

# 概率论与数理统计

Friday 16<sup>th</sup> December, 2022

# 目录

<b>1</b>	<b>随机事件及其概率</b>	<b>4</b>
1.1	符号	4
1.2	条件概率	4
1.3	乘法公式	4
1.4	古典概型	4
1.5	几何概型	4
1.6	完备事件组	4
1.7	全概率公式	5
1.7.1	全概率条件公式	5
1.8	贝叶斯公式	5
1.9	独立事件	5
1.10	伯努利概型	5
<b>2</b>	<b>连续型随机变量及其分布函数</b>	<b>5</b>
2.1	密度函数（概率密度）	5
2.2	分布函数	6
<b>3</b>	<b>分布</b>	<b>6</b>
3.1	边缘分布	6
3.1.1	边缘分布律	6
3.1.2	边缘密度函数	7
3.2	条件分布	7
3.2.1	条件分布律	7
3.2.2	条件分布密度函数	7
3.3	独立性	7
<b>4</b>	<b>一维离散型随机变量及其分布律</b>	<b>7</b>
4.1	两点分布	8
4.2	二项（伯努利）分布	8
4.3	泊松分布	8
4.3.1	泊松定理	8
4.4	几何分布	8
4.5	超几何分布	9
<b>5</b>	<b>一维连续型随机变量及其密度函数</b>	<b>9</b>
5.1	均匀分布	9
5.2	指数分布	9
5.3	正态（高斯）分布	9
5.3.1	标准正态分布	9
5.3.2	$3\sigma$ 原则	10
5.4	换元	10

5.4.1	离散型 . . . . .	10
5.4.2	连续型 . . . . .	10
<b>6</b>	<b>二维连续型随机变量及其密度函数</b>	<b>10</b>
6.1	均匀分布 . . . . .	10
6.2	正态分布 . . . . .	10
6.3	换元 . . . . .	11
6.3.1	卷积定理 . . . . .	11
6.3.2	最大最小值 . . . . .	11
<b>7</b>	<b>数字特征</b>	<b>11</b>
7.1	期望 . . . . .	11
7.1.1	离散型 . . . . .	11
7.1.2	连续型 . . . . .	12
7.1.3	换元 . . . . .	12
7.1.4	性质 . . . . .	12
7.2	方差 . . . . .	13
7.2.1	标准差 . . . . .	13
7.2.2	离散型 . . . . .	13
7.2.3	连续型 . . . . .	13
7.2.4	性质 . . . . .	13
7.3	标准化随机变量 . . . . .	13
7.4	常见分布期望方差 . . . . .	14
7.5	协方差 . . . . .	14
7.6	性质 . . . . .	14
7.7	(线性) 相关系数 . . . . .	14
7.7.1	(线性) 均方误差 . . . . .	14
7.7.2	定义 . . . . .	15
7.7.3	性质 . . . . .	15
7.7.4	不(线性) 相关 . . . . .	15
<b>8</b>	<b>统计量</b>	<b>15</b>
8.1	样本均值 . . . . .	15
8.2	样本方差 . . . . .	16
8.3	样本标准差 . . . . .	16
8.4	其他 . . . . .	16
8.5	矩 . . . . .	16
8.5.1	k 阶原点矩 . . . . .	16
8.5.2	k 阶中心矩 . . . . .	16
8.5.3	k+1 阶混合原点矩 . . . . .	16
8.5.4	k+1 阶混合中心矩 . . . . .	17

<b>9</b>	<b>抽样分布</b>	<b>17</b>
9.1	伽马分布 . . . . .	17
9.1.1	伽马函数 . . . . .	17
9.1.2	密度函数 . . . . .	17
9.1.3	性质 . . . . .	17
9.2	卡方分布 . . . . .	17
9.2.1	非中心的卡方分布 . . . . .	18
9.2.2	密度函数 . . . . .	18
9.2.3	性质 . . . . .	18
9.3	t 分布 . . . . .	18
9.3.1	密度函数 . . . . .	18
9.3.2	性质 . . . . .	19
9.4	F 分布 . . . . .	19
9.4.1	密度函数 . . . . .	19
9.4.2	性质 . . . . .	19
9.5	常见分布期望方差 . . . . .	19
9.6	上侧 $p$ 分位点 . . . . .	20
9.7	单正态总体样本均值和样本方差的分布 . . . . .	20
<b>10</b>	<b>参数估计</b>	<b>20</b>
10.1	矩估计 . . . . .	20
10.1.1	基本思想 . . . . .	20
10.2	极大似然估计 . . . . .	20
10.3	估计量评价标准 . . . . .	21
10.3.1	均方误差 . . . . .	21
10.3.2	无偏性 . . . . .	21
10.3.3	有效性 . . . . .	21

