高等数学

Tuesday 30th July, 2024

目录

Part I

极限

1　基础

1.1　常用极限

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= 1 \\
\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \mathrm{e} \\
\lim_{n\to \infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x \left(n\in\mathbb{N}^+\right)
\end{aligned}$$

1.2　常用等价无穷小

x 为函数，$\lim\limits_{x\to 0}$ 时，可对乘除因子替换

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$$

$$x\sim\left(\mathrm{e}^x-1\right)\sim\ln\left(x+1\right)\sim\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$x^3\sim 6\left(x-\sin x\right)\sim 6\left(\arcsin x-x\right)\sim 3\left(\tan x-x\right)$$

$$x^3\sim 3\left(x-\arctan x\right)\sim 2\left(\tan x-\sin x\right)$$

$$\begin{aligned}
1-\cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\log_a\left(1+x\right) &\sim \frac{x}{\ln a} \\
\left(1+x\right)^a &\sim ax+1 \\
a^x-1 &\sim x\ln a\left(0<a\neq 1\right) \\
\left(1+ax\right)^{\frac{1}{bx}} &\sim \mathrm{e}^{\frac{a}{b}}(1-\frac{a^2}{2b}x)
\end{aligned}$$

2　间断点

2.1　第一类间断点

$$\exists\lim_{x\to x_0^-}\text{且}\exists\lim_{x\to x_0^+}$$

2.1.1 可去间断点

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \left(\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = A \right)$$

2.1.2 跳跃间断点

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

2.2 第二类间断点

$$\lim_{x\to x_0^-}, \lim_{x\to x_0^+} \text{至少满足有一个}\nexists$$

2.2.1 振荡间断点

左、右极限至少一个为振荡不存在

2.2.2 无穷间断点

左、右极限至少一个为 ∞

3 洛必达法则

3.1 使用条件

定义存在

$$x \in \mathring{U}(x_0)\text{（}x_0\text{可取}\infty\text{）}, \exists f'(x_0), \exists g'(x_0)$$

极限存在或为无穷

$$g'(x_0) \neq 0, \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{或} = \infty$$

符合 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\text{任意}}{\infty}$

3.2 结论

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \not\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Part II

导数

4 基础

4.1 求导法则

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\
(f(x)\,g(x))' &= f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x) \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))\,g'(x) \\
\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' &= f[u(x)]\,u'(x)-f[v(x)]\,v'(x) \\
\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)' &= \int_{v(x)}^{u(x)} f'_x(x,t)\,\mathrm{d}t+f[x,u(x)]\,u'(x)-f[x,v(x)]\,v'(x)
\end{aligned}
$$

4.2 常用高阶导数

$$
\begin{aligned}
\sin^{(n)}\omega x \quad &= \omega^n \sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n\in\mathbb{N}) \\
\cos^{(n)}\omega x \quad &= \omega^n \cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n\in\mathbb{N}) \\
\ln^{(n)}(1+x) \quad &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \left(n\in\mathbb{N}^+\right) \\
\ln^{(n)}(1-x) \quad &= -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad \left(n\in\mathbb{N}^+\right)
\end{aligned}
$$

4.3 莱布尼茨公式

$$
(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}
$$

4.4 中值定理

定理	公式	约束
积分中值定理	$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{x\vert_a^b}$	$\xi\in[a,b]$
罗尔中值定理	$f'(\xi)=0$	$\xi\in(a,b)$
拉格朗日中值定理	$f'(\xi)=\dfrac{f(x)\vert_a^b}{x\vert_a^b}$	$\xi\in(a,b)$
柯西中值定理	$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)\vert_a^b}{g(x)\vert_a^b}$	$\xi\in(a,b)$

4.5 泰勒中值定理

$R_n(x)$ 为余项

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n}\left[(x-x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^i \frac{f(x_0)}{i!}+R_n(x)\\
P_n(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\left[(x-x_0)\partial_x+(y-y_0)\partial_y\right]^i \frac{f(x_0,y_0)}{i!}+R_n(x,y)
\end{aligned}
$$

