

# 信号与系统

Thursday 8<sup>th</sup> December, 2022

# 目录

<b>I</b>	<b>绪论</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>能量与功率</b>	<b>5</b>
1.1	能量信号 . . . . .	5
1.2	功率信号 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>时间信号</b>	<b>5</b>
2.1	连续信号 . . . . .	5
2.1.1	指数信号 . . . . .	5
2.1.2	复指数信号 . . . . .	5
2.1.3	正弦信号 . . . . .	6
2.1.4	抽样信号 . . . . .	6
2.1.5	单位阶跃信号 . . . . .	6
2.1.6	单位矩形脉冲信号 . . . . .	6
2.1.7	符号函数 . . . . .	6
2.1.8	单位冲激信号（狄拉克函数） . . . . .	7
2.2	离散信号 . . . . .	7
2.2.1	单位阶跃序列 . . . . .	7
2.2.2	单位样值序列 . . . . .	7
<b>II</b>	<b>LTI 时域分析</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>电路基础</b>	<b>7</b>
3.1	电阻 . . . . .	7
3.2	电感 . . . . .	8
3.3	电容 . . . . .	8
<b>4</b>	<b>LTI 电路</b>	<b>8</b>
4.1	符号定义 . . . . .	8
4.2	起始状态 . . . . .	8
4.3	初始状态 . . . . .	9
4.4	零输入响应 . . . . .	9
4.5	零状态响应 . . . . .	9
4.6	全响应分解 . . . . .	9
<b>III</b>	<b>卷积</b>	<b>9</b>

<b>5 性质</b>	<b>9</b>
5.1 交换律 . . . . .	9
5.2 结合律 . . . . .	9
5.3 分配律 . . . . .	10
5.4 并联系统 . . . . .	10
5.5 串联（级联）系统 . . . . .	10
5.6 微积分性质 . . . . .	10
 <b>IV 傅里叶变换</b>	 <b>10</b>
<b>6 正交函数集</b>	<b>10</b>
<b>7 傅里叶级数</b>	<b>10</b>
7.1 三角形式 . . . . .	10
7.2 指数形式 . . . . .	11
7.3 周期矩形脉冲信号 . . . . .	12
<b>8 傅里叶变换</b>	<b>12</b>
8.1 频带宽度 . . . . .	13
8.2 典型非周期信号傅里叶变换 . . . . .	13
8.2.1 单边指数信号 . . . . .	13
8.2.2 双边指数信号 . . . . .	13
8.2.3 矩形脉冲信号 . . . . .	13
8.2.4 符号函数 . . . . .	14
8.3 常用变换对 . . . . .	14
8.4 性质 . . . . .	14
8.4.1 线性 . . . . .	14
8.4.2 对称性 . . . . .	15
8.4.3 奇偶虚实性 . . . . .	15
8.4.4 尺度变换特性 . . . . .	15
8.4.5 时移特性 . . . . .	15
8.4.6 频移特性 . . . . .	15
8.4.7 时域微分特性 . . . . .	15
8.4.8 频域微分特性 . . . . .	15
8.4.9 时域积分特性 . . . . .	15
8.4.10 频域积分特性 . . . . .	16
8.4.11 时域卷积特性 . . . . .	16
8.4.12 频域卷积特性 . . . . .	16
8.5 周期信号傅里叶变换 . . . . .	16
8.6 抽样信号的傅里叶变换 . . . . .	16
8.6.1 均匀抽样脉冲 . . . . .	16
8.6.2 时域抽样定理 . . . . .	17

