概率论与数理统计

Friday 16th December, 2022

目录

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 AB	$\{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
互斥事件		$A \cap B = \varnothing$
对立事件	$\overline{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率（$P(A) > 0$）

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.3 乘法公式

$P(A) > 0$

$$P(AB) = P(A) P(B|A)$$

1.4 古典概型

$$P(A) = \frac{A\text{所含样本点个数}}{\Omega\text{样本点个数}}$$

1.5 几何概型

$$P(A) = \frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

1.6 完备事件组

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \varnothing$$

1.7 全概率公式

$\{A_i\}$ 完备事件组

$$P\left(B\right)=\sum P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)$$

1.7.1 全概率条件公式

$$P\left(C|B\right)=\sum P\left(A_i|B\right)P\left(C|A_iB\right)$$

1.8 贝叶斯公式

$$P\left(A_j|B\right)=\frac{P\left(A_jB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_j\right)P\left(B|A_j\right)}{\sum P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)}$$

1.9 独立事件

$$\begin{aligned}
A,B\text{相互独立}&\iff P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\\
&\iff P\left(A|B\right)=P\left(A\right)\\
&\iff \overline{A},B\text{相互独立}\\
&\iff A,\overline{B}\text{相互独立}\\
&\iff \overline{A},\overline{B}\text{相互独立}\\
&\iff P\left(A|B\right)=P\left(A|\overline{B}\right)
\end{aligned}$$

$$\{A_i\}\text{ 相互独立}\iff P\left(\bigcap A_i\right)=\prod P\left(A_i\right)$$

1.10 伯努利概型

定义：

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中，A 事件恰好发生 k 次的概率为 $C_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数（概率密度）

$f\left(x\right)$、$f\left(x,y\right)$ 等

定义

$$F\left(x\right)=P\left\{X=x\right\}\left(x\in\mathbb{R}\right)$$

性质

$$f\left(x\right)\geqslant 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$$

2.2 分布函数

$F\left(x\right)$、$F\left(x,y\right)$ 等

定义

$$F\left(x\right)=P\left\{X\leqslant x\right\}=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t\left(x\in\mathbb{R}\right)$$

$$F\left(x,y\right)=P\left\{X\leqslant x,Y\leqslant y\right\}=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f\left(u,v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

性质

$$F\left(x\right)\geqslant 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}F\left(x\right)=1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X\left(x\right)=\lim_{y\to+\infty}F\left(x,y\right)=F\left(x,+\infty\right)\left(x\in\mathbb{R}\right)$$

$$F_Y\left(y\right)=\lim_{x\to+\infty}F\left(x,y\right)=F\left(+\infty,y\right)\left(y\in\mathbb{R}\right)$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\left\{X=x_i\right\}=\sum_j P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}$$

$$P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_i P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,(x \in \mathbb{R})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,(y \in \mathbb{R})$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leqslant x|Y = y\}\,(x \in \mathbb{R})$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leqslant y|X = x\}\,(y \in \mathbb{R})$$

3.2.1 条件分布律

$$P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum\limits_j P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$

$$P\{Y = y_j|X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum\limits_i P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$

3.2.2 条件分布密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,(x \in \mathbb{R})$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,(y \in \mathbb{R})$$

3.3 独立性

充要条件

$$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

4 一维离散型随机变量及其分布律

以下都有

$$p \in (0,1)$$

4.1 两点分布

$X \sim B(1,p)$

k $k \in \{0,1\}$

$$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}$$

4.2 二项（伯努利）分布

$X \sim B(n,p)$

n $n \in \mathbb{N}^+$

k $n \geqslant k \in \mathbb{N}$

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

4.3 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

λ $\lambda > 0$

k $k \in \mathbb{N}$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

4.3.1 泊松定理

n 重伯努利试验中，事件发生概率 $p_n \in (0,1)$ 与试验次数有关，若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

4.4 几何分布

$X \sim G(p)$

k 前 $k-1$ 次都失败，第 k 次成功 $p \in \mathbb{N}^+$

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$$

4.5 超几何分布

$X \sim H(M, N, n)$

N 总样本数 $N > 1$

n 抽取样本数 $n \leqslant N$

M 指定样本数 $M \leqslant N$

k 抽到指定样本数 $k \in \mathbb{N} \cap [\max\{0, M+n-N\}, \min\{M, n\}]$

$$P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

5 一维连续型随机变量及其密度函数

5.1 均匀分布

$X \sim U[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \end{cases}$$

5.2 指数分布

$X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

5.3 正态（高斯）分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ $\mu \in \mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma > 0$ 标准差

