信号与系统

Thursday 8th December, 2022

目录

Part I

绪论

1 能量与功率

1.1 能量信号

能量为有限值的信号

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2\left(t\right)\mathrm{d}t$$

1.2 功率信号

功率为有限值的信号

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2\left(t\right)\mathrm{d}t$$

2 时间信号

2.1 连续信号

2.1.1 指数信号

默认 $\alpha > 0$

$$f\left(t\right) = k\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

2.1.2 复指数信号

$$s = \alpha + \mathrm{j}\omega$$

$$f\left(t\right) = k\mathrm{e}^{st} = k\mathrm{e}^{\alpha}\left(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t\right)$$

欧拉公式

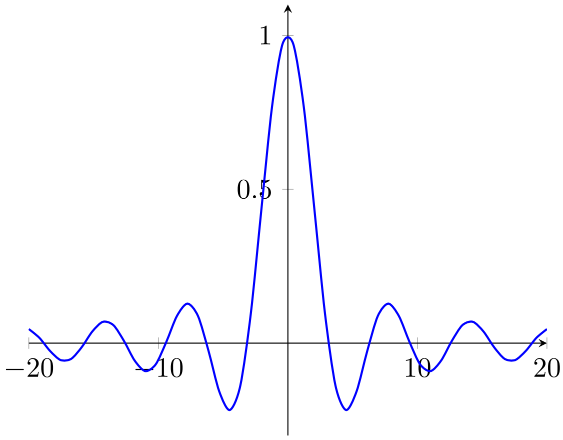
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t$$

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \\ \cos\omega t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \end{cases}$$

2.1.3 正弦信号

$$f(t) = k \sin(\omega t + \theta)$$

2.1.4 抽样信号



$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t) = \pi$$

2.1.5 单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

2.1.6 单位矩形脉冲信号

$$g_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \\ 1 & |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$g_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

2.1.7 符号函数

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

2.1.8 单位冲激信号（狄拉克函数）

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$$

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\,(a\neq 0)$$

$$\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$$

2.2 离散信号

2.2.1 单位阶跃序列

$$u(k)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geqslant 0\end{cases}$$

2.2.2 单位样值序列

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

$$\delta(k)=\nabla u(k)$$

$$\delta(k-k_0)*f(k)=f(k-k_0)$$

Part II

LTI 时域分析

3 电路基础

3.1 电阻

$$u_t=Ri_t$$

3.2 电感

$$u_t = Li'_t$$

$$u_C\left(0_-\right) = u_C\left(0_+\right)$$

3.3 电容

$$i_t = Cu'_t$$

$$i_L\left(0_-\right) = i_L\left(0_+\right)$$

4 LTI 电路

本节中都有 $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$

4.1 符号定义

激励（输入）信号 $e\left(t\right)$ 或 $f\left(t\right)$

响应（输出）信号 $r\left(t\right)$ 或 $y\left(t\right)$

系统函数（系统冲激响应） $h\left(t\right)$

系统输入关系

$$f\left(t\right) * h\left(t\right) = y\left(t\right)$$

自由响应（固有响应） 电路微分方程对应的齐次（通）解 $r_h\left(t\right)$

强迫响应 电路微分方程对应的（非齐次）特解 $r_p\left(t\right)$

零输入响应 r_{zi} 或 $y_x\left(t\right)$

零状态响应 r_{zs} 或 $y_f\left(t\right)$

全响应 电路微分方程对应的全解 $r\left(t\right) = r_h\left(t\right) + r_p\left(t\right) = r_{zi}\left(t\right) + r_{zs}\left(t\right)$

4.2 起始状态

$$r^{(k)}\left(0_-\right)$$

4.3 初始状态

$$r^{(k)}(0_+)$$

4.4 零输入响应

$$r_{zi}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_-) = r^{(k)}(0_-)$$

4.5 零状态响应

$$r_{zs}^{(k)}(0_-) = 0$$

4.6 全响应分解

$$\begin{aligned} r(t) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{zik} \mathrm{e}^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{zsk} \mathrm{e}^{\alpha_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}} \end{aligned}$$