4.5.1 拉格朗日型余项

$\theta\in(0,1)$

$$
R_n(x)=\left[(x-x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^{n+1}\frac{f(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}
$$

$$
R_n(x,y)=\left[(x-x_0)\partial_x+(y-y_0)\partial_y\right]^i\frac{f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{(n+1)!}
$$

4.5.2 佩亚诺型余项

$$
R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]
$$

$$
R_n(x,y)=o\left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^{\,n}\right]
$$

4.5.3 误差估计式

$$
n\in\mathbb{N};\exists M>0\forall x\in D\to M\geqslant\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|
$$

$$
\Longrightarrow\ |R_n(x)|\leqslant M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
$$

4.5.4 特别的：麦克劳林公式

$$\left.\begin{matrix}(4.5.1)\\ x_0=y_0=0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i\dfrac{f(0)}{i!}+R_n(x)\\ P_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}(x\partial_x+y\partial_y)^i\dfrac{f(0,0)}{i!}+R_n(x,y)\end{cases}$$

4.5.5 常用麦克劳林公式

$\cos x$ 的 $2k$ 和 $2k+1$ 阶

$$\cos x=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{x^{2i}}{2i!}+(-1)^{k+1}\cos\theta x\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$\sin x$ 的 $2k-1$ 和 $2k$ 阶

$$\sin x=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}+(-1)^k\cos\theta x\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

其他函数的 n 阶

$$\mathrm{e}^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+\mathrm{e}^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}+\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\,(x>-1)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)\cdot\frac{x^i}{i!}\right)+\frac{\prod_{i=0}^{n}(\alpha-i)}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.6 极值（拉格朗日乘数法）

二元情况

$$\left.\begin{matrix}\begin{cases}\text{约束条件：}\varphi(x,y)=0\\ \text{目标函数：}f(x,y)\end{cases}\\ \begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla\varphi\,(\text{即}\nabla f\parallel\nabla\varphi)\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\begin{matrix}\text{解得几组 }(x_i,y_i)\text{ 即为可能的极值点}\\ \text{（若无约束条件 }\varphi(x,y)=0\text{，}\\ \text{可设约束为 }0=0\text{，即}\nabla\varphi=(0,0)\\ \text{则 }\nabla f=(0,0)\text{）}\end{matrix}$$

检验可能的极值点 (x_0,y_0)

$$\left.\begin{matrix}f''^2_{xy}(x_0,y_0)<f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)\\ f''_{xx}(x_0,y_0)>0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{为极小值点}$$

$$\left.\begin{matrix}f''^2_{xy}(x_0,y_0)<f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)\\ f''_{xx}(x_0,y_0)<0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{为极大值点}$$

$$f''^2_{xy}(x_0,y_0)>f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{不取极值}$$

$$f''^2_{xy}(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)\Longrightarrow \text{需进一步讨论}$$

n 元情况

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{约束条件}\Phi\text{：}\begin{array}{l}\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\\ \varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\end{array}\\ \quad\text{目标函数：}f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\nabla f=\sum\limits_i\lambda_i\nabla\varphi_i\text{（三元时共面）}\\ \text{约束条件}\Phi\end{array}\right.\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{解得几组}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\text{即为可能的极值点}$$

4.7 雅可比行列式

$$\frac{\partial\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}=\begin{vmatrix}\partial_{x_1}u_1 & \partial_{x_2}u_1 & \cdots & \partial_{x_n}u_1\\ \partial_{x_1}u_2 & \partial_{x_2}u_2 & \cdots & \partial_{x_n}u_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{x_1}u_n & \partial_{x_2}u_n & \cdots & \partial_{x_n}u_n\end{vmatrix}$$

Part III

积分

5 基础

5.1 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\Big|_a^b$$

5.2 第一类换元（凑微分）法

$$\int f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\int g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)$$

5.3 第二类换元法

$$\begin{aligned}\int f\left(x\right)\mathrm{d}x &= \left.\int f\left(t\right)\mathrm{d}t\right|_{t=\varphi(x)}\\ \int_a^b f\left[\varphi\left(x\right)\right]\mathrm{d}x &= \left.\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|_{t=\varphi(x)}\end{aligned}$$

