Literatura

W slajdach i materiałach wykorzystano wiedzę, materiały, przykłady zawarte m.in. w:

1. Fortuna, Z., B. Macukow, and J. Wasowski. "Metody numeryczne" WNT, Warszawa (2009).
2. Kincaid, David, David Ronald Kincaid, and Elliott Ward Cheney. Numerical analysis: mathematics of scientific computing. Vol. 2. American Mathematical Soc., 2009. (w. pol)
3. Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. Numerical methods for engineers. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010.
4. Hellevik, Leif Rune. "Numerical Methods for Engineers." Kompendium. NTNU (2020).
5. Stroud, Kenneth Arthur, and Dexter J. Booth. Advanced engineering mathematics. Palgrave, 2003
6. Bronsztejn, I. N., et al. "Nowoczesne kompendium matematyki, Wyd." Naukowe PWN, Warszawa (2007).

Narzędzia

- Python 3.7 lub wyżej
- Anaconda – wygodne rozwiązanie
- Biblioteki: numpy, scipy, matplotlib
- Notatniki Jupyter

Organizacja zajęć - wykład

- 14h wykładów – 7 spotkań (ostatnie kolokwium, pr. UPEL)
- Ze względu na wyjazdy służbowe, może nastąpić przesunięcie terminów. Przed każdym wykładem otrzymają Państwo maila z hasłem dostępowym.
- Wykłady odbywają się na platformie UPEL z wykorzystaniem QuickMeeting
- Pytania w trakcie wykładu, proszę pisać czacie oraz podnosić „wirtualną” rękę.
- Numeracja wykładów nie odzwierciedla terminów spotkań.
- Slajdy, notatniki i inne dodatkowe materiały będą udostępnianie za pomocą platformy UPEL – **materiały są do użytku prywatnego, nie wolno ich rozprzestrzeniać, ani umieszczać w internecie**.

Tematyka - wykład

- Błędy numeryczne, miejsca zerowe funkcji
- Różniczkowanie
- Interpolacja, aproksymacja, ekstrapolacja
- Całkowanie
- Układy równań, wartości i wektory własne
- Gradient, macierz Hessego, macierz Jacobiego
- Zadania optymalizacyjne, Metoda Najmniejszych Kwadratów
- Problem odstających danych (ang. *outliers*) – RANSAC

Organizacja zajęć - lab

- Plan laboratorium zakłada 8 spotkań oraz dodatkowy termin zaliczeniowy.
- W ramach ćwiczeń laboratoryjnych prowadzący omawia krok po kroku implementacje poszczególnych algorytmów, po czym zadaje zadania do samodzielnego rozwiązania.
- W trakcie laboratorium wykorzystywany jest język Python oraz biblioteki NumPy/SciPy/Matplotlib/PyTorch.
- Przewidziane jest jedno kolokwium zaliczeniowe polegające na samodzielnej implementacji wybranych algorytmów według dostarczonej specyfikacji, wykorzystując doświadczenie zdobyte w trakcie laboratorium.
- Na ten moment, kolokwium planowane jest w formie stacjonarnej.

Organizacja zajęć - lab

- Laboratorium ma za zadanie pokazać praktyczne aspekty tematów poruszanych na laboratorium.
- Laboratorium rusza 15.10
- **Zajęcia wspólne dla wszystkich grup odbywają się w czwartki w godzinach 19:45-22:00, obecność obowiązkowa (MS Teams/Click Meeting).**
- Pozostałe terminy - czwartek 08:00-11:00, 14:30-17:45, piątek 08:00-11:00 są zarezerwowane na nieobowiązkowe konsultacje. Konsultacje odbywają się w tygodniach, w których zaplanowane są spotkania obowiązkowe. Konsultacje odbywają sięd omyslnie, wystarczy dołączy ć do spotkania.
- Z uwagi na konieczność archiwizacji zajęć prowadzonych zdalnie, wszystkie zajęcia będą nagrywane przez prowadzącego.

Wszystkie udostępniane materiały, skrypty, notatniki są wyłącznie przeznaczone do użytku prywatnego w celu łatwiejszego opanowania wiedzy.

Nie wolno ich rozprzestrzeniać, ani umieszczać w Internecie.

Zaczynamy

Prosty przykład na początek

ZASADNICZNE TWIERDZENIE ALGEBRY

Stopień niezerowego wielomianu zespolonego jest równy sumie krotności jego zespolonych pierwiastków. Jest to równoważne temu, iż każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ można przedstawić w postaci iloczynu:

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

dla pewnych $a, z_1\ z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

Prosty przykład na początek

- Konsekwencje:
  - n liczb (pierwiastków, ang. *roots*) spełnia równanie $f(z) = 0, z = z_1, \ldots, z_n$
  - Pierwiastki **nie muszą** być różne,
  - Pierwiastki mogą być rzeczywiste, urojone lub zespolone

Prosty przykład na początek

- Przykłady, równanie kwadratowe:
  - $z^2 + 5z + 6 = 0$ można przedstawić jako $(z + 2)(z + 3) = 0$, także mamy dwa różne pierwiastki $z = -2 \; i \; z = -3$
  - $z^2 - 4z + 4 = 0$ można przedstawić jako $(z - 2)(z - 2) = 0$, także mamy dwa takie same pierwiastki $z = 2 \; i \; z = 2$

Prosty przykład na początek

- $z^2 + z + 1 = 0$ można przedstawić jako $(z+a)(z+b) = 0$, także mamy dwa różne pierwiastki $z = -a$ i $z = -b$

Musimy skorzystać z ogólnego wzoru na pierwiastki równania kwadratowego " $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ ", współczynniki są równe 1, także:

$$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Prosty przykład na początek

a jak sobie poradzić z wyższymi stopniami?

- *stopień 3* – metoda Tartaglia – 1535r.
- *stopień 4* - metoda Ferrari -1540r.
- *stopień 5 i wyższe*

METODY ANALITYCZNE

METODY NUMERYCZNE

PRZYPOMNIENIE
Stopień wielomianu jest to najwyższy ze stopni jego składników o niezerowych współczynnikach.
np. $\mathbf{3x^3+2x^2+x+1}$ – wielomian stopnia 3

METODY NUMERYCZNE

Obliczenia inżynierskie
Metody numeryczne

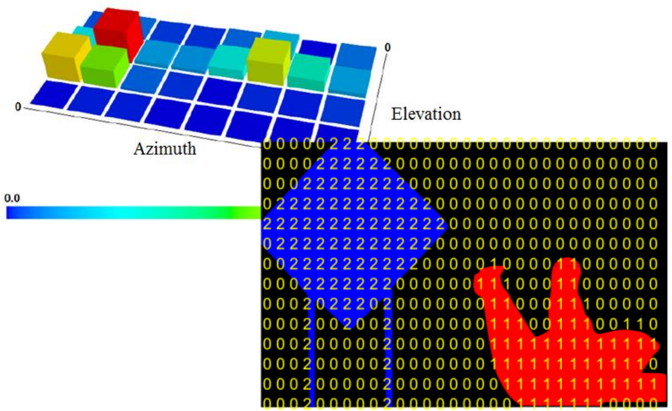
- **Metody numeryczne** – metody rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą **skończonej** liczby operacji na liczbach.

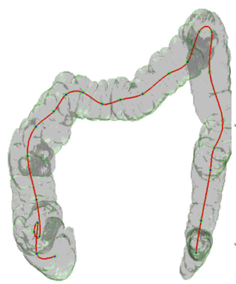
- Metody numeryczne wykorzystywane są, gdy badany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego (danego wzorami) lub korzystanie z takich rozwiązań jest uciążliwe ze względu na ich złożoność.

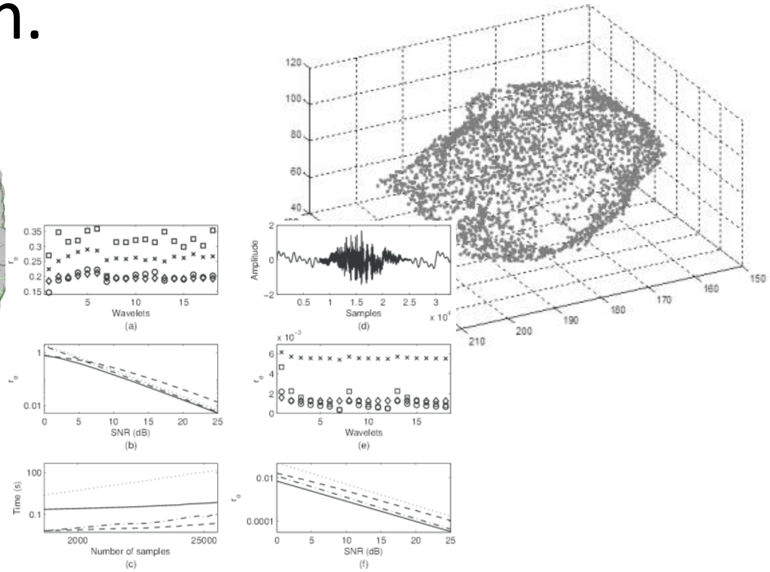
Obliczenia inżynierskie
Metody numeryczne

- Dla inżynierów metody numeryczne są narzędziem służącym do formułowania i rozwiązywania praktycznych zagadnień obliczeniowych w różnych dziedzinach techniki.

