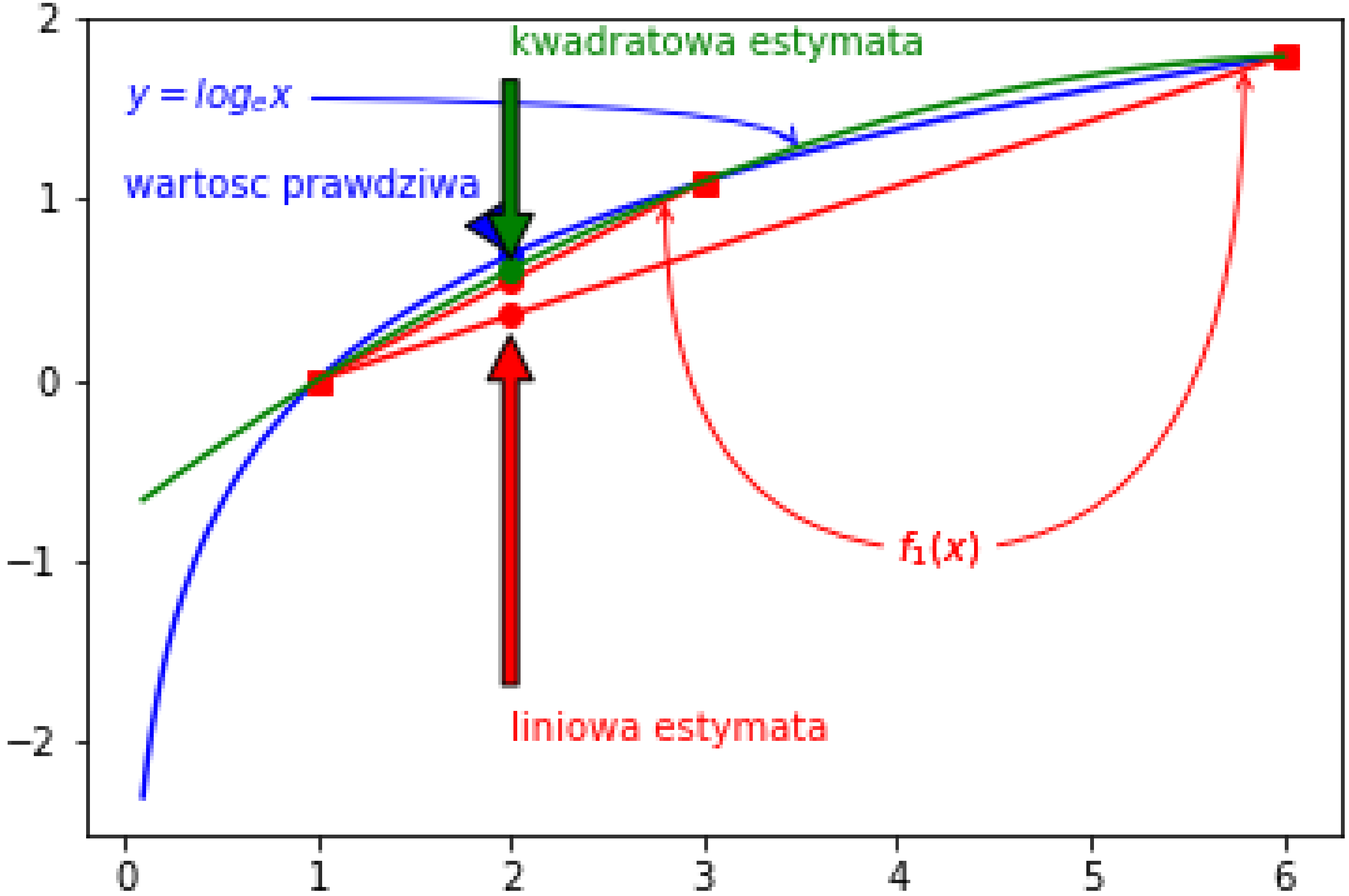
Rozwiązanie:

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = \frac{1.09861 - 0}{3 - 1} = 0.549306$$

$$b_2 = \frac{\frac{1.79176 - 1.09861}{6 - 3} - \frac{1.09861 - 0}{3 - 1}}{6 - 1} = -0.06365$$

Interpolacja kwadratowa



Przykład:
`W3_2_quad.ipynb`

Interpolacja Newtona – formuła ogólna

Przedstawiona wcześniej analiza może zostać uogólniona do problemu interpolacji wielomianem stopnia *n,* dla *n+1* punktów.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Analogicznie jak w przypadku interpolacji liniowej i kwadratowej, punkty danych mogą zostać wykorzystane do wyznaczenia współczynników $b_0, b_1, \dots, b_n$.

Dla wielomianu stopnia *n* potrzebujemy *n+1* punktów:
$(x_0, f(x_0)) \dots (x_n, f(x_n))$

Interpolacja Newtona – formuła ogólna

Do wyznaczenia w współczynników wykorzystujemy punkty:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= f(x_0) \\
b_1 &= f[x_1, x_0] \\
b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\;\;\vdots \\
b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]
\end{aligned}
$$

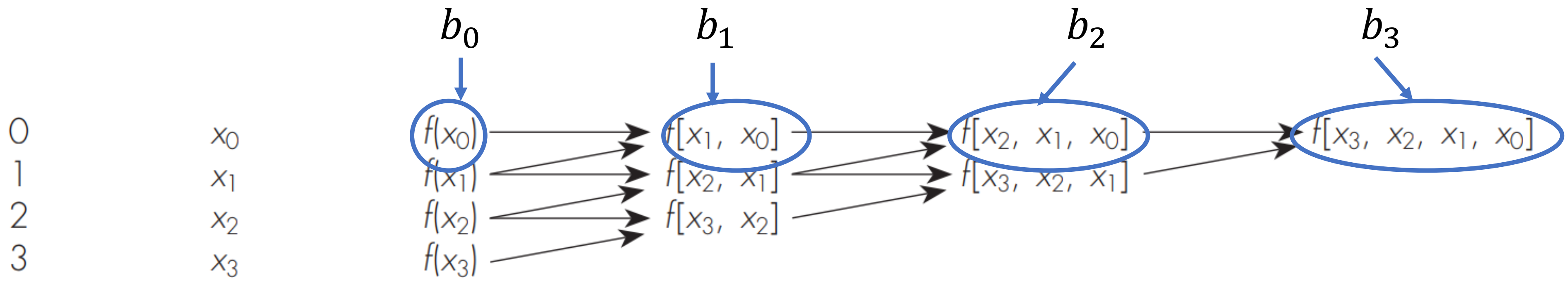
gdzie:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Interpolacja Newtona – formuła ogólna

Rekurencyjną naturę możemy przedstawić graficznie:



Podstawiając wyrażania na współczynniki otrzymujemy:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \\ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_n, \dots, x_2, x_1, x_0]$$

Wielomian interpolacyjny Newtona

Interpolacja Newtona – formuła ogólna- właściwości

- punkty nie muszą być równomiernie rozmieszczone (próbkowane)
- takie sformułowanie problemu przydaje się gdy interpolacja jest wykonywana wielokrotnie na tym samym zestawie danych, ale dla zwiększającej się liczby węzłów interpolacji (np. gdy interpolujemy wyniki pomiaru, których liczba zwiększa się na bieżąco)

