

概率论与数理统计

Sunday 26th October, 2025

目录

I 概率论	4
1 随机事件及其概率	4
1.1 符号	4
1.2 减法	4
1.3 条件概率	4
1.4 乘法公式	4
1.5 古典概型	5
1.6 几何概型	5
1.7 完备事件组	5
1.8 全概率公式	5
1.8.1 全概率条件公式	5
1.9 贝叶斯公式	5
1.10 独立事件	5
1.11 伯努利概型	6
2 连续型随机变量及其分布函数	6
2.1 密度函数（概率密度）	6
2.2 分布函数	6
3 分布	7
3.1 边缘分布	7
3.1.1 边缘分布律	7
3.1.2 边缘密度函数	7
3.2 条件分布	8
3.2.1 条件分布律	8
3.2.2 条件密度函数	8
3.3 独立性	8
3.4 换元	8
3.4.1 一维	9
3.4.2 二维	9
3.4.3 * 特殊	9
4 一维离散、连续型随机变量及其分布律、密度、分布函数	11
4.1 泊松定理	11
4.2 经验原则	12
5 二维连续型随机变量及其密度函数	12
5.1 均匀分布	12
5.2 正态分布	12

II 数理统计	12
6 数字特征	13
6.1 期望	13
6.1.1 性质	13
6.2 方差	13
6.2.1 标准差	13
6.2.2 离散型	13
6.2.3 连续型	14
6.2.4 性质	14
6.3 标准化随机变量	14
6.4 协方差	14
6.4.1 性质	14
6.4.2 协方差矩阵 (对称矩阵)	15
6.5 (线性) 相关系数	15
6.5.1 * (线性) 均方误差	15
6.5.2 定义	15
6.5.3 性质	15
6.5.4 不 (线性) 相关	16
7 大数定律与中心极限定理	16
7.1 切比雪夫不等式	16
7.2 大数定律	16
7.2.1 依概率收敛	16
7.2.2 伯努利大数定律	16
7.2.3 切比雪夫大数定律	16
7.2.4 辛钦大数定律	17
7.3 中心极限定理	17
7.3.1 定理	17
7.3.2 列维-林德伯格定理 (独立同分布)	17
7.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理 (二项分布)	17
8 统计量	18
8.1 样本容量	18
8.2 简单随机样本	18
8.3 样本联合分布函数 (密度函数)	18
8.4 样本均值	18
8.5 (修正) 样本方差	18
8.6 样本标准差	18
8.7 极差	19
8.8 其他	19
8.9 矩	19

9 抽样分布	20
9.1 * 非中心的卡方分布	20
9.2 上侧分位点	21
10 参数估计	21
10.1 点估计	21
10.1.1 矩估计	21
10.1.2 极大似然估计	21
10.2 点估计量评价标准	22
10.2.1 * 均方误差	22
10.2.2 无偏性	22
10.2.3 有效性	22
10.2.4 相合（一致）性	22
10.3 区间估计	22
11 假设检验	23
 III 附录	 25
A 正态总体相关表	25

Part I

概率论

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 AB	$\{\omega \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
相容事件		$A \cap B \neq \emptyset$
互斥事件		$A \cap B = \emptyset$
对立事件	\bar{A}	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 减法

$$A \supseteq B \implies P(A - B) = P(A) - P(B)$$

$$\text{推论: } P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

1.3 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率 ($P(A) > 0$)

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.4 乘法公式

$$P(A) > 0$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1.5 古典概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点个数}}{\Omega \text{ 样本点个数}}$$

1.6 几何概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何测度}}{\Omega \text{ 的几何测度}}$$

1.7 完备事件组

$$\{A_i\}$$

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

1.8 全概率公式

$\{A_i\}$ 完备事件组

$$P(B) = \sum P(A_i B) = \sum P(A_i) P(B|A_i)$$

1.8.1 全概率条件公式

$$P(C|B) = \sum P(A_i C|B) = \sum P(A_i|B) P(C|A_i B)$$

1.9 贝叶斯公式

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j B)}{\sum P(A_i B)} = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum P(A_i) P(B|A_i)}$$

1.10 独立事件

$$A, B \text{ 相互独立} \iff P(AB) = P(A) P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff P(A|B) = P(A|\overline{B})$$

$$\iff \overline{A}, B \text{ 相互独立}$$

$$\iff A, \overline{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff \overline{A}, \overline{B} \text{ 相互独立}$$

$$\begin{aligned}
 A, B, C \text{ 相互独立} &\iff P(AB) = P(A)P(B); \\
 &P(AC) = P(A)P(C); \\
 &P(BC) = P(B)P(C); \\
 &P(ABC) = P(A)P(B)P(C)
 \end{aligned}$$