5.4 分部积分

$$\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$uv|_a^b = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$$

5.5 常用积分表

5.5.1 三角函数总表

$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}$	$f(x)$	$f'(x)$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$\sec x$	$\sec x \tan x$	$-\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
	$\mathrm{arcsec} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$		$\mathrm{arccsc} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\ln\lvert\cosh x\rvert$	$\tanh x$	$\mathrm{sech}^2 x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$	$\coth x$	$-\mathrm{csch}^2 x$
$\arctan(e^x)$	$\mathrm{sech} x$	$-\mathrm{sech} x \tanh x$	$-\ln\lvert\mathrm{csch} x + \coth x\rvert$	$\mathrm{csch} x$	$-\mathrm{csch} x \coth x$
	$\mathrm{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\mathrm{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\mathrm{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$		$\mathrm{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\mathrm{arsech} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$		$\mathrm{arcsch} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

5.5.2 其他

$$
\begin{aligned}
\int a^x \mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a} && + \mathrm{C} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| && + \mathrm{C} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} && + \mathrm{C} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| && + \mathrm{C} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} && + \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

5.6 有理函数积分通解（递推）

$$
\int \frac{x+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}} \mathrm{d}x \begin{cases} 0 > p^2 - 4q \\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \\ b = N - \frac{p}{2} \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{2bx + bp - 2a^2}{4\left(\lambda-1\right) a^2 \left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}} + \dfrac{b\left(2\lambda-3\right)}{2\left(\lambda-1\right) a^2} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}} & (\lambda > 1) \\ \dfrac{\ln\left(x^2+px+q\right)}{2} + \dfrac{b}{a} \arctan \dfrac{x+2p}{2a} + \mathrm{C} & (\lambda = 1) \end{cases}
$$

5.7 万能代换

$$
x = 2 \arctan u \implies \begin{cases} \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u \end{cases}
$$

5.8 极坐标图形面积

$$
A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta
$$

Definition 5.8.1 (以下参数方程中都有)**.**

$$
\begin{cases} x = x\left(t\right) \\ y = y\left(t\right) \end{cases}
$$

5.9 旋转体体积（参数方程）（可轮换）

绕 x 轴
圆盘法

$$V=\pi\int_a^b x'y^2dt$$

柱壳法

$$V=2\pi\int_a^b xy'ydt$$

5.10 旋转体侧面积（参数方程）（可轮换）

绕 x 轴

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t$$

5.11 平面曲线弧长（参数方程）（可轮换）

$$s=\int_a^b\sqrt{{x'}^2+{y'}^2}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2\left(\theta\right)+r'^2\left(\theta\right)}\mathrm{d}\theta$$

5.12 平面曲线曲率（参数方程）

曲率半径：K^{-1}

$$K=\frac{\left|x'y''-x''y'\right|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

6 重积分

6.1 二重积分

Definition 6.1.1 ($\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$).

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$$

6.1.1 换元

$$\left.\begin{cases}x=x\left(u,v\right)\\y=y\left(u,v\right)\end{cases}\atop\left.\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|_{D'}\neq0\right\}\Longrightarrow\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}f\left(x,y\right)\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

6.1.2 广义极坐标变换

$$\begin{cases} x(r,\theta) = x_0 + ar\cos\theta \\ y(r,\theta) = y_0 + br\sin\theta \end{cases} \implies \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\iint\limits_D f(x,y)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

6.2 三重积分

Definition 6.2.1 ($\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$)**.**

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

6.2.1 换元

$$\left.\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \atop \left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Omega'} \neq 0 \right\} \implies \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(x,y,z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

6.2.2 柱面坐标

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,z) = x_0 + ar\cos\theta \\ y = y(r,\theta,z) = y_0 + br\sin\theta \\ z = z(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

6.2.3 球面坐标

$$\begin{cases} x = x(r,\varphi,\theta) = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = y(r,\varphi,\theta) = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = z(r,\varphi,\theta) = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

6.2.4 曲面面积（可轮换）

$$\left.\begin{matrix} z = z(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{matrix}\right\} \implies S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

6.3 积分应用

密度为 $\rho(x,y)$ 或 $\rho(x,y,z)$

6.3.1 质量

$$M=\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

6.3.2 质心

质心的 x 坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}, \bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$\rho(\cdots)\equiv 1$ 时，质心相当于形心

6.3.3 转动惯量

绕 x 轴时

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, I_x=\iiint_\Omega \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

7 曲线与曲面积分

7.1 曲线积分

Definition 7.1.1.

