Metodo di Newton: Tasso di convergenza e molteplicità delle radici

Kevin Basso, Alessandro Dinato, Matteo Mantoan, Davide Vigolo

February 2025

Domanda

Per il calcolo della molteplicità algebrica di un autovalore possiamo utilizzare le proprietà di convergenza del metodo di Newton. Sappiamo infatti che il metodo di Newton, qualora volessimo approssimare una radice di ordine m converge (localmente) con velocità lineare e costante asintotica pari ad $\frac{m-1}{m}$.

Risposta

La velocità corretta è $\frac{m}{m-1}$.

Sia r radice di $f(x)$ con molteplicità m, x_k la sua approssimazione al passo k di Newton e s_k lo scarto al passo k. Allora:

f è esprimibile come

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r)^m \\ f'(x) &= m(x-r)^{m-1} \end{aligned}$$

Per definizione del metodo di Newton,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} - x_k &= -m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ s_k &= -m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{(x_k - r)^m}{m(x_k - r)^{m-1}} \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{m}(x_k - r) \implies s_k = -\frac{1}{m}(x_k - r) \\
x_{k+1} - r &= x_k - r - \frac{1}{m}(x_k - r) \\
x_{k+1} - r &= (1 - \frac{1}{m})(x_k - r) \\
x_{k+1} - r &= \frac{m-1}{m}(x_k - r)
\end{aligned}$$

Per definizione di step,

$$\begin{aligned}
s_k &= x_{k+1} - x_k \\
s_k &= \frac{m-1}{m}(x_k - r) - (x_k - r) \\
s_k &= \left(\frac{m-1}{m} - 1\right)(x_k - r) \\
s_k &= -\frac{1}{m}(x_k - r) \\
s_{k+1} &= -\frac{1}{m}(x_{k+1} - r) \\
s_{k+1} &= -\frac{1}{m}\frac{m-1}{m}(x_k - r)
\end{aligned}$$

Portando al limite,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|s_k|}{|s_{k+1}|} &= \frac{-\frac{1}{m}(x_k - r)}{-\frac{1}{m}\frac{m-1}{m}(x_k - r)} = \frac{m}{m-1} \\
\lim_{k\to\infty} \frac{|s_k + 1|}{|s_k|} &= \frac{m}{m-1}
\end{aligned}$$