Part III

卷积

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

5 性质

5.1 交换律

$$f * g = g * f$$

5.2 结合律

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

5.3 分配律

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

5.4 并联系统

$$h = h_1 + h_2$$

5.5 串联（级联）系统

$$h = h_1 * h_2$$

5.6 微积分性质

$$s = f * g \implies s^{(i)} = f^{(j)} * g^{(i-j)}$$

Part IV 傅里叶变换

6 正交函数集

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}t \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

7 傅里叶级数

7.1 三角形式

$$\begin{aligned} f\left(t\right) = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) \\ = & \frac{c_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} c_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n\right) \end{aligned}$$

周期信号 $f\left(t\right)$

周期 T

角频率 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

频率　$f=T^{-1}$

直流分量（与书上不同）　$\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{c_0}{2}\,(b_0=0)$

余弦分量的幅度　$a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f\left(t\right)\cos n\omega t\mathrm{d}t$

正弦分量的幅度　$b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f\left(t\right)\sin n\omega t\mathrm{d}t$

基波分量　$c_1\cos\left(n\omega t+\varphi_1\right)$

n 次谐波分量　$c_n\cos\left(n\omega t+\varphi_n\right)$

其他关系

$$
\begin{aligned}
a_n&=c_n\cos\varphi_n\\
b_n&=-c_n\sin\varphi_n\\
c_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\
\varphi_n&=-\arctan\frac{b_n}{a_n}
\end{aligned}
$$

奇函数性质　$f\left(t\right)=-f\left(-t\right)\implies a_n=0$

偶函数性质　$f\left(t\right)=f\left(-t\right)\implies b_n=0$

奇谐函数性质

$$
f\left(t\right)=-f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)\implies\begin{cases}a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)\cos n\omega t\mathrm{d}t & n=2k+1\end{cases}\\ b_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)\sin n\omega t\mathrm{d}t & n=2k+1\end{cases}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}
$$

7.2　指数形式

$$
f\left(t\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}
$$

复系数　$F_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f\left(t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$

幅度谱　$\left|F_n\right|\sim n\omega$

相位谱　$\varphi_n \sim n\omega$

其他关系

$$F_{\pm n} = |F_{\pm n}| \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\varphi_n} = \frac{1}{2}\left(a_n \mp \mathrm{j}b_n\right)$$

$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{c_n}{2}$$

功率　$P = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^2$

7.3　周期矩形脉冲信号

一个周期内

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & \dfrac{\tau}{2} < |t| \leqslant \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_n = c_n = \frac{2E\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

$$b_n = 0$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{n\in\mathbb{N}^+} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \cos n\omega t \\ &= \frac{E\tau}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \end{aligned}$$

8　傅里叶变换

傅里叶变换

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left(f(t)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left(F(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

充分条件　$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$

幅度谱　$|F(\omega)| \sim \omega$

相位谱　$|\varphi(\omega)| \sim \omega$

8.1 频带宽度

τ：等效脉冲宽度

$$f\left(0\right)\tau = F\left(0\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

B：等效频带宽度

$$F\left(0\right)B_\omega = 2\pi f\left(0\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega$$

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$B_f = \frac{1}{\tau}$$

8.2 典型非周期信号傅里叶变换

8.2.1 单边指数信号

$$f\left(t\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}u\left(t\right)$$

$$\begin{cases} F\left(\omega\right) = \dfrac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega} \\ \left|F\left(\omega\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \varphi\left(\omega\right) = -\arctan\dfrac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$

8.2.2 双边指数信号

$$f\left(t\right) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

$$\begin{cases} F\left(\omega\right) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \left|F\left(\omega\right)\right| = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \varphi\left(\omega\right) = 0 \end{cases}$$

8.2.3 矩形脉冲信号

$$f\left(t\right) = E \cdot g_T\left(t\right)$$

$$F\left(\omega\right) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$B_f = \frac{1}{\tau}$$

8.2.4 符号函数

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t)$$

$$\begin{cases} F(\omega) = \dfrac{2}{\mathrm{j}\omega} \\ |F(\omega)| = \dfrac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases} \end{cases}$$

8.3 常用变换对

$f(t)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$g_\tau(t)$	$\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
$\sin\omega_0 t$	$\mathrm{j}\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$