# 1 随机事件及其概率

## 1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	$E$	
样本点	$\omega$	
样本空间	$\Omega$	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 $AB$	$\{\omega   \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega   \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega   \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
互斥事件		$A \cap B = \emptyset$
对立事件	$\bar{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

## 1.2 条件概率

已知  $A$  事件发生，发生  $B$  事件的概率 ( $P(A) > 0$ )

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

## 1.3 乘法公式

$$P(A) > 0$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

## 1.4 古典概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点个数}}{\Omega \text{ 样本点个数}}$$

## 1.5 几何概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何测度}}{\Omega \text{ 的几何测度}}$$

## 1.6 完备事件组

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \emptyset$$

## 1.7 全概率公式

$\{A_i\}$  完备事件组

$$P(B) = \sum P(A_i) P(B|A_i)$$

### 1.7.1 全概率条件公式

$$P(C|B) = \sum P(A_i|B) P(C|A_i B)$$

## 1.8 贝叶斯公式

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum P(A_i) P(B|A_i)}$$

## 1.9 独立事件

$$A, B \text{ 相互独立} \iff P(AB) = P(A) P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff \bar{A}, B \text{ 相互独立}$$

$$\iff A, \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff \bar{A}, \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

$$\{A_i\} \text{ 相互独立} \iff P\left(\bigcap A_i\right) = \prod P(A_i)$$

### 1.10 伯努利概型

定义:

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

$n$  重伯努利试验中,  $A$  事件恰好发生  $k$  次的概率为  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

## 2 连续型随机变量及其分布函数

### 2.1 密度函数 (概率密度)

$f(x)$ 、 $f(x, y)$  等

定义

$$F(x) = P\{X = x\} (x \in \mathbb{R})$$

性质

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

## 2.2 分布函数

$F(x)$ 、 $F(x, y)$  等

定义

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt (x \in \mathbb{R})$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv (x, y \in \mathbb{R})$$

性质

$$F(x) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

## 3 分布

### 3.1 边缘分布

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) (x \in \mathbb{R})$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) (y \in \mathbb{R})$$

#### 3.1.1 边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

### 3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

## 3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y | X = x\} \quad (y \in \mathbb{R})$$

### 3.2.1 条件分布律

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$
$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$

### 3.2.2 条件分布密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (y \in \mathbb{R})$$

## 3.3 独立性

充要条件

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

## 4 一维离散型随机变量及其分布律

以下都有

$$p \in (0, 1)$$



#### 4.1 两点分布

$$X \sim B(1, p)$$

$$k \quad k \in \{0, 1\}$$

$$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}$$

#### 4.2 二项（伯努利）分布

$$X \sim B(n, p)$$

$$n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$k \quad n \geq k \in \mathbb{N}$$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

#### 4.3 泊松分布

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\lambda \quad \lambda > 0$$

$$k \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

##### 4.3.1 泊松定理

$n$  重伯努利试验中，事件发生概率  $p_n \in (0, 1)$  与试验次数有关，若  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

#### 4.4 几何分布

$$X \sim G(p)$$

$$k \quad \text{前 } k-1 \text{ 次都失败，第 } k \text{ 次成功 } p \in \mathbb{N}^+$$

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p$$

## 4.5 超几何分布

$$X \sim H(M, N, n)$$

$N$  总样本数  $N > 1$

$n$  抽取样本数  $n \leq N$

$M$  指定样本数  $M \leq N$

$k$  抽到指定样本数  $k \in \mathbb{N} \cap [\max\{0, M + n - N\}, \min\{M, n\}]$

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

## 5 一维连续型随机变量及其密度函数

### 5.1 均匀分布

$$X \sim U[a, b]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \end{cases}$$

