

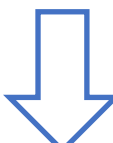

Wszystkie udostępniane materiały, skrypty, notatniki są wyłącznie przeznaczone do użytku prywatnego w celu łatwiejszego opanowania wiedzy.

Nie wolno ich rozprzestrzeniać, ani umieszczać w Internecie.

Układy równań

Układy równań liniowych

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n\end{aligned}$$

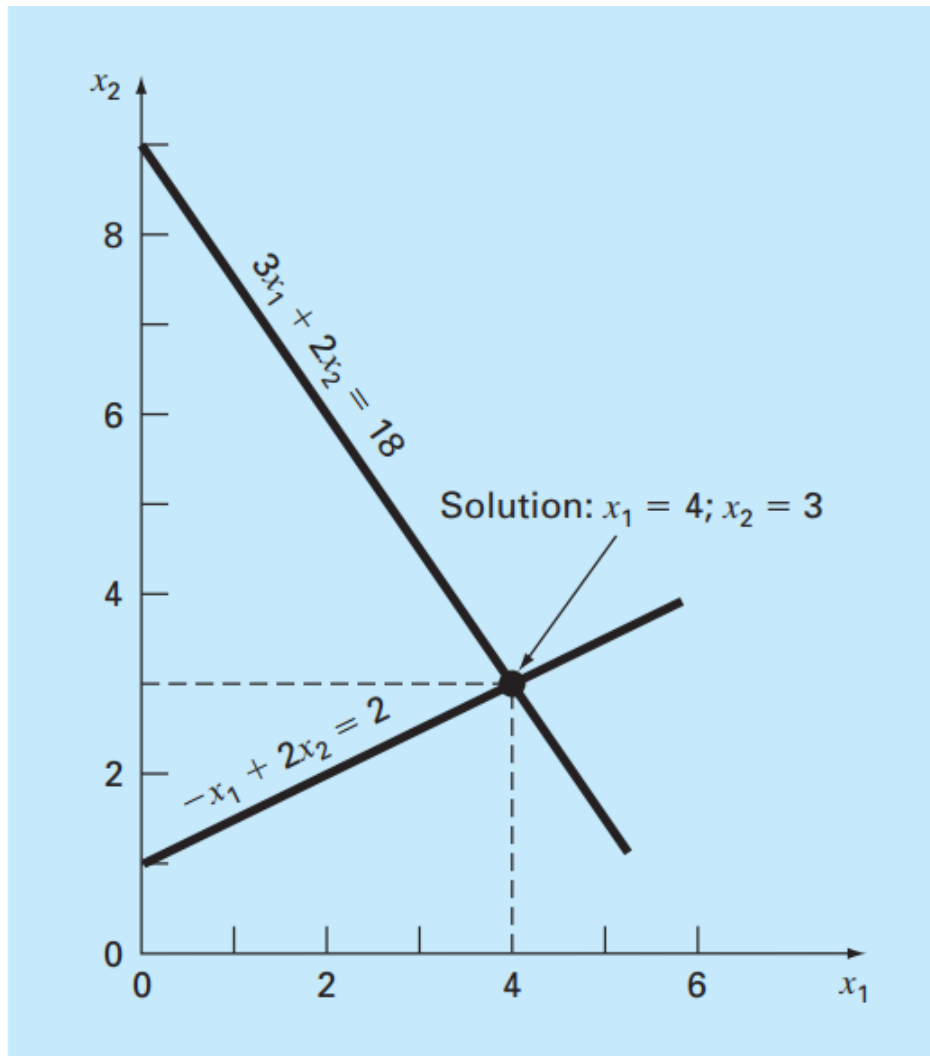

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq n)$$


$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

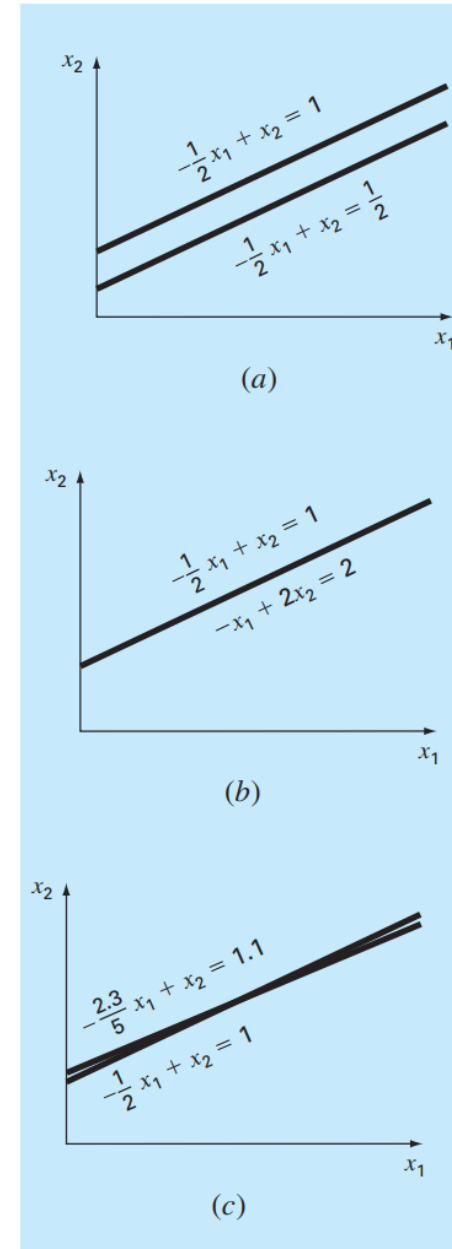


$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Układy równań liniowych –metoda graficzna



Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2010.



Układy równań liniowych

Najprostsze metody rozwiązywania układów równań liniowych polegają bądź na obliczaniu wyznaczników (metoda Cramera), bądź na metodzie eliminacji zmiennych i kolejnych podstawieniach.

Metoda Cramera (trudna implementacyjnie i nieefektywna):

Dla układu n równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozwiązanie ma postać $x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}$ gdzie macierz \mathbf{A}_i jest tworzona poprzez zamianę i -tej kolumny wektorem \mathbf{b}

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Przykład: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x_1 = \frac{6 \cdot 4 - 2 \cdot 4}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = -8$, $x_2 = \frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot 6}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = 7$

Układy równań liniowych

Eliminacja niewiadomych

Eliminacja niewiadomych bazuje na przekształcaniu równań. Podstawowe podejście bazuje na pomnożeniu równań przez stałą, tak aby po wyeliminować niewiadomą po zastosowaniu działania stronami na układ.

Przykład:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \quad (2)$$

Pomnóżmy przez $a_{2,1}$ równanie (1) i przez $a_{1,1}$ równanie (2):

