# Επίλυση μη Γραμμικκών Εξισώσεων με Διαστηματικές Μεθόδους

**Το πρόβλημα**

Θεωρούμε το πρόβλημα της εύρεσης *όλων* των ριζών της εξίσωσης

$$f(x)=0$$

σε ένα δοθέν διάστημα-διάστημα αναζήτησης $X_0$, όπου η συνάρτηση $f: D \subset R \to R$ είναι μια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση μιας απλής μεταβλητής $x$.

**Στόχος**

- η εύρεση-απομόνωση με σιγουριά *όλων των ριζών* που υπάρχουν μέσα σε ένα διάστημα αναζήτησης.
- η απόκτηση ενός διαστήματος, το οποίο θα περιέχει το σύνολο όλων των ριζών μιας εξίσωσης.

➢ θέματα μεγάλης σημασίας και σε επίπεδο εφαρμογών.

**Βασικοί όροι**

- απορρίπτεται με σιγουριά – discarded by certainty
- το μηδέν ανήκει ή δεν ανήκει στην interval συνάρτηση
- το μηδέν ανήκει ή δεν ανήκει στην παράγωγο
- interval Bisection (για εντοπισμό όλων των ριζών)
- interval Newton (για εντοπισμό όλων των ριζών)
- μέθοδος Krawczyk (για εντοπισμό του μικρότερου διαστήματος που περιέχει όλες τις ρίζες)

## Η διαστηματική μέθοδος Newton (interval Newton method)

(για εντοπισμό όλων των ριζών μιας μη γραμμικής εξίσωσης)

➢ δημιουργήθηκε από τον Moore το 1966, υποθέτοντας ότι $0 \notin F'(X)$, όπου $X$ είναι το διάστημα αναζήτησης ριζών.

➢ Ο Alefeld (1968) και ανεξάρτητα αλλά πολύ αργότερα ο Hansen (1978b) επέκτειναν τον αλγόριθμο περιλαμβάνοντας και την περίπτωση $0 \in F'(X)$, χρησιμοποιώντας επεκταμένη διαστηματική αριθμητική.

**Παραγωγή της μεθόδου**

Είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση να συνδυάζετε τη θεωρία και με κατάλληλα σχήματα

Έστω $0 \notin F'(X)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε: $\boxed{f(x) = f(x^*) + (x - x^*)\, f'(\xi)},$

με ξ σημείο μεταξύ του $x$ και του $x^*$.

Αν $x^*$ μια ρίζα της $f$ τότε $f(x^*) = 0$ και η (1) δίνει:

$$f(x) - f(x^*) = (x - x^*)\, f'(\xi) \Rightarrow f(x) = (x - x^*)\, f'(\xi) \Rightarrow x^* = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}.$$

Αν $X$ ένα διάστημα που περιέχει και το $x$ και το $x^*$, τότε $\xi \in X$ και $\boxed{f'(\xi) \in F'(X)}$ (από το ΘΘΑΔ για την συνάρτηση-παράγωγο της $f$).

Αν $N(x, X) = x - \dfrac{f(x)}{F'(X)}$ επειδή $f'(\xi) \in F'(X)$ θα ισχύει:

$$\boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)} \in x - \frac{f(x)}{F'(X)} = \boxed{N(x, X)}.}$$

Η σχέση αυτή μας οδηγεί στο σημαντικό συμπέρασμα:

- κάθε ρίζα της $f(x) = 0$ που βρίσκεται στο διάστημα $X$ θα βρίσκεται επίσης και στο $N(x, X)$.
- Άρα θα βρίσκεται και στο διάστημα της τομής τους $X \cap N(x, X)$

Ετσι, η μέθοδος interval Newton, με $X_0$ το αρχικό διάστημα αναζήτησης ριζών $x^*$ και $x_k \in X_k$ περιγράφεται ως:

$$\boxed{N(x_k, X_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{F'(X_k)}}$$

$$X_{k+1} = X_k \cap N(x_k, X_k), \text{ για } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Επιλέγοντας το μέσο του διαστήματος $x_k = m(X_k)$, το οποίο είναι αποδοτικό, ο τελεστής Newton είναι

ή απλά N(Xk)

$$N\left(m(X_k), X_k\right) = m(X_k) - \frac{f\left(m(X_k)\right)}{F'(X_k)}$$

Οπότε η νέα προσέγγιση θα δίνεται από τη τομή

$$\boxed{X_{k+1} = X_k \cap N(X_k).}$$

**Γεωμετρική ερμηνεία**

Στην κλασσική Newton η συνάρτηση $f(x)$ στην $k$ επανάληψη προσεγγίζεται από μία ευθεία η οποία γεωμετρικά παριστά την εφαπτομένη της $f$ στο σημείο $(x_k, f(x_k))$. Ως νέα προσέγγιση $x_{k+1}$ λαμβάνεται το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των $x$.

