

Ολική Βελτιστοποίηση (Global Optimization)

Βασικός αλγόριθμος για τη λύση του προβλήματος της ολικής βελτιστοποίησης με interval μεθόδους

Έστω X το το αρχικό διάστημα αναζήτησης

- Βήμα 1 το αρχικό διάστημα X υποδιαιρείται σε άλλα διαστήματα $Y \subseteq X$, με μια στρατηγική υποδιαίρεσης (branch) και τοποθετούνται σε μια λίστα L .
- Βήμα 2 Τα υποδιαστήματα που δεν περιέχουν λύση διαγράφονται από τη λίστα L .
- Βήμα 3 Τα υποδιαστήματα που μένουν στη λίστα L υποδιαιρούνται σε άλλα μικρότερα και επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3. Ο αλγόριθμος σταματά όταν έχουμε προσεγγίσει τα διαστήματα στα οποία υπάρχουν λύσεις, με τη ακρίβεια που θέλουμε.

Αξιοποίηση της **Branch and Bound Principle** (αρχή διακλάδωσης και φραξίματος) στον **Βασικό αλγόριθμο**

Branch and Bound Principle:

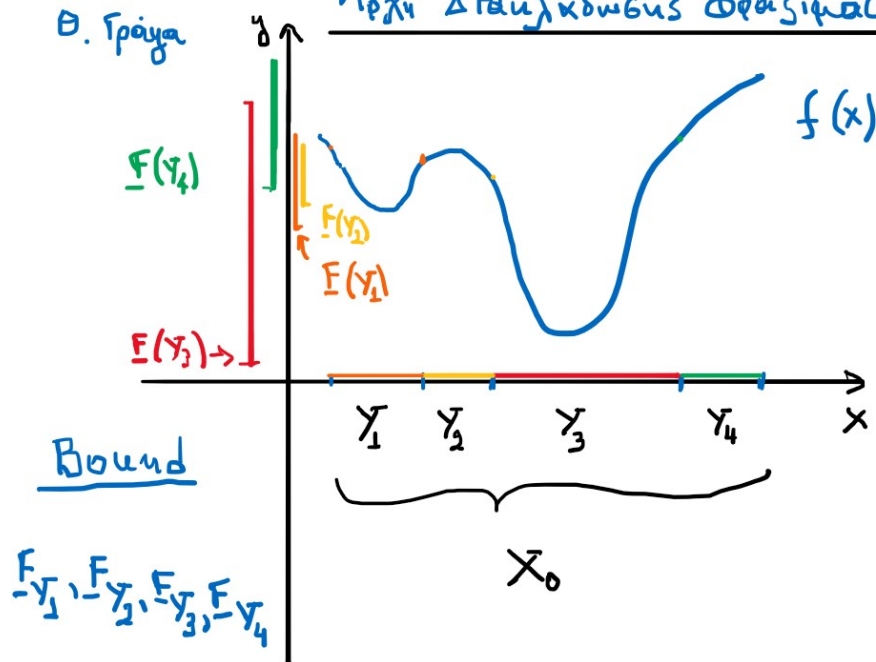
- Η αρχική περιοχή αναζήτησης X (διάστημα ή box) δεν ψάχνεται ομοιόμορφα για ολικά ελάχιστα αλλά εξετάζονται κάποια τμήματά της.
- Για κάθε επιμέρους υποπεριοχή $Y \subseteq X$ **απαιτείται ένα κάτω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης**. Ο υπολογισμός των φραγμάτων γίνεται με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων εγκλεισμού με τη βοήθεια της interval αριθμητικής.

Διαμόρφωση του Βασικού Διαστηματικού Αλγόριθμου με βάση την Branch and Bound Principle για το πρόβλημα της ολικής βελτιστοποίησης με interval μεθόδους

1. υποδιαίρεση του αρχικού box σε μικρότερα sub-boxes.
2. υπολογισμός φραγμάτων για την αντικειμενική συνάρτηση (και μερικές φορές και για τη συνάρτηση της παραγώγου).
3. απαλοιφή των sub-boxes, τα οποία με σιγουριά δεν περιέχουν σημεία ολικού ελαχίστου (θα δούμε στη συνέχεια πως θα το επιτύχουμε αυτό)

Αρχή Διαμερίσεως Φραξίματος (Branch and Bound Principle)

Θ. Γράφα



Branch

Διαμέριση του X_0
 x_1, x_2, x_3, x_4

Υποδιαίρεση του αρχικού box X_0 (εδώ διάστημα)
 σε μικρότερα sub-boxes (εδώ υποδιαστήματα)

Ερωτήματα

• απαιτείται καλή συνάρτηση εκτιμήσεων για τον υπολογισμό του $F(x_i)$ και γιατί?