Wyznaczenie wartości wielomianu $f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_n, \dots, x_2, x_1, x_0]$

- xData – tablica punktów
- *n* – stopień wielomianu $f_n(x)$

```
f = b[n]
for k in range(1,n+1):
       f = b[n-k] + (x - xData[n-k])*f
```

- Błąd interpolacji

Jeżeli mamy dodatkowy punkt danych $f(x_{n+1})$ to możemy oszacować błąd interpolacji

$$R_n \cong f[x_{n+1}, \dots, x_1, x_0](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Interpolacja Newtona

Przykład:
Przeanalizujmy raz jeszcze poprzedni przykład:
Wyznaczmy wartość logarytmu naturalnego z wykorzystaniem interpolacji tym razem wielomianem Newtona stopnia 3.
Mamy 3 punkty z poprzednich przykładów oraz jeden dodatkowy (5, ln5=1.60944):
(1,0), (3, ln3=1.09861), (5, ln5=1.60944), (6, ln6=1.79176)
Rozwiązanie:

$$f_n(x) = b_0 + (x - x_0)b_1 + (x - x_0)(x - x_1)b_2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)b_3$$

wyznaczamy:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.09861 - 0}{3 - 1} = 0.546305$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.60944 - 1.09861}{5 - 3} = 0.255415$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1.79176 - 1.60944}{6 - 5} = 0.182320$$

Interpolacja Newtona

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.09861 - 0}{3 - 1} = 0.546305$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.60944 - 1.09861}{5 - 3} = 0.255415$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1.79176 - 1.60944}{6 - 5} = 0.182320$$

oraz

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.255415 - 0.546305}{5 - 1} = -0.072723$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0.182320 - 0.255415}{6 - 3} = -0.024365$$

oraz

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{-0.024365 - (-0.072723)}{6 - 1}$$

$$= 0.009672$$

Interpolacja Newtona

$f[x_1, x_0]$, $f[x_2, x_1, x_0]$, $f[x_3, x_2, x_1, x_0]$ odpowiadają współczynnikom b_1, b_2, b_3.
$b_0 = f(x_0) = 0$

czyli otrzymujemy:

$$f_3(x) = 0 + 0.546305(x-1) - 0.072723(x-1)(x-3) +$$
$$+0.009672(x-1)(x-3)(\mathrm{x}-5)$$

Wstawiając $x = 2$ otrzymujemy: $f_3(2) = 0.648044$

Dla przypomnienia ln2≈0.69314.

Interpolacja Lagrange'a

Wielomian interpolujący Lagrange'a jest przeformułowaną formą wielomianu Newtona:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

gdzie:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

dla n=1 (interpolacja liniowa) otrzymujemy:

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Dla n=2: $$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Interpolacja Lagrange'a

Powracając do przykładu wyznaczenia wartości logarytmu naturalnego dla *x*=2, (1,0), (3, ln3=1.09861), (6,ln6=1.79176):

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{2 - 3}{1 - 3} 0 + \frac{2 - 1}{3 - 1} 1.09861 = 0.549305$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) =$$

Tyle samo ile w przykładzie na początku wykładu dotyczącym interpolacji kwadratowej wielomianem Newtona

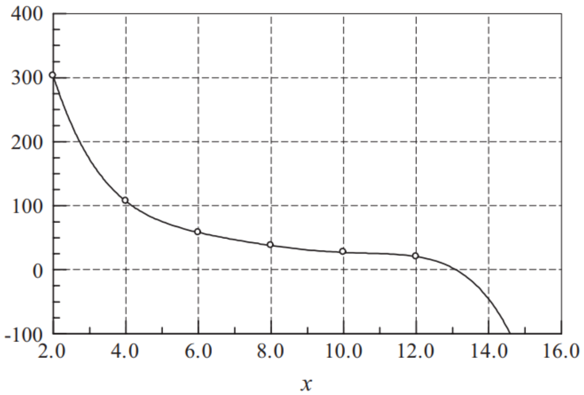
Interpolacja właściwości

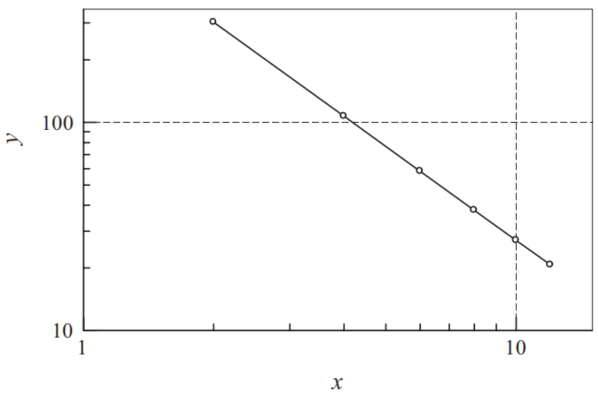
- Interpolację wielomianową należy przeprowadzić z możliwie najmniejszą liczbą punktów danych.

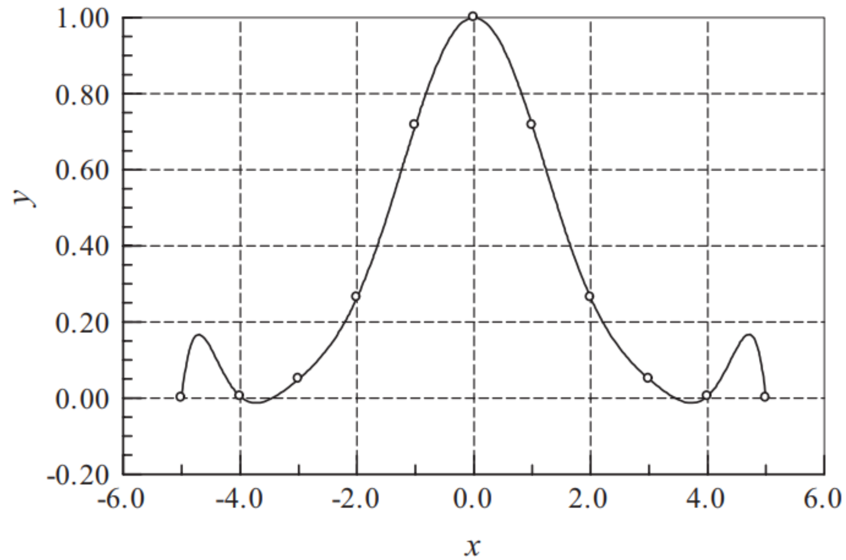
- Często wystarczająca jest interpolacja liniowa z wykorzystaniem dwóch najbliższych punktów jeśli punkty danych są blisko siebie.

- Interpolacja dla większej liczby punktów musi być przeprowadzana z ostrożnością. Przy większej liczbie punktów, odległość pomiędzy punktami danych, a poszukiwanym rośnie. Punkty nie zwiększają dokładności interpolacji i mogą powodować duże błędy.

- W niektórych przypadkach korzystne może być zastosowanie skali logarytmicznej.