Για την interval Newton
Αν $F'(X_k) = [\underline{d}, \overline{d}]$, η ευθεία με κλίση $\underline{d}$ και η ευθεία με κλίση $\overline{d}$, σχεδιάζονται και οι δύο στο σημείο $(c_k, f(c_k))$, όπου το $c_k = m(X_k)$. Τα σημεία τομής λ και ρ των ευθειών αυτών με τον άξονα των $x$ ορίζουν το διάστημα $N(X_k) = [\lambda, \rho]$

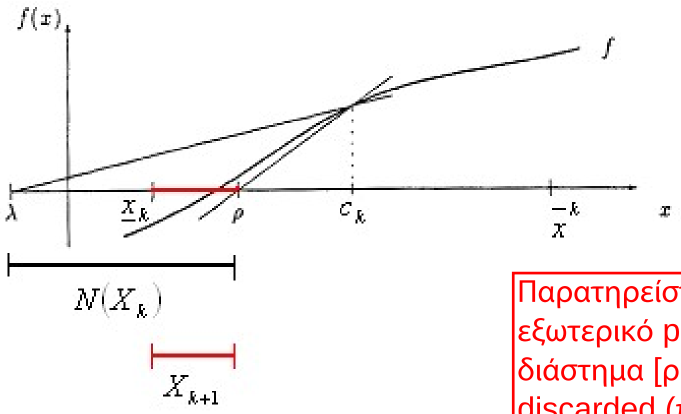
Άρα, η νέα προσέγγιση-διάστημα ορίζεται ως

$$X_{k+1} = X_k \cap N(X_k) = X_k \cap [\lambda, \rho] \ .$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου interval Newton, όπου παρουσιάζεται ένα απλό βήμα της interval Newton, το οποίο καταλήγει στο αποτέλεσμα

$$\boxed{X_{k+1} = X_k \cap N(X_k) = X_k \cap [\lambda, \rho] = [\underline{x}_k, \rho].}$$

Το νέο Χ είναι τομή




Παρατηρείστε ότι γίνεται εξωτερικό pruning (κλάδεμα). Το διάστημα [ρ, πάνω άκρο του x] discarded (πετιέται)

Η interval Newton με $0 \notin F'(X_k)$

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ**

Αν η τομή $X_k \cap N(X_k)$ είναι το κενό διάστημα, τότε δεν υπάρχει καμία ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα $X_k$, αφού αν $x^*$ ανήκει στο Χ, το $x^*$ θα ανήκει και στο $N(X_k) = [\lambda, \rho]$ επομένως και στη τομή τους.

**Παράδειγμα**

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο interval Newton, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=x^2-2=0$ στο διάστημα $X_0=[1,2]$.

Γιατί επιλέξαμε αυτό το διάστημα;.

**Απάντηση**

$f(x)=x^2-2$ διαστηματική επέκταση $F(X)=X^2-2$.

$f'(x)=2x$ διαστηματική επέκταση $F'(X)=2X$.

μέσο του $X_0=[1,2]$ το $m(X_0)=\dfrac{3}{2}$.

Τελεστής Newton:

$$N(m(X_0),X_0)=m(X_0)-\frac{f(m(X_0))}{F'(X_0)}=\frac{3}{2}-\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{2X}=\frac{3}{2}-\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{2[1,2]}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{[2,4]}=\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]$$

Οπότε

$$X_1=X_0\cap N(m(X),X)=[1,2]\cap\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]=\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]$$

προκύπτει $X_1\subset X_0$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$X_2=[1.41406\ldots,\ 1.41441\ldots]$

$X_3=[1.41421\ldots,\ 1.41421\ldots]$ κ.λ.π.

Παρατηρήστε ότι δημιουργείται φωλιασμένη ακολουθία από διαστήματα η οποία εγκλωβίζει τη ρίζα $\sqrt{2}$ και συγκλίνει γρήγορα σ' αυτή.