8.4 性质

$$\mathscr{F}(f(t)) = F(\omega)$$

8.4.1 线性

$$\mathscr{F}(f + g) = \mathscr{F}(f) + \mathscr{F}(g)$$

8.4.2 对称性

$$\mathscr{F}\left(\mathscr{F}\left(f\left(t\right)\right)\right)=2\pi f\left(-\omega\right)$$

8.4.3 奇偶虚实性

略

8.4.4 尺度变换特性

$$\mathscr{F}\left(f\left(at\right)\right)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

8.4.5 时移特性

$$\mathscr{F}\left(f\left(t+t_0\right)\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\cdot F\left(\omega\right)$$

8.4.6 频移特性

$$\mathscr{F}\left(f\left(t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)=F\left(\omega+\omega_0\right)$$

频谱搬移

$$\mathscr{F}\left(f\left(t\right)\cos\omega_0 t\right)=\mathscr{F}\left(\frac{f\left(t\right)}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(F\left(\omega+\omega_0\right)+F\left(\omega-\omega_0\right)\right)$$

下式不常用

$$\mathscr{F}\left(f\left(t\right)\sin\omega_0 t\right)=\mathscr{F}\left(\frac{f\left(t\right)}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\right)=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(F\left(\omega+\omega_0\right)-F\left(\omega-\omega_0\right)\right)$$

8.4.7 时域微分特性

$$\mathscr{F}\left(f^{(n)}\left(t\right)\right)=\left(\mathrm{j}\omega\right)^n\cdot F\left(\omega\right)$$

8.4.8 频域微分特性

$$\mathscr{F}\left(\left(\mathrm{j}t\right)^n\cdot f\left(t\right)\right)=F^{(n)}\left(\omega\right)$$

8.4.9 时域积分特性

$$\mathscr{F}\left(\int_{-\infty}^{t}f\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)=\frac{F\left(\omega\right)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F\left(0\right)\delta\left(\omega\right)$$

8.4.10 频域积分特性

略

8.4.11 时域卷积特性

$$\mathscr{F}\left(f * g\right) = \mathscr{F}\left(f\right) \cdot \mathscr{F}\left(g\right)$$

8.4.12 频域卷积特性

$$\mathscr{F}\left(f \cdot g\right) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left(f\right) * \mathscr{F}\left(g\right)$$

8.5 周期信号傅里叶变换

$f\left(t\right)$ 角频率为 ω_0，第一个周期的频域 $F_0\left(\omega\right)$

$$F\left(\omega\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n \delta\left(\omega - n\omega_0\right)$$

$$F_n = \left.\frac{1}{T}F_0\left(\omega\right)\right|_{\omega=n\omega_0} = \left.\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\left(t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right|_{\omega=n\omega_0}$$

8.6 抽样信号的傅里叶变换

抽样信号 = 连续信号 · 抽样脉冲

$$f_s\left(t\right) = f\left(t\right)p\left(t\right)$$

$$P\left(\omega\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n \delta\left(\omega - n\omega_s\right)$$

$$F_s\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi}F\left(\omega\right) * P\left(\omega\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n F\left(\omega - n\omega_s\right)$$

8.6.1 均匀抽样脉冲

$p\left(t\right)$ 角频率（抽样频率）为 ω_s，周期（抽样周期）为 T_s

冲激抽样

$$\delta_T\left(t\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - nT_s\right)$$

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{1}{T_s} \\ \delta_T\left(t\right) = \dfrac{1}{T_s}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_s t} \\ P\left(\omega\right) = \omega_s \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - n\omega_s\right) \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega - n\omega_s)$$

矩形脉冲（自然）抽样

$$\delta_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s)$$

$$P_n = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

8.6.2 时域抽样定理

奈奎斯特频率

$$f_s \geqslant 2f_m$$

奈奎斯特周期

$$T_s \leqslant \frac{1}{2f_m}$$

8.6.3 LTI 系统的频域分析

$$Y_f(\omega) = \mathscr{F}(y_f(t)) = F(\omega) H(\omega)$$

Part V
拉普拉斯变换

$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$

9 拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换

$$F(s) = \mathscr{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

单边拉普拉斯变换（以下拉普拉斯变换都指单边）

$$F(s) = \mathscr{L}(f(t)) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

拉普拉斯逆变换

$$f\left(t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F\left(s\right)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