• η ταχύτητα του αλγορίθμου επηρεάζεται από την επήρξη της συνάρτησης εκτιμήσεων?

Υπολογισμός κατώ φραγμάτων της αυστηρευμένης συνάρτησης σε κάθε υποδιαστήμα x_i με χρήση interval αριθμητικής

* Υπολογίζετε που θα βοηθήσει η γνώση του F για κάθε υποδιαστήμα x_i ?

* Υπολογίζετε που θα βοηθήσει η υποδιαίρεση του X_0 ?

ΝΑΙ / μπορούν να συνδυαστούν στο πρόβλημα της ολικής βελτιστοποίησης?
 ↓ με τι στόχο?

* την απαλοιφή sub-boxes τα οποία με σιγουριά δεν περιέχουν εμφάνιση ολικού ελαχίστου x^*

← η δεξιά?

θα χρειαστούμε μια τιμή \tilde{f} της συνάρτησης

Διαδικασίες απαραίτητες για την ανάπτυξη του αλγορίθμου:

- τεχνικές εύρεσης βέλτιστης συνάρτησης εγκλεισμού
- στρατηγικές υποδιαίρεσης διαστήματος
- στρατηγικές επιλογής διαστήματος από τη λίστα εργασίας και
- διαδικασίες επιτάχυνσης (accelerating devices)

Βέλτιστες συναρτήσεις εγκλεισμού - Το κριτήριο ελέγχου του range -

Στόχος του κριτηρίου ελέγχου του range:

Τα sub-boxes που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου διαγράφονται ή παραμένουν ως υποψήφια να περιέχουν την ολική λύση.

Το **κριτήριο ελέγχου του range** θα μας βοηθήσει να διαγράψουμε υποδιαστήματα Y τα οποία με σιγουριά δεν περιέχουν σημεία ολικού ελαχίστου (global minimizers).

Πως θα το επιτύχουμε αυτό;

Με χρήση μιας καλής συνάρτησης εγκλεισμού (μικρό overestimation) ώστε να επιτευχθεί ένα καλό κάτω φράγμα της συνάρτησης, με αποτέλεσμα να διαγραφούν γρήγορα υποδιαστήματα Y που θα έχουν κάτω φράγμα της συνάρτησης πάνω από μία ασφαλή τιμή \tilde{f} . Το \tilde{f} αποτελεί ασφαλές πάνω φράγμα του ολικού ελαχίστου f^* της f . Για παράδειγμα το \tilde{f} μπορεί να είναι η τιμή της συνάρτησης σε έναν real αριθμό, το οποίο θα είναι ακριβές αφού υπολογίζεται με real αριθμητική και συνεπώς είναι επαρκής τιμή. Έτσι,

- αν $\underline{F}(Y) < \tilde{f}$ το box Y παραμένει ως υποψήφιο, ενώ
- αν $\tilde{f} < \underline{F}(Y)$ τότε εξασφαλίζεται η μη ύπαρξη ολικού ελαχίστου στο Y και έτσι το box Y διαγράφεται.

Ερώτηση

Η ταχύτητα του αλγορίθμου επηρεάζεται από τη συνάρτηση εγκλεισμού;

Απάντηση

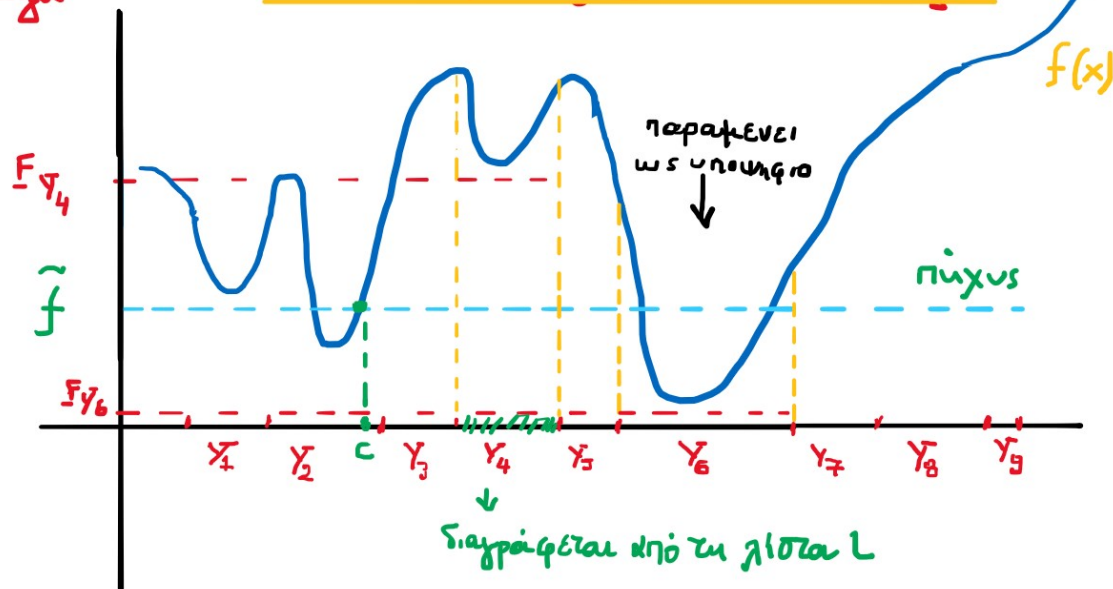
Ναι, γιατί όταν δεν έχουμε καλή συνάρτηση εγκλεισμού το κάτω φράγμα της συνάρτησης θα είναι πολύ υπερεκτιμημένο και το κριτήριο ελέγχου του range δεν θα μπορεί να διαγράψει το box άμεσα και έτσι θα παραμένει για περαιτέρω έλεγχο.