1.11 伯努利概型

定义:

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中, A 事件恰好发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数 (概率密度)

$f(x)$ 、 $f(x, y)$ 等

性质

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

2.2 分布函数

$F(x)$ 、 $F(x, y)$ 等

定义

$$P\{X = x_0\} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$$

当 $F(x)$ 连续时 (连续型随机变量)

$$P\{X = x_0\} = 0$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

性质

$$F(x) \geq 0; F(x) \nearrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y)$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t|y) dt$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y | X = x\} = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(x|t) dt$$

3.2.1 条件分布律

$$p_{j|i} = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

$$p_{i|j} = P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

3.2.2 条件密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

3.3 独立性

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

若 X, Y 独立

充要条件 1:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

充要条件 2:

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

3.4 换元

以下都有

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

其中 g 为单调可导函数

3.4.1 一维

$$Y = h(X)$$

令 $g = h^{-1}$, 即 $X = g(Y)$, 其中 g 为单调可导函数 (即 h^{-1} 单调可导)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{h(X) \leq y\} = P\{X \leq g(y)\} \\ &= F_{h(X)}(y) = F_X(g(y)) \\ &= \int_{h(X) \leq y} f(t) dt \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

3.4.2 二维

$$Z = g(X, Y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\ &= P\{g(X, Y) \leq z\} \\ &= F_{g(X, Y)}(z) \\ &= \iint_{g(X, Y) \leq z} f(u, v) du dv \\ \text{若 } X, Y \text{ 独立} &= \iint_{g(X, Y) \leq z} f_X(u) f_Y(v) du dv \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

3.4.3 * 特殊

和 $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

若 X, Y 独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = f_X(z) * f_Y(z)$$

商 $Z = \frac{X}{Y}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

若 X, Y 独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy$$

积 $Z = XY$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$$

若 X, Y 独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) dy$$

最值分布 若 X, Y 独立

$$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$$

则

$$F_M = F_X F_Y$$

$$1 - F_N = (1 - F_X)(1 - F_Y)$$

$$f_M = F'_M = f_X F_Y + f_Y F_X$$

$$f_N = F'_N = f_X(1 - F_Y) + f_Y(1 - F_X)$$

4 一维离散、连续型随机变量及其分布律、密度、分布函数

分布	期望	方差	注释	密度函数	分布函数或分布律
两点分布 $B(1, p)$	p	$p(1-p)$	$p \in (0, 1)$		$\frac{X}{P} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{matrix}$
二项分布 $B(n, p)$	np	$np(1-p)$	$p \in (0, 1)$ $n \in \mathbb{N}^+$ $k \geq 0$		$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ	$\lambda > 0$ $k \geq 0$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$p \in (0, 1)$ $k > 0$ 前 $k-1$ 次都失败, 第 k 次成功		$(1-p)^{k-1} p$
超几何分布 $H(M, N, n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$	$N > 1$ 总样本数 $n \leq N$ 抽取样本数 $M \leq N$ 指定样本数 k 抽到指定样本数 $\max\{0, n+M-N\} \leq k \leq \min\{M, n\}$		$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
均匀分布 $U[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
标准正态分布 $N(0, 1)$	0	1		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$\mu \in \mathbb{R}$ 期望 $\sigma > 0$ 标准差	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}$

二项分布又名伯努利分布

正态分布又名高斯分布

4.1 泊松定理

n 重伯努利试验中, 事件发生概率 $p_n \in (0, 1)$ 与试验次数有关, 当 $p_n < 0.1; n > 100$ 时可近似为泊松分布。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

n 重伯努利试验：只有两种结果，且每次实验概率相同、相互独立，做 n 次

4.2 经验原则

$$P\{|X - \mu| < k\sigma\} = 2\Phi_0(k) - 1 \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{cases} P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0.6827 \\ P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9545 \\ P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.9973 \end{cases}$$