**(Θυμηθείτε τη σύγκλιση που μελετήσαμε σε προηγούμενο μάθημα)**

*Πότε ορίζεται ο τελεστής Newton;*

Δουλεύοντας με διαστηματική αριθμητική για να μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος interval Newton πρέπει να ορίζεται ο τελεστής Newton $N(m(X),X)=m(X)-\dfrac{f(m(X))}{F'(X)}$. Επομένως θα πρέπει $0\notin F'(X)$.

**Πολύ σημαντικά για κατανόηση και επίλυση ασκήσεων**

- Αν $0 \notin F'(X)=[\underline{d}\,,\ \overline{d}\,]$ τότε η συνάρτηση $f$ είναι μονότονη. **(Να το αποδείξετε και οπωσδήποτε να κάνετε σχήμα)**

- Αν $0 \in \overline{f}(X)$ και $0 \notin F'(X)$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μοναδική ρίζα στο διάστημα $X$, γιατί η συνάρτηση είναι μονότονη.

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες της μεθόδου interval Newton συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα**

Έστω ότι η $f:R\rightarrow R$ είναι μια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω ότι το $X\in I$ είναι ένα διάστημα. Τότε ο τελεστής Newton

$$N(X)=m(X)-\frac{f(m(X))}{F'(X)}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. κάθε ρίζα $x^* \in X$ της $f$ (x)=0 ικανοποιεί την σχέση $x^* \in N(X)$.
2. αν $N(X) \cap X = \varnothing$, τότε δεν υπάρχει καμία ρίζα της $f$ (x)=0 στο διάστημα $X$.
3. αν $N(X) \subseteq X$, τότε υπάρχει μία μοναδική λύση της $f$ (x)=0 στο διάστημα $X$ και επομένως στο $N(X)$ .
4.

**Απόδειξη** [Hansen (1992), Moore (1966) και Neumaier (1990)]

1. Αν $x^* \in X$, τότε $x^* = x - \dfrac{f(x)}{f'(\xi)} \in x - \dfrac{f(x)}{F'(X)} = N(X)$.

2. Έστω $x^* \in X$. Από την ιδιότητα (1), έχουμε $x^* \in N(X)$.

   Άρα $x^* \in N(X) \cap X$, οπότε η τομή τους θα είναι $N(X) \cap X \neq \varnothing$.
   Άτοπο, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι $N(X) \cap X = \varnothing$.
   Επομένως, δεν υπάρχει καμία ρίζα της $f$ (x)=0 στο διάστημα $X$.

3. Επειδή $N(X) \subseteq X$, αν το $X$ είναι πεπερασμένο θα είναι πεπερασμένο και το $N(X)$.
   Για να ορίζεται το $N(X)$ και να είναι πεπερασμένο, πρέπει $0 \notin F'(X)$. Αν $0 \notin F'(X)$, τότε η $F'$ έχει το ίδιο πρόσημο στο $X$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $F$ θα είναι μονότονη. Αφού η $F$ είναι μονότονη και $N(X) \cap X \neq \varnothing$ (αφού $N(X) \subseteq X$), η ρίζα θα είναι απλή και μοναδική (γιατί αν $0 \notin F'(X)$ τότε αφενός μεν δεν μπορούν να υπάρχουν 2 διακεκριμένες ρίζες και αφετέρου δεν μπορεί να υπάρχει πολλαπλή ρίζα).

## Σύγκλιση

Η μέθοδος interval Newton δεν μπορεί ποτέ να αποκλίνει σε αντίθεση με την κλασσική μέθοδο Newton, η οποία εξαρτάται από την αρχική προσέγγιση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η νέα προσέγγιση $X_{k+1}$ προκύπτει από την τομή του $N(X_k)$ με το $X_k$, οπότε δημιουργείται φωλιασμένη ακολουθία. Η σύγκλιση της interval Newton, όπως και της κλασσικής Newton είναι τετραγωνική. Ακολουθεί το αντίστοιχο θεώρημα, το οποίο θα δοθεί χωρίς απόδειξη.

## Θεώρημα

Αν υπάρχει μια ρίζα στο $X \subseteq X_0$, η $F'$ είναι η επέκταση της παραγώγου της $f'$ και $0 \notin F'(X)$, τότε υπάρχει μια σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε:
$w(N(X)) \leq kw(X)^2$ για κάθε $x \in X$.

Το παραπάνω θεώρημα εκφράζει την τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου interval Newton.