8.6.3 LTI 系统的频域分析 . . . . .	17
<b>V 拉普拉斯变换</b>	<b>17</b>
<b>9 拉普拉斯变换</b>	<b>17</b>
9.1 常用变换对 . . . . .	18
9.2 性质 . . . . .	18
9.2.1 线性 . . . . .	18
9.2.2 尺度变换特性 . . . . .	19
9.2.3 时移特性 . . . . .	19
9.2.4 复频域平移特性 . . . . .	19
9.2.5 时域微分特性 . . . . .	19
9.2.6 复频域微分特性 . . . . .	19
9.2.7 时域积分特性 . . . . .	19
9.2.8 复频域积分特性 . . . . .	19
9.2.9 时域卷积特性 . . . . .	19
9.2.10 复频域卷积特性 . . . . .	19
9.2.11 初值定理 . . . . .	20
9.2.12 终值定理 . . . . .	20
<b>10 拉普拉斯逆变换</b>	<b>20</b>
10.1 部分分式展开法 . . . . .	20
10.2 留数法 . . . . .	21
<b>11 连续系统响应的复频域分析</b>	<b>21</b>
11.1 二阶 LTI 系统响应 . . . . .	21
11.2 电路的复频域模型 . . . . .	21
11.3 串联形式的复频域模型 . . . . .	21
11.4 LTI 系统的复频域分析 . . . . .	22
<b>12 零极点</b>	<b>22</b>
12.1 系统稳定性 . . . . .	22
12.1.1 不稳定系统 . . . . .	23
12.1.2 临界稳定系统 . . . . .	23
12.1.3 稳定系统 . . . . .	23
<b>13 频响特性</b>	<b>23</b>
<b>VI 离散系统时域分析</b>	<b>23</b>

<b>14 LTI 离散系统的响应</b>	<b>24</b>
14.1 差分 . . . . .	24
14.2 性质 . . . . .	24
14.2.1 线性 . . . . .	24
14.2.2 多阶差分 . . . . .	24
14.3 零输入响应 . . . . .	24
14.4 零状态响应 . . . . .	24
<b>15 卷积和</b>	<b>24</b>
15.1 性质 . . . . .	25
15.1.1 差分性质 . . . . .	25
<b>16 位移算子分析</b>	<b>25</b>
<b>VII Z 变换</b>	<b>25</b>
<b>17 Z 变换</b>	<b>25</b>
17.1 常用变换对 . . . . .	25
17.2 性质 . . . . .	26
17.2.1 线性 . . . . .	26
17.2.2 指数加权（尺度变换）特性 . . . . .	26
17.2.3 序列平移特性 . . . . .	26
17.2.4 Z 域微分特性 . . . . .	26
17.2.5 序列卷积特性 . . . . .	27
17.2.6 初值定理 . . . . .	27
17.2.7 终值定理 . . . . .	27
<b>18 Z 逆变换</b>	<b>27</b>
18.1 部分分式展开法 . . . . .	27
18.2 留数法 . . . . .	28
18.3 长除法 . . . . .	28
<b>19 离散系统响应的 Z 域分析</b>	<b>28</b>
19.1 二阶 LTI 系统响应 . . . . .	28
<b>20 零极点</b>	<b>28</b>
20.1 系统稳定性 . . . . .	29
20.1.1 不稳定系统 . . . . .	29
20.1.2 临界稳定系统 . . . . .	29
20.1.3 稳定系统 . . . . .	29

## Part I

# 绪论

## 1 能量与功率

### 1.1 能量信号

能量为有限值的信号

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

### 1.2 功率信号

功率为有限值的信号

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt$$

## 2 时间信号

### 2.1 连续信号

#### 2.1.1 指数信号

默认  $\alpha > 0$

$$f(t) = ke^{-\alpha t}$$

#### 2.1.2 复指数信号

$$s = \alpha + j\omega$$

$$f(t) = ke^{st} = ke^{\alpha} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