$$a_{2,1}a_{1,1}x_1 + a_{2,1}a_{1,2}x_2 = b_1a_{2,1}$$

$$a_{1,1}a_{2,1}x_1 + a_{1,1}a_{2,2}x_2 = b_2a_{1,1}$$

Odejmijmy stronami równania:

$$a_{2,1}a_{1,1}x_2 - a_{2,1}a_{1,2}x_2 = b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}$$

Czyli x_2 jest równe, a x_1 po podstawieniu x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}}{a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}}{a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}}$$

Układy równań liniowych

Eliminacja niewiadomych

$$x_2 = \frac{b_2 a_{1,1} - b_1 a_{2,1}}{a_{2,2} a_{1,1} - a_{2,1} a_{1,2}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{2,2} - b_2 a_{1,2}}{a_{2,2} a_{1,1} - a_{2,1} a_{1,2}}$$

Porównajmy wyniki z metodą Cramera:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \frac{b_2 a_{1,1} - b_1 a_{2,1}}{a_{2,2} a_{1,1} - a_{2,1} a_{1,2}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{2,2} - b_2 a_{1,2}}{a_{2,2} a_{1,1} - a_{2,1} a_{1,2}}$$

Metodę eliminacji można wykorzystać w przypadku układów z większą liczbą równań. Oczywiście, ręczne obliczenia stają się niepraktyczne. Przedstawiony proces można sformalizować i dostosować do potrzeb implementacji na komputerach.

Układy równań liniowych

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda bazuje na przedstawionym mechanizmie eliminacji niewiadomych. Od strony implementacyjnej istotne jest, aby metoda unikała sytuacji, w której występuje lub może wystąpić dzielenie przez zero.

Na początek zostawmy problem dzielenia przez zero - „naiwna” eliminacja Gaussa

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku układu 2-óch równań mamy dwie fazy:

1. Eliminacji niewiadomej
2. Podstawienia wstecz

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

Pierwsza faza redukuje układ równań do macierzy górnej trójkątnej. W pierwszym kroku, eliminujemy pierwszą niewiadomą x_1 z drugiego do n -tego równania.