## ΑΣΚΗΣΗ

Ένα απλό παράδειγμα για να δούμε την τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου interval Newton είναι η επίλυση της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$, ένα παράδειγμα το οποίο είδαμε και μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για την κατανόηση της μεθόδου.

Για να δείτε και πρακτικά την τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου να λύσετε τη παραπάνω εξίσωση σε κατάλληλο διάστημα, χρησιμοποιώντας το Matlab και να παρατηρήσετε το πλάτος των διαστημάτων που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη.

## Κριτήρια τερματισμού

Στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήρια τερματισμού:

$w(X) < \varepsilon_x$, για κάποιο δοθέν $\varepsilon_x > 0$.
Που σημαίνει ότι μία ρίζα φράσσεται σε διάστημα με όσο το δυνατόν μικρό εύρος.

Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να δείτε:
Moore (1966) και
Hansen (1992).

## Interval Newton μέθοδος με χρήση επεκταμένης διαστηματικής αριθμητικής

### Γενικά

- **Για την περίπτωση** $0 \in F'(X)$**,** ο Alefeld (1968) και πολύ αργότερα ο Hansen (1978) **επέκτειναν τον αλγόριθμο της interval Newton χρησιμοποιώντας επεκταμένη interval αριθμητική.**

- **Γιατί χρειαζεται χρήση επεκταμένης interval αριθμητικής** (extended interval arithmetic)**;**

Γιατί η επεκταμένη interval αριθμητική μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε διαίρεση με διάστημα που περιέχει το μηδέν (κάτι το οποίο δεν καλύπτεπται από την standard interval αριθμητική), το οποίο μας χρειάζεται στην interval Newton για επίλυση εξισώσεων στην περίπτωση που $0 \in F'(X)$.

Θα θεωρήσουμε τώρα αυτή τη πιο γενική περίπτωση.

**ΔΕΝ ΞΕΧΝΑΜΕ**:

Όταν $0 \in F'(X)$ τότε ο τελεστής Newton $N(X)=m(X)-\dfrac{f(m(X))}{F'(X)}$ με χρήση standard διαστηματικής αριθμητικής, προφανώς και δεν ορίζεται.

Όμως, με χρήση επεκταμένης διαστηματικής αριθμητικής ο τελεστής Newton μπορεί να υπολογιστεί.

Στο σημείο αυτό, πριν αναπτύξουμε την interval Newton με $0 \in F'(X)$, πρέπει να ανατρέξουμε στην επεκτεμένη αριθμητική και να θυμηθούμε πως γίνεται η διαίρεση με διάστημα στον παρονομαστή που περιέχει το μηδέν και τι αποτελέσμα μπορούν να προκύψουν (δείτε και το σύγγραμμα διανομής).

Ας δούμε τώρα τον τελεστή Newton με επεκταμένη interval αριθμητική

Αν το $\boxed{F'(X)=[\underline{d},\overline{d}]}$ περιέχει το 0, τότε χρησιμοποιώντας επεκταμένη διαστηματική αριθμητική, το διάστημα της παραγώγου χωρίζεται έτσι ώστε

$$F'(X)=[\underline{d},0]\cup[0,\overline{d}]$$

και ο τελεστής Newton γράφεται:

$$\boxed{N(X)=m(X)-\frac{f(m(X))}{[\underline{d},0]\cup[0,\overline{d}]}}$$

- Ας δούμε τώρα τι αποτέλεσμα περιμένουμε για το $N(X)$ από την εφαρμογή της επεκταμένης interval αριθμητικής;

Απάντηση

ένα ή δύο επεκταμένα διαστήματα (ανάλογα με τα διαστήματα που υπάρχουν στον αριθμητή και στον παρονομαστή)

- Σας είναι πλέον γνωστό ότι **στις interval μεθόδους παίρνουμε πάντα τομή** (θυμηθείτε γιατί ή βρείτε το στο σύγγραμμα ή ρωτήστε με)

Τι αποτέλεσμα επιφέρει αυτή η τομή διαστημάτων εδώ;

Ακόμα και αν το $N(X_k)$ δεν είναι πεπερασμένο, η τομή $X_{k+1} = X_k \cap N\left(X_k\right)$ θα είναι πεπερασμένη και μπορεί να είναι:

- Είτε ένα απλό διάστημα
- είτε δύο διαστήματα
- είτε το κενό σύνολο.