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

5.3.1 标准正态分布

$X \sim N(0, 1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

5.3.2 3σ 原则

$$\begin{cases} P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.6826 \\ P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9544 \\ P\{|X-\mu|<3\sigma\}=0.9974 \end{cases}$$

5.4 换元

5.4.1 离散型

$$Y=g(X)$$

5.4.2 连续型

$$\begin{cases} y=g(x) & x\in\mathbb{R} \\ Y=g(X) \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|h'(y)\right| & y\in\left(\min\{g(-\infty),g(+\infty)\},\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

6 二维连续型随机变量及其密度函数

6.1 均匀分布

$(X,Y)\sim U(D)$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

6.2 正态分布

$(X,Y)\sim N\left(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho\right)$

μ $\mu\in\mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma>0$ 标准差

ρ $\rho\in(-1,1)$，相关系数（$\rho=0$ 时 X、Y 独立）

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-\mu_X\right)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{\left(y-\mu_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若 X、Y 独立

$$\left.\begin{array}{r} X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \\ Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \end{array}\right\} \implies (X, Y) \sim N\left(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, 0\right)$$

$$Z = aX + bY \sim N\left(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2\right)$$

6.3 换元

$Z = X + Y$

$$f_Z\left(z\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, z - x\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(z - y, y\right) \mathrm{d}y$$

6.3.1 卷积定理

若 X、Y 独立

$$f_Z\left(z\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right) f_Y\left(z - x\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(z - y\right) f_Y\left(y\right) \mathrm{d}y = f_X\left(z\right) * f_Y\left(z\right)$$

6.3.2 最大最小值

$$M = \max\left\{X, Y\right\}, N = \min\left\{X, Y\right\}$$

则

$$F_M = F_X F_Y$$

$$1 - F_N = \left(1 - F_X\right)\left(1 - F_Y\right)$$

$$f_M = F_M' = f_X F_Y + f_Y F_X$$

$$f_N = F_N' = f_X\left(1 - F_Y\right) + f_Y\left(1 - F_X\right)$$

7 数字特征

7.1 期望

7.1.1 离散型

$$E\left(X\right) = \sum x_i p_i$$

7.1.2 连续型

$$E\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)\mathrm{d}x$$

7.1.3 换元

一维

$$Y=g\left(X\right)$$

离散

$$E\left(Y\right)=\sum g\left(x_i\right)p_i$$

连续

$$E\left(Y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

二维

$$Z=g\left(X,Y\right)$$

离散

$$E\left(Z\right)=\sum\sum g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$$

连续

$$E\left(Z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.1.4 性质

线性

$$E\left(kX+c\right)=kE\left(X\right)+c$$

$$E\left(X\pm Y\right)=E\left(X\right)\pm E\left(Y\right)$$

独立 若 X、Y 独立

$$E\left(XY\right)=E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

平均

$\bar{X}$ $\frac{1}{n}\sum X_i$

$$E\left(\bar{X}\right)=E\left(X\right)$$

7.2 方差

$$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$$

7.2.1 标准差

$$\sqrt{D\left(X\right)}$$

7.2.2 离散型

$$D\left(X\right)=\sum\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2p_i$$

7.2.3 连续型

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

7.2.4 性质

线性

$$D\left(kX+c\right)=k^2D\left(X\right)$$

独立 若 X、Y 独立

$$D\left(aX+bY\right)=a^2D\left(X\right)+b^2D\left(Y\right)$$

$$D\left(XY\right)=D\left(X\right)D\left(Y\right)$$

平均

$\bar{X}$ $\dfrac{1}{n}\sum X_i$

$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}D\left(X\right)$$

7.3 标准化随机变量

$$X^*=\frac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}}$$

7.4 常见分布期望方差

$X \sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	λ	λ
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
$H(M,N,n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$
$U[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

7.5 协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

7.6 性质

$$\mathrm{Cov}(X,X) = D(X)$$

交换律

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

线性

$$\mathrm{Cov}(X,c) = 0$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

7.7 （线性）相关系数

7.7.1 （线性）均方误差

用 $aX+b$ 去拟合 Y

$e(a,b)$ 越小表明线性关系越强，越大越弱

$e(a_0,b_0)$ 最小均方误差

(a_0,b_0) 驻点

$a_0 \quad \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{D(X)}$

$b_0 \quad E(Y) - a_0 E(X)$

$$e(a,b) = E\left[\left(Y - (aX+b)^2\right)\right]$$

$$e(a_0,b_0) = \left[1 - \left(\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)^2\right] D(Y)$$