9.1 常用变换对

定义域 $D\subseteq\mathbb{R}^{+}$，收敛域 $\sigma>\sigma_0$

$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)$	σ_0
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\mathrm{e}^{-\lambda t}$	$\frac{1}{s+\lambda}$	$-\lambda$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$	$\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}$	0
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\delta^{(n)}\left(t\right)$	s^n	$-\infty$
$t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}$	$\frac{n!}{\left(s+\lambda\right)^{n+1}}$	$-\lambda$
$\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{s+\lambda}{\left(s+\lambda\right)^2+\omega^2}$	$-\lambda$
$\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\left(s+\lambda\right)^2+\omega^2}$	$-\lambda$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	0
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	0

9.2 性质

以下函数收敛域

$$\mathscr{L}\left(f\right):\sigma>\sigma_1$$
$$\mathscr{L}\left(g\right):\sigma>\sigma_2$$

$$\mathscr{L}\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)$$

9.2.1 线性

$$\mathscr{L}\left(f+g\right)=\mathscr{L}\left(f\right)+\mathscr{L}\left(g\right)\left(\sigma>\max\left(\sigma_1,\sigma_2\right)\right)$$

9.2.2 尺度变换特性

$$\mathscr{L}\left(f\left(at\right)\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\left(\sigma>a\sigma_1\right)$$

9.2.3 时移特性

$$\mathscr{L}\left(f\left(t-t_0\right)\right)=\mathrm{e}^{-st_0}F\left(s\right)\left(t_0\geqslant 0\right)\left(\sigma>\sigma_1\right)$$

9.2.4 复频域平移特性

$$\mathscr{L}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}f\left(t\right)\right)=F\left(s+\lambda\right)\left(\sigma>\sigma_1-\lambda\right)$$

9.2.5 时域微分特性

$$\mathscr{L}\left(f^{(n)}\left(t\right)\right)=s^nF\left(s\right)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{r}\left(0\right)\left(\sigma>\sigma_1\right)$$

9.2.6 复频域微分特性

$$\mathscr{L}\left(\left(-t\right)^n f\left(t\right)\right)=F^{(n)}\left(s\right)\left(\sigma>\sigma_1\right)$$

9.2.7 时域积分特性

$$\mathscr{L}\left(\int\limits_{-\infty}^{t}f\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{s}\left(F\left(s\right)+\int\limits_{-\infty}^{0}f\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)\left(\sigma>\max\left(\sigma_1,0\right)\right)$$

9.2.8 复频域积分特性

略

9.2.9 时域卷积特性

$$\mathscr{L}\left(f*g\right)=\mathscr{L}\left(f\right)\cdot\mathscr{L}\left(g\right)\left(\sigma>\max\left(\sigma_1,\sigma_2\right)\right)$$

9.2.10 复频域卷积特性

$$\mathscr{L}\left(f\cdot g\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\mathscr{L}\left(f\right)*\mathscr{L}\left(g\right)\left(\sigma>\sigma_1+\sigma_2\right)$$

9.2.11 初值定理

$$\lim_{t\to 0^+} f\left(t\right) = f\left(0^+\right) = \lim_{s\to +\infty} sF\left(s\right)$$

9.2.12 终值定理

$$\lim_{t\to +\infty} f\left(t\right) = f\left(+\infty\right) = \lim_{s\to 0} sF\left(s\right)$$

10 拉普拉斯逆变换

10.1 部分分式展开法

有理分式

$$F\left(s\right) = \frac{\mathcal{P}_m\left(s\right)}{\mathcal{Q}_n\left(s\right)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

若为有理真分式（$m < n$）

$$F\left(s\right) = \frac{\mathcal{P}_m\left(s\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)}$$

若 $s = p_i$ 项都为一阶极点 可分解为：

$$F\left(s\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s-p_i}$$

$$k_i = \left(s-p_i\right) F\left(s\right)\Big|_{s=p_i} \left(1 \leqslant i \leqslant n\right)$$