Mnożymy pierwsze równanie przez $a_{2,1}/a_{1,1}$:

$$a_{2,1}x_1 + \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,2}x_2 + \cdots + \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,n}x_n = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1$$

Następnie odejmujemy od równania drugiego:

$$\left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,2}\right)a_{1,2}x_2 + \cdots + \left(a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,n}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1$$

Co możemy zapisać w skróconej formie (apostrof oznacza nową wartość współczynnika)

$$a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2$$

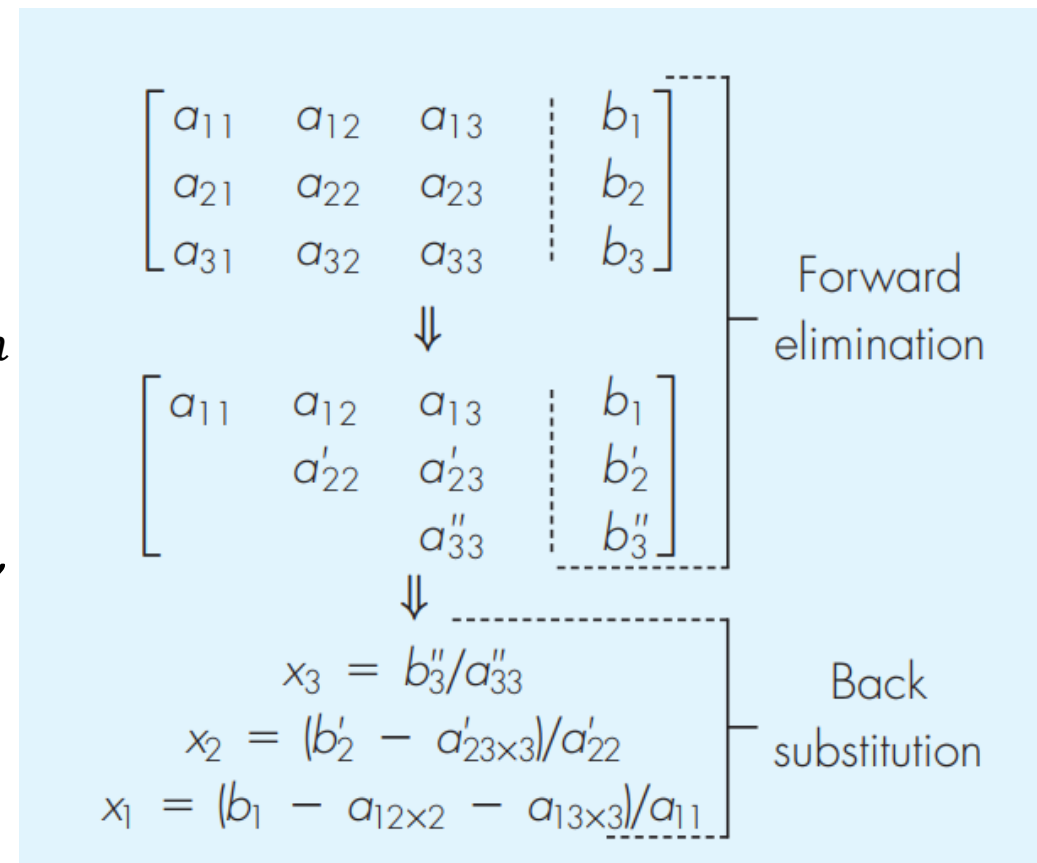
Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

Procedurę powtarzamy dla pozostałych równań.

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\&\vdots \\a'_{n,2}x_2 + \cdots + a'_{n,n}x_n &= b'_n\end{aligned}$$

Pierwsze równanie nosi nazwę *równania pivot'u*, natomiast $a_{1,1}$ *współczynnika pivot'u*.



Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

Procedurę powtarzamy dla drugiej niewiadomej.

Mnożymy drugie równanie przez $\frac{a'_{3,2}}{a'_{2,2}}$ i odejmujemy od równania trzeciego.

Powtarzamy dla pozostałych równań:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\ a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \\ a''_{n,3}x_3 + \cdots + a''_{n,n}x_n &= b''_n \end{aligned}$$

'' – oznacza, że dany współczynnik był modyfikowany dwa razy.

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{n,2}x_2 + \cdots + a'_{n,n}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2$$

$$a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,n}x_n = b''_3$$

Procedura może być kontynuowana dla pozostałych równań.

$$\vdots$$

$$a''_{n,3}x_3 + \cdots + a''_{n,n}x_n = b''_n$$

Sekwencyjne przekształcenia $n - 1$ równań doprowadzą do wyeliminowania x_{n-1} z n równania. Finalnie otrzymamy **macierz górną trójkątną**:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2$$

$$a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,n}x_n = b''_3$$

$$\vdots$$

$$a^{(n-1)}_{n,n}x_n = b^{(n-1)}_n$$

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

Obecnie możemy rozwiązać ostatnie równanie i wyznaczyć x_n :

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\ a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}$$

$$a_{n,n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

Wynik możemy podstawić do równania $n - 1$, żeby wyznaczyć x_{n-1} .