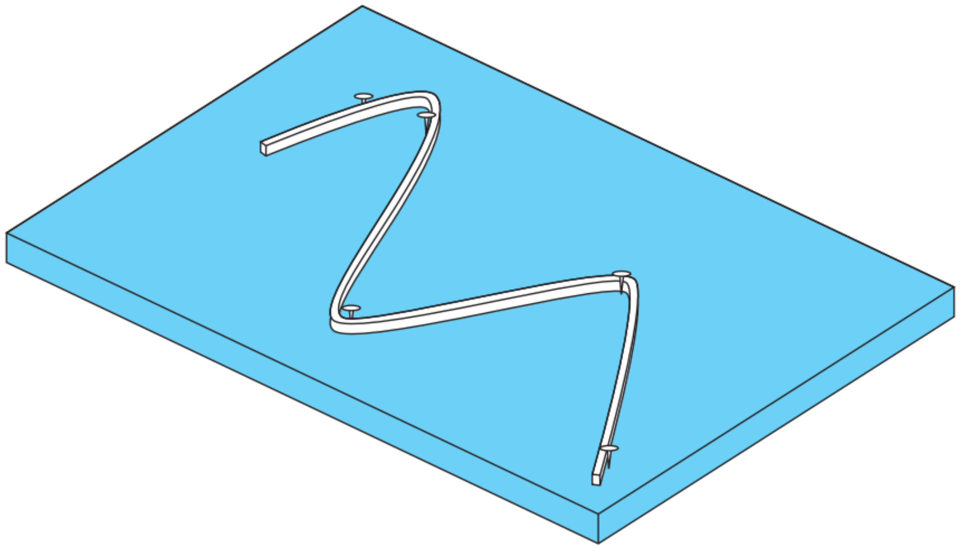




Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane są realizacją idei gładkiej interpolacji lokalnej wielomianem niskiego stopnia z gładkim połączeniem (sklejeniem) poszczególnych wielomianów lokalnych.

Inspiracja:
Technika rysowania polegająca na użyciu cienkiego, elastycznego paska (splajnu0 do rysowania gładkich krzywych przez serię punktów. W punktach końcowych splajn prostuje się. Nazywa się to „naturalnym” splajnem.



Źródło: Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010.

Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny liniowe

Jak już wiemy najprostszym połączeniem dwóch punktów jest linia prosta.

Dla grupy uporządkowanych punktów splajny liniowe mogą zostać zdefiniowane jako zbiór funkcji liniowych:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + m_0(x - x_0) & x_0 \le x \le x_1 \\
f(x) &= f(x_1) + m_1(x - x_1) & x_1 \le x \le x_2 \\
&\ \ \vdots \\
f(x) &= f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Współczynnik nachylenia prostej

Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny liniowe

Równania mogą służyć do wyznaczenia wartości funkcji w dowolnym punkcie pomiędzy x_0 a x_n.

W pierwszej kolejności wybieramy przedział, w którym znajduje się argument, a później z odpowiadającego równania wyliczamy wartość.

Oczywiście wyniki będą takie same jak dla interpolacji liniowej.

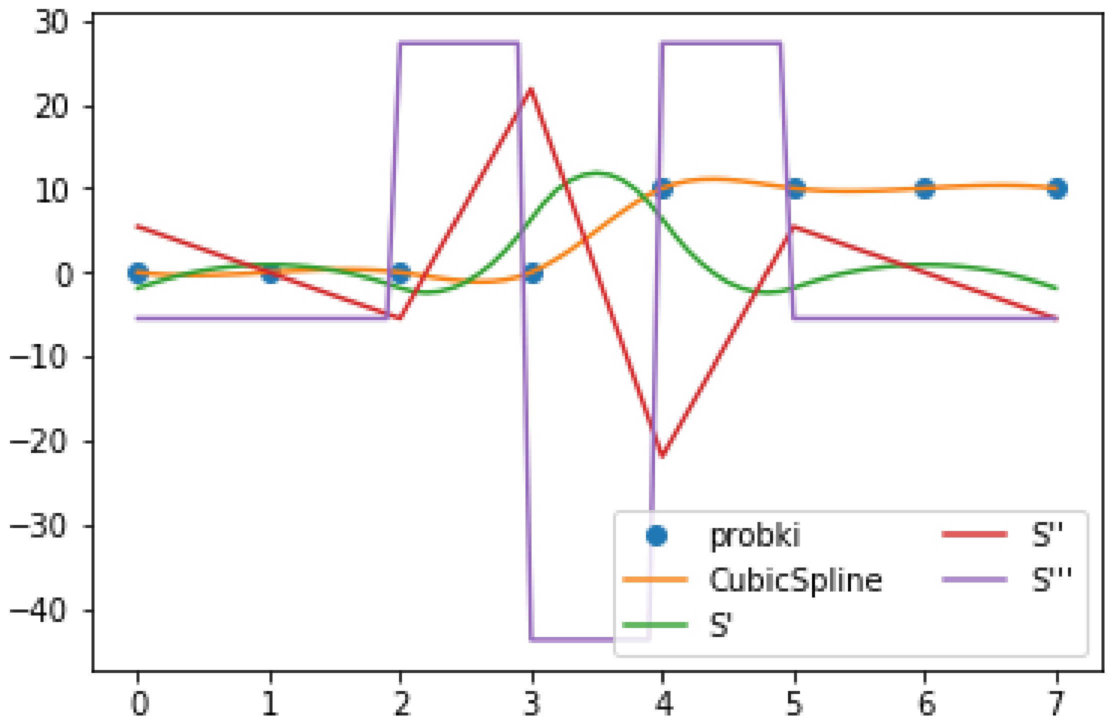
Zasadniczą wadą jest to, że funkcja nie jest gładka w węzłach (brak ciągłości pierwszej pochodnej w punktach łączących splajny).

Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny stopnia drugiego, ang. *Quadratic Splines*

Aby zapewnić ciągłość *m* – pochodnej w węzłach, splajn (funkcja sklejana) musi być co najmniej stopnia *m+1*

Najczęściej w praktyce stosuje się wielomiany trzeciego stopnia lub splajny sześcienne, które zapewniają ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej.



Interpolacja – Funkcje sklejane

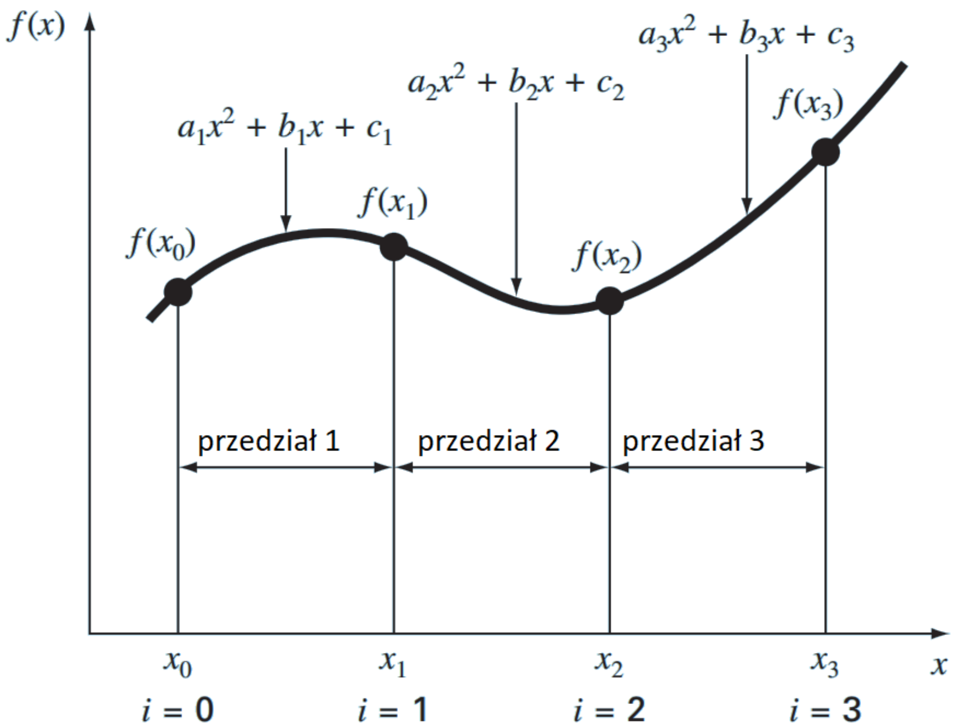
Funkcje sklejane – splajny stopnia drugiego, ang. *Quadratic Splines*

Splajny stopnia drugiego mają ciągłe pierwsze pochodne w węzłach.