Σημαντική Παρατήρηση

Το κριτήριο ελέγχου του range είναι σχετικά μη δαπανηρό και μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μη διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Θ. Γράμα

Το κριτήριο ελέγχου του νάγκε



Στόχος:

η διαγραφή υποδιασκέματων x_i
με $F(x_i) > \tilde{f}$

άσκηση

Να κάνετε τον έλεγχο για
όλα τα υποδιασκέματα
 $x_i, i=1,2,3,\dots, x_9$
με χρήση του κριτηρίου
ελέγχου του νάγκε
χρησιμοποιώντας δομεί σας
κάτω πράγματα $F(x_i)$

Έστω x_1, x_2, \dots, x_9 τυχικά υποδιασκέματα στη λίστα L

\tilde{f} : η τιμή της $f(x)$ στο σημείο c, δηλ. $\tilde{f} = f(c)$
real τιμή και
υπάρχουσα

Παρατηρήστε ότι:

π.χ. $F_{x_4} > \tilde{f}$ άρα το x_4 απορρίπτεται / διαγράφεται (με βεβαιότητα) $(\exists \text{ το } c \text{ με } \tilde{f} = f(c) < F_{x_4} \leq \bar{f}(x_4))$

$F_{x_6} < \tilde{f}$ άρα το x_6 παραμένει στη λίστα L ως υποψήφιο να περιέχει σημείο ολικού
ελαχίστου

Θ.Ο.Α.Δ. $\rightarrow \tilde{f}(x_4) \leq F(x_4)$

Στρατηγικές υποδιαίρεσης διαστήματος

Στην ολική βελτιστοποίηση, οι περισσότερες διαστηματικές μέθοδοι χρησιμοποιούν τη **μέθοδο της διχοτόμησης για την υποδιαίρεση ενός box**. Για άλλες πιο αποτελεσματικές στρατηγικές βλέπε εργασία των Ratz και Csendes (1995) και τη διδακτορική διατριβή του Δ. Σωτηρόπουλου (2005).

Στρατηγικές επιλογής διαστήματος από τη λίστα εργασίας

Τα boxes που προκύπτουν από την υποδιαίρεση του box αναζήτησης (search box) τοποθετούνται σε μια λίστα για περαιτέρω έλεγχο. υπάρχουν οι τρεις παρακάτω βασικές στρατηγικές επιλογής box από τη λίστα:

1. *Oldest-first* στρατηγική.
2. *best-first* στρατηγική.
3. *depth-first* στρατηγική.

το καλύτερο box που επιλέγεται είναι αυτό που έχει το μικρότερο κάτω άκρο, γιατί είναι το πιο πιθανό να περιέχει το x^*

Στην ολική βελτιστοποίηση χρησιμοποιούμε την ***best-first* στρατηγική**. Στη στρατηγική αυτή επιλέγεται από τη λίστα εργασίας L το box εκείνο που αντιστοιχεί στο μικρότερο κάτω φράγμα της συνάρτησης. Δηλαδή τα boxes αποθηκεύονται στη λίστα κατά αύξουσα σειρά ως προς το κάτω φράγμα \underline{F} της συνάρτησης (Αυτή τη στρατηγική θα χρησιμοποιήσουμε στο πλαίσιο του μαθήματος)

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε και μια υβριδική στρατηγική συνδυάζοντας την *best-first* στρατηγική με την *Oldest-first* στρατηγική. Στην περίπτωση αυτή τα boxes αποθηκεύονται στη λίστα με αύξουσα σειρά ως προς το κάτω φράγμα και με φθίνουσα σειρά ως προς το χρόνο που δημιουργήθηκαν.