

# 概率论与数理统计

Wednesday 15<sup>th</sup> October, 2025

# 目录

<b>I 概率论</b>	<b>4</b>
<b>1 随机事件及其概率</b>	<b>4</b>
1.1 符号	4
1.2 减法	4
1.3 条件概率	4
1.4 乘法公式	4
1.5 古典概型	5
1.6 几何概型	5
1.7 完备事件组	5
1.8 全概率公式	5
1.8.1 全概率条件公式	5
1.9 贝叶斯公式	5
1.10 独立事件	5
1.11 伯努利概型	6
<b>2 连续型随机变量及其分布函数</b>	<b>6</b>
2.1 密度函数（概率密度）	6
2.2 分布函数	6
<b>3 分布</b>	<b>7</b>
3.1 边缘分布	7
3.1.1 边缘分布律	7
3.1.2 边缘密度函数	7
3.2 条件分布	8
3.2.1 条件分布律	8
3.2.2 条件密度函数	8
3.3 独立性	8
3.4 换元	8
3.4.1 一维	9
3.4.2 二维	9
3.4.3 * 特殊	9
<b>4 一维离散、连续型随机变量及其分布律、密度、分布函数</b>	<b>10</b>
4.1 泊松定理	11
4.2 经验原则	12
<b>5 二维连续型随机变量及其密度函数</b>	<b>12</b>
5.1 均匀分布	12
5.2 正态分布	12

<b>II 数理统计</b>	<b>12</b>
<b>6 数字特征</b>	<b>13</b>
6.1 期望 . . . . .	13
6.1.1 性质 . . . . .	13
6.2 方差 . . . . .	13
6.2.1 标准差 . . . . .	13
6.2.2 离散型 . . . . .	13
6.2.3 连续型 . . . . .	14
6.2.4 性质 . . . . .	14
6.3 标准化随机变量 . . . . .	14
6.4 协方差 . . . . .	14
6.4.1 性质 . . . . .	14
6.4.2 协方差矩阵 (对称矩阵) . . . . .	15
6.5 (线性) 相关系数 . . . . .	15
6.5.1 * (线性) 均方误差 . . . . .	15
6.5.2 定义 . . . . .	15
6.5.3 性质 . . . . .	15
6.5.4 不 (线性) 相关 . . . . .	16
<b>7 大数定律与中心极限定理</b>	<b>16</b>
7.1 切比雪夫不等式 . . . . .	16
7.2 大数定律 . . . . .	16
7.2.1 依概率收敛 . . . . .	16
7.2.2 伯努利大数定律 . . . . .	16
7.2.3 切比雪夫大数定律 . . . . .	16
7.2.4 辛钦大数定律 . . . . .	17
7.3 中心极限定理 . . . . .	17
7.3.1 定理 . . . . .	17
7.3.2 列维-林德伯格定理 (独立同分布) . . . . .	17
7.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理 (二项分布) . . . . .	17
<b>8 统计量</b>	<b>18</b>
8.1 样本容量 . . . . .	18
8.2 简单随机样本 . . . . .	18
8.3 样本联合分布函数 (密度函数) . . . . .	18
8.4 样本均值 . . . . .	18
8.5 (修正) 样本方差 . . . . .	18
8.6 样本标准差 . . . . .	18
8.7 极差 . . . . .	19
8.8 其他 . . . . .	19
8.9 矩 . . . . .	19

<b>9 抽样分布</b>	<b>19</b>
9.1 * 伽马分布 . . . . .	19
9.1.1 伽马函数 . . . . .	20
9.1.2 密度函数 . . . . .	20
9.1.3 性质 . . . . .	20
9.2 卡方分布 . . . . .	20
9.2.1 * 非中心的卡方分布 . . . . .	20
9.2.2 * 密度函数 . . . . .	20
9.2.3 性质 . . . . .	21
9.3 t 分布 . . . . .	21
9.3.1 * 密度函数 . . . . .	21
9.3.2 性质 . . . . .	21
9.4 F 分布 . . . . .	21
9.4.1 * 密度函数 . . . . .	22
9.4.2 性质 . . . . .	22
9.5 常见分布期望方差 . . . . .	22
9.6 上侧分位点 . . . . .	22
<b>10 参数估计</b>	<b>22</b>
10.1 点估计 . . . . .	22
10.1.1 矩估计 . . . . .	22
10.1.2 极大似然估计 . . . . .	23
10.2 估计量评价标准 . . . . .	23
10.2.1 * 均方误差 . . . . .	23
10.2.2 无偏性 . . . . .	23
10.2.3 有效性 . . . . .	24
10.2.4 相合（一致）性 . . . . .	24
10.3 区间估计 . . . . .	24
<b>11 假设检验</b>	<b>24</b>
<b>III 附录</b>	<b>26</b>
<b>A 正态总体相关表</b>	<b>26</b>