Zadaniem interpolacji splajnami stopnia drugiego jest wyznaczenie funkcji kwadratowych pomiędzy punktami danych:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Dla *n+1* punktów ($i = 0,1,\dots,n$),
Występuje *n* przedziałów i
w konsekwencji *3n* niewiadomych
(a_i, b_i, c_i).



Potrzebujemy *3n* równań, aby wyznaczyć niewiadome.

Interpolacja – Funkcje sklejane

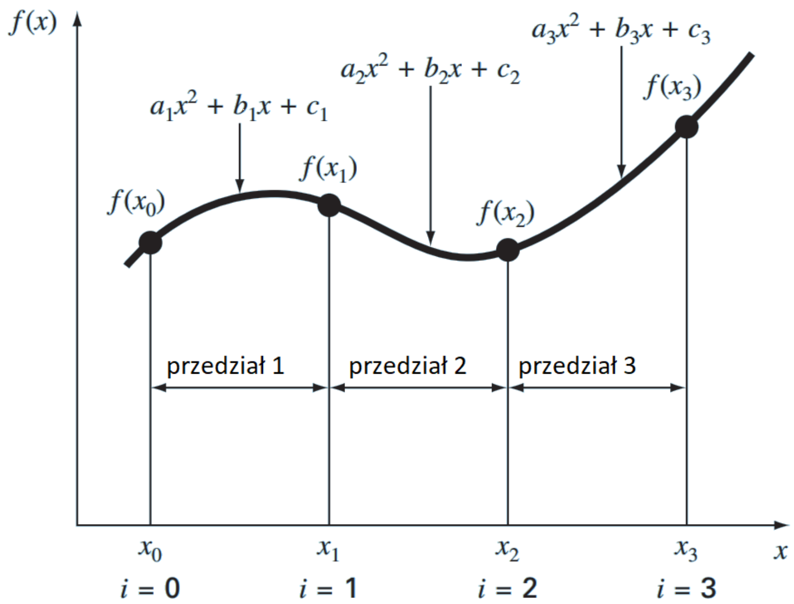
Funkcje sklejane – splajny stopnia drugiego, ang. *Quadratic Splines*

1. Wartości funkcji sąsiednich wielomianów w węzłach muszą być takie same:
   $a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$ dla $i = 2, \dots, n$

   Wykorzystujemy tylko wewnętrze węzły także otrzymujemy $2n - 2$ równań

2. Funkcja musi przechodzić przez punkt początkowy i końcowy:
   $a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$
   $a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n =$

Razem mamy $2n - 2 + 2 = 2n$ równań



Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny stopnia drugiego, ang. *Quadratic Splines*

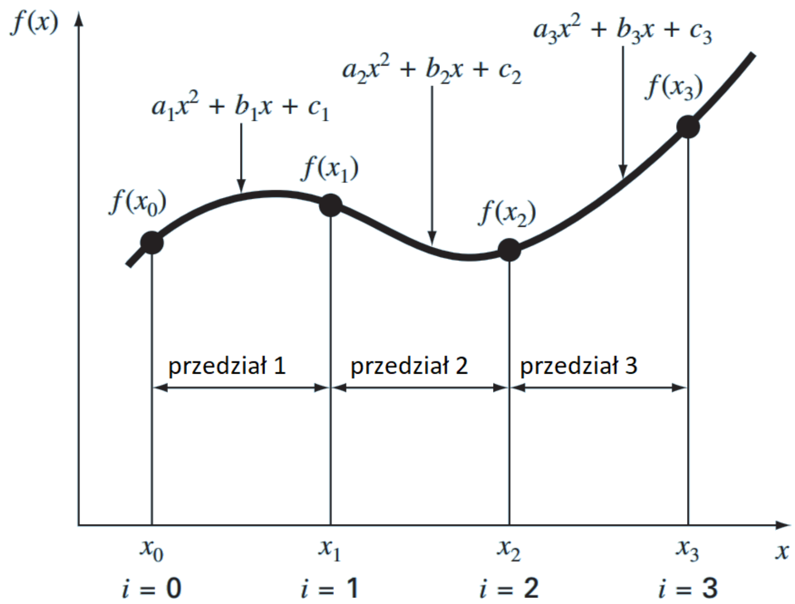
3. Pierwsze pochodne ($f'(x) = 2ax + b$) w węzłach wewnętrznych muszą być równe:
   $$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \, , i = 2, \ldots, n$$

Otrzymujemy kolejne $\mathrm{n} - 1$ równań. Finalnie dostajemy $2\mathrm{n} - 1 + n = 3n - 1$

Mamy $3n$ niewiadomych, także brakuje jeszcze jednego warunku. Jeżeli nie mamy dodatkowych informacji to musimy przyjąć warunek arbitralnie.

4. Przykładowo, możemy przyjąć, że druga pochodna w pierwszym punkcie wynosi zero
   $$a_1 = 0$$

=> Pomiędzy x_0 a x_1 będzie linia prosta.



Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny stopnia trzeciego, ang. *Cubic Splines*

Celem jest wyznaczenie współczynników wielomianów stopnia 3 pomiędzy węzłami:$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Mamy $n + 1$ punktów $i = 0,1, \dots, n$ co generuje n przedziałów i w konsekwencji $4n$ niewiadomych. Analogicznie jak w przypadku stopnia drugiego:

1. Wartości funkcji sąsiednich wielomianów w węzłach wewnętrznych muszą być takie same ($2n - 2$ równań)
2. Funkcja musi przechodzić przez punkt początkowy i końcowy (2 równania)
3. Pierwsze pochodne w węzłach wewnętrznych muszą być równe ($n - 1$ równań)
4. Drugie pochodne w węzłach wewnętrznych muszą być równe ($n - 1$ równań)
5. Drugie pochodne równe zero w pierwszym i ostatnim punkcie (2 równania)

Interpolacja – Funkcje sklejane

Funkcje sklejane – splajny stopnia trzeciego, ang. *Cubic Splines*

Ostatni warunek powoduje, że pomiędzy x_0a x_1 oraz x_{n-1}a x_n będzie linia prosta.

