线性代数

Saturday 3$^{\text{rd}}$ August, 2024

目录

1 行列式（方阵）

Definition 1.0.1. 余子式：M_{ij}

代数余子式：A_{ij}

$$\det A = \det A^T$$

$$\det \lambda A = \lambda^n \det A$$

$$\det AB = \det A \det B$$

$$\det A = \sum_i a_{ij} A_{ij} = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.1 克拉默法则

线性方程组：

$$\sum_i x_i \boldsymbol{\alpha}_i = y\boldsymbol{\beta}$$

则有增广矩阵 $\bar{A}_{n+1,n}$：

$$\bar{A} = [A|\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\beta} \\ | & | & & | & | \end{bmatrix}$$

线性方程解：

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} | & & | & | & | & & | \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{i-1} & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \\ | & & | & | & | & & | \end{vmatrix}}{\det A}$$

1.2 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

2 旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3 运算律

加法交换律 $A + B = B + A$

加法结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$

减法 $A - B = A + (-B)$

数乘

$$(\lambda\mu)\,A = \lambda\,(\mu A) = \mu\,(\lambda A)$$
$$(\lambda + \mu)\,A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

零元 $A + O = A$

幺元 $AE = EA = A$

外积

$$C_{m,p} = A_{m,n} B_{n,p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{c_{11}} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & \color{green}{c_{22}} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{1n}} \\ \color{green}{a_{21}} & \color{green}{a_{22}} & \color{green}{\cdots} & \color{green}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{b_{11}} & \color{green}{b_{12}} & \cdots & b_{1p} \\ \color{red}{b_{21}} & \color{green}{b_{22}} & \cdots & b_{2p} \\ \color{red}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ \color{red}{b_{n1}} & \color{green}{b_{n2}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

3.1 数幂（方阵）

$$
\begin{aligned}
A^0 &= E \\
A^n &= AA^{n-1} \\
A^k A^l &= A^{k+l} \\
\left(A^k\right)^l &= A^{kl}
\end{aligned}
$$

3.2 内积

Definition 3.2.1.

$$A \cdot B = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$$

交换律 $A \cdot B = B \cdot A$

数乘 $(\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B)$

分配律 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

3.2.1 柯西-施瓦茨不等式

（积和方 $\leqslant$ 方和积）

$$(A \cdot B)^2 \leqslant (A \cdot A)(B \cdot B)$$

4 行（列）矩阵（向量）

4.1 范数（模长）

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

4.2 内积（点乘）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= \sum_i v_i w_i (v_i w_i\text{为向量各元素}) \\
&= \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \\
&= \begin{cases} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\text{、}\boldsymbol{w}\text{为列向量} \\ \boldsymbol{v} \boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{w} \boldsymbol{v}^T & \boldsymbol{v}\text{、}\boldsymbol{w}\text{为行向量} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4.3 外积（叉乘）

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x \\ \boldsymbol{v}_y \\ \boldsymbol{v}_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_x \\ \boldsymbol{w}_y \\ \boldsymbol{w}_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \boldsymbol{v}_x & \boldsymbol{w}_x \\ \hat{\jmath} & \boldsymbol{v}_y & \boldsymbol{w}_y \\ \hat{k} & \boldsymbol{v}_z & \boldsymbol{w}_z \end{vmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \sin \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

5 转置

Definition 5.0.1.

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(kA)^T = kA^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k$$

6 逆（方阵）

Definition 6.0.1 (经过矩阵 A 变换，变换后的线性空间可以通过 A^{-1} 变换回原线性空间)**.**

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$\exists A^{-1} \implies \exists \left(A^T\right)^{-1}$$
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

若矩阵 A 变换压缩了维度，则无法通过逆矩阵变换回来：

$$\exists A^{-1} \iff r\left(A_n\right) = n \iff \det A \neq 0$$

7 伴随（方阵）

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = (\det A)\,E$$
$$(kA)^* = k^{n-1}A^*$$
$$\det A \neq 0 \implies A^* = (\det A)\,A^{-1}$$
$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$$
$$\det A^* = (\det A)^{n-1}$$

8 分块矩阵

运算与普通矩阵相同

9 初等变换（等价）

Definition 9.0.1. 行：r_i，列：c_i

1. 对换两行（列）：$r_i \leftrightarrow r_j$

2. k 乘某行（列）：kr_i 或 $r_i \times k\,(k \neq 0)$

3. 加某行（列）k 倍：$r_i + kr_j$

反身性 $A \cong A$

对称性 $A \cong B \implies B \cong A$

传递性 $A \cong B, B \cong C \implies A \cong C$

若对 A 初等行/列变换，可先对 E 作，即可得到 P/Q

$$PA = (PE)\,A, AQ = A\,(EQ)$$

初等变换不改变秩，故 P、Q 必然满秩/可逆

$$A \xrightarrow{r} B \iff PA = B$$
$$A \xrightarrow{c} B \iff AQ = B$$
$$A \rightarrow B \iff PAQ = B$$
$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{c} \begin{bmatrix} B \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