## Part I

# 概率论

## 1 随机事件及其概率

### 1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	$E$	
样本点	$\omega$	
样本空间	$\Omega$	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 $AB$	$\{\omega   \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega   \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega   \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
相容事件		$A \cap B \neq \emptyset$
互斥事件		$A \cap B = \emptyset$
对立事件	$\bar{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

### 1.2 减法

$$A \supseteq B \implies P(A - B) = P(A) - P(B)$$

$$\text{推论: } P(\overline{AB}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

### 1.3 条件概率

已知  $A$  事件发生，发生  $B$  事件的概率 ( $P(A) > 0$ )

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

### 1.4 乘法公式

$$P(A) > 0$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

## 1.5 古典概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点个数}}{\Omega \text{ 样本点个数}}$$

## 1.6 几何概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何测度}}{\Omega \text{ 的几何测度}}$$

## 1.7 完备事件组

$$\{A_i\}$$

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

## 1.8 全概率公式

$\{A_i\}$  完备事件组

$$P(B) = \sum P(A_i B) = \sum P(A_i) P(B|A_i)$$

### 1.8.1 全概率条件公式

$$P(C|B) = \sum P(A_i C|B) = \sum P(A_i|B) P(C|A_i B)$$

## 1.9 贝叶斯公式

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j B)}{\sum P(A_i B)} = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum P(A_i) P(B|A_i)}$$

## 1.10 独立事件

$$A, B \text{ 相互独立} \iff P(AB) = P(A) P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff P(A|B) = P(A|\overline{B})$$

$$\iff \overline{A}, B \text{ 相互独立}$$

$$\iff A, \overline{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff \overline{A}, \overline{B} \text{ 相互独立}$$

$$\begin{aligned}
 A, B, C \text{ 相互独立} &\iff P(AB) = P(A)P(B); \\
 &P(AC) = P(A)P(C); \\
 &P(BC) = P(B)P(C); \\
 &P(ABC) = P(A)P(B)P(C)
 \end{aligned}$$

### 1.11 伯努利概型

定义:

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

$n$  重伯努利试验中,  $A$  事件恰好发生  $k$  次的概率为  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

## 2 连续型随机变量及其分布函数

### 2.1 密度函数 (概率密度)

$f(x)$ 、 $f(x, y)$  等

性质

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

### 2.2 分布函数

$F(x)$ 、 $F(x, y)$  等

定义

$$P\{X = x_0\} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$$

当  $F(x)$  连续时 (连续型随机变量)

$$P\{X = x_0\} = 0$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

性质

$$F(x) \geq 0; F(x) \nearrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

### 3 分布

#### 3.1 边缘分布

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y)$$

##### 3.1.1 边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

##### 3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$



## 3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t|y) dt$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y | X = x\} = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(x|t) dt$$

### 3.2.1 条件分布律

$$p_{j|i} = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

$$p_{i|j} = P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

### 3.2.2 条件密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

## 3.3 独立性

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

若  $X, Y$  独立

充要条件 1:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

充要条件 2:

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

## 3.4 换元

以下都有

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

其中  $g$  为单调可导函数

### 3.4.1 一维

$$Y = h(X)$$

令  $g = h^{-1}$ , 即  $X = g(Y)$ , 其中  $g$  为单调可导函数 (即  $h^{-1}$  单调可导)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{h(X) \leq y\} = P\{X \leq g(y)\} \\ &= F_{h(X)}(y) = F_X(g(y)) \\ &= \int_{h(X) \leq y} f(t) dt \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

### 3.4.2 二维

$$Z = g(X, Y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\ &= P\{g(X, Y) \leq z\} \\ &= F_{g(X, Y)}(z) \\ &= \iint_{g(X, Y) \leq z} f(u, v) du dv \\ \text{若 } X, Y \text{ 独立} &= \iint_{g(X, Y) \leq z} f_X(u) f_Y(v) du dv \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

### 3.4.3 \* 特殊

和  $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

若  $X, Y$  独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = f_X(z) * f_Y(z)$$