7.7.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

7.7.3 性质

$$\rho \in [-1,1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \Longleftrightarrow P\{Y = aX+b\} = 1\,(a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \ \text{（正相关）} \rho_{XY} = & 1 \\ a < 0 \ \text{（负相关）} \rho_{XY} = & -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|}\rho_{XY}$$

7.7.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned} & \rho = 0 \\ \Longleftrightarrow & \operatorname{Cov}(X,Y) = 0 \\ \Longleftrightarrow & E(XY) = E(X)E(Y) \\ \Longleftrightarrow & D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \end{aligned}$$

独立 $\Longrightarrow$ 不相关

8 统计量

8.1 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

8.2 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

8.3 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

8.4 其他

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu$$

$$D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E\left(S^2\right) = \sigma^2$$

8.5 矩

$k \in \mathbb{N}^+$

8.5.1 k 阶原点矩

$k = 1 \ \sim = E\left(X\right)$

$$E\left(X^k\right)$$

8.5.2 k 阶中心矩

$$E\left[\left(X - E\left(X\right)\right)^k\right]$$

$k = 1 \ \sim = 0$

$k = 2 \ \sim = D\left(X\right)$

8.5.3 k+l 阶混合原点矩

$$E\left(X^kY^l\right)$$

8.5.4 k+l 阶混合中心矩

$$E\left[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right]$$

$k=l=1 \ \sim= \mathrm{Cov}(X,Y)$

9 抽样分布

$x \sim \Gamma(\alpha,\beta)$

9.1 伽马分布

9.1.1 伽马函数

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,(x>0)$$

9.1.2 密度函数

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

9.1.3 性质

再生性

$X_1 \ \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$

$X_2 \ \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$

$X_3 \ \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$

$$X_1+X_2=X_3$$

9.2 卡方分布

$\chi^2 \sim \chi^2(n)=\Gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

n 自由度

$X_i \ \sim N(0,1)$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

9.2.1 非中心的卡方分布

$X_i \sim N(\mu_i, 1)$

δ 非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

9.2.2 密度函数

$$f(x,n) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

9.2.3 性质

再生性

$\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$

$\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$

$\chi_3^2 \sim \chi^2(m+n)$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi_3^2$$

9.3 t 分布

$T \sim t(n)$

n 自由度

$X \sim N(0,1)$

$Y \sim \chi^2(n)$

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

9.3.1 密度函数

$$f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\dfrac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

9.3.2 性质

$n=1$ 时，为柯西分布
n 充分大时，为标准正态分布

9.4 F 分布

$F \sim F(m,n)$

m 第一自由度

n 第二自由度

$X \sim \chi^2(m)$

$Y \sim \chi^2(n)$

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

9.4.1 密度函数

$$f(x,m,n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\dfrac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\dfrac{m+n}{2}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

9.4.2 性质

若 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim F(1,n)$
若 $F\sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$

9.5 常见分布期望方差

X	$\sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
X	$\Gamma(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$
χ^2	$\chi^2(n)$	n	$2n$
T	$t(n)$	$0\,(n>1)$	$\dfrac{n}{n-2}\,(n>2)$
F	$F(m,n)$	$\dfrac{n}{n-2}\,(n>2)$	$\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\,(n>4)$

9.6 上侧 p 分位点

x_p

$$P\left\{X \geqslant x_p\right\} = p\left(p \in (0,1)\right)$$

9.7 单正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\chi^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \bar{X}, S^2\text{相互独立}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

10 参数估计

10.1 矩估计

10.1.1 基本思想

样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$ 一般采用 $\bar{X} = E(X)$

$k=2$ 一般采用 $\begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = D(X) \end{cases}$

也可以用 $\begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = E\left(X^2\right) \end{cases}$

10.2 极大似然估计

$p(x,\theta)$ 分布律或者密度函数

$$L(x_1, x_2, \cdots; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

$$L\left(x_1, x_2, \cdots; \hat{\theta}\right) = \max_{\theta\in\Theta} \{L(x_1, x_2, \cdots; \theta)\}$$

一般解法：求 $\dfrac{\mathrm{d}(\ln L(\theta))}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 的驻点

10.3　估计量评价标准

10.3.1　均方误差

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = D\left(\hat{\theta}\right) + \left(\theta - E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

10.3.2　无偏性

无偏估计　$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计　$\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

性质　$\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，即 $E\left(\bar{X}\right) = \mu$

S^2 是 σ^2 的无偏估计，即 $E\left(S^2\right) = \sigma^2$

10.3.3　有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若 $D\left(\hat{\theta}_1\right) < D\left(\hat{\theta}_2\right)$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效