5 二维连续型随机变量及其密度函数

5.1 均匀分布

$$(X, Y) \sim U(D)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

5.2 正态分布

$$(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$$

$\mu \in \mathbb{R}$ 期望

$\sigma > 0$ 标准差

$\rho \in (-1, 1)$ ，相关系数（ $\rho = 0$ 时 X, Y 独立）

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若 X, Y 独立

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \implies (X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, 0)$$

$$Z = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

Part II

数理统计

6 数字特征

6.1 期望

期望	离散型	连续型
$E(X)$	$\sum x_i p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
$E(Y) (Y = g(X))$	$\sum g(x_i) p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
$E(Z) (Z = g(X, Y))$	$\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$

6.1.1 性质

线性

$$E(kX + c) = kE(X) + c$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

线性相关性

$$X, Y \text{ 不相关} \iff E(XY) = E(X)E(Y)$$

6.2 方差

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

6.2.1 标准差

$$\sqrt{D(X)}$$

6.2.2 离散型

$$D(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$$

6.2.3 连续型

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

6.2.4 性质

线性

$$D(kX + c) = k^2 D(X)$$

线性相关性

$$X, Y \text{ 不相关} \iff D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

6.3 标准化随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$
$$E(X^*) = 0$$
$$D(X^*) = 1$$

6.4 协方差

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

6.4.1 性质

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, X) = D(X)$$

交换律

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

线性

$$\text{Cov}(X, c) = 0$$

$$\text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

6.4.2 协方差矩阵（对称矩阵）

X, Y 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Cov}(Y, Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & D(Y) \end{bmatrix}$$

6.5 （线性）相关系数

6.5.1 *（线性）均方误差

用 $aX + b$ 去拟合 Y

$e(a, b)$ 越小表明线性关系越强，越大越弱

$e(a_0, b_0)$ 最小均方误差

(a_0, b_0) 驻点

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}$$

$$b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$$

$$e(a, b) = E[(Y - (aX + b))^2]$$

$$e(a_0, b_0) = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

6.5.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

6.5.3 性质

$$\rho \in [-1, 1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 \ (a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \quad (\text{正相关}) \quad \rho_{XY} = 1 \\ a < 0 \quad (\text{负相关}) \quad \rho_{XY} = -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|} \rho_{XY}$$

6.5.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \iff \text{Cov}(X, Y) &= 0 \\ \iff E(XY) &= E(X)E(Y) \\ \iff D(X \pm Y) &= D(X) + D(Y)\end{aligned}$$

独立 \implies 不相关

7 大数定律与中心极限定理

7.1 切比雪夫不等式

设 X 有有限方差（即有界）

$$\begin{aligned}\exists E(X), D(X); \forall \varepsilon > 0 \\ \rightarrow P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} &\leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \text{或 } P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} &\geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

7.2 大数定律

7.2.1 依概率收敛

随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于常数 a

$$X_n \xrightarrow{P} a (n \rightarrow \infty)$$

定义为

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

7.2.2 伯努利大数定律

设事件 A 每次实验发生概率为 p ，且 n 重伯努利试验中发生次数为 n_A ，则

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \\ \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= 1 \\ \text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} &= 0\end{aligned}$$

7.2.3 切比雪夫大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立（可不同分布），且有有限方差，则

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \\ & \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon \} = 1 \\ & \text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - E(\bar{X})| \geq \varepsilon \} = 0 \end{aligned}$$

7.2.4 辛钦大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，则有相同的期望 μ ，则

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \\ & \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - \mu| < \varepsilon \} = 1 \\ & \text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon \} = 0 \end{aligned}$$

7.3 中心极限定理

7.3.1 定理

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立（可不同分布），期望、方差均存在，则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} & \sim N(E(\bar{X}), D(\bar{X})) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} & \sim N(0, 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} \leq x \right\} & = \Phi_0(x) \end{aligned}$$

7.3.2 列维-林德伯格定理（独立同分布）

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，存在相同的期望 μ 、方差 σ^2 ，则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} & \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} & \sim N(0, 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x \right\} & = \Phi_0(x) \end{aligned}$$

7.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布）

设随机变量 $\eta_n \sim B(n, p)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \sim N(np, np(1-p))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \Phi_0(x)$$

显然 $\eta_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 其中随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同服从 $B(1, p)$ 分布

8 统计量

8.1 样本容量

$$n$$

8.2 简单随机样本

X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且同分布

8.3 样本联合分布函数（密度函数）

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod F(x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod f(x_i)$$

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod p_i$$

8.4 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

8.5 （修正）样本方差

注：下文所谓“样本方差”均指“修正样本方差”

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

8.6 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

8.7 极差

$$\max_{1 \leq i \leq n} X_i - \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