商  $Z = \frac{X}{Y}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

若  $X, Y$  独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy$$

积  $Z = XY$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$$

若  $X, Y$  独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) dy$$

最值分布 若  $X, Y$  独立

$$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$$

则

$$F_M = F_X F_Y$$

$$1 - F_N = (1 - F_X)(1 - F_Y)$$

$$f_M = F'_M = f_X F_Y + f_Y F_X$$

$$f_N = F'_N = f_X(1 - F_Y) + f_Y(1 - F_X)$$

## 4 一维离散、连续型随机变量及其分布律、密度、分布函数

以下都有

$$p \in (0, 1)$$

分布	期望	方差	注释	密度函数	分布函数或分布律
两点分布 $B(1, p)$	$p$	$p(1-p)$			$\frac{X}{P} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{matrix}$
二项分布 $B(n, p)$	$np$	$np(1-p)$	$n \in \mathbb{N}^+$ $k \geq 0$		$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
泊松分布 $P(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda > 0$ $k \geq 0$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$k > 0$ 前 $k-1$ 次都失败, 第 $k$ 次成功		$(1-p)^{k-1} p$
超几何分布 $H(M, N, n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{\frac{nM}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}}{1}$	$N > 1$ $n \leq N$ $M \leq N$ $k$ $\max\{0, n+M-N\} \leq k \leq \min\{M, n\}$	总样本数 抽取样本数 指定样本数 抽到指定样本数	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
均匀分布 $U[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
标准正态分布 $N(0, 1)$	0	1		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu \in \mathbb{R}$ 期望 $\sigma > 0$ 标准差	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}$

二项分布又名伯努利分布

正态分布又名高斯分布

#### 4.1 泊松定理

$n$  重伯努利试验中, 事件发生概率  $p_n \in (0, 1)$  与试验次数有关, 当  $p_n < 0.1; n > 100$  时可近似为泊松分布。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$n$  重伯努利试验: 只有两种结果, 且每次实验概率相同、相互独立, 做  $n$  次

## 4.2 经验原则

$$P\{|X - \mu| < k\sigma\} = 2\Phi_0(k) - 1 \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{cases} P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0.6827 \\ P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9545 \\ P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.9973 \end{cases}$$

## 5 二维连续型随机变量及其密度函数

### 5.1 均匀分布

$$(X, Y) \sim U(D)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

### 5.2 正态分布

$$(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$$

$\mu \in \mathbb{R}$  期望

$\sigma > 0$  标准差

$\rho \in (-1, 1)$ , 相关系数 ( $\rho = 0$  时  $X, Y$  独立)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若  $X, Y$  独立

$$\left. \begin{aligned} X &\sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y &\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{aligned} \right\} \implies (X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, 0)$$

$$Z = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

## Part II

# 数理统计

## 6 数字特征

### 6.1 期望

	离散型	连续型
$E(X)$	$\sum x_i p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
$E(Y) (Y = g(X))$	$\sum g(x_i) p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
$E(Z) (Z = g(X, Y))$	$\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$

#### 6.1.1 性质

线性

$$E(kX + c) = kE(X) + c$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

线性相关性

$$X, Y \text{ 不相关} \iff E(XY) = E(X)E(Y)$$

### 6.2 方差

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

#### 6.2.1 标准差

$$\sqrt{D(X)}$$

#### 6.2.2 离散型

$$D(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$$

### 6.2.3 连续型

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

### 6.2.4 性质

线性

$$D(kX + c) = k^2 D(X)$$

线性相关性

$$X, Y \text{ 不相关} \iff D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

## 6.3 标准化随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$
$$E(X^*) = 0$$
$$D(X^*) = 1$$

## 6.4 协方差

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

### 6.4.1 性质

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, X) = D(X)$$

交换律

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

线性

$$\text{Cov}(X, c) = 0$$

$$\text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

### 6.4.2 协方差矩阵（对称矩阵）

$X, Y$  的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Cov}(Y, Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & D(Y) \end{bmatrix}$$

## 6.5 （线性）相关系数

### 6.5.1 \*（线性）均方误差

用  $aX + b$  去拟合  $Y$

$e(a, b)$  越小表明线性关系越强，越大越弱

$e(a_0, b_0)$  最小均方误差

$(a_0, b_0)$  驻点

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}$$

$$b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$$

$$e(a, b) = E[(Y - (aX + b))^2]$$

$$e(a_0, b_0) = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

### 6.5.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

### 6.5.3 性质

$$\rho \in [-1, 1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 \ (a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \text{ (正相关)} & \rho_{XY} = 1 \\ a < 0 \text{ (负相关)} & \rho_{XY} = -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|} \rho_{XY}$$