10 秩

Definition 10.0.1 (经过矩阵 A 变换，变换后的线性空间的维度是 $r\left(A\right)$)**.**

$$r\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\right]$$

$$A \cong B \implies r\left(A\right) = r\left(B\right)$$
$$\max\left\{r\left(A\right), r\left(B\right)\right\} \leqslant r\left(A, B\right) \leqslant r\left(A\right) + r\left(B\right)$$
$$r\left(A + B\right) \leqslant r\left(A\right) + r\left(B\right)$$
$$r\left(AB\right) \leqslant \min\{r\left(A\right), r\left(B\right)\}$$
$$\exists P^{-1}, Q^{-1} \implies r\left(A\right) = r\left(PAQ\right)$$
$$r\left(A_{m,n}\right) + r\left(B_{n,s}\right) \leqslant n$$

$$\begin{cases} r\left(A\right) = n & \implies r\left(A^*\right) = n \\ r\left(A\right) = n - 1 & \implies r\left(A^*\right) = 1 \\ r\left(A\right) < n - 1 & \implies r\left(A^*\right) = 0 \end{cases}$$

满秩（方阵）：$r\left(A_n\right) = n$
奇异矩阵：不满秩的方阵
非奇异矩阵：满秩方阵

11 正交矩阵（方阵）

Definition 11.0.1 (矩阵行（列）向量组两两正交，且都为单位向量)**.**

$$AA^T = E$$

$$A^{-1} = A^T \iff AA^T = A^T A = E$$
$$\det A = \pm 1$$
$$\left.\begin{aligned} AA^T = E \\ BB^T = E \end{aligned}\right\} \implies \left(AB\right)\left(AB\right)^T = E$$

12 迹（方阵）

$$\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$$

13 特征（方阵）

Definition 13.0.1. 特征多项式：

$$f\left(\lambda\right)=\det\left(A_n-\lambda E\right)$$

特征值 λ（特征多项式为 0 的根，包括重根，共 n 个）

$$f\left(\lambda\right)=0$$

特征向量 $\boldsymbol{p}$（$1\leqslant\lambda$ 对应线性无关 $\boldsymbol{p}$ 数 $\leqslant\lambda$ 重数）

$$\left(A_n-\lambda E\right)\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}A&=\sum_i\lambda_i\\
\det A&=\prod_i\lambda_i\\
\lambda\text{是}A\text{的特征值}\implies&\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\text{是}A^{-1}\text{的特征值}\\ \dfrac{\det A}{\lambda}\text{是}A^*\text{的特征值}\\ \sum\limits_{i=0}^{m}a_i\lambda^i\text{是}\sum\limits_{i=0}^{m}a_iA^i\text{的特征值}\end{cases}\\
f\left(\lambda\right)&=\left(-1\right)^n\lambda^n+\left(-1\right)^{n-1}\mathrm{tr}A\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+\det A\\
&\xlongequal{n=2}\lambda^2-\mathrm{tr}A\cdot\lambda+\det A
\end{aligned}$$

14 相似（方阵）

Definition 14.0.1.

$$P^{-1}AP=B\iff A\sim B$$

反身性 $A\sim A$

对称性 $A\sim B\implies B\sim A$

传递性 $A\sim B,B\sim C\implies A\sim C$

$$A\sim B\implies\begin{cases}\det\left(A-\lambda_AE\right)=\det\left(B-\lambda_BE\right)\implies\begin{cases}\lambda_A=\lambda_B\\ \mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B\end{cases}\\ \det A=\det B\\ r\left(A\right)=r\left(B\right)\\ A^{-1}\sim B^{-1}\text{（如果都可逆）}\end{cases}$$

15 可对角化（方阵）

Definition 15.0.1.

$$A_n \sim \Lambda$$

$r:\lambda$ 重数

$n-r\left(A-\lambda E\right):\lambda$ 对应线性无关 $\boldsymbol{p}$ 数

$$\begin{aligned}
A \sim \Lambda &\iff n-r\left(A-\lambda E\right)=r \\
&\iff \text{全体线性无关}\boldsymbol{p}\text{数}=n \\
&\iff P^{-1}AP=\Lambda \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ P=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \end{cases}
\end{aligned}$$

16 对称矩阵（方阵）

Definition 16.0.1. 对称矩阵：

$$A=A^T$$

反对称矩阵：

$$A=-A^T$$

实数范围内（即 A 为实矩阵）：

$$\left.\begin{aligned} A&=A^T \\ A\boldsymbol{p}_1&=\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2&=\lambda_2\boldsymbol{p}_2 \\ \lambda_1&\neq\lambda_2 \end{aligned}\right\} \implies \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=0$$