8.8 其他

以下都有，若随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，则

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu \\ D(X_1) &= D(X_2) = \cdots = D(X_n) = \sigma^2 \end{aligned}$$

样本均值的期望等于总体期望，样本方差的期望等于总体方差

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ E(S^2) &= \sigma^2 \\ D(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

样本均值与样本方差相互独立

$$\bar{X}, S_X^2 \text{ 相互独立}$$

8.9 矩

名称	定义	离散	连续
k 阶原点矩	$E(X^k)$	$\sum x_i^k p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$
k 阶中心矩	$E[(X - E(X))^k]$	$\sum (x_i - \bar{X})^k p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^k f(x) dx$
$k+l$ 阶混合原点矩	$E(X^k Y^l)$		
$k+l$ 阶混合中心矩	$E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l]$		

$$k, l \in \mathbb{N}^+$$

$$1 \text{ 阶原点矩} = E(X)$$

$$1 \text{ 阶中心矩} = 0$$

$$2 \text{ 阶中心矩} = D(X)$$

$$1+1 \text{ 阶混合中心矩} = \text{Cov}(X, Y)$$

9 抽样分布

分布	期望	方差	注释	性质
* 密度函数				
* 伽马分布 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	伽马函数 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0)$	非负 再生性 $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ 且 X_1, X_2 相互独立 则 $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$
	$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} (x > 0, \text{其余概率密度为0})$			
卡方分布 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ $= \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$	n	$2n$	$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ n 自由度 $X_i \sim N(0, 1)$ 共 n 个且 独立同分布	非负 再生性 $\chi_1^2 \sim \chi^2(m), \chi_2^2 \sim \chi^2(n)$ 且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立 则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$
	$f(x, n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} (x > 0, \text{其余概率密度为0})$			
t 分布 $T \sim t(n)$	0 $(n > 1)$	$\frac{n}{n-2}$ $(n > 2)$	$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ n 自由度 $X \sim N(0, 1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立	偶函数 $n = 1$ 时, 为柯西分布 n 充分大时, 为标准正态分布
	$f(x, n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$			
F 分布 $F \sim F(m, n)$	$\frac{n}{n-2}$ $(n > 2)$	$\frac{m+n-2}{m(n-2)^2}$ $\frac{2n^2}{n-4}$ $(n > 4)$	$F = \frac{X/m}{Y/n}$ m 第一自由度 n 第二自由度 $X \sim \chi^2(m)$ $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立	非负 $T \sim t(n) \implies T^2 \sim F(1, n)$ $F \sim F(m, n) \implies F^{-1} \sim F(n, m)$
	$f(x, m, n) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} (x > 0, \text{其余概率密度为0})$			

9.1 * 非中心的卡方分布

$X_i \sim N(\mu_i, 1)$ 共 n 个且独立

δ 非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

9.2 上侧分位点

x_p 上侧分位点

p x_p 右侧区域的概率

$$P\{X \geq x_p\} = p \quad (p \in (0, 1))$$

10 参数估计

10.1 点估计

10.1.1 矩估计

基本思想 样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k = 1$ 一般采用 $\bar{X} = E(X)$

$$k = 2 \text{ 一般采用 } \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

$$\text{也可以用 } \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

10.1.2 极大似然估计

θ_i 估计量（即分布的未知参数）

$p(x; \theta_1, \theta_2, \dots)$ X_1, X_2, \dots 的分布律或密度函数

$L(\theta_1, \theta_2, \dots) = L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)$ 似然函数（样本联合分布函数）

设 X_1, X_2, \dots 为分布 $F(\theta_1, \theta_2, \dots)$ 的简单随机样本
构造似然函数

$$L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots) = \prod p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots)$$

调整估计量 θ_i ，令似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \dots)$ 取极大值

$$L(x_1, x_2, \dots; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots) = \max \{L(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)\}$$

则此时估计值为 $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots)$

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots) = \sum \ln p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots)$$

令每个偏导为 0 即可求驻点 (若只有一个估计量则直接求导)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots) = 0$$

10.2 点估计量评价标准

10.2.1 * 均方误差

$$E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = D(\hat{\theta}) + (\theta - E(\hat{\theta}))^2$$

10.2.2 无偏性

无偏估计 $E(\hat{\theta}) = \theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

性质 \bar{X} 是 μ 的无偏估计, 即 $E(\bar{X}) = \mu$

S^2 是 σ^2 的无偏估计, 即 $E(S^2) = \sigma^2$

S 不是 σ 的无偏估计, $E(S) = \sqrt{\sigma^2 - D(S)} \leq \sigma$

未修正样本方差 $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的有偏估计, 也是 σ^2 的渐进无偏估计