#### 6.5.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \iff \text{Cov}(X, Y) &= 0 \\ \iff E(XY) &= E(X)E(Y) \\ \iff D(X \pm Y) &= D(X) + D(Y)\end{aligned}$$

独立  $\implies$  不相关

## 7 大数定律与中心极限定理

### 7.1 切比雪夫不等式

设  $X$  有有限方差（即有界）

$$\begin{aligned}\exists E(X), D(X); \forall \varepsilon > 0 \\ \rightarrow P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} &\leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \text{或 } P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} &\geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

### 7.2 大数定律

#### 7.2.1 依概率收敛

随机变量序列  $\{X_n\}$  依概率收敛于常数  $a$

$$X_n \xrightarrow{P} a (n \rightarrow \infty)$$

定义为

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

#### 7.2.2 伯努利大数定律

设事件  $A$  每次实验发生概率为  $p$ ，且  $n$  重伯努利试验中发生次数为  $n_A$ ，则

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \\ \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= 1 \\ \text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} &= 0\end{aligned}$$

#### 7.2.3 切比雪夫大数定律

设随机变量序列  $\{X_i\}$  相互独立（可不同分布），且有有限方差，则

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \\ & \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon \} = 1 \\ & \text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - E(\bar{X})| \geq \varepsilon \} = 0 \end{aligned}$$

### 7.2.4 辛钦大数定律

设随机变量序列  $\{X_i\}$  独立同分布，则有相同的期望  $\mu$ ，则

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \\ & \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - \mu| < \varepsilon \} = 1 \\ & \text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon \} = 0 \end{aligned}$$

## 7.3 中心极限定理

### 7.3.1 定理

设随机变量序列  $\{X_i\}$  相互独立（可不同分布），期望、方差均存在，则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} & \sim N(E(\bar{X}), D(\bar{X})) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} & \sim N(0, 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} \leq x \right\} & = \Phi_0(x) \end{aligned}$$

### 7.3.2 列维-林德伯格定理（独立同分布）

设随机变量序列  $\{X_i\}$  独立同分布，存在相同的期望  $\mu$ 、方差  $\sigma^2$ ，则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} & \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} & \sim N(0, 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x \right\} & = \Phi_0(x) \end{aligned}$$

### 7.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布）

设随机变量  $\eta_n \sim B(n, p)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \sim N(np, np(1-p))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \Phi_0(x)$$

显然  $\eta_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , 其中随机变量序列  $\{X_i\}$  独立同服从  $B(1, p)$  分布

## 8 统计量

### 8.1 样本容量

$$n$$

### 8.2 简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且同分布

### 8.3 样本联合分布函数（密度函数）

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod F(x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod f(x_i)$$

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod p_i$$

### 8.4 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### 8.5 （修正）样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

### 8.6 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

## 8.7 极差

$$\max_{1 \leq i \leq n} X_i - \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

## 8.8 其他

以下都有，若随机变量序列  $\{X_i\}$  独立同分布，则

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$$

$$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_n) = \sigma^2$$

样本均值的期望等于总体均值（期望），样本方差的期望等于总体方差

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

## 8.9 矩

名称	定义	离散	连续
$k$ 阶原点矩	$E(X^k)$	$\sum x_i^k p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$
$k$ 阶中心矩	$E[(X - E(X))^k]$	$\sum (x_i - \bar{X})^k p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^k f(x) dx$
$k + l$ 阶混合原点矩	$E(X^k Y^l)$		
$k + l$ 阶混合中心矩	$E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l]$		

$k, l \in \mathbb{N}^+$

1 阶原点矩  $= E(X)$

1 阶中心矩  $= 0$

2 阶中心矩  $= D(X)$

1+1 阶混合中心矩  $= \text{Cov}(X, Y)$

## 9 抽样分布

### 9.1 \* 伽马分布

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

### 9.1.1 伽马函数

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

### 9.1.2 密度函数

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

### 9.1.3 性质

再生性 若  $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$  且  $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ , 且  $X_1, X_2$  相互独立

$$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

## 9.2 卡方分布

$$\chi^2 \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$n$  自由度

$X_i \sim N(0, 1)$ , 共  $n$  个且独立同分布

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

### 9.2.1 \* 非中心的卡方分布

$$X_i \sim N(\mu_i, 1)$$

$\delta$  非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$
$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