### 5.2 指数分布

$$X \sim E(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

### 5.3 正态（高斯）分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$\mu$   $\mu \in \mathbb{R}$  期望

$\sigma$   $\sigma > 0$  标准差

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

#### 5.3.1 标准正态分布

$$X \sim N(0, 1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

### 5.3.2 $3\sigma$ 原则

$$\begin{cases} P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0.6826 \\ P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9544 \\ P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.9974 \end{cases}$$

## 5.4 换元

### 5.4.1 离散型

$$Y = g(X)$$

### 5.4.2 连续型

$$\begin{cases} y = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ Y = g(X) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) |h'(y)| & y \in (\min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

## 6 二维连续型随机变量及其密度函数

### 6.1 均匀分布

$$(X, Y) \sim U(D)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

### 6.2 正态分布

$$(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$$

$\mu$   $\mu \in \mathbb{R}$  期望

$\sigma$   $\sigma > 0$  标准差

$\rho$   $\rho \in (-1, 1)$ , 相关系数 ( $\rho = 0$  时  $X$ 、 $Y$  独立)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right) \right]$$

若  $X$ 、 $Y$  独立

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \Rightarrow (X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, 0)$$

$$Z = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

### 6.3 换元

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

#### 6.3.1 卷积定理

若  $X$ 、 $Y$  独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = f_X(z) * f_Y(z)$$

#### 6.3.2 最大最小值

$$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$$

则

$$F_M = F_X F_Y$$

$$1 - F_N = (1 - F_X)(1 - F_Y)$$

$$f_M = F'_M = f_X F_Y + f_Y F_X$$

$$f_N = F'_N = f_X(1 - F_Y) + f_Y(1 - F_X)$$

## 7 数字特征

### 7.1 期望

#### 7.1.1 离散型

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

### 7.1.2 连续型

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

### 7.1.3 换元

一维

$$Y = g(X)$$

离散

$$E(Y) = \sum g(x_i) p_i$$

连续

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

二维

$$Z = g(X, Y)$$

离散

$$E(Z) = \sum \sum g(x_i, y_j) p_{ij}$$

连续

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

### 7.1.4 性质

线性

$$E(kX + c) = kE(X) + c$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

独立 若  $X$ 、 $Y$  独立

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

## 7.2 方差

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

### 7.2.1 标准差

$$\sqrt{D(X)}$$

### 7.2.2 离散型

$$D(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$$

### 7.2.3 连续型

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 f(x) dx$$

### 7.2.4 性质

线性

$$D(kX + c) = k^2 D(X)$$

独立 若  $X$ 、 $Y$  独立

$$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$$

$$D(XY) = D(X) D(Y)$$

平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X)$$

## 7.3 标准化随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

## 7.4 常见分布期望方差

$X \sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
$B(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
$H(M, N, n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$
$U[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$

## 7.5 协方差

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

## 7.6 性质

$$\text{Cov}(X, X) = D(X)$$

交换律

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

线性

$$\text{Cov}(X, c) = 0$$

$$\text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

## 7.7 (线性) 相关系数

### 7.7.1 (线性) 均方误差

用  $aX + b$  去拟合  $Y$

$e(a, b)$  越小表明线性关系越强, 越大越弱

$e(a_0, b_0)$  最小均方误差

$(a_0, b_0)$  驻点

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}$$

$$b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$$

$$e(a, b) = E \left[ \left( Y - (aX + b) \right)^2 \right]$$

$$e(a_0, b_0) = \left[ 1 - \left( \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \right)^2 \right] D(Y)$$

### 7.7.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

### 7.7.3 性质

$$\rho \in [-1, 1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 \ (a \neq 0) \begin{cases} a > 0 & (\text{正相关}) \ \rho_{XY} = 1 \\ a < 0 & (\text{负相关}) \ \rho_{XY} = -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|} \rho_{XY}$$