Ten warunek szczególny ma swoją nazwę -> **splajn naturalny**

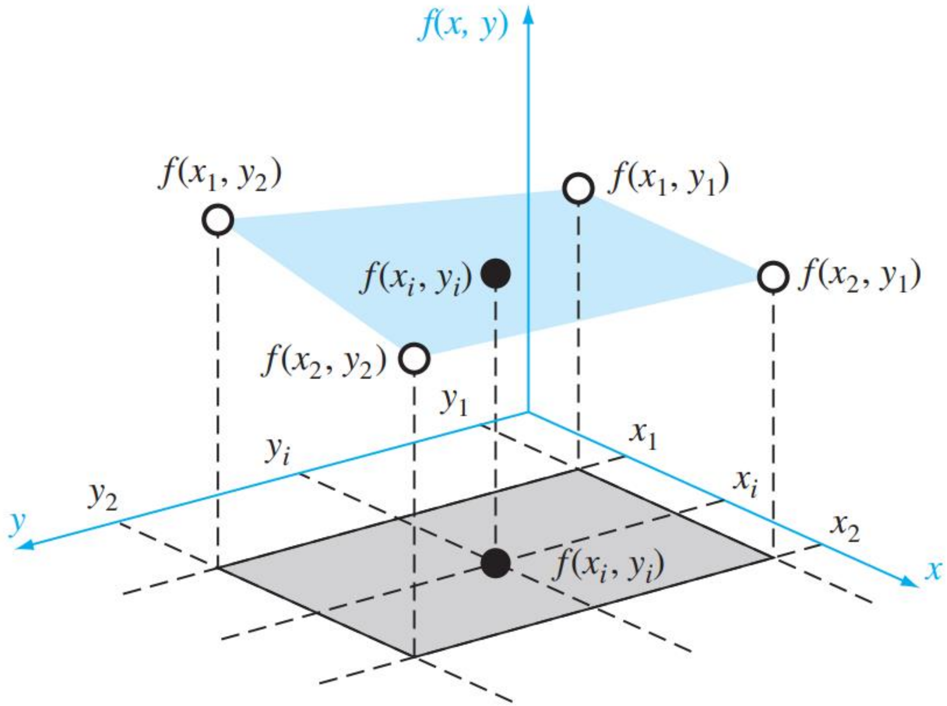
Interpolacja wielowymiarowa

Interpolacja wielowymiarowa

Interpolacja biliniowa, dwuliniowa (ang. *Bilinear interpolation*)

Dwuwymiarowa interpolacja ma za zadanie wyznaczenie wartości funkcji dwóch zmiennych: $z = f(x_i, y_i)$

Na podstawie wartości funkcji
W 4 punktach $f(x_1, y_2)$, $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_1)$, $f(x_2, y_2)$ chcemy
Wyznaczyć wartość pomiędzy nimi
$f(x_i, y_i)$.



Jeżeli jako funkcję interpolującą wybierzemy funkcję linową otrzymamy płaszczyznę łączącą punkty.

Funkcja nosi nazwę dwuliniowej.

Źródło: Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010.

Interpolacja wielowymiarowa

Interpolacja biliniowa, dwuliniowa (ang. *Bilinear interpolation*)

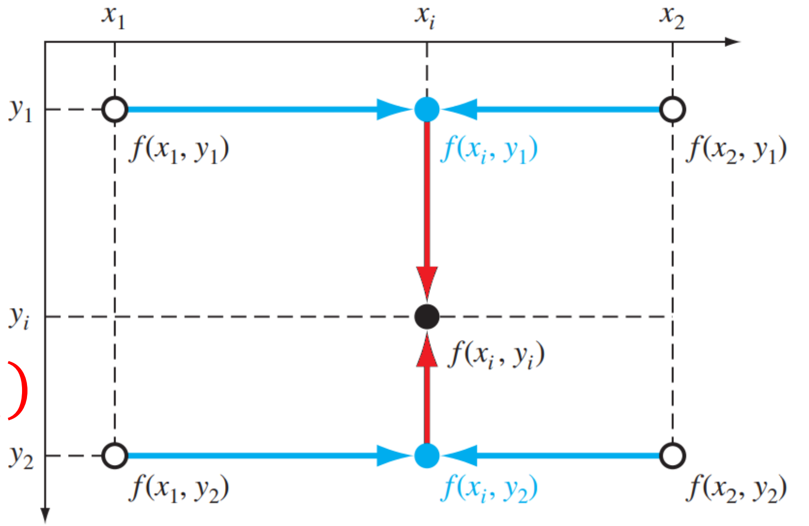
Dla ustalonej wartości *y* stosujemy jednowymiarową interpolację liniową w kierunku *x.* Bazując na formie Lagrange'a otrzymujemy:

$$f(x_i, y_1) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_1)$$

$$f(x_i, y_2) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_2)$$

Na bazie nowo wyznaczonych punktów liniowo interpolujemy w kierunku *y:*

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_i, y_1) + \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_i, y_2)$$



Źródło: Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010.

Interpolacja wielowymiarowa

Interpolacja biliniowa, dwuliniowa (ang. *Bilinear interpolation*)

Podstawiając równania otrzymujemy:

$$f(x_i, y_i) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1)$$
$$+ \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)$$

Przykład: Na płaskiej powierzchni grzewczej zmierzono temperaturę w 4 punktach: T(2, 1) = 60°C, T(9, 1) = 57.5°C, T(2, 6) = 55°C, T(9, 6) = 70°C. Wykorzystując interpolację dwu liniową wyznaczmy temperaturę w punkcie x_i= 5.25 and y_i = 4.8.

$$f(5.25{,}4) = \frac{5.25 - 9}{2 - 9}\frac{4.8 - 6}{1 - 6}60 + \frac{5.25 - 2}{9 - 2}\frac{4.8 - 6}{1 - 6}57.5 +$$
$$\frac{5.25 - 9}{2 - 9}\frac{4.8 - 1}{6 - 1}55 + \frac{5.25 - 2}{9 - 2}\frac{4.8 - 1}{6 - 1}70 = 61.2143$$

Oczywiście możemy stosować inne funkcje niż liniowa.

Funkcje sklejane –przypadek 2D

Obrazek zapożyczony z: A. Blake, M. Isard. *Active Contours.* Springer. 1998.

B-spline

B-spline

- Funkcja sklejana $x(s)$ jest tworzona jako ważona suma N_B funkcji bazowych (stąd nazwa 'B'-splines)

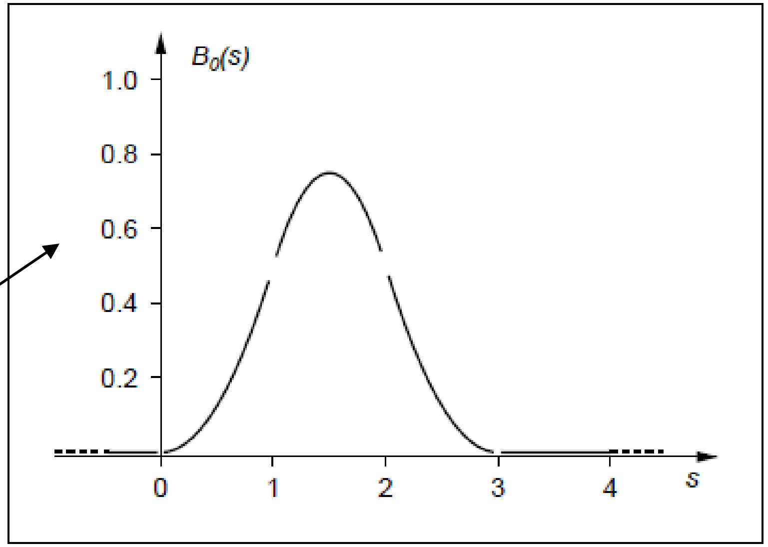
$B_n(s)$, $n = 0, \dots, N_B - 1$.