### 9.2.2 \* 密度函数

$$f(x, n) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

### 9.2.3 性质

非负

再生性 若  $\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$  且  $\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$ , 且  $\chi_1^2, \chi_2^2$  相互独立

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$$

## 9.3 t 分布

$$T \sim t(n)$$

$n$  自由度

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

且  $X, Y$  相互独立

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

### 9.3.1 \* 密度函数

$$f(x, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

### 9.3.2 性质

偶函数  $n=1$  时, 为柯西分布

$n$  充分大时, 为标准正态分布

## 9.4 F 分布

$$F \sim F(m, n)$$

$m$  第一自由度

$n$  第二自由度

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

且  $X, Y$  相互独立

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

### 9.4.1 \* 密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

### 9.4.2 性质

非负  $T \sim t(n) \implies T^2 \sim F(1, n)$   
 $F \sim F(m, n) \implies \frac{1}{F} \sim F(n, m)$

## 9.5 常见分布期望方差

分布	$E(X)$	$D(X)$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
$\chi^2(n)$	$n$	$2n$
$t(n)$	$0 (n > 1)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$
$F(m, n)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} (n > 4)$

## 9.6 上侧分位点

$x_p$  上侧分位点

$p$   $x_p$  右侧区域的概率

$$P\{X \geq x_p\} = p (p \in (0, 1))$$

## 10 参数估计

### 10.1 点估计

#### 10.1.1 矩估计

**基本思想** 样本矩代替总体矩，建立  $k$  个方程，从中解出  $k$  个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$  一般采用  $\bar{X} = E(X)$

$$k=2 \text{ 一般采用 } \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

$$\text{也可以用} \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

### 10.1.2 极大似然估计

$\theta_i$  估计量 (即分布的未知参数)

$p(x; \theta_1, \theta_2, \dots)$   $X_1, X_2, \dots$  的分布律或密度函数

$L(\theta_1, \theta_2, \dots) = L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)$  似然函数 (样本联合分布函数)

设  $X_1, X_2, \dots$  为分布  $F(\theta_1, \theta_2, \dots)$  的简单随机样本  
构造似然函数

$$L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots) = \prod p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots)$$

调整估计量  $\theta_i$ , 令似然函数  $L(\theta_1, \theta_2, \dots)$  取极大值

$$L(x_1, x_2, \dots; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots) = \max \{L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)\}$$

则此时估计值为  $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots)$

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots) = \sum \ln p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots)$$

令每个偏导为 0 即可求驻点 (若只有一个估计量则直接求导)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots) = 0$$

## 10.2 估计量评价标准

### 10.2.1 \* 均方误差

$$E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = D(\hat{\theta}) + \left(\theta - E(\hat{\theta})\right)^2$$

### 10.2.2 无偏性

无偏估计  $E(\hat{\theta}) = \theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

性质  $\bar{X}$  是  $\mu$  的无偏估计, 即  $E(\bar{X}) = \mu$

$S^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计, 即  $E(S^2) = \sigma^2$

$S$  不是  $\sigma$  的无偏估计,  $E(S) = \sqrt{\sigma^2 - D(S)} \leq \sigma$

未修正样本方差  $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  是  $\sigma^2$  的有偏估计, 也是  $\sigma^2$  的渐进无偏估计



### 10.2.3 有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  均为  $\theta$  的无偏估计, 均方误差准则就是方差准则, 若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ , 称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效

### 10.2.4 相合 (一致) 性

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

## 10.3 区间估计

$\theta$  未知参数

$T$  已知参数

$F$  已知分布且与  $\theta$  无关

$I(T, \theta)$  枢轴变量, 服从分布  $F$

$\alpha \in (0, 1)$  显著性水平 (通常取值为 0.05 或 0.01)

$1 - \alpha$  置信水平 (置信度)

$v_{\frac{\alpha}{2}}$   $F$  的上  $\frac{\alpha}{2}$  分位点

$v_{1-\frac{\alpha}{2}}$   $F$  的上  $1 - \frac{\alpha}{2}$  分位点

$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  双侧置信区间, 置信下限  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(T)$ , 置信上限  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(T)$