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \begin{cases} P=P(x,y,z) \\ Q=Q(x,y,z) \\ R=R(x,y,z) \end{cases}$$

Definition 7.1.2 (第一类)**.** $t\in[\alpha,\beta]$ $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x,y)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\mathrm{d}t$$

Definition 7.1.3 (第二类（坐标积分）)**.** $t:\alpha\to\beta$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\left(Px'+Qy'+Rz'\right)\mathrm{d}t$$

7.1.1 格林公式

L 围成 D

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.1.2 平面曲线积分与积分路径无关条件

$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分路径无关

$$\begin{aligned} & \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ \Longleftrightarrow & \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \\ \Longleftrightarrow & \exists u = u\left(x, y\right), \mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ \Longleftrightarrow & D \text{ }, Q'_x = P'_y \end{aligned}$$

7.1.3 曲线积分路径无关

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to \begin{cases} R'_y = Q'_z \\ P'_z = R'_x \\ Q'_x = P'_y \end{cases}$$

7.2 曲面积分

Definition 7.2.1.

$$z = z\left(x, y\right) \begin{cases} P = P\left(x, y, z\right) \\ Q = Q\left(x, y, z\right) \\ R = R\left(x, y, z\right) \end{cases}$$

Definition 7.2.2 (第一类（可轮换）)**.**

$$\iint_\Sigma f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f\left(x, y, z\right) \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Definition 7.2.3 (第二类（坐标积分）（外（远离原点）侧取正，内（指向原点）侧取负）)**.**

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_\Sigma \frac{-Pz'_x - Qz'_y + R}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}} \mathrm{d}S$$

7.2.1 三合一投影法（外侧取正，内侧取负）

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} \left(-Pz'_x - Qz'_y + R\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.2.2 高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} \left(P_x' + Q_y' + R_z'\right)\mathrm{d}V$$

7.2.3 曲面积分路径无关

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to P_x' + Q_y' + R_z' = 0$$

7.3 斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \iint\limits_{\Sigma} \left(R_y' - Q_z'\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(P_z' - R_x'\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(Q_x' - P_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

8 向量分析

Definition 8.0.1 (向量场)**.**

$$\vec{\psi} = \{P, Q, R\}$$

8.1 梯度

Definition 8.1.1 (梯度)**.**

$$\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$$

8.2 散度

Definition 8.2.1 (通过 Σ 流向指定侧的通量)**.**

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Theorem 8.2.1 (散度)**.**

$$\mathrm{div}\vec{\psi} = \nabla \cdot \vec{\psi} = P_x' + Q_y' + R_z'$$

8.3 旋度

Definition 8.3.1 (沿封闭曲线 Γ 的环流量)**.**

$$\oint\limits_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Theorem 8.3.1 (旋度).

$$\mathrm{rot}\vec{\psi} = \nabla \times \vec{\psi} = \left\{R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right\}$$

Part IV
微分方程

9 基础

Definition 9.0.1 (n 阶线性微分方程).

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\, y^{(i)} = f(x)$$

9.1 线性相关

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{C}(\mathrm{C} \in \mathbb{C})$$

9.2 伯努利方程

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{\alpha} \xrightarrow{z=y^{1-\alpha}} z' + (1-\alpha) P(x)\, z = (1-\alpha) Q(x)$$

10 一阶线性微分方程

Definition 10.0.1 ($f(x) \equiv 0$ 时，为齐次).

$$\left.\begin{array}{r}(9.0.1)\\ n=1\end{array}\right\} \implies y' + P(x)\, y = f(x)$$

Theorem 10.0.1 (通解).

$$y = \frac{\int f(x) \exp\left(\int P(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \mathrm{C}}{\exp\left(\int P(x)\,\mathrm{d}x\right)}$$

11 二阶线性微分方程

Definition 11.0.1.