若 $s = u$ 项为 r 重阶极点 可分解为：

$$F\left(s\right) = \frac{\mathcal{P}_m\left(s\right)}{\left(s-u\right)^r \cdot \prod\limits_{i=1}^{n-r}\left(s-p_i\right)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{q_j}{\left(s-u\right)^j} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{k_i}{s-p_i}$$

$$\begin{cases} q_j = \dfrac{1}{(r-j)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{r-j}\left[\left(s-u\right)^r F\left(s\right)\right]\Bigg|_{s=u} & 1 \leqslant j \leqslant r \\ k_i = \left(s-p_i\right) F\left(s\right)\Big|_{s=p_i} & 1 \leqslant i \leqslant n-r \end{cases}$$

若为有理假分式（$m \geqslant n$）

$$F\left(s\right) = \sum_{i=0}^{m-n} B_i s^i + \frac{\mathcal{R}_{n-1}\left(s\right)}{\mathcal{Q}_n\left(s\right)}$$

后按有理真分式变换

10.2 留数法

略

11 连续系统响应的复频域分析

11.1 二阶 LTI 系统响应

激励方程

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) = b_0 f(t) + b_1 f'(t) + b_2 f''(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i f^{(i)}(t)$$

拉普拉斯变换后

$$\underbrace{a_0 Y(s)}_{\mathscr{L}(a_0 y(t))} + \underbrace{a_1 [sY(s) - y(0_-)]}_{\mathscr{L}(a_1 y'(t))} + \underbrace{a_2 \left[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)\right]}_{\mathscr{L}(a_2 y''(t))} = \underbrace{b_0 F(s)}_{\mathscr{L}(b_0 f(t))} + \underbrace{b_1 sF(s)}_{\mathscr{L}(b_1 f'(t))} + \underbrace{b_2 s^2 F(s)}_{\mathscr{L}(b_2 f''(t))}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i Y(s) + \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-1-j} y^{(j)}(0_-) \right) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i F(s)$$

全响应

$$Y(s) = \underbrace{\frac{a_2 [sy(0_-) + y'(0_-)] + a_1 y(0_-)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\overbrace{\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}^{H(s)} F(s)}_{Y_f(s)}$$

零输入响应 $y_x(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y_x(s))$

零状态响应 $y_f(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y_f(s))$

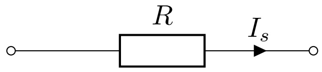
11.2 电路的复频域模型

元件	时域	复频域
电阻	$u_t = Ri_t$	$U_s = RI_s$
电感	$u_t = Li'_t$	$U_s = L(sI_s - i_t(0_-))$
电容	$i_t = Cu'_t$	$I_s = C(sU_s - u_t(0_-))$

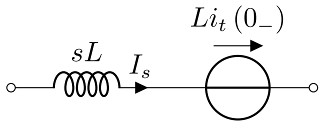
11.3 串联形式的复频域模型

U_s 为两端电势差

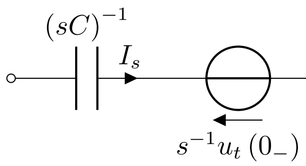
电阻



电感



电容



11.4 LTI 系统的复频域分析

$$Y_f(s) = \mathscr{F}(y_f(t)) = F(s)H(s)$$

12 零极点

类似于10.1

$$H(s) = \frac{\mathcal{P}_m(s)}{\mathcal{Q}_n(s)} = K\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

零点 z_i

极点 p_i

12.1 系统稳定性

稳定系统充要条件（绝对可积条件）

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

12.1.1 不稳定系统

存在极点的实部大于等于 0

$$\exists p_i, \sigma_{p_i} \geqslant 0$$

或

存在多阶极点的实部等于 0

$$\exists p_i = p_j \to \sigma_{p_i} = 0$$

12.1.2 临界稳定系统

所有极点实部都小于等于 0

$$\forall p_i = p_j \to \sigma_{p_i} \leqslant 0$$

并且

极点的实部等于 0 的都是一阶极点

$$\forall \sigma_{p_i} = \sigma_{p_j} = 0; p_i = p_j \to i = j$$

12.1.3 稳定系统

所有极点实部都小于 0

$$\forall p_i, \sigma_{p_i} < 0$$

13 频响特性

系统稳定时，令 $s = \mathrm{j}\omega$（即退化为傅里叶变换后的频域响应）

$$H(\omega) = |H(\omega)| \varphi(\omega)$$

幅频特性 $|H(\omega)|$

相频特性 $\varphi(\omega)$

Part VI
离散系统时域分析

14 LTI 离散系统的响应

14.1 差分

一阶前向差分

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

一阶后向差分（以下差分都指后向差分）

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$$

14.2 性质

14.2.1 线性

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

14.2.2 多阶差分

$$\nabla^2 f(k) = \nabla(\nabla f(k)) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$
$$\nabla^n f(k) = f(k) + \sum_{i=1}^{n} b_i f(k-i)$$