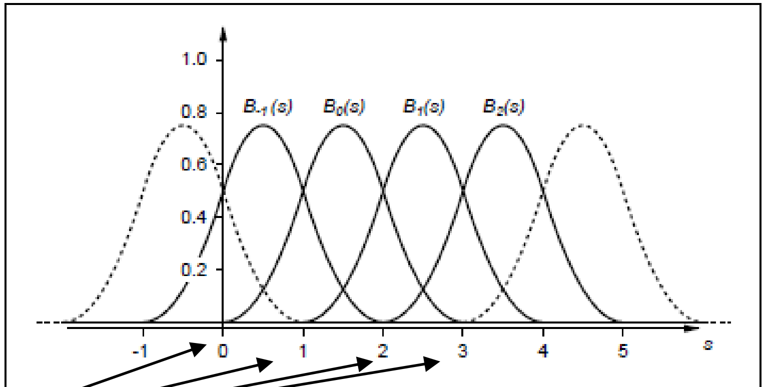
- W najprostszym przypadku, każda funkcja bazowa składa się z d wielomianów zdefiniowanych na przęsłach (oś s).

B-spline

- Każde przęsło ma jednostkową długość. Przęsła są przyłączane do węzłów.

Pojedyncza *quadric B-spline $B_0(s)$* funkcja bazowa





Węzły

B-spline

$$x(s) = \sum_{n=0}^{N_B} x_n B_n(s)$$

x_n – parametr ważący

Można to równanie przedstawić w zwięzłej formie macierzowej:

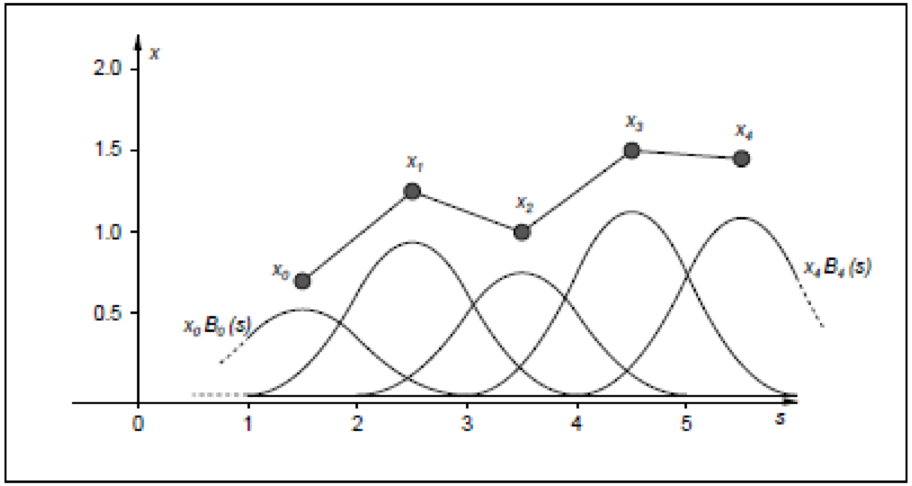
Jak to przedstawić ???

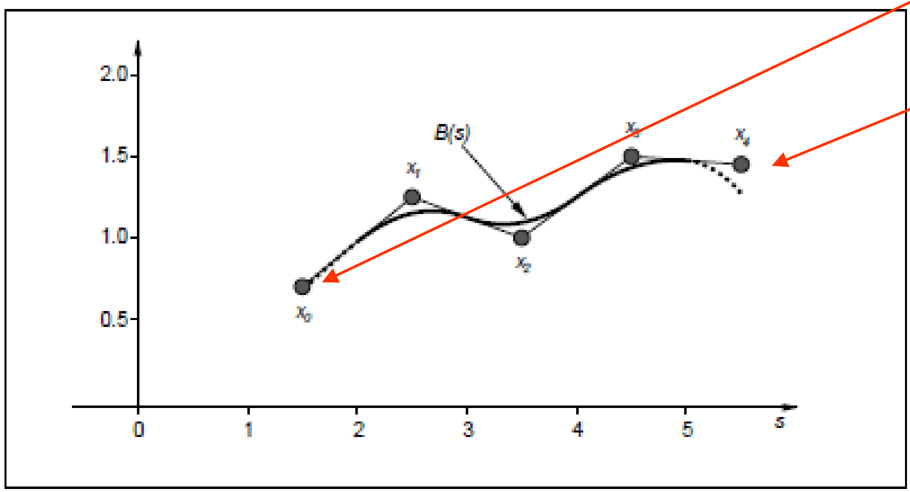
$$B(s) = \left(B_0(s), B_1(s), \ldots, B_{N_B-1}(s)\right)^T = \begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ \vdots \\ B_{N_B-1}(s) \end{bmatrix}$$

$$Q^x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}$$

$$x(s) = B(s)^T Q^x$$

B-spline





Funkcje bazowe mają własność:

$$\sum_{n=0}^{N_B-1} B_n(s) = 1 \;\; \forall s$$

Podstawowy powód dla którego funkcja B-spline jest blisko punktów kontrolnych

...

B-spline

W najprostszym przypadku *(quadric B-spline,* węzły rozłożone regularnie*)* funkcja bazowa ma postać:

$$B_0(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{2} & dla\ 0 \leq s < 1 \\ \dfrac{3}{4} - \left(s - \dfrac{3}{2}\right)^2 & dla\ 1 \leq s < 2 \\ \dfrac{(s-3)^2}{2} & dla\ 2 \leq s < 3 \\ 0 & pozostałe\ przypadki \end{cases}$$

Pozostałe funkcje bazowe:

$$B_n(s) = B_0(s-n)$$

Parametryczne krzywe B-spline

Funkcje sklejane zostały wprowadzone jako wygodne narzędzie do tworzenia krzywych na powierzchni:

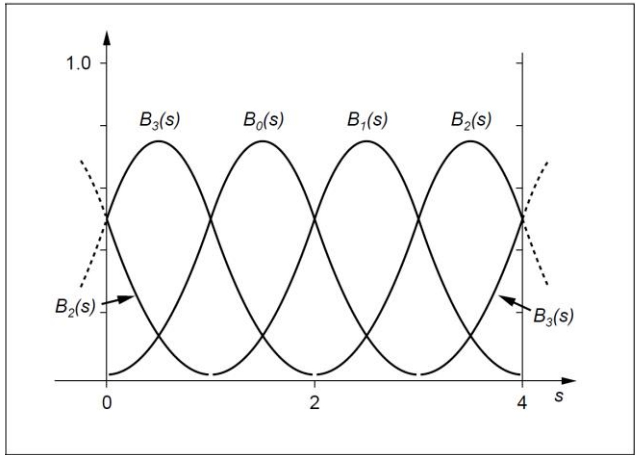
$$\mathbf{r}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$$

Następnie trzeba wybrać odpowiednio przedział $0 \leq s \leq L$ pokrywający L przęseł oraz N_B funkcji bazowych:
$B_0, B_1, \ldots, B_{N_B-1}.$

B-spline, okresowość

Funkcja Bazowa (F.B.)