- Έτσι, όπως και στην interval Bisection ή στην interval Newton με interval αριθμητική ($0 \notin F'(X)$) που είδαμε, όμοια και στην μέθοδο interval Newton με extended interval αριθμητική:

η μέθοδος εφαρμόζεται σε κάθε ένα από τα προκύπτοντα διαστήματα και τελικά, ελέγχοντας όλα τα υποψήφια υποδιαστήματα, υπολογίζονται όλες οι ρίζες που υπάρχουν στο αρχικό διάστημα αναζήτησης ριζών.

## Γεωμετρική ερμηνεία της επεκταμένης interval Newton (δείτε σύγγραμμα διανομής)

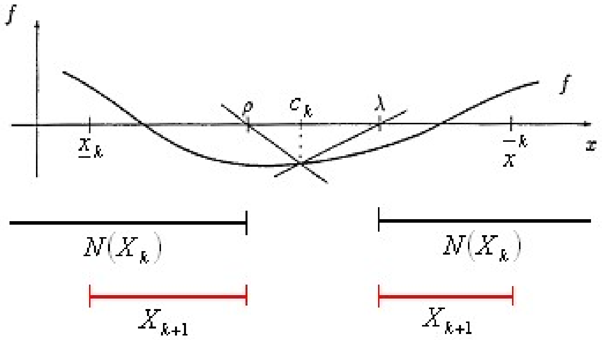
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται γεωμετρικά το βήμα της επεκταμένης interval Newton. Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε ευθείες που περνούν από το σημείο $(c_k, f(c_k))$, όπου το $c_k = m(X_k)$. Η ευθεία με την μικρότερη (αρνητική) κλίση της $f$ στο διάστημα $X_k$ τέμνει τον $x$-άξονα στο σημείο $\rho$. Η ευθεία με την μεγαλύτερη κλίση της $f$ στο διάστημα $X_k$ τέμνει τον $x$-άξονα στο σημείο $\lambda$.

Έτσι παίρνουμε:

$$N(x_k, X_k) = [-\infty,\ \rho] \cup [\lambda, \infty]$$

οπότε

$$X_{k+1} = X_k \bigcap N(x_k, X_k) = \{X_k \cap [-\infty, \rho]\} \cup \{X_k \cap [\lambda, \infty]\} \Rightarrow$$
$$X_{k+1} = [\underline{x}_k, \rho] \cup [\lambda, \bar{x}_k]$$




Η interval Newton με $0 \in F'(X_k)$

Στη συνέχεια, θα δούμε ένα απλό παράδειγμα με $0 \in F'(X_0)$, στο οποίο προφανώς θα κάνουμε χρήση επεκταμένης διαστηματικής αριθμητικής.

**Παράδειγμα της επεκταμένης interval Newton μεθόδου**

Έστω $f(x) = x^2 - 4 = 0$. Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης αυτής χρησιμοποιώντας την μέθοδο interval Newton για $X_0 = [-2, 2]$.

**Απάντηση**

$F(X) = X^2 - 4$ και $F'(X) = 2X$ και $m(X_0) = 0$.

Ο τελεστής Newton $N(m(X), X) = m(X) - \dfrac{F(m(X))}{F'(X)}$ για τα δεδομένα μας δίνει:

$$N(m(X_0), X_0) = 0 - \frac{-4}{[-4, 4]} = 0 - ([-\infty, -1] \cup [1, \infty]) = ([-\infty, -1] \cup [1, \infty])$$

Οπότε

$X_1 = N(m(X_0), X_0) \cap X_0 = [-2, -1] \cup [1, 2] = X_{1,1} \cup X_{1,2}$,
Έτσι, $X_{1,1} = [-2, -1]$ και $X_{1,2} = [1, 2]$.

Στη συνέχεια, εργαζόμαστε με το ένα υποδιάστημα και το άλλο τοποθετείται στη λίστα για να το επεξεργαστούμε αργότερα.

- Να ολοκληρώσετε την παραπάνω διαδικασία βρίσκοντας τη ρίζα με ακρίβεια 4 δ.ψ. και ταυτόχρονα να υπολογίζετε τα πλάτη των διαστημάτων, $w(X_k)$, που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη. Τι παρατηρείτε; Είναι η σύγκλιση τετραγωνική;

Στο σύγγραμμα θα βρείτε περισσότερα παραδείγματα αναλυτικά λυμμένα.