- Wykorzystywane są również do przekształcania znanych modeli ciągłych do postaci dyskretnych.





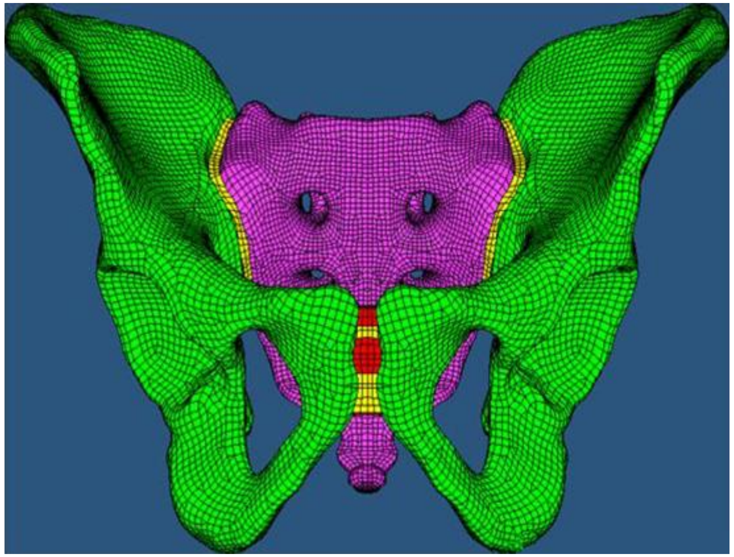


Obliczenia inżynierskie
Metody numeryczne

- Typowe problemy inżynierskie rozwiązywane za pomocą metod numerycznych:
  - obliczanie całek
  - szukanie miejsc zerowych wielomianów wysokiego stopnia
  - rozwiązywania dużych układów równań
  - rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych
  - znajdowania wartości i wektorów własnych
  - obliczanie wartości funkcji matematycznych

Metody numeryczne

Prawie wszystkie (> 99.9%) rzeczywistych problemów w nauce i inżynierii jest zbyt skomplikowana/złożona żeby możne je rozwiązać analitycznie, jedyne co pozostaje to rozwiązania przybliżone, numeryczne.



FEM – metoda elementów skończonych

Źródło: https://www.uab.edu/engineering/bme/about-us

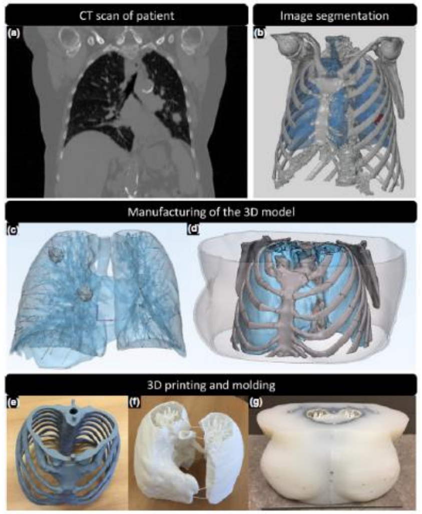
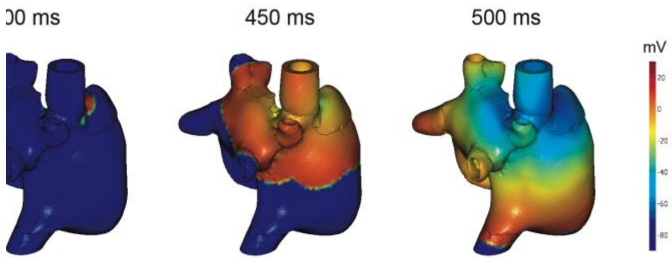


Figure 2: The 3D-printed lung phantom.

Przetwarzanie i analiza sygnałów i obrazów

Źródło: https://www.aapm.org/GrandChallenge/MATCH/



Modelowanie

Źródło: https://www.engineering.unsw.e
engineering/research/our-research-prior
biomonitoring-and-modelling-research/c

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

- Każdy proces numeryczny składa się ostatecznie z szeregu podstawowych działań (operacji).
- Problemy wynikają w szczególności ze skończoności systemu pozycyjnego w arytmetyce zmiennoprzecinkowej.

PRZYPOMNIENIE

Znormalizowane liczby dziesiętne: każda liczba rzeczywista $x \neq 0$ daje się przedstawić jako liczba dziesiętna postaci: $x = \pm\, 0, b_1 b_2 \ldots 10^E \ (b_1 \neq 0)$

$(b_1 \neq 0)$ – warunek określa, iż mamy ***znormalizowaną liczbę dziesiętną***

Liczbę $0, b_1 b_2 \ldots$ nazywamy ***mantysą,*** tworzymy ją z cyfr $b_i \in \{0,1,\ldots,9\}$.

Liczbę *E* jest liczbą całkowitą, tzw. ***cechą.***

Komputery mogą pracować tylko ze skończonymi ciągami cyfr, konieczne jest ustalenie liczby cyfr mantysy *t*, oraz zakresu cechy *E*.

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

- Załóżmy, że x i y są znormalizowanymi, nie obciążonymi błędami liczbami zmiennoprzecinkowymi tego samego znaku o wartości różnej od zera:
- $x = m_1 B^{E_1}, \quad y = m_2 B^{E_2}$

  gdzie $m_i = \sum_{k=1}^{t} a_{-k}^{(i)} B^{-k}$, $a_{-1}^{(i)} \neq 0$

  i $a_{-k}^{(i)} = 0 \; lub \; 1 \; lub \; \ldots B - 1$, dla $k > 1, (i = 1,2)$

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$$

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

DODAWANIE (np. $0{,}9604 \cdot 10^3 + 0{,}5873 \cdot 10^2$):

- Dla $E_1 > E_2$ drugi wykładnik dopasowujemy do E_1, ponieważ ze względu na normalizację możliwe jest tylko przesunięcie punktu w lewo

$$0{,}9604 \cdot 10^3 + 0{,}05873 \cdot 10^3$$

- Następnie dodajemy mantysy.

$$1{,}01913 \cdot 10^3$$

- Jeżeli $B^{-1} \leq \left|m_1 + m_2 B^{-(E_1-E_2)}\right|$<2 i $\left|m_1 + m_2 B^{-(E_1-E_2)}\right| \geq 1$

$$0{,}1 \leq \left|0{,}9604 + 0{,}5873 \cdot 10^{-(3-2)}\right| < 2 \text{ i } \left|0{,}9604 + 0{,}5873 \cdot 10^{-(3-2)}\right| > 1$$

$$0{,}1 \leq |1{,}01913| < 2 \text{ i } |1{,}01913| > 1$$

to dokonujemy przesunięcia o jedną pozycję w lewo przy jednoczesnym podwyższeniu wykładnika o jeden (przepełnienie przy dodawaniu).

$$0{,}1019 \cdot 10^4$$

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$$

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

ODEJMOWANIE (np. $0{,}1004 \cdot 10^3 - 0{,}9988 \cdot 10^2$)**:**

- Podobnie jak przy dodawaniu po zrównaniu wykładników mantysy się odejmuje

$$0{,}1004 \cdot 10^3 - 0{,}09988 \cdot 10^3 = 0{,}00052 \cdot 10^3$$

- Jeżeli $\left|m_1 - m_2 B^{-(E_1 - E_2)}\right| < 1 - B^{-t}$ i $\left|m_1 - m_2 B^{-(E_1 - E_2)}\right| < B^{-1}$

$$\left|0{,}1004 - 0{,}9988 \cdot 10^{-(3-2)}\right| < 1 - 10^{-5} \text{ i } \left|0{,}1004 - 0{,}9988 \cdot 10^{-(3-2)}\right| < 0{,}1$$
$$|0{,}00052| < 0{,}99999 \text{ i } |0{,}00052| < 0{,}1$$

to dokonujemy przesunięcia o maksymalnie t pozycji w prawo wraz z odpowiadającym mu obniżeniem wykładnika

$$0{,}00052 \cdot 10^3 = 0{,}5200 \cdot 10^0$$

Przykład pokazuje przypadek krytyczny kasowania zer nieznaczących (utrata cyfr znaczących).. Ze względu na ograniczoną liczbę pozycji (w tym wypadku 4) przeciągnięciu w prawą stronę ulegają zera,
które tylko wydają się cyframi znaczącymi.

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$$

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

MNOŻENIE (np. $0{,}3176 \cdot 10^3 * 0{,}2504 \cdot 10^5$)**:**

- Wykładniki dodajemy, mantysy mnożymy

$$0{,}3176 \cdot 10^3 * 0{,}2504 \cdot 10^5 = 0{,}07952704 \cdot 10^8$$

- Jeżeli $m_1 m_2 < B^{-1}$ to przecinek przy jednoczesnym obniżeniu wykładnika o jeden ulega przesunięciu o jedną pozycję w prawo (niedopełnienie przy mnożeniu)

$$0{,}7953 \cdot 10^7$$

$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

DZIELENIE (np. $0{,}3176 \cdot 10^3 / 0{,}2504 \cdot 10^5$)**:**

- Wykładniki odejmujemy, mantysy dzielimy

$$\frac{0{,}3176 \cdot 10^3}{0{,}2504 \cdot 10^5} = 1{,}2683706 \ldots \cdot 10^{-2}$$

- Jeżeli $\frac{m_1}{m_2} \geq B^{-1}$ to przecinek przy jednoczesnym podniesieniu wykładnika o jeden ulega przesunięciu o jedną pozycję w lewo (przepełnienie przy dzieleniu)

$$0{,}1268 \cdot 10^{-1}$$

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$$

Błędy numeryczne - przypomnienie

PODSTAWOWE DZIAŁANIA W RACHUNKACH NUMERYCZNYCH

BŁĄD WYNIKU

Dla czterech działań podstawowych, przy braku obciążenia błędami wielkości wejściowych, błąd jest wynikiem procedur zaokrąglania.