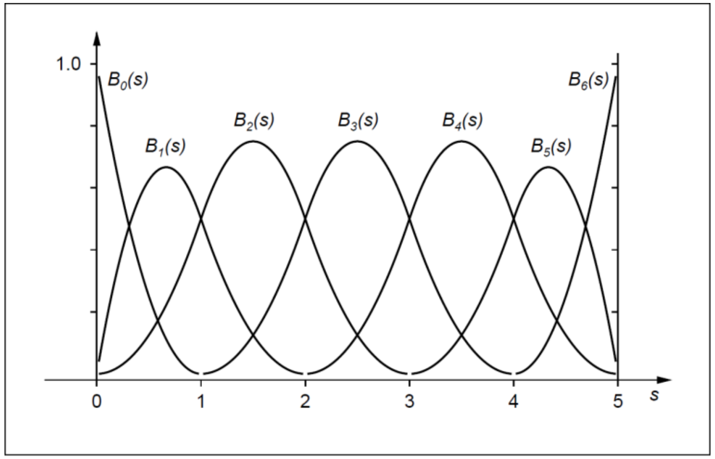
Okresowa



F.B. Przesunięta kopia poprzedniego
+ okresowość

KRZYWA ZAMKNIĘTA

Aperiodyczna



F.B. Składa się nie tylko z przesuniętych kopii ale zawiera również specjalną funkcję pozwalającą kontrolować wartość funkcji i pochodną na końcach przedziału (*multiple knots*)

Parametryczne krzywe B-spline

Dla każdej funkcji bazowej B_n musi zostać zdefiniowany **punkt kontrolny:**

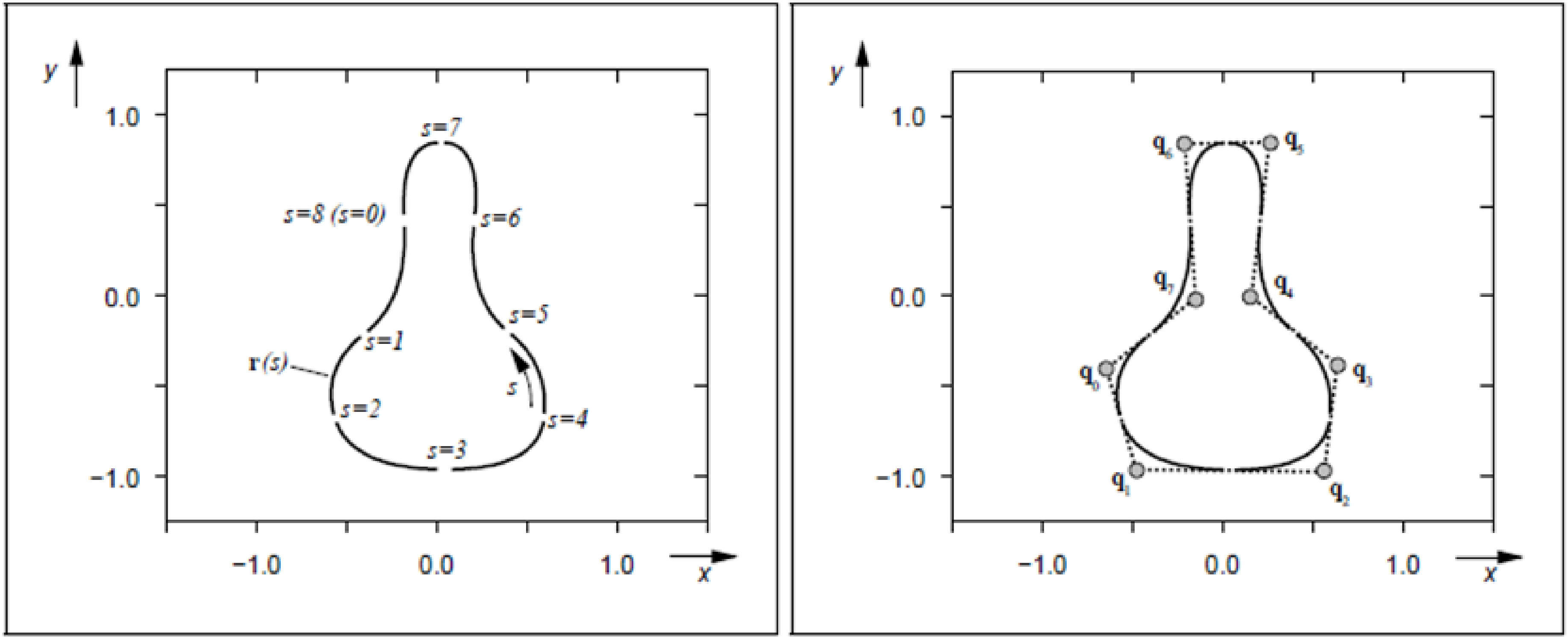
$$\mathbf{q}_n = \left(q_n^x, q_n^y\right)^T$$

Krzywa jest definiowana jako suma ważona funkcji bazowych oraz punktów kontrolnych:

$$\mathbf{r}(s) = \sum_{n=0}^{N_B-1} B_n\,(s)\mathbf{q}_n \;\; dla\;\; 0 \leq s \leq L$$

Parametryczne krzywe B-spline

Kwadratowa (*quadric*) krzywa sklejana (regularna i zamknięta)



8 węzłów -> L=8, 0≤s≤8. Krzywa jest gładką aproksymacją „wielokąta kontrolnego” (punkty kontrolne połączone liniami) stworzonego z punktów kontrolnych $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, ... , $\mathbf{q}_7$. $N_B=L=8$.

Różniczkowanie - uzupełnienie

Różniczkowanie z wykorzystaniem interpolacji

Koncepcja jest bardzo prosta. Interpoluj dane wielomianem, a następnie wyznacz analitycznie pochodną.

<u>Ograniczenie</u>: stosowanie wyższych stopni (>5) wielomianu powoduje oscylacje. Każde różniczkowanie zwiększa problem.

<u>Rozwiązanie:</u> aproksymacja LSQ (o tym będziemy mówić na kolejnych wykładach) lub wykorzystanie interpolacji Cubic Spline, która ma dobre właściwości interpolacyjne oraz jest łatwo różniczkowalna.

$$f'_{i,i+1}(x) = \frac{k_i}{6}\left[\frac{3(x-x_{i+1})^2}{x_i - x_{i+1}} - (x_i - x_{i+1})\right] - \frac{k_{i+1}}{6}\left[\frac{3(x-x_i)^2}{x_i - x_{i+1}} - (x_i - x_{i+1})\right] + \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$f''_{i,i+1}(x) = k_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - k_{i+1}\frac{x - x_i}{x_i - x_{i+1}}$$

Równość pierwszych pochodnych w węźle

$$k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + 2k_i(x_{i-1} - x_{i+1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = 6\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

k_i - druga pochodna splajna w węźle i

Różniczkowanie danych nierównomiernie próbkowanych

Często się zdarza, że posiadamy jakieś dane z eksperymentów, które zostały zarejestrowane w różnych odstępach czasu. Metody różnic skończonych nie mogą zostać zastosowane.

Rozwiązanie: interpolacja Lagrange wielomianem drugiego stopnia dla każdych 3 sąsiadujących punktów. Dane **nie muszą** być równomiernie próbkowane.

Wielomian drugiego stopnia może być różniczkowany **analitycznie**:

$$f'(x) = f(x_{i-1}) \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i) \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f(x_{i+1}) \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

x - współrzędna, dla której chcemy wyznaczyć wartość pochodnej.