Procedurę możemy powtórzyć, tak aby wyznaczyć pozostałe niewiadome:

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i-1)}x_j}{a_{i,i}^{(i-1)}} \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa

Złożoność obliczeniowa może być przedstawiona jako:

$$\underbrace{\frac{2n^3}{3} + O(n^2)}_{\text{Eliminacja}} + \underbrace{n^2 + O(n)}_{\text{Podstawianie}} \xrightarrow{\text{ze wzrostem } n} \frac{2n^3}{3} + O(n^2)$$

Wraz ze wzrostem liczby równań, czas obliczeń rośnie znacząco.

Najwięcej zajmuje eliminacja $\frac{2n^3}{3}$ - od strony implementacyjnej są to 3 zagnieżdżone pętle

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa – problemy

- Możliwość pojawienia się dzielenia przez zero

Przykładowo, jeżeli zgodnie z algorytmem będziemy próbowali rozwiązać układ

$$\begin{aligned}2x_2 + 2x_3 &= 8 \\2x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4\end{aligned}$$

To dla pierwszego równania mamy dzielenie $a_{1,1} = 0$. Podobna sytuacja będzie miała miejsce jeżeli wartość współczynnika będzie bliska zera.

- Błędy zaokrągleń

Problem będzie bardzo istotny przy dużej liczbie niewiadomych, zwłaszcza ze względu na fakt, iż każdy wynik zależy od poprzedniego.

Dobłą zasadą jest podstawienie otrzymanych wyników do równań żeby sprawdzić czy problem występuje.

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa – problemy

- Układy źle uwarunkowane (ang. *ill-conditioned systems*)

O systemach źle uwarunkowanych mówimy gdy niewielka zmiana wartości współczynników powoduje dużą zmianę wartości rozwiązania.

Uwarunkowanie jest cechą problemu i jest niezależny od numerycznych właściwości konkretnych algorytmów. (Algebra -> wskaźnik uwarunkowania macierzy)

Przykład:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2 \cdot 10 - 2 \cdot 10.4}{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1.1} = 4, \text{ sprawdźmy} & 4 + 2 \cdot 3 &= 10 \\ x_2 &= \frac{1 \cdot 10.4 - 1.1 \cdot 10}{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1.1} = 3 & 1.1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 &= 10.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2 \cdot 10 - 2 \cdot 10.4}{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1.05} = 8, \text{ sprawdźmy} & 8 + 2 \cdot 1 &= 10 \\ x_2 &= \frac{1 \cdot 10.4 - 1.1 \cdot 10}{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1.05} = 1 & 1.1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 &= 10.8 \neq 10.4\end{aligned}$$

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa – problemy

- Układy osobliwe

W układzie równań mogą się znajdować dwa lub więcej równań niemal identycznych (układ źle uwarunkowany) lub identycznych (układ osobliwy).

W sytuacji układu osobliwego tracimy stopnie swobody co powoduje, że nie możemy rozwiązać układu równań.

Wyznacznik macierzy równy zero świadczy o osobliwości -> w metodzie eliminacji Gaussa po przekształceniu macierzy w macierz górną trójkątną **możemy pomnożyć elementy diagonalni** w celu wykrycia osobliwości

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa – ulepszenia

- Wykorzystanie większej liczby cyfr w zapisie liczb

Redukcja problemu, niestety wzrasta czas obliczeń i zapotrzebowanie na pamięć

- Pivoting

Problem gdy wybranym współczynnikiem jest współczynnik równy lub bliski zeru.

Możemy wybrać największy element w kolumnie poniżej elementu i zamienić wiersze (ang. ***partial pivoting***)

Zmiana kolejności wierszy-równań i kolumn zmiennych (ang. ***Complete pivoting***) –rzadko stosowany, zwiększa znacząco złożoność implementacji. Konieczność odtworzenia pierwotnej kolejności.

Układy równań liniowych

„naiwna” eliminacja Gaussa – ulepszenia

- Skalowanie

Może się zdarzyć (np. w równaniach opisujących układy elektryczne), że współczynniki w niektórych równaniach będą wielokrotnie mniejsze/większe od innych. Możemy pomnożyć wybrane równania przez skalar.

Przykład:

Rozwiążmy układ równań metodą eliminacji Gaussa i *pivoting*’iem (3 cyfry znaczące):

$$2x_1 + 100000x_2 = 100000$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 = 1.00$$

$$x_1 = 0.00 \text{ (błędy zaokrągleń)}$$

Skalując/normalizując:

$$0.000002x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 = 1.00$$

$$x_1 = 1.00$$

Prawidłowy wynik:

$$x_1 = 1.00002, \quad x_2 = 0.99998 \text{ czyli dla 3 cyfr znaczących}$$

$$x_1 = x_2 = 1.00$$

Układy równań liniowych

eliminacja Gaussa – Jordana

Jest to modyfikacja metody eliminacji Gaussa.

Główna różnica polega na tym, iż niewiadoma jest eliminowana ze wszystkich równań. Wszystkie wiersze są normalizowane przez podzielenie przez współczynnik pivotu.