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = f(x)$$

11.1 齐次、非齐次、通解、特解关系

齐特 + 齐特（线性无关）= 齐通
齐通 + 非特 = 非通
齐特 + 非特 = 非特
非特 − 非特 = 齐特

12 n 阶常系数线性齐次微分方程

Definition 12.0.1.

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i y^{(i)} = 0 \, (p_i \in \mathbb{C})$$

12.1 特征方程

$$r^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i r^i = 0$$

12.2 通解对应项

k 重实根 r 在通解中对应项

$$y_r = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{C}_i x^{i-1} \cdot \mathrm{e}^{rx}$$

特别的：r 为共轭复根（$r = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$）时，可改写为两个实根

$$y_r = (\mathrm{C}_1 \cos\beta x + \mathrm{C}_2 \sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

13 二阶常系数线性齐次微分方程

Definition 13.0.1.

$$y'' + py' + qy = 0$$

13.1 特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

13.2 通解

$r_1 \neq r_2$

$$y = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$$

$r_1 = r_2$

$$y = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 x)\, \mathrm{e}^{r_1 x}$$

$r_{1,2} = \alpha + \beta \mathrm{i}$

$$y = (\mathrm{C}_1 \cos \beta x + \mathrm{C}_2 \sin \beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

14　二阶常系数非齐次线性微分方程

Definition 14.0.1.

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

14.1　特解

Theorem 14.1.1 (特解)**.** $\mathcal{P}_n$ 表示 n 次多项式

$$\left.\begin{array}{c}(14.0.1)\\ f(x) = [\mathcal{P}_{n_1}(x)\cos\omega x + \mathcal{P}_{n_2}(x)\sin\omega x]\,\mathrm{e}^{\lambda x}\\ m = \max\{n_1, n_2\}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$y^* = x^k\left[\mathcal{U}_m(x)\cos\omega x + \mathcal{V}_m(x)\sin\omega x\right]\mathrm{e}^{\lambda x}\begin{cases}k=0 & (\lambda\pm\omega\mathrm{i}\text{不是特征方程根})\\ k=1 & (\lambda\pm\omega\mathrm{i}\text{是特征方程根})\end{cases}$$

Theorem 14.1.2 (特解的特解)**.** $\omega = 0$ 时，$m = n_1$

$$\left.\begin{array}{l}(14.0.1)\\ f(x) = \mathcal{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\end{array}\right\} \Longrightarrow y^* = x^k\mathcal{Q}_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\begin{cases}k=0 & (\lambda\text{不是特征方程根})\\ k=1 & (\lambda\text{是特征方程单根})\\ k=2 & (\lambda\text{是特征方程重根})\end{cases}$$

14.1.1　常系数非齐次通解的大致形式

$$\underbrace{\rlap{$\overbrace{\phantom{\mathrm{C}_1 a(x)\mathrm{e}^{r_1x}+\mathrm{C}_2 b(x)\mathrm{e}^{r_2x}}}^{\text{齐次通解}}$}\mathrm{C}_1\overbrace{a(x)\,\mathrm{e}^{r_1x}}^{\text{齐次特解}}+\mathrm{C}_2\underbrace{\overbrace{b(x)\,\mathrm{e}^{r_2x}}^{\text{齐次特解}}+\overbrace{x^kc(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}}^{\text{非齐次特解}}}_{\text{非齐次特解}}}_{\text{非齐次通解}}$$

14.1.2　算子法求特解

Definition 14.1.1 (D 算子)**.**

$$Df(x) = f'(x), \frac{1}{D}f(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

对于 (14.0.1)：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)}f(x) = \frac{1}{D^2+pD+q}f(x)$$