14.3 零输入响应

$$y_x(k) = y(k)\,(k<0)$$

14.4 零状态响应

$$y_f(k) = 0\,(k<0)$$

15 卷积和

$$f(k) * g(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\, g(k-n)$$

15.1 性质

除了微积分性质变为差分性质，其他与连续性质（5）相同

15.1.1 差分性质

$$
\begin{aligned}
s(n) = f(k) * g(k) &\implies \nabla^{i} s(k) = \nabla^{j} f(k) * \nabla^{i-j} g(k) \\
&\implies E^{-i} s(k) = E^{-j} f(k) * E^{-(i-j)} g(k)
\end{aligned}
$$

16 位移算子分析

$$E^{n} f(k) = f(k+n)\,(n \in \mathbb{Z})$$

Part VII

Z 变换

$z = \mathrm{e}^{sT}$

17 Z 变换

双边 Z 变换

$$F(z) = \mathscr{Z}(f(k)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\, z^{-k}$$

单边 Z 变换（以下 Z 变换都指单边）

$$F(z) = \mathscr{Z}(f(k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)\, z^{-k}$$

Z 逆变换

$$f(k) = \mathscr{Z}^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{C} F(z)\, z^{k-1} \mathrm{d}z$$

17.1 常用变换对

定义域 $D \in \mathbb{N}$，收敛域 $|z| > |R_f|$

$-$ 表示 $|z| \geqslant 0$

$f(k)$	$F(z)$	R_f
$\delta(k)$	1	$-$
1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	1
k	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	1
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}z^{-1}}$	1
$\cos\omega k$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$	1
$\sin\omega k$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$	1
a^k	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	a
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	a

17.2 性质

以下函数收敛域

$$\mathscr{Z}(f) : |z| > R_{f1}$$
$$\mathscr{Z}(g) : |z| > R_{f2}$$

$$\mathscr{Z}(f(k)) = F(z)$$

17.2.1 线性

$$\mathscr{Z}(f+g) = \mathscr{Z}(f) + \mathscr{Z}(g)\,(|z| > \max(R_{f1}, R_{f2}))$$

17.2.2 指数加权（尺度变换）特性

$$\mathscr{Z}\left(a^k f(k)\right) = F\left(\frac{z}{a}\right)(|z| > |a|\,R_{f1})$$

17.2.3 序列平移特性

$$\mathscr{Z}(f(k+k_0)) = z^{k_0}F(z)\,(|z| > R_{f1})$$

17.2.4 Z 域微分特性

$$\mathscr{Z}(kf(k)) = -zF'(z)\,(|z| > R_{f1})$$

17.2.5　序列卷积特性

$$\mathscr{Z}\left(f*g\right)=\mathscr{Z}\left(g\right)\cdot\mathscr{Z}\left(g\right)\left(\left|z\right|>\max\left(R_{f1},R_{f2}\right)\right)$$

17.2.6　初值定理

$$f\left(0\right)=\lim_{z\to\infty}F\left(z\right)$$

17.2.7　终值定理

$$f\left(\infty\right)=\lim_{z\to1}\left(z-1\right)F\left(z\right)$$

18　Z 逆变换

18.1　部分分式展开法

有理分式

$$F\left(z\right)=\frac{\mathcal{P}_m\left(z^{-1}\right)}{\mathcal{Q}_n\left(z^{-1}\right)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}b_iz^{-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^{-i}}$$

若为有理真分式（$m<n$）

$$F\left(z\right)=\frac{\mathcal{P}_m\left(z^{-1}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-p_iz^{-1}\right)}$$