Prowadzi do diagonalizacji macierzy (rozdzielenia poszczególnych zmiennych).

Finalnie, nie musimy podstawiać wstecz jak w metodzie Gaussa.

Układy równań liniowych

Eliminacja Gaussa

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \\
 \Downarrow \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right] \\
 \Downarrow \\
 \begin{array}{l} x_3 = b''_3/a''_{33} \\ x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Forward} \\
 \text{elimination} \\
 \\
 \text{Back} \\
 \text{substitution}
 \end{array}$$

Eliminacja Gaussa – Jordana

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \\
 \downarrow \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(n)} \end{array} \right] \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{rcl} x_1 & & = b_1^{(n)} \\ & x_2 & = b_2^{(n)} \\ & & x_3 = b_3^{(n)} \end{array}
 \end{array}$$

Układy równań liniowych

eliminacja Gaussa – Jordana

Przykład: Rozwiążmy układ równań:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 - 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 - 10x_3 = 71.4$$

Przedstawmy współczynniki jako macierz rozszerzona:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

Znormalizujemy pierwszy wiersz przez współczynnik pivotu -> 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

Układy równań liniowych

eliminacja Gaussa – Jordana

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

x_1 możemy wyeliminować odejmując pierwszy wiersz pomnożony przez 0.1. Analogicznie od 3 odejmujemy 1 pomnożony przez 0.3. ogólnie możemy zapisać:

$$\text{wiersz}_i := \text{wiersz}_i - \text{wiersz}_1 \cdot a_{i,1} :$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

Normalizujemy drugi wiersz dzieląc przez element diagonalny drugiego wiersza: 7.00333

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

Układy równań liniowych

eliminacja Gaussa – Jordana

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

Eliminujemy x_2 z 1 i trzeciego równania (odejmując drugi wiersz pomnożony przez -0.0333333. Analogicznie od 3 odejmujemy 2 pomnożony przez -0.190000):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{bmatrix}$$

Trzeci wiersz normalizujemy dzieląc przez zmodyfikowane $a_{3,3} = 10.01200$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

Układy równań liniowych

eliminacja Gaussa – Jordana

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

Finalnie, redukujemy x_3 z równania pierwszego i drugiego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.0000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5000 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

Dostajemy macierz jednostkową.

Wszystkie omówione usprawnienia dotyczące metody eliminacji Gaussa możemy tutaj stosować (np. pivoting).

Złożoność obliczeniowa:

$$n^3 + n^2 + n \xrightarrow{\text{ze wzrostem } n} n^3 + O(n^2)$$

Dekompozycja LU

Metoda eliminacji Gaussa pozwalała rozwiązać układ równań liniowych w postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

takie podejście jest nieefektywne.

Dekompozycja LU rozdziela czasochłonną eliminację w obrębie macierzy \mathbf{A} od przekształceń prawą stroną równania \mathbf{b} .

Sama metoda eliminacji Gaussa może być wyrażona jako dekompozycja LU .

Analogicznie jak w eliminacji Gaussa konieczny jest pivoting w celu uniknięcia dzielenia przez zero.

Dekompozycja LU

Równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ może zostać przekształcone, tak aby z prawej strony równania występowało zero:

$$\mathbf{AX} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Założmy, że układ może być przedstawiony jak układ z macierzą górną trójkątną (pokażemy dla $n=3$):

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Jest to podobne przekształcenie jak w pierwszym kroku eliminacji Gaussa. Przekształcając możemy zapisać:

$$\mathbf{UX} - \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Dekompozycja LU

$$\mathbf{UX} - \mathbf{D} = 0$$

Założmy, że mamy macierz dolną trójkątną z jedynkami na diagonalu:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

o właściwości takiej, że jak pomnożymy równanie $\mathbf{UX} - \mathbf{D} = 0$ to otrzymamy:

$$\mathbf{L}(\mathbf{UX} - \mathbf{D}) = \mathbf{AX} - \mathbf{B}$$

Jeżeli to równanie zachodzi to z zasady mnożenia macierzy wynika:

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} \quad \mathbf{LD} = \mathbf{B}$$

Dekompozycja LU

Bazując na $UX - D = 0$, $LU = A$, $LD = B$ możemy zaproponować:

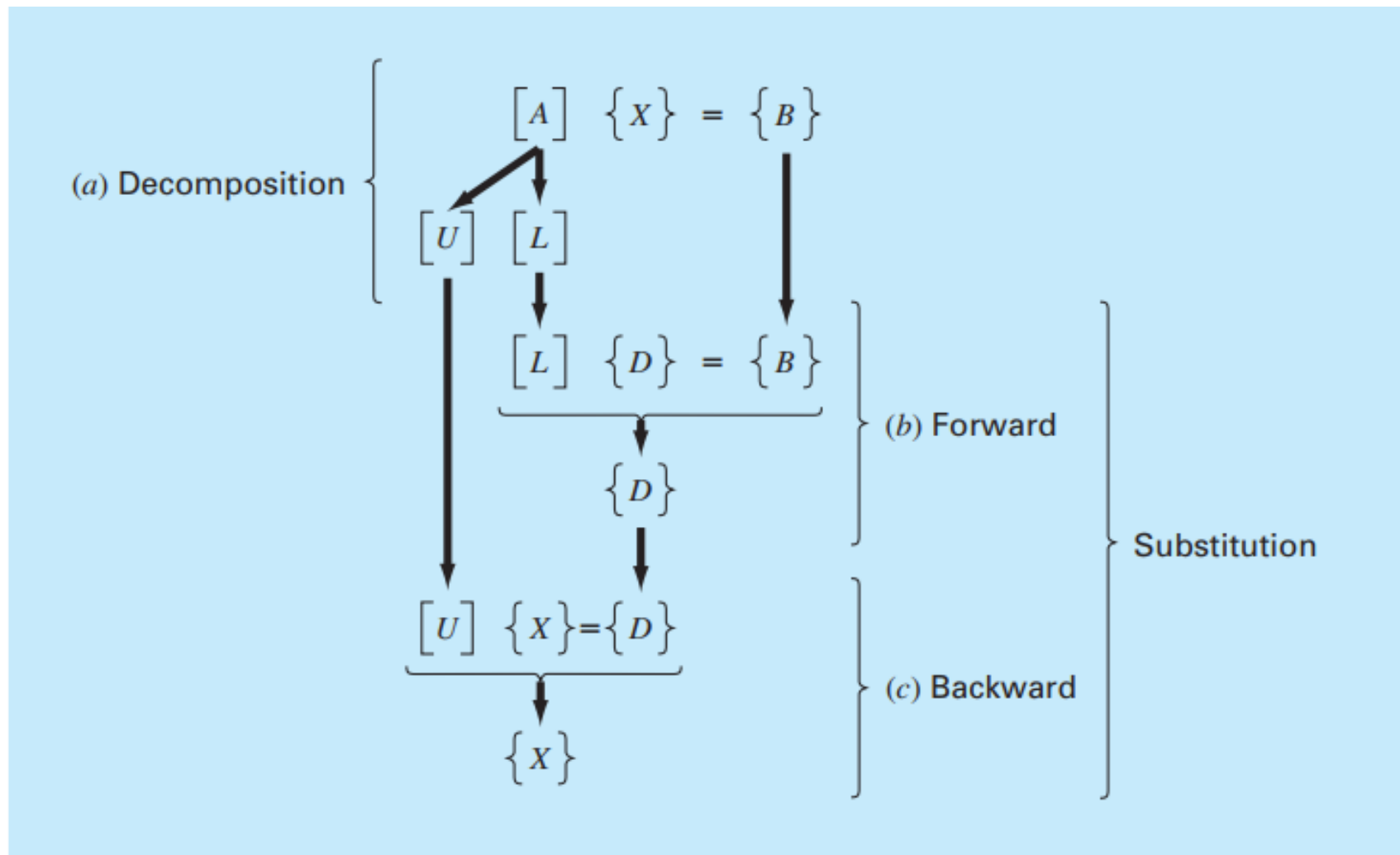
1. Dekompozycja LU . Macierz A jest dekomponowana na dolną L i górną U macierz trójkątną.

2. Podstawienie. Wykorzystujemy L i U do wyznaczenia X

2.1 Wyznaczamy wektor pośredni D za podstawie $LD = B$

2.2 Wynik podstawiamy do równania $UX - D = 0$

Dekompozycja LU



Dekompozycja LU – eliminacja Gaussa

Eliminacja Gaussa może zostać wykorzystana do dekompozycji LU .

Krok eliminacji wprost dostarcza macierz górną trójkątną:

$$U = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}$$

Chociaż może to nie być tak oczywiste, macierz L również powstaje podczas tego etapu.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku, mnożymy pierwszy wiersz przez $f_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$ i odejmujemy wynik od drugiego wiersza, żeby wyeliminować $a_{2,1}$. Analogicznie pierwszy wiersz mnożymy przez $f_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}$ i wynik odejmujemy od 3 równania, żeby wyeliminować $a_{3,1}$.

Dekompozycja LU – eliminacja Gaussa

W ostatnim kroku mnożymy zmodyfikowany drugi wiersz przez $f_{3,2} = \frac{a'_{3,2}}{a'_{2,2}}$ i odejmujemy wynik od 3 wiersza, żeby wyeliminować $a_{3,1}$.