Dla błędu względnego przy liczbie pozycji t i podstawie B otrzymujemy ograniczenie

$$\frac{B}{2} B^{-t}$$

Tutorial jupyter:
https://www.dataquest.io/blog/jupyter-notebook-tutorial/

Przykład obliczeniowy:
`W1_1_Error_ex.ipynb`

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2}$$

Błędy numeryczne

DOKŁADNOŚĆ W OBLICZENIACH NUMERYCZNYCH

Metody numeryczne są obarczone błędami.

Przyjmijmy że:

x wartość ścisła pewnej wielkości (często niewiadoma)

$\tilde{x}$ wartość przybliżona dla x

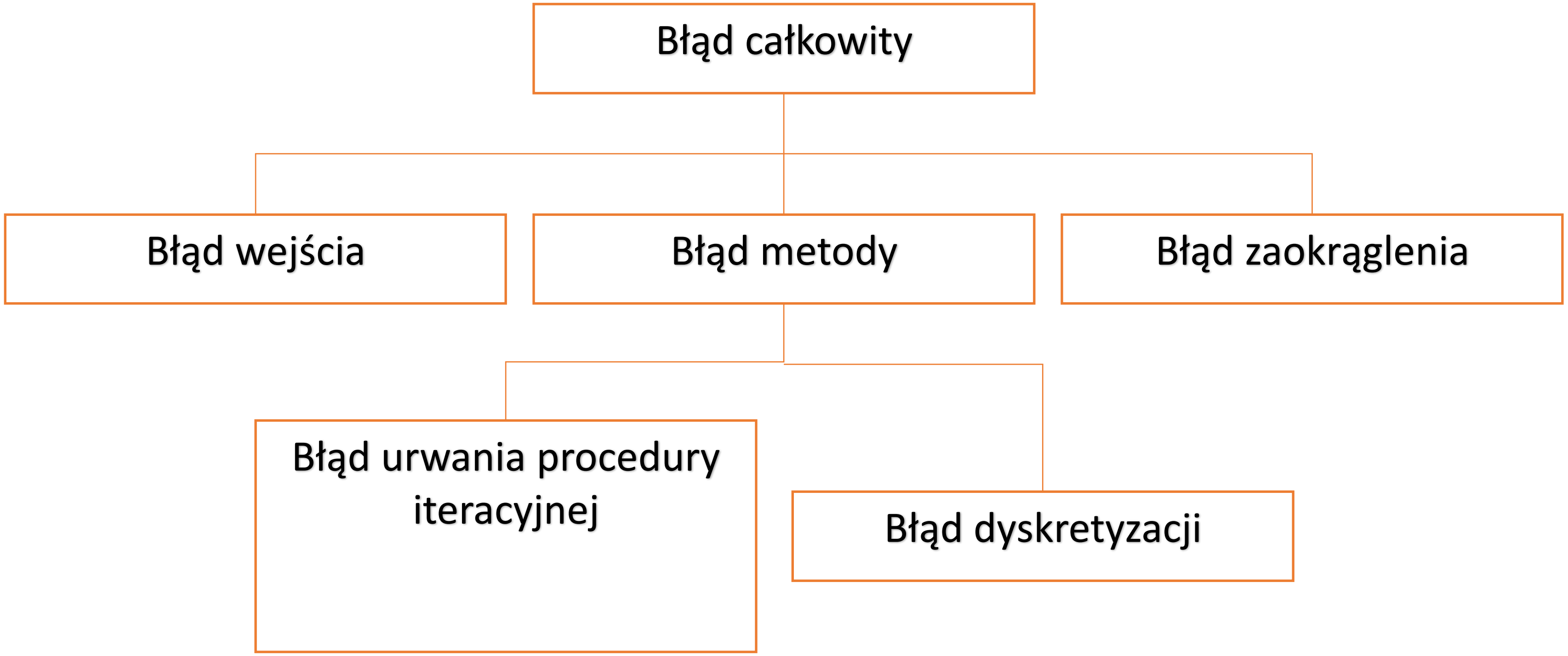
Błąd bezwzględny: $\epsilon(x) = |\Delta x| = |x - \tilde{x}|$

Błąd względny: $\epsilon_{rel}(x) = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right|$

Błędy numeryczne

DOKŁADNOŚĆ W OBLICZENIACH NUMERYCZNYCH

RODZAJE BŁĘDÓW



Błędy numeryczne –błędy wejścia

BŁĘDY WEJŚCIA – błąd wyników spowodowany obciążeniem błędami danych wejściowych.

ZAGADNIENIE PROSTE TEORII BŁĘDÓW - Wyznaczenie błędu wejścia na podstawie danych wejściowych.

ZAGADNIENIE ODWROTNE – określenie jak duże mogą być błędy danych, aby nie został przekroczony dopuszczalny błąd wyniku końcowego.

Błędy numeryczne – błędy wejścia

Dla badanej funkcji rzeczywistej $y = f(x)$ gdzie $x = (x_1, .. x_n)^T$ bezwzględny błąd wejścia wynosi:

$$|\Delta y| = \left|f(x_1, \dots, x_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)\right| =$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)(x_i - \tilde{x}_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\max_x \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right|\right) |\Delta x_i|$$

$(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ są wartościami pośrednimi $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ przybliżenia wartości $(x_1, .. x_n)$. Wartości przybliżone reprezentują obciążone błędami dane wejściowe.

Błędy numeryczne –błędy wejścia

Błędy wejścia są związane ze skończoną dokładnością przyrządów pomiarowych (->patrz Metrologia).

Dla podstawowych operacji arytmetycznych błąd wejścia jest znany.

Operacja	Błąd bezwzględny	Błąd względny
Dodawanie odejmowanie	$\varepsilon(x \pm y) = \varepsilon(x) \pm \varepsilon(y)$	$\varepsilon_{rel}(x \pm y) = \dfrac{x\varepsilon_{rel}(x) \pm y\varepsilon_{rel}(y)}{x \pm y}$
Mnożenie	$\varepsilon(xy) = y\varepsilon(x) \pm x\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(y)$	$\varepsilon_{rel}(xy)=\varepsilon_{rel}(x) + \varepsilon_{rel}(y) + \varepsilon_{rel}(x)\varepsilon_{rel}(y)$
Dzielenie	$\varepsilon\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{y}\varepsilon(x) - \dfrac{x}{y^2}\varepsilon(y) + wwrz$	$\varepsilon_{rel}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \varepsilon_{rel}(x) - \varepsilon_{rel}(y) + wwrz$

Mały błąd względny danych wejściowych -> przy mnożeniu/dzieleniu mały błąd względny wyniku.

Przy dodawaniu i odejmowaniu błąd względy sumy i różnicy może być duży gdy $|x \pm y| \ll |x| + |y|$. Ryzyko kasowania pozycji.

Błędy numeryczne –błędy metody

Błędy metody są związane z koniecznością numerycznej aproksymacji wartości ciągłych jak i granicznych.

- błędy urywania procesów granicznych (błąd odcięcia)
  - metody iteracyjne
  - obliczanie szeregów
- błędy dyskretyzacji
  - aproksymacja struktur ciągłych za pomocą układów dyskretnych
  - całkowanie numeryczne

Błędy numeryczne –błędy zaokrągleń

Błędy zaokrągleń powstają w wyniku koniecznego zaokrąglania wyników cząstkowych (z wyjątkiem ograniczonego zbioru liczb całkowitych).

Wielkość błędów zależy:

- dokładności reprezentacji
- sposobu zaokrąglania wyniku
- rodzaju przeprowadzanej operacji

Lemat Wilkinsona – błędy zaokrągleń powstające podczas wykonywania działań zmiennopozycyjnych są równoważne zastępczemu zaburzeniu liczb, na których wykonujemy działania.

Operacja	**Błąd względny zaokrągleń**
Dodawanie odejmowanie	$\frac{fl(x) \pm fl(y) - (x \pm y)}{x \pm y} = \frac{x\varepsilon_{rel}(x) \pm y\varepsilon_{rel}(y)}{x \pm y}$
Mnożenie	$\frac{fl(x)fl(y)-xy}{xy} = \varepsilon_{rel}(x) + \varepsilon_{rel}(y) + \varepsilon_{rel}(x)\varepsilon_{rel}(y)$
Dzielenie	$\frac{fl(x)/fl(y) - x/y}{x/y} \approx \varepsilon_{rel}(x) - \varepsilon_{rel}(y)$

Wykonywanie kolejnych operacji na wynikach poprzednich operacji prowadzi do kumulacji błędów zaokrągleń.