- Można wyznaczyć pochodną dla dowolnego punktu w przedziale definiowanym przez 3 punkty.
- Punkty nie muszą być równomiernie próbkowane.
- Dokładność jak w metodzie różnic centralnych.

Aproksymacja

Metoda Najmniejszych Kwadratów

Aproksymacja liniowa, przypomnienie:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i,pom} - y_{i,model}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 a_i)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: <u>pochodne równe zero:</u>

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ \right)^2}$$

Wartości średnie

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

Metoda Najmniejszych Kwadratów

Aproksymacja liniowa, przypomnienie:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i,pom} - y_{i,model}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 a_i)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]$$

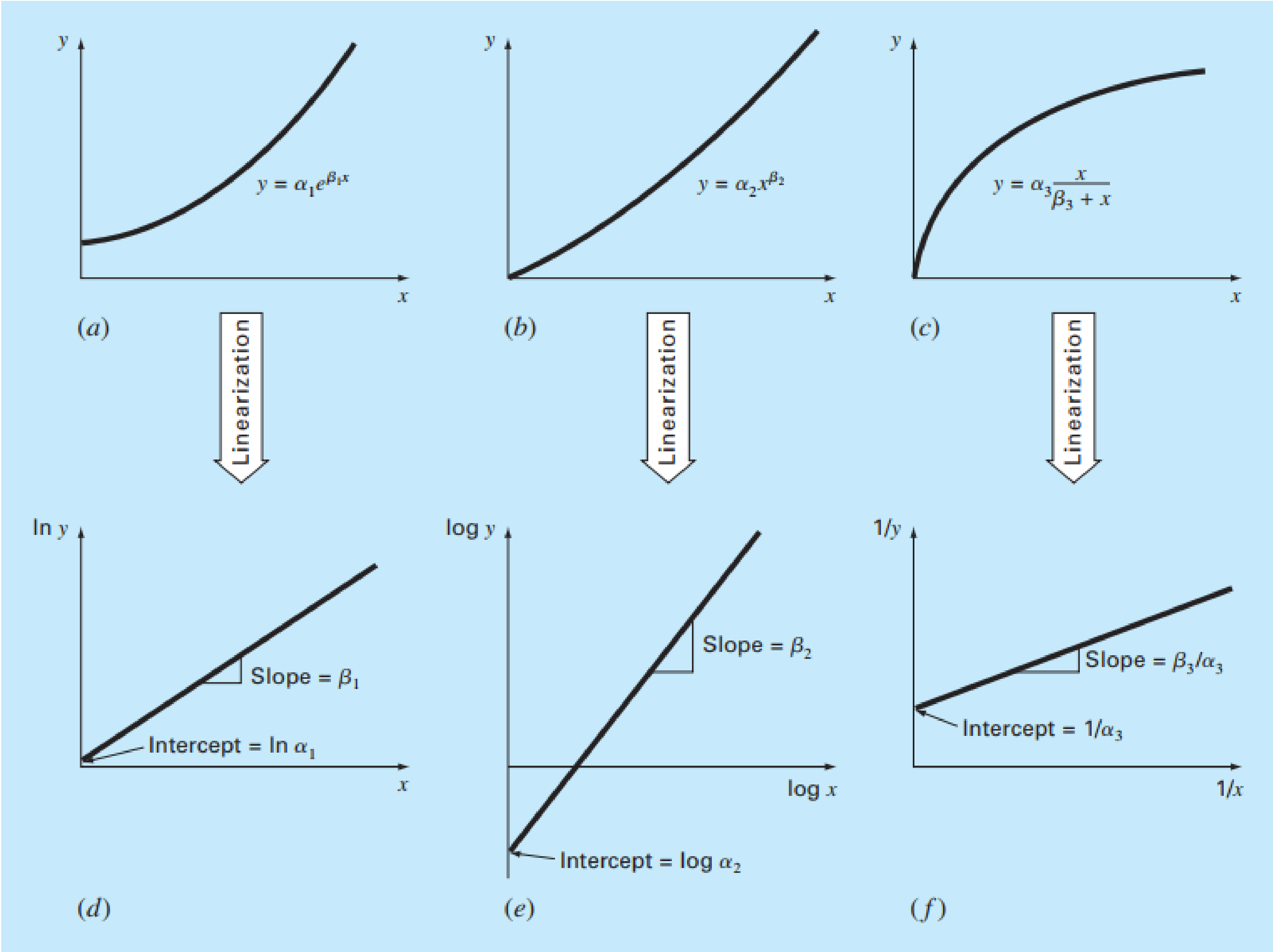
Warunek konieczny istnienia ekstremum: pochodne równe zero:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

Wartości średnie

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

Metoda Najmniejszych Kwadratów - linearyzacja



Źródło: Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010.

Metoda Najmniejszych Kwadratów – reprezentacja macierzowa

Ogólnie, model można przedstawić w postaci:

$$y = a_0 z_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_m z_m + e$$

gdzie $z_0, \dots, z_m$ są funkcjami bazowymi.

Dla aproksymacji liniowej: $z_0 = 1, z_1 = x$
Dla aproksymacji wielomianowej: $z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = x^2, \dots, z_m = x^m$

„Liniowość” odnosi się tylko do zależności parametrów modelu, natomiast sama aproksymacja może być mocno nieliniowa.

Równanie możemy zapisać dla każdego punktu $i = 1, \dots, n$ i całość przedstawić w formie macierzowej:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ZA} + \mathbf{E}$$

Metoda Najmniejszych Kwadratów – reprezentacja macierzowa

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ZA} + \mathbf{E}$$

$\mathbf{Y}^{\boldsymbol{T}} = [y_1, \dots, y_n]$, wektor kolumnowy, zawierający wartości obserwacji

$\mathbf{E}^{\boldsymbol{T}} = [e, \dots, e]$, wektor kolumnowy, zawierający reszt

$\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} = [a_0, \dots, a_m]$, wektor kolumnowy, zawierający poszukiwane współczynnik (rozmiar zależy od liczby współczynników, a nie próbek)

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_{01} & \cdots & z_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{0n} & \cdots & z_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie macierz **Z** zawiera wyliczone wartości funkcji bazowych dla zmierzonych argumentów.

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}\right)^{\mathbf{-1}}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}$$

Metoda Najmniejszych Kwadratów – identyfikacja parametrów transmitancji

Czujnik Pt100 został przełożony z temperatury 0^0C do temperatury 80^0C. Zarejestrowano odpowiedz czujnika oraz wektor czasu i wymuszenia. Wymuszenie jest skokiem o wartości 80**.** Czujnik może być modelowany jako obiekt inercyjny I rzędu o transmitancji $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts+1}$. Wyznacz współczynniki modelu.

Postać czasowa:

$$\frac{T}{K}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{K}y(t) = x(t)$$

$$\mathbf{Y}^T = [x_2, \dots, x_n],\ \mathbf{A}^T = \left[\frac{T}{K}, \frac{1}{K}\right], \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \frac{y(t_2)-y(t_1)}{\Delta t} & y(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y(t_n)-y(t_{n-1})}{\Delta t} & y(t_n) \end{bmatrix}$$

Przykład:
`W3_3_LSQ.ipynb`

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{Z}^\mathbf{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^\mathbf{T}\mathbf{Y}$$