Po eliminacji macierz **A** może być przedstawiona jako:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ f_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & a''_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ta macierz jest wygodnym i efektywnym sposobem przechowywania wyników dekompozycji LU :

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

$$\text{Gdzie: } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}, \text{ a } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{2,1} & 1 & 0 \\ f_{3,1} & f_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

Dekompozycja LU

Dla implementacji eliminacji Gaussa w dekompozycji LU , macierz \mathbf{L} ma jedynki na przekątnej. Jest to formalnie określane jako **dekompozycja Doolittle'a** lub **faktoryzacja**.

Alternatywne podejście obejmuje macierz \mathbf{U} z jedynkami na przekątnej. Takie podejście zwane jest **dekompozycją Crouta**.

$$l_{i,1} = a_{i,1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{i,1} = \frac{a_{1,j}}{l_{1,1}} \quad \text{dla } j = 2, \dots, n$$

Dla $j = 2, 3, \dots, n - 1$

$$l_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad \text{dla } i = j, j+1, \dots, n$$

$$u_{j,k} = \frac{a_{j,k} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{j,i} u_{i,k}}{l_{j,j}} \quad \text{dla } k = j+1, j+2, \dots, n$$

$$l_{n,n} = a_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k} u_{k,n}$$

Dekompozycja LU

Odwracanie macierzy

Odwrotność można obliczyć kolumna po kolumnie, generując rozwiązania z wektorami jednostkowymi jako stałymi po prawej stronie.

Przykładowo, jeżeli po prawej stronie w pierwszym wierszu jest 1, a pozostałe zera:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

to otrzymane rozwiązanie będzie pierwszą kolumną macierzy odwrotnej.

Podobnie, jeżeli jedynka jest w drugim wierszu, a pozostałe zera, wynikiem będzie druga kolumna macierzy odwrotnej.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dekompozycja LU

Odwracanie macierzy - przykład

Wyznamy macierz odwrotną z wykorzystaniem dekompozycji LU .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Dekompozycja prowadzi do:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

Pierwsza kolumna macierzy odwrotnej może być określona przez wykonanie podstawiania w z wektorem jednostkowym (z 1 w pierwszym wierszu) jako wektor po prawej stronie.

Bazując na $\mathbf{LD} = \mathbf{B}$ możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dekompozycja LU

Odwracanie macierzy - przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podstawiając:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{bmatrix}$$

Wektor możemy wykorzystać w prawej stronie równania:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{bmatrix}$$

Przez podstawienie możemy wyznaczyć wektor $\mathbf{X}^T = [0.33249, -0.00518, -0.01008]$, który będzie pierwszą kolumną macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & & \\ -0.00518 & & \\ -0.01008 & & \end{bmatrix}$$

Dekompozycja LU

Odwracanie macierzy – przykład

Dla drugiej kolumny zamienimy prawą stronę równania

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczając wektor \mathbf{D} , a następnie wektor $\mathbf{X}^T = [0.004944, 0.142903, 0.00271]$ będący drugą kolumną macierzy odwróconej

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & \\ -0.00518 & 0.142903 & \\ -0.01008 & 0.00271 & \end{bmatrix}$$

Ostatecznie dla $\mathbf{B}^T = [0, 0, 1]$ analogicznie $\mathbf{X}^T = [0.006798, 0.004183, 0.09988]$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

Dekompozycja LU

Odwracanie macierzy – przykład

Żeby sprawdzić poprawność rozwiązania: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

Złożoność obliczeniowa:

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n(n^2) = \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

dekompozycja + n * podstawienia

Analiza błędów

Oprócz zastosowań inżynierskich, odwrotność macierzy zapewnia również możliwość oceny czy systemy są źle uwarunkowane. W tym celu dostępne są trzy metody:

1. Przeskaluj macierz współczynników **A** tak, aby największy element w każdym wierszu miał wartość 1. Odwróć przeskalowaną macierz. Jeśli istnieją elementy macierzy odwróconej, które są kilka rzędów wielkości większe niż jeden to jest prawdopodobne, że układ jest źle uwarunkowany.

Jeżeli chcemy sprawdzić czy nasze rozwiązanie jest poprawne, możemy podstawić wyliczone wartości do równania i wyliczyć wektor różnic **R** :

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}$$

Jeżeli **R** jest małe to możemy przypuszczać, że $\tilde{\mathbf{X}}$ jest wyliczone dokładnie. Załóżmy nawet, że wyliczone wartości są dokładne:

$$\mathbf{0} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Odejmijmy równania stronami:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})$$

Mnożąc obie strony lewostronnie przez \mathbf{A}^{-1} otrzymamy:

$$\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}$$

Analiza błędów

$$\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}$$

Wynik wskazuje, dlaczego sprawdzenie rozwiązania przez podstawienie może wprowadzać w błąd. Duża wartość elementów macierzy odwrotnej, nawet przy niewielkich wartościach różnic może prowadzić do dużego błędu wyznaczenia \mathbf{X} .