$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  是  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的 (双侧) 置信区间

$$P\left\{v_{1-\frac{\alpha}{2}} < I(T, \theta) < v_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha \implies P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1 - \alpha$$

## 11 假设检验

$H_0$  原假设 (零假设)

$H_1$  备择假设 (取原假设的逆命题)

弃真错误 (第一类错误、 $\alpha$  错误)  $H_0$  为真, 且被拒绝

纳伪错误 (第二类错误、 $\beta$  错误)  $H_0$  为假, 且被接受

$\alpha$   $P\{(x_1, x_2, \dots, x_n \in W) | H_0 \text{ 为真}\}$  或  $P_{\theta \in \Theta_W}\{H_0 \text{ 为真}\}$ ; 显著性水平、弃真错误的概率

$\beta$   $P\{(x_1, x_2, \dots, x_n \in D) | H_0 \text{ 为假}\}$  或  $P_{\theta \in \Theta_D}\{H_0 \text{ 为假}\}$ ; 纳伪错误的概率

$W$  拒绝域; 若统计量的值属于拒绝域, 则拒绝  $H_0$

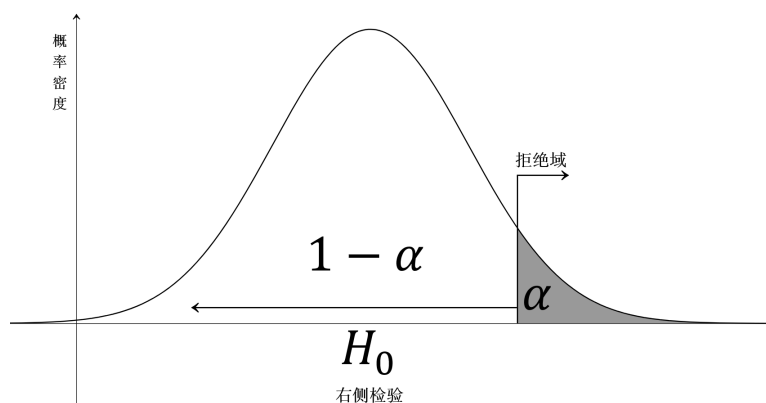
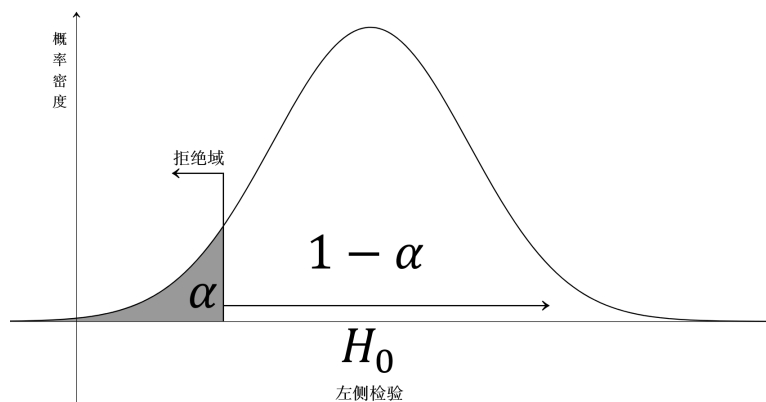
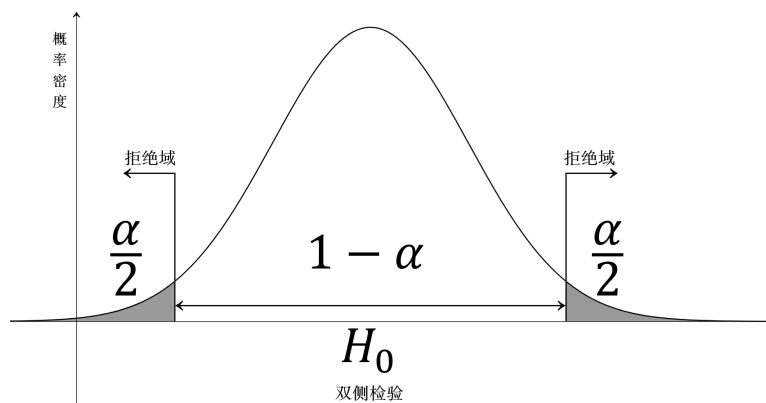
$D$  接受域; 若统计量的值属于接受域, 则接受  $H_0$