10.2.3 有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计, 均方误差准则就是方差准则, 若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, 称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

10.2.4 相合 (一致) 性

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\right\} = 1$$

10.3 区间估计

θ 未知参数

T 已知参数

F 已知分布且与 θ 无关

$I(T, \theta)$ 枢轴变量, 服从分布 F

$\alpha \in (0, 1)$ 显著性水平 (通常取值为 0.05 或 0.01)

$1 - \alpha$ 置信水平 (置信度)

$v_{\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点

$v_{1-\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $1 - \frac{\alpha}{2}$ 分位点

$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 双侧置信区间, 置信下限 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(T)$, 置信上限 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(T)$

$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的 (双侧) 置信区间

$$P\{v_{1-\frac{\alpha}{2}} < I(T, \theta) < v_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha \implies P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$$

11 假设检验

H_0 原假设 (零假设)

H_1 备择假设 (取原假设的逆命题)

弃真错误 (第一类错误、 α 错误) H_0 为真, 且被拒绝

纳伪错误 (第二类错误、 β 错误) H_0 为假, 且被接受

α $P\{(x_1, x_2, \dots, x_n \in W) | H_0 \text{ 为真}\}$ 或 $P_{\theta \in \Theta_W}\{H_0 \text{ 为真}\}$; 显著性水平、弃真错误的概率

β $P\{(x_1, x_2, \dots, x_n \in D) | H_0 \text{ 为假}\}$ 或 $P_{\theta \in \Theta_D}\{H_0 \text{ 为假}\}$; 纳伪错误的概率

W 拒绝域; 若统计量的值属于拒绝域, 则拒绝 H_0

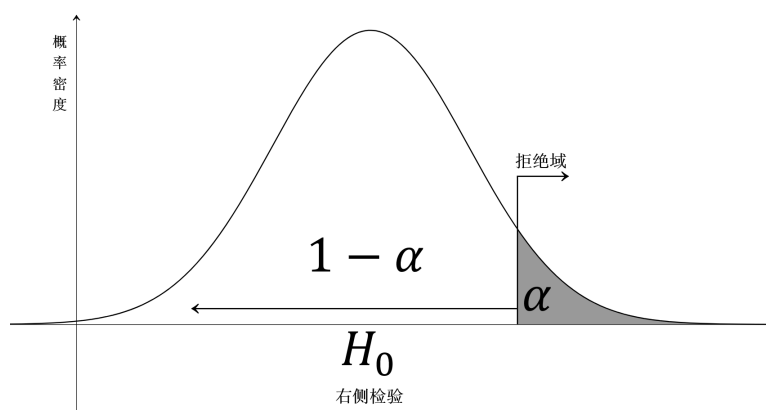
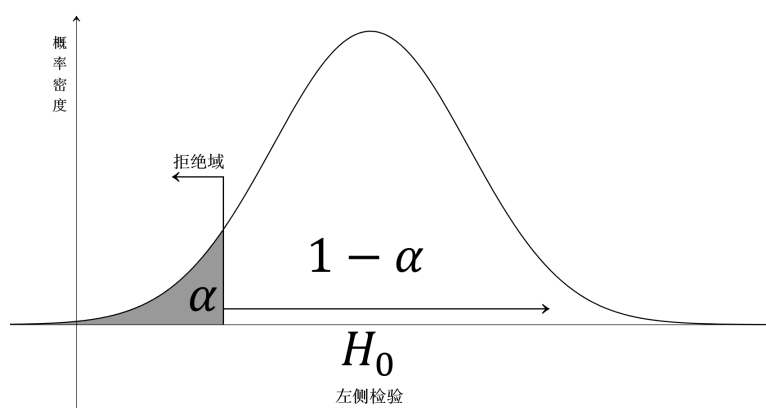
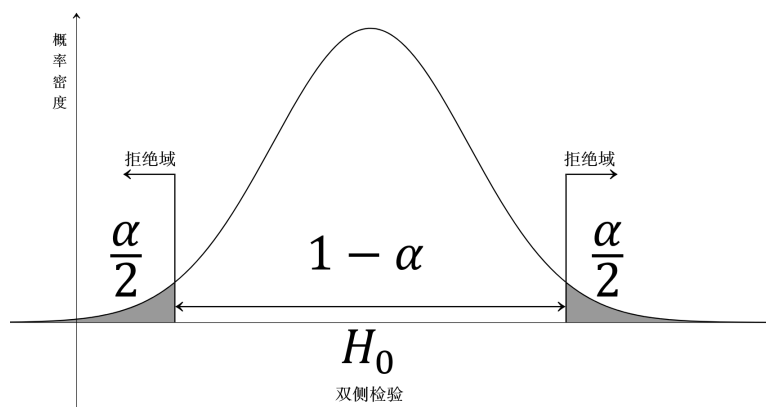
D 接受域; 若统计量的值属于接受域, 则接受 H_0