Błędy numeryczne –błędy zaokrągleń

Jeden z najbardziej tragicznych przykładów błędów zaokrągleń:

Naukowcy i inżynierowie często chcą wierzyć, że wyniki liczbowe obliczeń komputerowych, zwłaszcza te otrzymane jako wynik pakietu oprogramowania, nie zawierają błędów, a przynajmniej nie są one znaczące lub niedopuszczalne.

Nieostrożne obliczenia numeryczne czasami prowadzą do katastrof. Jedną z bardziej spektakularnych katastrof była awaria rakiety Patriot w Dharanie w Arabii Saudyjskiej 25 lutego 1991 r., W wyniku której zginęło 28 osób. Ostatecznie przyczyną tego niepowodzenia było niewłaściwe obchodzenie się z błędami zaokrąglania w oprogramowaniu pocisku.

Źródło: http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html

Szczegółowe informacje jak doszło do katastrofy można znaleźć na stronie: http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html

Błędy numeryczne –Python

Wpływ dyskutowanych zagadnień i pułapki występujące praktycznie przeanalizujemy na przykładzie Pythona

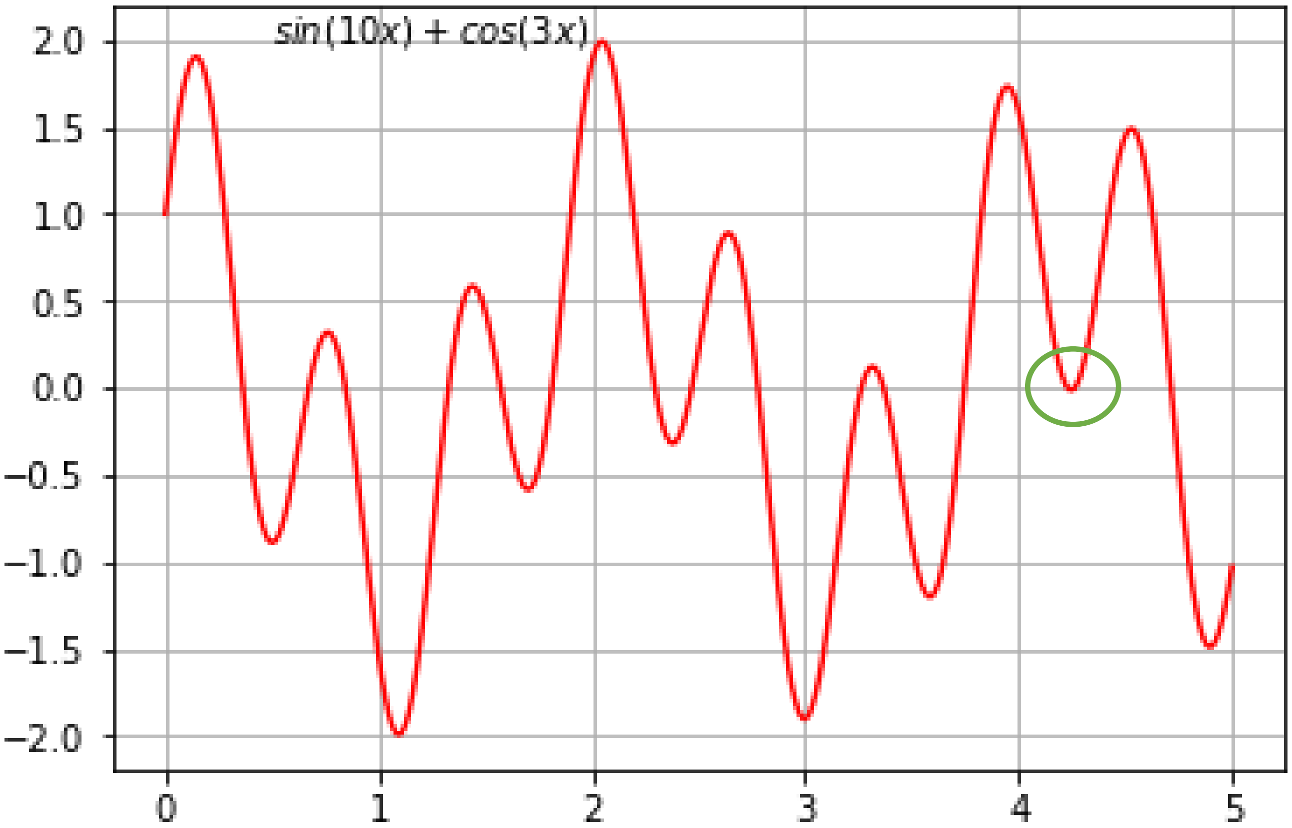
Przykłady:
`W1_2_Floating_Python.ipynb`

Miejsca zerowe funkcji

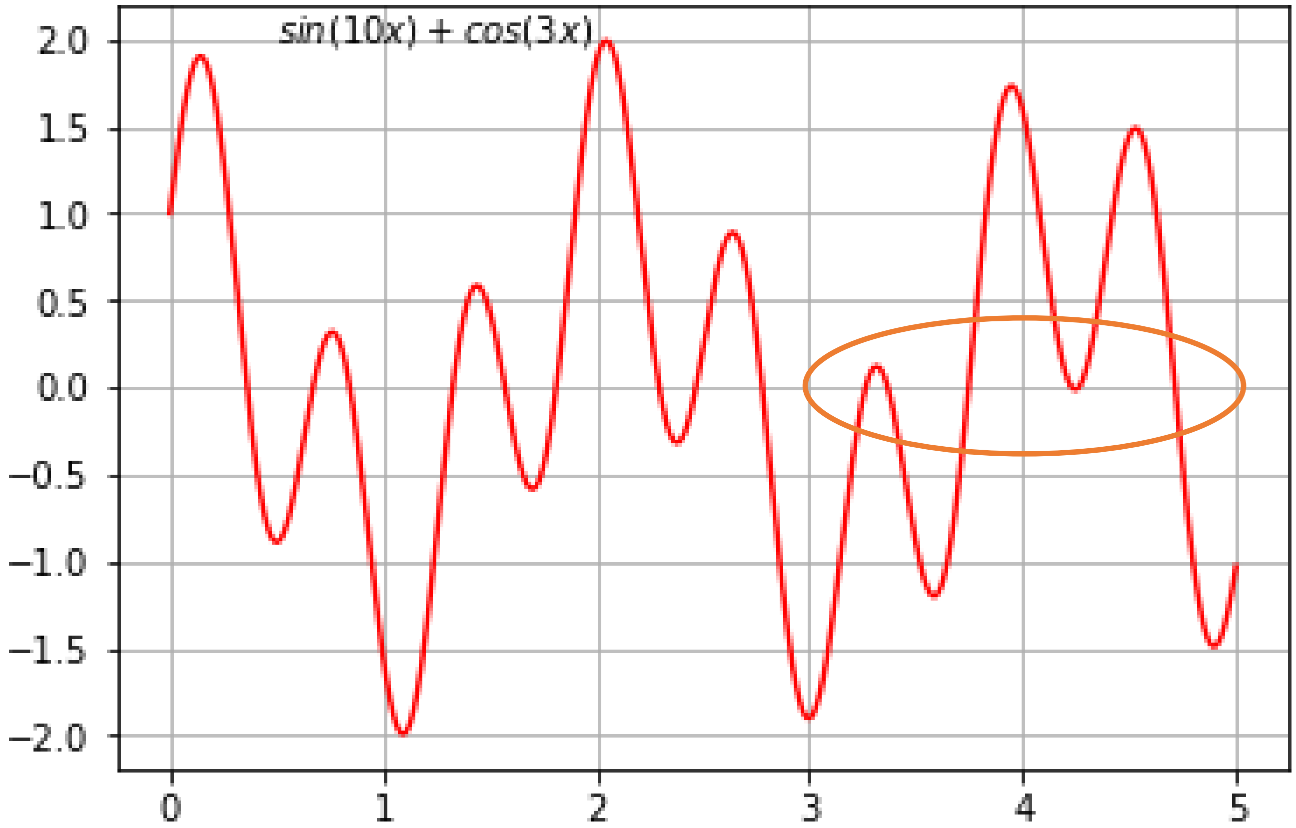
Pierwiastki równania

Znajdź x, dla którego $f(x) = 0$

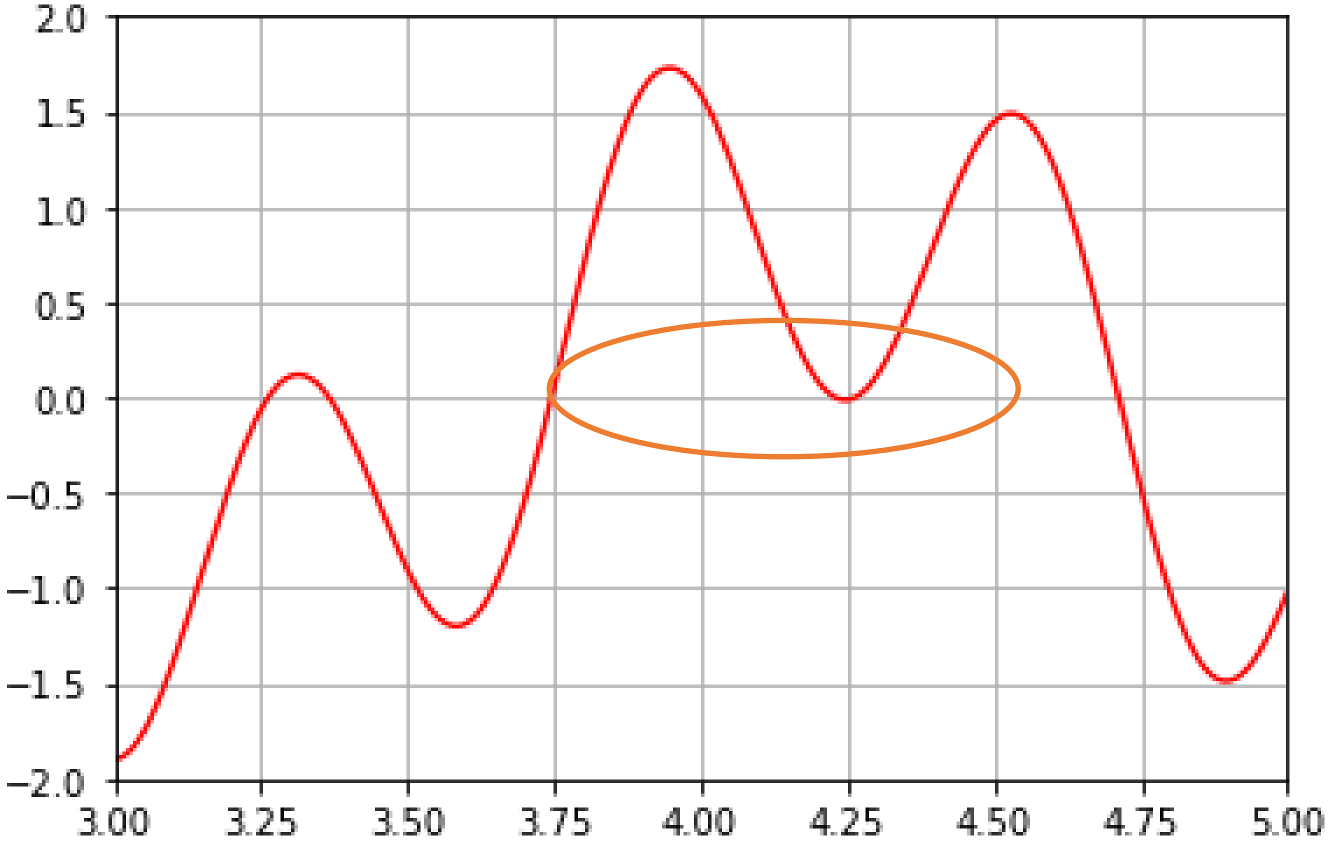
„Metoda” graficzna:



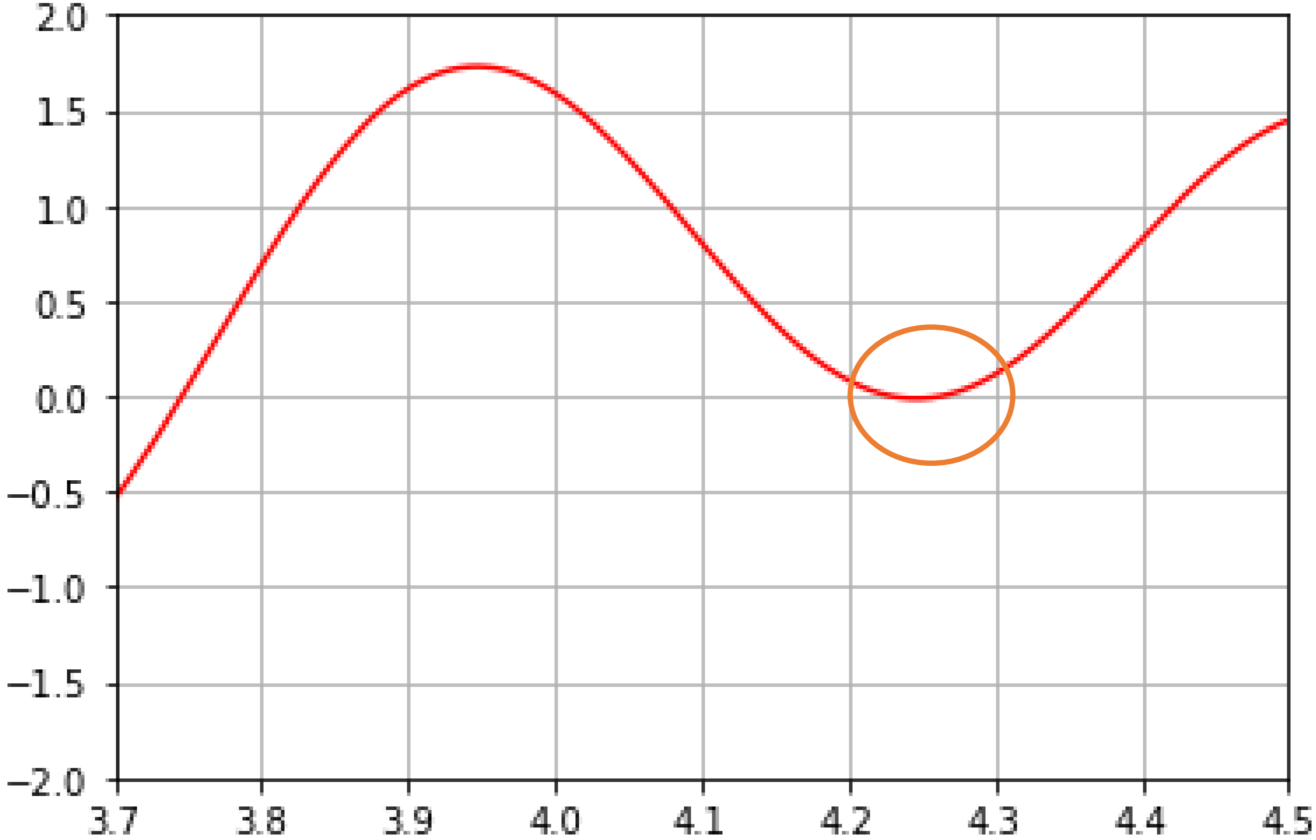
Pierwiastki równania – metoda graficzna



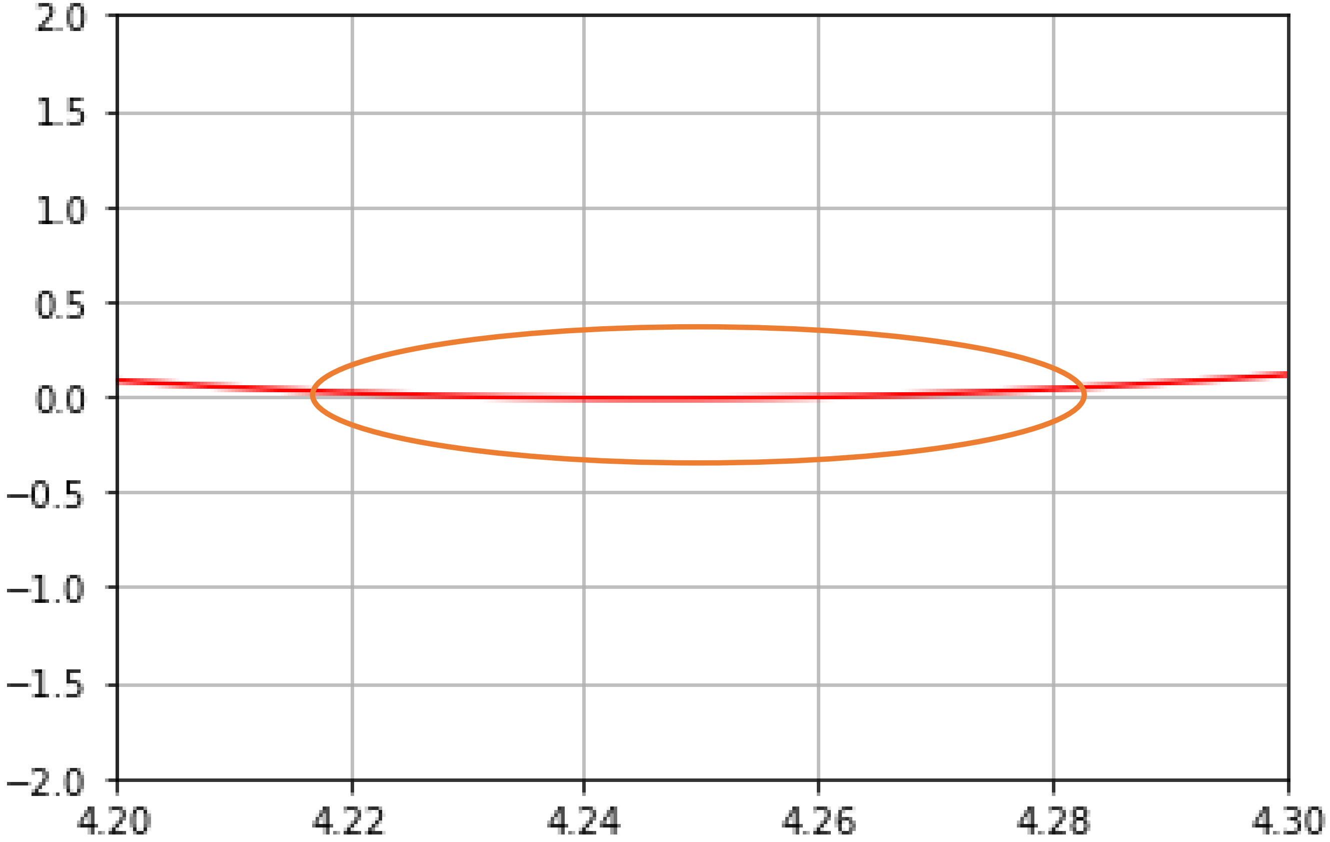
Pierwiastki równania – metoda graficzna



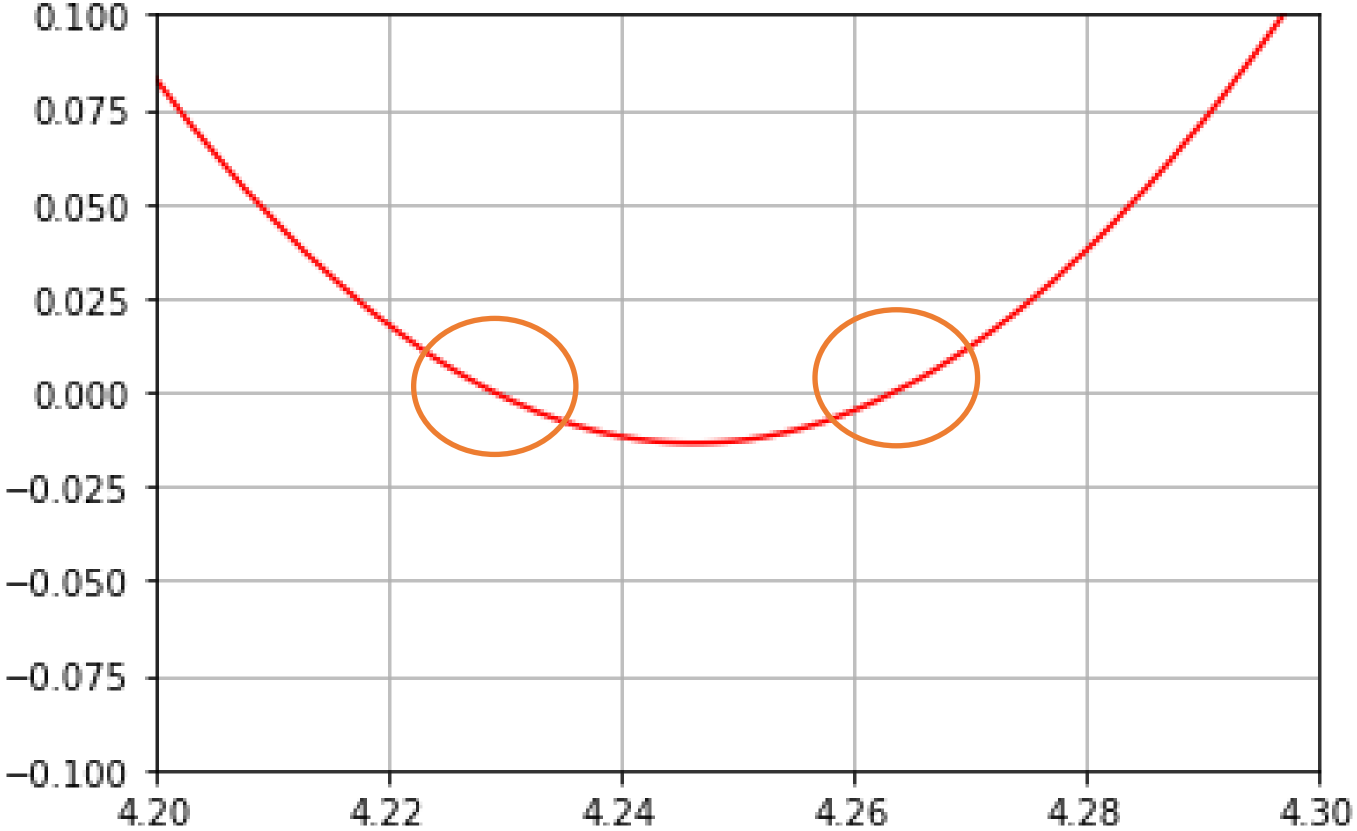
Pierwiastki równania – metoda graficzna



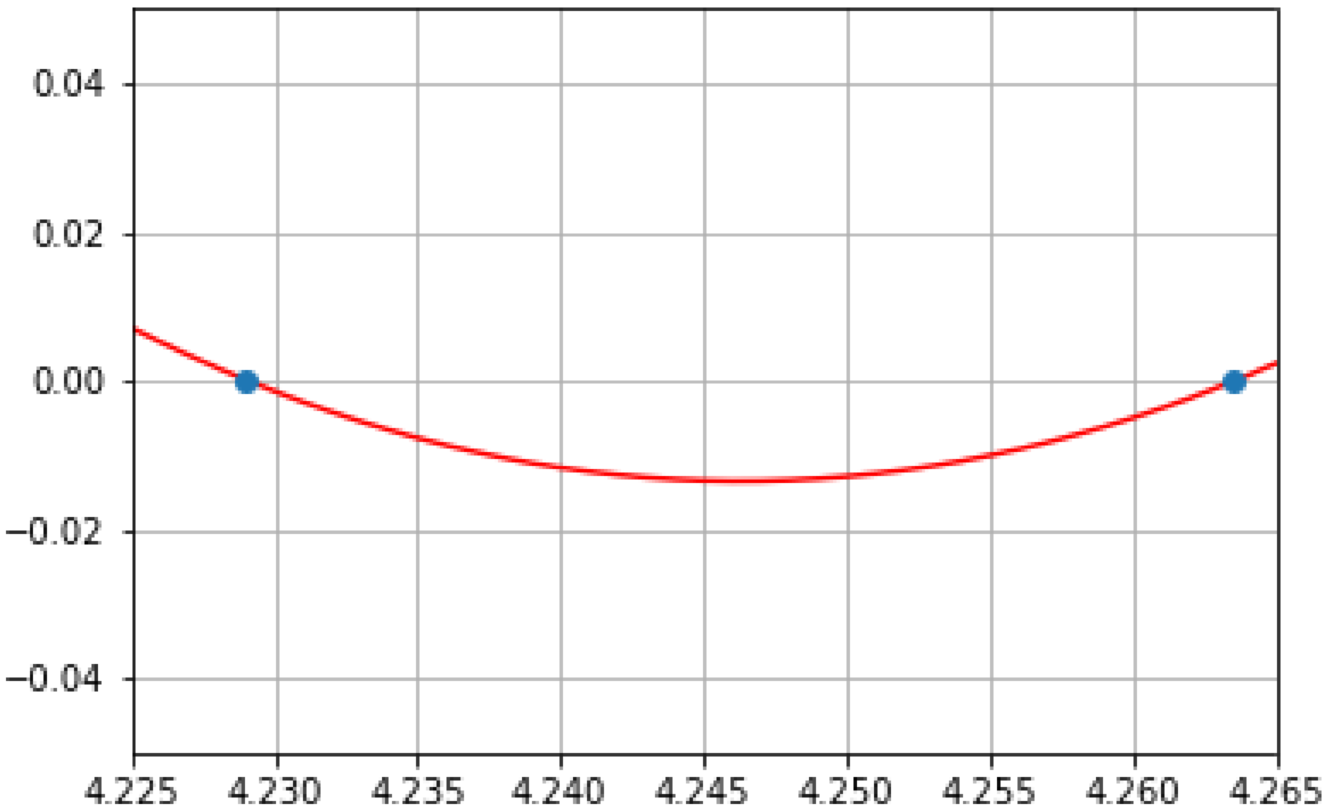
Pierwiastki równania – metoda graficzna



Pierwiastki równania – metoda graficzna



Pierwiastki równania – metoda graficzna



Metoda równego podziału

Metoda równego podziału (metoda bisekcji)

Jak wiemy, dla argumentu będącego miejscem zerowym następuje zmiana znaku.

Jeżeli $f(x)$ jest rzeczywistą funkcją, ciągłą w przedziale $[x_l, x_u]$ i $f(x_l)$ oraz $f(x_u)$ mają przeciwne znaki $f(x_l)f(x_u) < 0$ to jest przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty pomiędzy x_l i x_u

Przyrostowe metody wyszukiwania wykorzystują tę obserwację, lokalizując przedział gdzie funkcja zmienia znak.