### 7.7.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \iff \text{Cov}(X, Y) &= 0 \\ \iff E(XY) &= E(X)E(Y) \\ \iff D(X \pm Y) &= D(X) + D(Y) \end{aligned}$$

独立  $\implies$  不相关

## 8 统计量

### 8.1 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$



## 8.2 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

## 8.3 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

## 8.4 其他

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

## 8.5 矩

$$k \in \mathbb{N}^+$$

### 8.5.1 k 阶原点矩

$$k=1 \sim E(X)$$

$$E(X^k)$$

### 8.5.2 k 阶中心矩

$$E[(X - E(X))^k]$$

$$k=1 \sim 0$$

$$k=2 \sim D(X)$$

### 8.5.3 k+1 阶混合原点矩

$$E(X^k Y^l)$$

### 8.5.4 k+l 阶混合中心矩

$$E\left[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right]$$

$$k=l=1 \leadsto \text{Cov}(X, Y)$$

## 9 抽样分布

$$x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

### 9.1 伽马分布

#### 9.1.1 伽马函数

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

#### 9.1.2 密度函数

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

#### 9.1.3 性质

再生性

$$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$$

$$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$$

$$X_3 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

$$X_1 + X_2 = X_3$$

### 9.2 卡方分布

$$\chi^2 \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$n$  自由度

$$X_i \sim N(0, 1)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

### 9.2.1 非中心的卡方分布

$$X_i \sim N(\mu_i, 1)$$

$\delta$  非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

### 9.2.2 密度函数

$$f(x, n) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

### 9.2.3 性质

再生性

$$\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\chi_3^2 \sim \chi^2(m+n)$$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi_3^2$$

## 9.3 t 分布

$$T \sim t(n)$$

$n$  自由度

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

### 9.3.1 密度函数

$$f(x, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

### 9.3.2 性质

$n = 1$  时, 为柯西分布

$n$  充分大时, 为标准正态分布

## 9.4 F 分布

$$F \sim F(m, n)$$

$m$  第一自由度

$n$  第二自由度

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

### 9.4.1 密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

### 9.4.2 性质

若  $T \sim t(n)$ , 则  $T^2 \sim F(1, n)$

若  $F \sim F(m, n)$ , 则  $\frac{1}{F} \sim F(n, m)$

## 9.5 常见分布期望方差

$X$	$\sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
$X$	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
$\chi^2$	$\chi^2(n)$	$n$	$2n$
$T$	$t(n)$	$0 (n > 1)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$
$F$	$F(m, n)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} (n > 4)$

## 9.6 上侧 p 分位点

$x_p$

$$P\{X \geq x_p\} = p \quad (p \in (0, 1))$$

## 9.7 单正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \\ \chi^2 &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \bar{X}, S^2 \text{相互独立} \\ \bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ U &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \\ T &= \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)\end{aligned}$$

## 10 参数估计

### 10.1 矩估计

#### 10.1.1 基本思想

样本矩代替总体矩，建立  $k$  个方程，从中解出  $k$  个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$  一般采用  $\bar{X} = E(X)$

$$k=2 \text{ 一般采用 } \begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = D(X) \end{cases}$$

$$\text{也可以用 } \begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = E(X^2) \end{cases}$$

### 10.2 极大似然估计

$p(x, \theta)$  分布律或者密度函数

$$L(x_1, x_2, \dots; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

$$L(x_1, x_2, \dots; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \{L(x_1, x_2, \dots; \theta)\}$$

一般解法：求  $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta} = 0$  的驻点

### 10.3 估计量评价标准

#### 10.3.1 均方误差

$$E \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right] = D(\hat{\theta}) + \left( \theta - E(\hat{\theta}) \right)^2$$

#### 10.3.2 无偏性

无偏估计  $E(\hat{\theta}) = \theta$   
 否则为有偏估计

渐进无偏估计  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

性质  $\bar{X}$  是  $\mu$  的无偏估计，即  $E(\bar{X}) = \mu$   
 $S^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计，即  $E(S^2) = \sigma^2$

#### 10.3.3 有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  均为  $\theta$  的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ，称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效