决策	总体情况	
	H_0 为真	H_0 为假
接受 H_0	正确 ($1 - \alpha$)	纳伪 (β)
拒绝 H_0	弃真 (α)	正确 ($1 - \beta$)

$H_0: \theta = \theta_0$ 时, 选择双侧检验 (拒绝两侧偏离 θ_0 的值)

$H_0: \theta > \theta_0$ 时, 选择左侧检验 (拒绝左侧远小于 θ_0 的值)

$H_0: \theta < \theta_0$ 时, 选择右侧检验 (拒绝右侧远大于 θ_0 的值)



Part III

附录

A 正态总体相关表

以下都有，两个样本相互独立：

$$X_1, X_2, \dots, X_m \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

表 1: 正态总体的常用统计量分布

符号	统计量	服从分布
	\bar{X}	$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
U	$\bar{X}^* = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$
V	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\chi^2(n-1)$
W	$\sum_{i=1}^n X_i^{*2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$
$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
	$\bar{X} \pm \bar{Y}$	$N\left(\mu_X \pm \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$
U_1	$(\bar{X} \pm \bar{Y})^* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$
$V_1 = V_X + V_Y$	$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}$	$\chi^2(m+n-2)$
$\frac{W_X/m}{W_Y/n}$	$\frac{\sum_{i=1}^m X_i^{*2}/m}{\sum_{i=1}^n Y_i^{*2}/n} = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m, n)$
$\frac{V_X/(m-1)}{V_Y/(n-1)}$	$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ 时 $\frac{U_1}{\sqrt{V_1/(m+n-2)}}$	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$

[†] \bar{X}, S_X^2 相互独立

表 2: 正态总体的区间估计枢轴变量和置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间

待估参数 θ	条件 T	枢轴变量 I	服从分布 F	双侧置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$
μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 已知	$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$
	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$
$\mu_X - \mu_Y$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$
	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) S_\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}})$
$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	μ_X, μ_Y 已知	$\frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2 / m \sigma_X^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 / n \sigma_Y^2}$	$F(m, n)$	$\left(\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 F_{\alpha/2}(m, n)}, \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 F_{1-\alpha/2}(m, n)}\right)$
	μ_X, μ_Y 未知	$\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}\right)$

$$^\dagger S_\omega = \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$$

‡ 对应参数未知时, 用 \bar{X} 代替 μ , 用 S^2 代替 σ^2

表 3: 正态总体的假设检验统计量和置信水平为 $1 - \alpha$ 的拒绝域

原假设 H_0	其他参数 T	检验统计量 I	服从分布 F	拒绝域 W
$\mu = \mu_0$	σ^2 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$ u \geq u_{\alpha/2}$
$\mu \leq \mu_0$				$u \geq u_\alpha$
$\mu \geq \mu_0$				$u \leq -u_\alpha$
$\mu = \mu_0$	σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$ t \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$				$t \geq t_\alpha(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$				$t \leq -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	μ 已知	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$				$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$				$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$				$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$				$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0, 1)$	$ u \geq u_{\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y \leq \delta$				$u \geq u_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y \geq \delta$				$u \leq -u_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 未知	$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$ t \geq t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \leq \delta$				$t \geq t_\alpha(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \geq \delta$				$t \leq -t_\alpha(m+n-2)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 已知	$F = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2 / m}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 / n}$	$F(m, n)$	$F \geq F_{\alpha/2}(m, n)$ 或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(m, n)$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$				$F \geq F_\alpha(m, n)$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$				$F \leq F_{1-\alpha}(m, n)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 未知	$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$F \geq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ 或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$				$F \geq F_\alpha(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$				$F \leq F_{1-\alpha}(m-1, n-1)$

$$^\dagger S_\omega = \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$$

 ‡ 对应参数未知时, 用 \bar{X} 代替 μ , 用 S^2 代替 σ^2