Metoda równego podziału

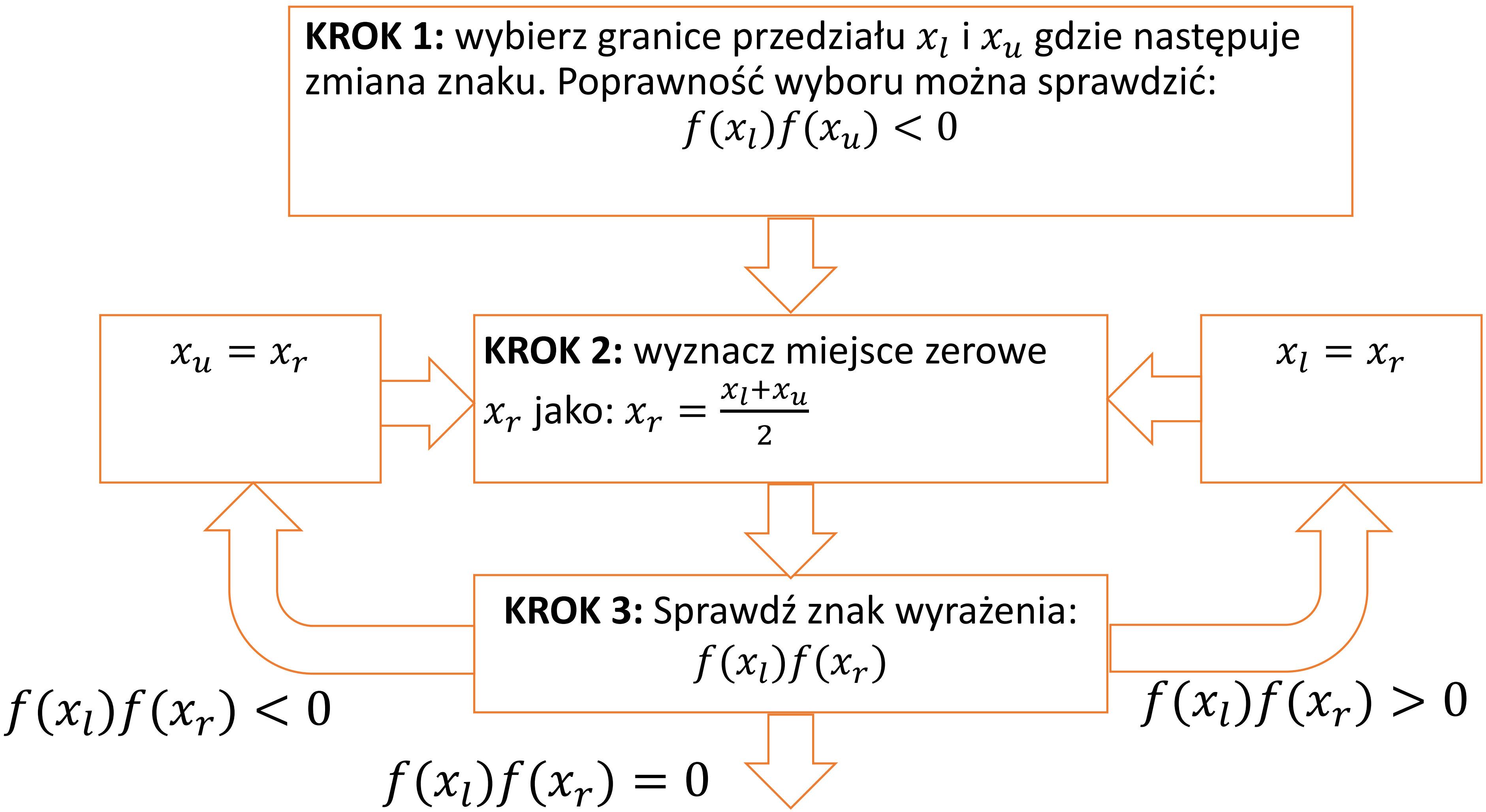
Metoda równego podziału (metoda bisekcji)

Metoda bisekcji, jest przykładem przyrostowych metod wyszukiwania, w których występuje interwał zawsze podzielony na pół.

Jeśli funkcja zmienia znak w przedziale, w punkcie środkowym wyznaczana jest wartość funkcji. Lokalizacja pierwiastka jest określana jako punkt środkowy podprzedziału, w którym następuje zmiana znaku.

Proces jest powtarzany, aż do uzyskania określonej dokładności.

Metoda równego podziału



Metoda równego podziału

Warunek stopu:

- ~~błąd estymacji na określonym poziomie~~ – nie znamy wartości prawdziwej
- możemy wyznaczyć przybliżoną wartość błędu względnego:

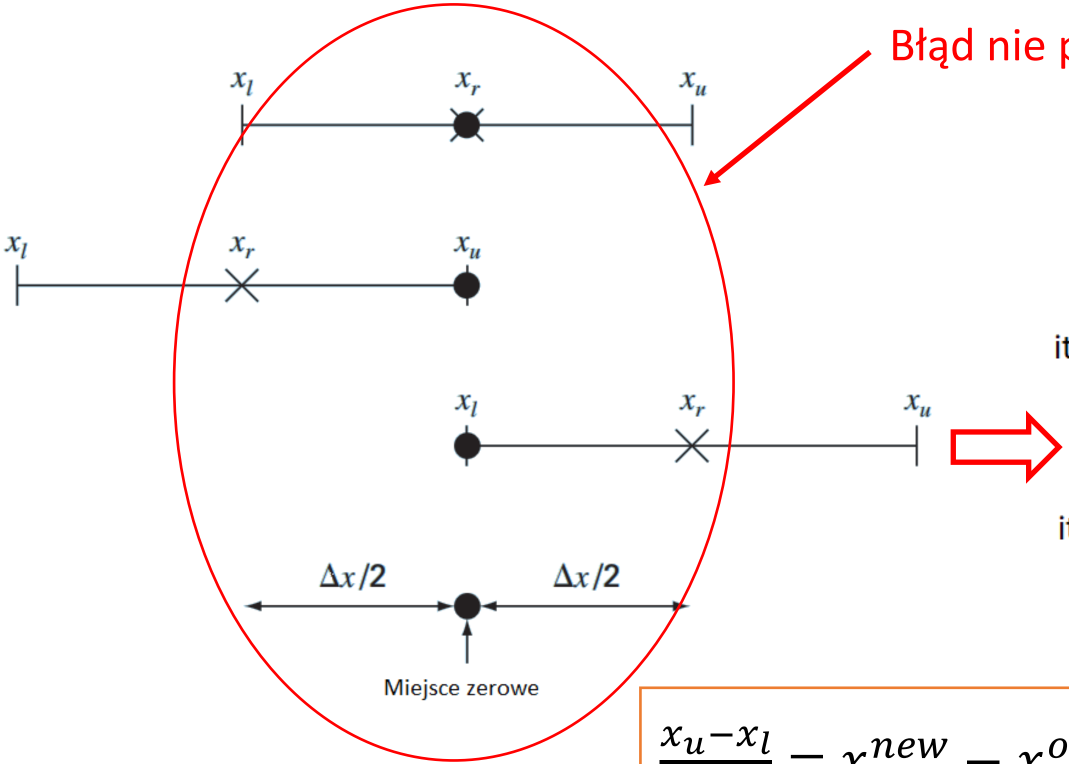
$$\varepsilon_{rel} = \left|\frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}}\right| 100\%$$

jeżeli błąd względny będzie mniejszy od przyjętego kryterium ε_s to przerywamy obliczenia.

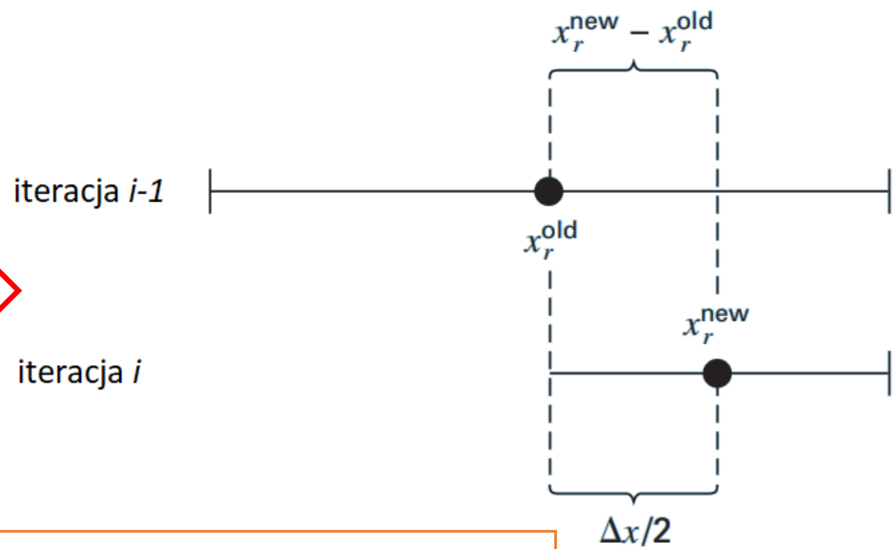
Metoda równego podziału

Dokładność estymacji:

- Miejsce zerowe znajduje się gdzieś w przedziale $\frac{x_u - x_l}{2} = \frac{\Delta x}{2}$ czyli błąd estymacji wynosi $\pm\frac{\Delta x}{2}$



Błąd nie przekracza $\frac{\Delta x}{2}$



$$\boxed{\frac{x_u - x_l}{2} = x_r^{new} - x_r^{old} \Rightarrow \varepsilon = \left|\frac{x_u - x_l}{x_u + x_l}\right| 100\%}$$