决策	总体情况	
	$H_0$ 为真	$H_0$ 为假
接受 $H_0$	正确 ( $1 - \alpha$ )	纳伪 ( $\beta$ )
拒绝 $H_0$	弃真 ( $\alpha$ )	正确 ( $1 - \beta$ )

$H_0 : \theta = \theta_0$  时，选择双侧检验（拒绝两侧偏离  $\theta_0$  的值）

$H_0 : \theta > \theta_0$  时，选择左侧检验（拒绝左侧远小于  $\theta_0$  的值）

$H_0 : \theta < \theta_0$  时，选择右侧检验（拒绝右侧远大于  $\theta_0$  的值）



## Part III

# 附录

## A 正态总体相关表

以下都有，两个样本相互独立：

$$X_1, X_2, \dots, X_m \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

表 1: 正态总体的常用统计量分布

符号	统计量	服从分布
	$\bar{X}$	$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
$U$	$\bar{X}^* = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$
$V$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\chi^2(n-1)$
$W$	$\sum_{i=1}^n X_i^{*2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$
$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
	$\bar{X} \pm \bar{Y}$	$N\left(\mu_X \pm \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$
$U_1$	$(\bar{X} \pm \bar{Y})^* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$
$V_1 = V_X + V_Y$	$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}$	$\chi^2(m+n-2)$
$\frac{W_X/m}{W_Y/n}$	$\frac{\sum_{i=1}^m X_i^{*2}/m}{\sum_{i=1}^n Y_i^{*2}/n} = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m, n)$
$\frac{V_X/(m-1)}{V_Y/(n-1)}$	$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ 时 $\frac{U_1}{\sqrt{V_1/(m+n-2)}}$	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$

<sup>†</sup>  $\bar{X}, S_X^2$  相互独立

表 2: 正态总体的区间估计枢轴变量和置信水平为  $1 - \alpha$  的双侧置信区间

待估参数 $\theta$	条件 $T$	枢轴变量 $I$	服从分布 $F$	双侧置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$
$\mu$	$\sigma^2$ 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
	$\sigma^2$ 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
$\sigma^2$	$\mu$ 已知	$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$
	$\mu$ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$
$\mu_X - \mu_Y$	$\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ 已知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$
	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) S_\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}})$
$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	$\mu_X, \mu_Y$ 已知	$\frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2 / m \sigma_X^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 / n \sigma_Y^2}$	$F(m, n)$	$\left(\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 F_{\alpha/2}(m, n)}, \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 F_{1-\alpha/2}(m, n)}\right)$
	$\mu_X, \mu_Y$ 未知	$\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}\right)$

$$^\dagger S_\omega = \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$$

 $^\ddagger$  对应参数未知时, 用  $\bar{X}$  代替  $\mu$ , 用  $S^2$  代替  $\sigma^2$

表 3: 正态总体的假设检验统计量和置信水平为  $1 - \alpha$  的拒绝域

原假设 $H_0$	其他参数 $T$	检验统计量 $I$	服从分布 $F$	拒绝域 $W$
$\mu = \mu_0$	$\sigma^2$ 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$ u  \geq u_{\alpha/2}$
$\mu \leq \mu_0$				$u \geq u_{\alpha}$
$\mu \geq \mu_0$				$u \leq -u_{\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\sigma^2$ 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$ t  \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$				$t \geq t_{\alpha}(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$				$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\mu$ 已知	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$				$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$				$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\mu$ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$				$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$				$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	$\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ 已知	$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$	$ u  \geq u_{\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y \leq \delta$				$u \geq u_{\alpha}$
$\mu_X - \mu_Y \geq \delta$				$u \leq -u_{\alpha}$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	$\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ 未知	$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$ t  \geq t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \leq \delta$				$t \geq t_{\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \geq \delta$				$t \leq -t_{\alpha}(m+n-2)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\mu_X, \mu_Y$ 已知	$F = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2 / m}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 / n}$	$F(m, n)$	$F \geq F_{\alpha/2}(m, n)$ 或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(m, n)$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$				$F \geq F_{\alpha}(m, n)$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$				$F \leq F_{1-\alpha}(m, n)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\mu_X, \mu_Y$ 未知	$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$F \geq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ 或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$				$F \geq F_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$				$F \leq F_{1-\alpha}(m-1, n-1)$

$$^{\dagger} S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$$

 $^{\ddagger}$  对应参数未知时, 用  $\bar{X}$  代替  $\mu$ , 用  $S^2$  代替  $\sigma^2$