若 $z=p_i$ **项都为一阶极点**　可分解为：

$$F\left(z\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{1-p_iz^{-1}}$$

$$k_i=\left(1-p_iz^{-1}\right)F\left(z\right)\Big|_{z=p_i}\left(1\leqslant i\leqslant n\right)$$

若 $z=u$ **项为** r **重阶极点**　可分解为：

$$F\left(z\right)=\frac{\mathcal{P}_m\left(z^{-1}\right)}{\left(1-uz^{-1}\right)^r\cdot\prod\limits_{i=1}^{n-r}\left(1-p_iz^{-1}\right)}=\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j}{\left(1-p_1z^{-1}\right)^j}+\sum_{i=1}^{n-r}\frac{k_i}{1-p_iz^{-1}}$$

$$\begin{cases}q_j=\dfrac{1}{\left(-u\right)^{r-j}\left(r-j\right)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(z^{-1}\right)}\right)^{r-j}\left[\left(1-uz^{-1}\right)^rF\left(z\right)\right]\Bigg|_{z=u} & 1\leqslant j\leqslant r\\ k_i=\left(1-p_iz^{-1}\right)F\left(z\right)\Big|_{z=p_i} & 1\leqslant i\leqslant n-r\end{cases}$$

若为有理假分式（$m \geqslant n$）

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m-n} B_i z^{-i} + \frac{\mathcal{R}_{n-1}\left(z^{-1}\right)}{\mathcal{Q}_n\left(z^{-1}\right)}$$

后按有理真分式变换

18.2 留数法

略

18.3 长除法

略

19 离散系统响应的 Z 域分析

19.1 二阶 LTI 系统响应

激励方程

$$a_0 y(k) + a_1 E^{-1} y(k) + a_2 E^{-2} y(k) = b_0 f(k) + b_1 E^{-1} f(k) + b_2 E^{-2} f(k)$$

Z 变换后

$$\underbrace{a_0 Y(z)}_{\mathscr{Z}(a_0 y(k))} + \underbrace{a_1\left[z^{-1} Y(z) + y(-1)\right]}_{\mathscr{Z}(a_1 E^{-1} y(k))} + \underbrace{a_2\left[z^{-2} Y(z) + z^{-1} y(-1) + y(-2)\right]}_{\mathscr{Z}(a_2 E^{-2} y(k))}$$

$$= \underbrace{b_0 F(z)}_{\mathscr{Z}(b_0 f(k))} + \underbrace{b_1 z^{-1} F(z)}_{\mathscr{Z}(b_1 E^{-1} f(k))} + \underbrace{b_2 z^{-2} F(z)}_{\mathscr{Z}(b_2 E^{-2} f(k))}$$

全响应

$$Y(z) = \underbrace{-\frac{a_2\left[z^{-1} y(-1) + y(-2)\right] + a_1 y(-1)}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}}_{Y_x(z)} + \underbrace{\overbrace{\frac{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}}^{H(z)} F(z)}_{Y_f(z)}$$

零输入响应 $y_x(t) = \mathscr{Z}^{-1}\left(Y_x(z)\right)$

零状态响应 $y_f(t) = \mathscr{Z}^{-1}\left(Y_f(z)\right)$

20 零极点

类似于18.1

$$H(z) = \frac{\mathcal{P}_m(z)}{\mathcal{Q}_n(z)} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)}$$

零点 z_i

极点 p_i

$$R_f > \max\{z_i\}$$

20.1 系统稳定性

稳定系统充要条件（绝对可积条件）

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < +\infty$$

20.1.1 不稳定系统

有极点均在单位圆外

$$\exists p_i \to |p_i| > 1$$

或
存在多阶段极点在单位圆上

$$\exists p_i = p_j \to |p_i| = 1$$

20.1.2 临界稳定系统

所有极点都位于单位圆内

$$\forall p_i \to |p_i| \leqslant 1$$

并且
位于单位圆上的极点都是一阶极点

$$\forall |p_i| = |p_j| = 1; p_i = p_j \to i = j$$

20.1.3 稳定系统

$H(z)$ 的收敛域包含单位圆（即所有极点均在单位圆内）

$$R_f > 1$$

或（等价于）

$$\forall p_i \to |p_i| < 1$$