若代入 D 后分母 $\mathcal{P}(D)$ 出现为 0 的状况，则（可多次使用，D 算子只对右侧 $f(x)$ 有效）：

$$y^* = x^n \frac{1}{\mathcal{P}(D)} f(x) \longrightarrow y^* = x^{n+1} \frac{1}{\mathcal{P}'(D)} f(x)$$

$f(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{kx}$：$D$ 换为 k

$f(x) = \mathrm{C}\sin ax$ 或 $\mathrm{C}\sin ax$：D^2 换为 $-a^2$　若分母有 $mD + n\,(mn > 0)$ 多项式，可以配平方化到分子，再代入 D^2 后直接使用 D 算子求导

$f(x) = \mathcal{P}_n(x)$：　使用 $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-x)^n$ 泰勒展开 $\frac{1}{\mathcal{F}(D)}$（$\mathcal{F}(D) - 1$ 当作 x，不考虑收敛域），使得展开后 D 的最高次幂与 $\mathcal{P}_n(x)$ 相同即可

$f(x) = \mathrm{e}^{kx} y(x)$：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathrm{e}^{kx} y(x) = \mathrm{e}^{kx} \frac{1}{\mathcal{F}(D+k)} y(x)$$

$f(x) = \mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{C}\sin ax$：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{C}\sin ax = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right]$$

$f(x) = \mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{C}\cos ax$：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{C}\cos ax = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right]$$

15　全微分方程

15.1　条件（微分换序）

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0\text{是全微分方程} \iff P'_y = Q'_x$$

Part V

空间解析几何

16　基础

16.1　向量的方向余弦

$$\vec{\mathrm{v}}^0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\vec{\mathrm{v}}\|} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{v}}_x \\ \vec{\mathrm{v}}_y \\ \vec{\mathrm{v}}_z \end{bmatrix}$$

17 空间曲面

17.1 基础

Definition 17.1.1.

$$F\left(x,y,z\right)=0$$

17.1.1 法向量

$$\nabla F$$

17.1.2 方向导数

方向为 $\boldsymbol{l}$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{l}}=\partial_x F\cdot\cos\alpha+\partial_y F\cdot\cos\beta+\partial_z F\cdot\cos\gamma=\partial_x F\cdot\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{l}|}+\partial_y F\cdot\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{l}|}+\partial_z F\cdot\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{l}|}$$

$$\boldsymbol{l}=\nabla F\implies\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{l}}=|\nabla F|$$

17.2 平面

Definition 17.2.1.

$$Ax+By+Cz+D=0$$

17.2.1 平面点法式

过 (x_0,y_0,z_0)，法向量 $\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

17.2.2 平面截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

17.2.3 点面距离公式

点 (x_0,y_0,z_0)

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

18 空间曲线

Definition 18.0.1.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

18.1 参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

18.2 切向量

$$\vec{\tau}=\nabla F\times\nabla G$$

18.3 直线

Definition 18.3.1.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

18.4 直线对称式（点向式）方程

过 (x_0,y_0,z_0)，方向向量 $\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

18.5 直线参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

19 特殊曲面

Definition 19.0.1 (绕 z 轴旋转曲面:（原曲线为 $f(y_1,z)=0$）)**.**

$$\left.\begin{matrix} f(y_1,z)=0 \\ \sqrt{x^2+y^2}=|y_1| \end{matrix}\right\}\implies f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

19.1 圆锥面

$$z^2 = \cot^2 \alpha \cdot \left(x^2 + y^2\right)$$

Definition 19.1.1 (以下二次曲面方程中都有)**.**

$$pq > 0$$

19.2 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

19.3 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

19.4 双曲抛物面（马鞍面）

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

$$z = xy$$

19.5 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

19.6 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Part VI

级数

20 收敛与发散

20.1 绝对收敛

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}|u_n| = s, s\in\mathbb{C}$$