Jeżeli w \mathbf{A}^{-1} występują elementy dużo większe od 1 możemy wnioskować, że układ jest źle uwarunkowany.

2. Pomnóż macierz odwrotną przez oryginalną macierz i oceń, czy wynik jest blisko macierzy jednostkowej. Jeśli nie, oznacza to złe uwarunkowanie.
3. Odwróć odwróconą macierz i oceń, czy wynik jest wystarczająco zbliżony do oryginalnej macierzy współczynników. Jeśli nie, oznacza to ponownie, że układ jest źle uwarunkowany.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Norma macierzy (przypomnienie):

Maksimum sumy modułów w kolumnach:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

Maksimum sumy modułów w wierszach:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Norma Euklidesowa

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\mu_{max})^{1/2}$$

gdzie μ_{max} jest największą wartością własną $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$\text{cond } \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Przykład: Rozważmy macierz Hilberta 3x3 (książkowy przykład macierzy źle uwarunkowanej):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Normalizujemy, żeby największa wartość w wierszu wynosiła 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Suma wartości w wierszach wynosi odpowiednio 1.833, 2.1667 i 2.35. Największa wartość występuje dla 3 wiersza:

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = 2.35$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = 2.35$$

Macierz odwrotna macierzy przeskalowanej ma postać:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix}$$

Zwróćcie uwagę, że wartość bezwzględna elementów jest dużo większa od elementów macierzy wyjściowej. Ma to również odzwierciedlenie w normie:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = |-36| + |96| + |-60| = 192$$

$$\text{cond } \mathbf{A} = 2.35 \cdot 192 = 451.2$$

Wartość dużo większa od 1 sugeruje złe uwarunkowanie.

Dekompozycja Choleskiego

Przypomnienie: Macierz jest symetryczna gdy $a_{i,j} = a_{j,i}$ dla każdego i i j czyli

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Dla macierzy symetrycznej możemy przeprowadzić dekompozycję:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

gdzie

$$l_{k,i} = \frac{a_{k,i} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} l_{k,j}}{l_{i,i}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k-1$$

i

$$l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2}$$

Wartości i wektory własne

Do tej pory mówiliśmy o układach równań niejednorodnych (czyli takich gdzie występował niezerowy wektor **B**):

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Jeżeli równania składające się na taki układ są liniowo niezależne (niezerowy wyznacznik), będą miały unikalne rozwiązanie.

W układy równań jednorodnych mają postać:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$$

Oczywiście takie układy mają rozwiązanie trywialne (wszystkie niewiadome równe zero), natomiast rozwiązanie nietrywialne również występuje, ale nie musi być unikalne.

Problem wartości własnych przedstawia się zwykle w formie ogólnej:

$$\begin{aligned}(a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + (a_{n,n} - \lambda)x_n &= 0\end{aligned}$$

Wartości i wektory własne

$$\begin{aligned}(a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + (a_{n,n} - \lambda)x_n &= 0\end{aligned}$$

λ – jest nieznanym parametrem zwanym wartością własną. Rozwiązanie \mathbf{X} takiego układu nosi nazwę wektora własnego.

W zwartej formie równanie można przedstawić jako:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$$

Jednym ze sposobów wyznaczenia λ jest wykorzystanie faktu, iż wyznacznik $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ dla nietrywialnego rozwiązania.

Wielomian, który powstaje z wyliczenia wyznacznika nosi nazwę wielomianu charakterystycznego, a pierwiastki są wartościami własnymi.

Wartości i wektory własne

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny ma postać:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 7 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 14 = \lambda^2 - \lambda - 20 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 4) \end{aligned}$$

Wartości własne wynoszą 5 i -4.

Ogólnie dla macierzy $n \times n$ wielomian charakterystyczny będzie stopnia n .

Bezpośrednie wyliczenie wartości własnych, ma sens dla małych n .

Po wyznaczeniu wartości możemy rozwiązać $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = 0$

Wartości i wektory własne

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Po wyznaczeniu wartości możemy rozwiązać $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = 0$

Czyli $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ lub $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Oczywiście jest to macierz osobliwa, z nietrywialnym rozwiązaniem. Wybierzmy np. $x_1=1$ to dostaniemy rozwiązanie w postaci $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dla drugiej wartości własnej otrzymamy $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

Każdy wektor własny pomnożony przez skalar dalej jest wektorem własnym.

Wyznacznik macierzy jest równy iloczynowi jej wartości własnych.

Często wektory własne się normalizuje do jednostkowej długości.