Metoda równego podziału

Dokładność estymacji:

- Co więcej wartość błędu bezwzględnego może zostać wyznaczona *a priori* $\varepsilon = x_u^0 - x_l^0 = \Delta x^0$

- Z każdą iteracją błąd będzie się zmniejszał 2-krotnie:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

- Jeżeli ε_{set} będzie dokładnością jaką chcemy uzyskać to liczba koniecznych iteracji wynosi:

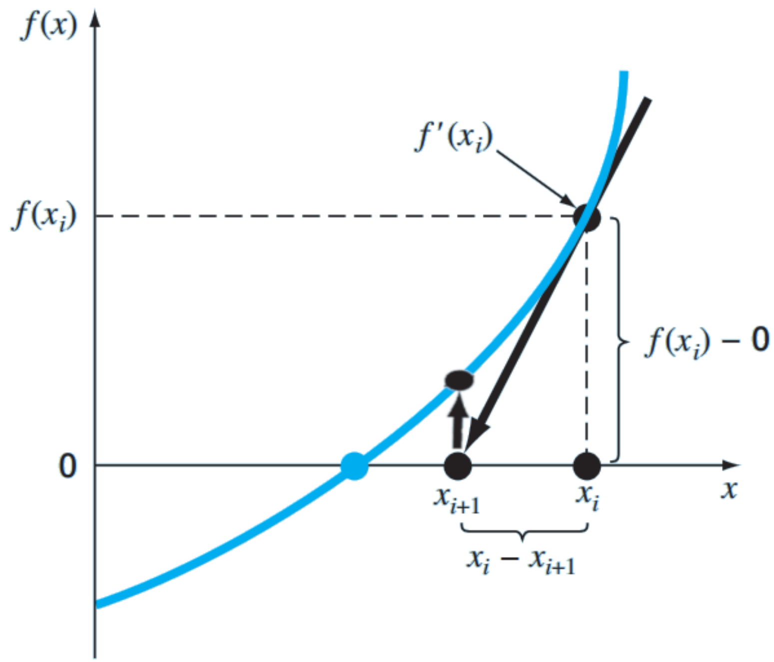
$$n = \frac{\log_2 \frac{\Delta x^0}{\varepsilon_{set}}}{\log_2 2} = \log_2 \frac{\Delta x^0}{\varepsilon_{set}}$$

- Metoda bisekcji wymaga zdefiniowania przedziału poszukiwań.
- Każda iteracja poprawia dokładność estymacji (jest zbieżna).
- Istnieją metody, które wymagają tylko podania wartości początkowej lub przedziału, ale niekoniecznie zawierającego pierwiastek.
- Metody te nie zawsze są zbieżne, ale jak już są, to są dużo szybsze niż metody przedziałowe.

Metoda Newtona - Raphsona

- Załóżmy, że naszą wartością początkową jest x_i. Z definicji funkcji tangens możemy wyznaczyć współczynnik kierunkowy stycznej w x_i, który jest równocześnie pochodną funkcji w punkcie x_i

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)-0}{x_i-x_{i+1}}$$



Przekształcając otrzymujemy:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Metoda Newtona - Raphsona

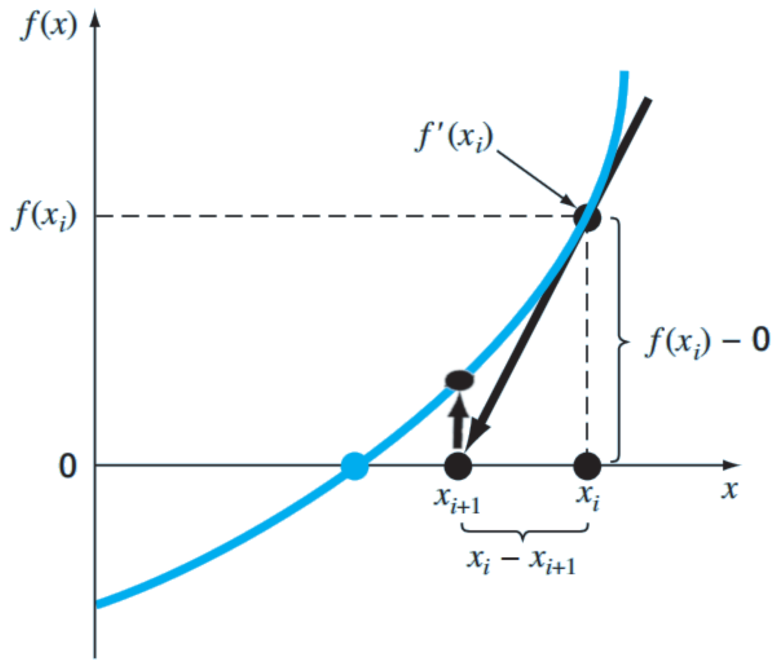
- Jako warunek stopu można wykorzystać klasyczne podejście w metodach iteracyjnych:

$$\varepsilon = \left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}\right| 100\%$$

- Przybliżona wartość błędu wynosi:

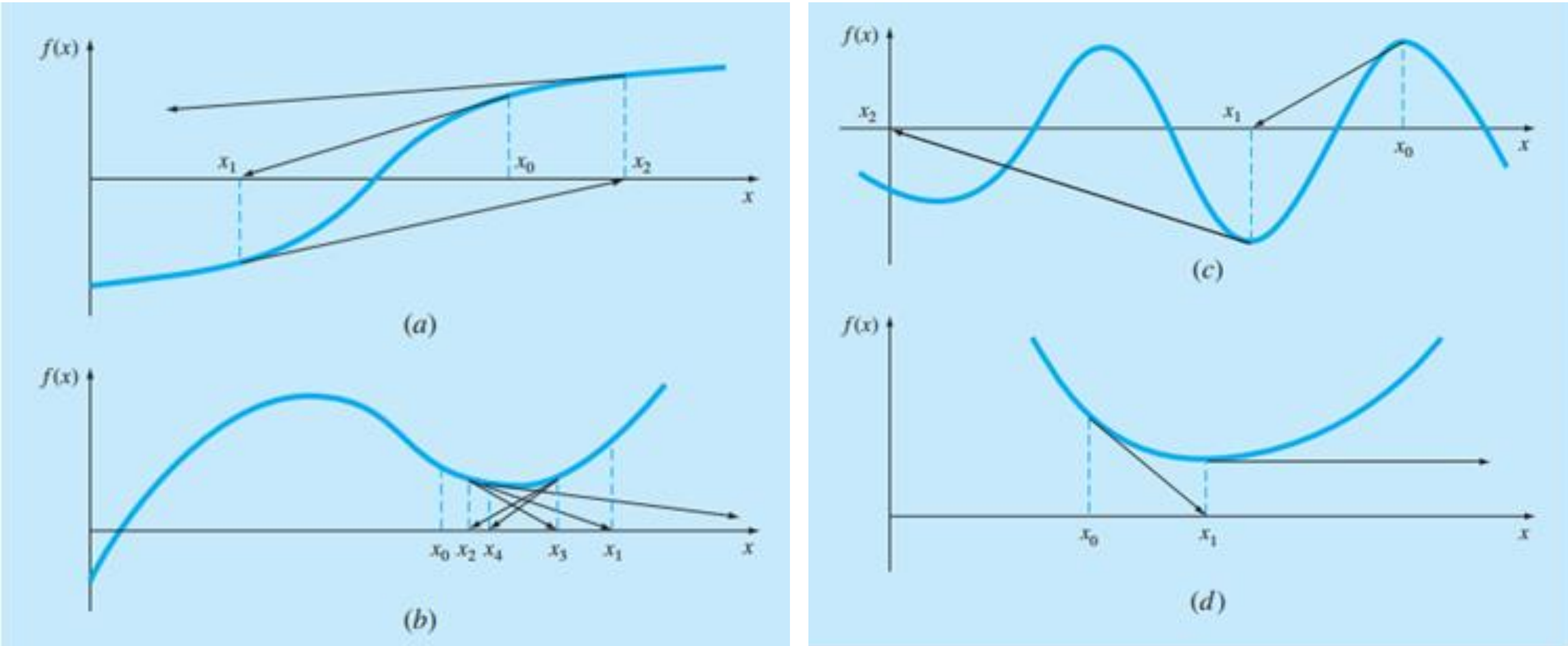
$$E_{t,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

Zbieżność kwadratowa



Metoda Newtona - Raphsona

- Metoda bardzo wydajna, natomiast mogą być sytuacje gdzie algorytm będzie miał problemy.
- Szybka zbieżność blisko miejsca zerowego.



Źródło: Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2010

Metoda Newtona - Raphsona

Szczegóły implementacyjne:

- Po ostatniej iteracji powinno się podstawić wyliczony argument do funkcji, żeby sprawdzić czy wartość jest bliska zeru.
  (częściowa ochrona przed wolną lub oscylującą zbieżnością – mała wartość ε, ale daleko od miejsca zerowego)

- Zawsze powinien być górny limit iteracji. (oscylacje)

- Alarmowanie o sytuacji gdy $f'(x) \approx 0$.

Podstawiając za $f'(x_i)$ przybliżenie metodą różnic skończonych wstecz $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}$ otrzymamy **metodę siecznych**.