20.2 条件收敛

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}u_n = s, \sum_{n\in\mathbb{N}^+}|u_n|\,\text{发散}, s\in\mathbb{C}$$

$$\text{绝对收敛}\cap\text{条件收敛}=\varnothing$$

20.3 无穷大比较

$$n\to+\infty$$

$$n^n \gg n! \gg a^n\,(a>1) \gg n^p\,(p>1) \gg | \gg n^p\,(1\geqslant p>0) \gg (\ln n)^q\,(q>0)$$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\dfrac{1}{u_n}$ 中，若 u_n 在 $|$ 记号左侧则收敛，在 $|$ 记号右侧则发散

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\dfrac{v_n}{u_n}$ 中，若 u_n 在 $|$ 记号左侧，且 v_n 在 u_n 右侧时收敛，否则发散（$\dfrac{n^p\,(1\geqslant p>0)}{n^q\,(q>1)}$ 除外，需进一步 $p>q+1$ 才收敛）

21 正项级数

21.1 积分审敛法

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}f(n)\,\text{与}\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{敛散同}$$

21.2 比较审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\begin{cases}=0 & \Longrightarrow \sum v_n\text{收敛则}\sum u_n\text{收敛}\\ \in(0,+\infty) & \Longrightarrow \sum v_n,\sum u_n\text{敛散同}\\ =+\infty & \Longrightarrow \sum v_n\text{发散则}\sum u_n\text{发散}\end{cases}$$

21.3 比值审敛法（达朗贝尔判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\begin{cases}<1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{收敛}\\ =1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{可能收敛可能发散}\\ >1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{发散}\end{cases}$$

21.4 根值审敛法（柯西判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\begin{cases}<1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{收敛}\\ =1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{可能收敛可能发散}\\ >1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{发散}\end{cases}$$

22 交错级数

22.1 莱布尼兹判别法

$$\left.\begin{array}{r}\text{正项级数}u_n\searrow\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{交错级数}\sum(-1)^{n(\text{或}n-1)}u_n\text{收敛}$$

23 幂（泰勒）级数

Definition 23.0.1 (以下默认幂级数形式)**.**

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}=a_nx^n,\text{收敛半径为}R$$

23.1 阿贝尔定理

$$\begin{cases}x\in(-R,R) & \text{绝对收敛}\\ x\in\{-R,R\} & \text{单独讨论}\\ x\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty) & \text{发散}\end{cases}$$

收敛区间为 $(-R,R)$，收敛域需要讨论端点 $\pm R$ 处的值

23.2 系数模比值法

$$R^{-1}=\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

23.3 系数模根值法

$$R^{-1}=\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

23.4 加减运算

$$\left.\begin{aligned}\sum a_nx^n\text{收敛域为}I_a\\ \sum b_nx^n\text{收敛域为}I_b\end{aligned}\right\}\implies\sum a_nx^n\pm\sum b_nx^n=\sum\left(a_n\pm b_n\right)x^n,x\in I_a\cap I_b$$

23.5 泰勒级数

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

23.6 常用泰勒级数

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n!}\\
\sin x&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\cos x&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\
\ln\left(1+x\right)&=\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n} && x\in(-1,1]\\
\ln\left(1-x\right)&=\sum_{n\in\mathbb{N}^+}-\frac{x^n}{n} && x\in(-1,1]\\
\frac{1}{1+x}&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(-x\right)^n && x\in(-1,1)\\
\frac{1}{1-x}&=\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n && x\in(-1,1)\\
\left(1+x\right)^\alpha&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}\left(\alpha-i\right)}{n!}x^n\text{取}\prod_{i=0}^{-1}\left(\alpha-i\right)=1 && x\in(-1,1)
\end{aligned}$$

24 三角（傅里叶）级数

24.1 傅里叶级数

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$f\left(x\right)$ 周期为 $2l$ 时（l 常取 π），有傅里叶系数：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} & = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}^+ & = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x \mathrm{d}x \end{cases}$$

$$T = 2l$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$$

24.2 狄利克雷收敛定理

$f(x)$ 在一个周期内有：

1. 连续或只有有限个第一类间断点
2. 只有有限个极值点

即 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $\mathbb{R}$ 连续，且

1. x_0 连续时，级数收敛于 $f(x_0)$
2. x_0 是第一类间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$