实对称矩阵必可对角化，且

$$\text{实对称矩阵}A \implies \exists\text{正交矩阵}P, P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$$

17 合同（方阵）

Definition 17.0.1.

$$B=C^TAC, \exists C^{-1} \iff A\simeq B$$

反身性 $A\simeq A$

对称性 $A \simeq B \implies B \simeq A$

传递性 $A \simeq B, B \simeq C \implies A \simeq C$

$$A \simeq B \implies r(A) = r(B)$$
$$A \simeq B \iff A, B\text{的特征值中，正、负、零的个数相同}$$

18 二次型（方阵、对称矩阵）

Definition 18.0.1.
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \left(a_{ij} = a_{ji}\right) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

18.1 标准型（对角矩阵）

$$f = \sum_{i}^{n} a_{ii} x_i^2$$

18.2 二次型转标准型

二次型 $f_A \simeq$ 标准型 g_Λ

18.2.1 正交变换法

1. 令 $\det(A - \lambda E) = 0$，解得 n 个特征值 $\{\lambda_n\}$
2. 令 $(A - \lambda_i E)\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$，解得线性无关特征向量组 $\{\boldsymbol{p}_n\}$
3. 用格拉姆-施密特正交单位化 (20.2)，解得正交单位特征向量组 $\{\boldsymbol{e}_n\}$
4. 用正交单位特征向量组构建正交矩阵 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$
5. $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 即可将 f 化为标准型 g

18.2.2 拉格朗日配方法

1. 先配 x_1，再依次往后配；配完的变量后面不能再出现
2. 若只有交叉项，没有平方项，则令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$，替换后按 y 配方

3. 配完后得：$f=k_1\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_{1i}x_i\right)^2+k_2\left(\sum\limits_{i=2}^{n}k_{2i}x_i\right)^2+\cdots+k_n\left(k_{n1}x_n\right)^2$ 可替换每一个平方项为一个

变量 z，即：$\boldsymbol{z}=K\boldsymbol{x}:\begin{cases} z_1=\sum\limits_{i=1}^{n}k_{1i}x_i \\ z_2=\sum\limits_{i=2}^{n}k_{2i}x_i \\ \vdots \\ z_n=k_{n1}x_n \end{cases}$，则原二次型已转为标准型 $g=k_1z_1^2+k_2z_2^2+\cdots+k_nz_n^2$

4. 作倒代换得 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{z}:\begin{cases} x_1=\sum\limits_{i=1}^{n}c_{1i}x_i \\ x_2=\sum\limits_{i=2}^{n}c_{2i}x_i \\ \vdots \\ x_n=c_{n1}x_n \end{cases}$，此处 $C=K^{-1}$ 即为 f 变为标准型 g 的变换矩阵

18.2.3 初等变换法

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{对}A\text{只作对应行变换}]{\text{对整个初等列变换}} \begin{bmatrix} \Lambda \\ C \end{bmatrix}$$

对应行变换

将 a 列与 b 列交换　将 a 行与 b 行交换

将 a 列乘以 k　将 a 行乘以 k

将 a 列加到 b 列　将 a 行列加到 b 行

18.3 规范型

Definition 18.3.1 (只有对角元素且元素只包含 1、-1 和 0 的二次型，称为规范型).

$$f=\sum_{i=1}^{p}y_i^2-\sum_{i=p+1}^{r(A)}y_i^2$$

$$\text{实二次型矩阵}A\simeq\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r(A)-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$$

其中 p 为 A 正特征值个数（正惯性指数）（重根按重数展开算），即 $r(A)-p$ 为负特征值个数（负惯性指数）

$$A\simeq B \iff A,B\text{惯性指数相同}$$

19 正定二次型（方阵）

Definition 19.0.1 (只有正数特征值的二次型)**.**

$$A_n \simeq E_n \iff A\text{为正定矩阵（正定二次型）}$$

$$\begin{aligned}
A\text{正定} &\iff A\text{特征值全为正} \\
&\iff A\text{正惯性指数} = n \\
&\iff A\text{各阶顺序主子式} > 0 \\
&\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}_{1 \leqslant i \leqslant n} > 0 \\
&\implies \det A > 0
\end{aligned}$$

20 向量组

20.1 线性相关

Definition 20.1.1.

$$\left.\begin{aligned} \sum_i a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \\ \prod_i a_i \neq 0 \end{aligned}\right\} \iff \boldsymbol{v}_i\text{线性相关}$$

$$\begin{vmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{vmatrix} \neq 0 \iff \boldsymbol{v}_i\text{线性相关}$$

20.2 格拉姆-施密特正交单位化

有线性无关组：

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$$

则有正交单位向量组：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1}\boldsymbol{w}_1 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{w}_r &= \boldsymbol{v}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{v}_r}{\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{w}_i}\boldsymbol{w}_i \\
\boldsymbol{e}_r &= \boldsymbol{w}_r^0
\end{aligned}
$$