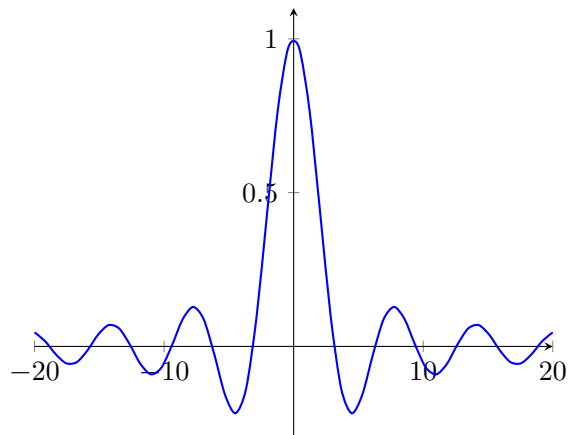
欧拉公式

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \\ \begin{cases} \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.1.3 正弦信号

$$f(t) = k \sin(\omega t + \theta)$$

### 2.1.4 抽样信号



$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t) dt = \pi$$

### 2.1.5 单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

### 2.1.6 单位矩形脉冲信号

$$g_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$
$$g_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

### 2.1.7 符号函数

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

### 2.1.8 单位冲激信号（狄拉克函数）

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (a \neq 0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$

## 2.2 离散信号

### 2.2.1 单位阶跃序列

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

### 2.2.2 单位样值序列

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(k) = \nabla u(k)$$

$$\delta(k - k_0) * f(k) = f(k - k_0)$$

## Part II

# LTI 时域分析

## 3 电路基础

### 3.1 电阻

$$u_t = Ri_t$$



### 3.2 电感

$$u_t = Li'_t$$

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

### 3.3 电容

$$i_t = Cu'_t$$

$$i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

## 4 LTI 电路

本节中都有  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

### 4.1 符号定义

激励（输入）信号  $e(t)$  或  $f(t)$

响应（输出）信号  $r(t)$  或  $y(t)$

系统函数（系统冲激响应）  $h(t)$

系统输入关系

$$f(t) * h(t) = y(t)$$

自由响应（固有响应） 电路微分方程对应的齐次（通）解  $r_h(t)$

强迫响应 电路微分方程对应的（非齐次）特解  $r_p(t)$

零输入响应  $r_{zi}$  或  $y_x(t)$

零状态响应  $r_{zs}$  或  $y_f(t)$

全响应 电路微分方程对应的全解  $r(t) = r_h(t) + r_p(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$

### 4.2 起始状态

$$r^{(k)}(0_-)$$

### 4.3 初始状态

$$r^{(k)}(0_+)$$

### 4.4 零输入响应

$$r_{zi}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_-) = r^{(k)}(0_-)$$

### 4.5 零状态响应

$$r_{zs}^{(k)}(0_-) = 0$$

### 4.6 全响应分解

$$\begin{aligned} r(t) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}} \end{aligned}$$

## Part III

# 卷积

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

## 5 性质

### 5.1 交换律

$$f * g = g * f$$

### 5.2 结合律

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

### 5.3 分配律

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

### 5.4 并联系统

$$h = h_1 + h_2$$

### 5.5 串联（级联）系统

$$h = h_1 * h_2$$

### 5.6 微积分性质

$$s = f * g \implies s^{(i)} = f^{(j)} * g^{(i-j)}$$

## Part IV

# 傅里叶变换

## 6 正交函数集

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i \varphi_j dt \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

## 7 傅里叶级数

### 7.1 三角形式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

周期信号  $f(t)$

周期  $T$

角频率  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

频率  $f = T^{-1}$

直流分量 (与书上不同)  $\frac{a_0}{2} = \frac{c_0}{2} (b_0 = 0)$

余弦分量的幅度  $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt$

正弦分量的幅度  $b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt$

基波分量  $c_1 \cos(n\omega t + \varphi_1)$

$n$  次谐波分量  $c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

其他关系

$$a_n = c_n \cos \varphi_n$$

$$b_n = -c_n \sin \varphi_n$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

奇函数性质  $f(t) = -f(-t) \implies a_n = 0$

偶函数性质  $f(t) = f(-t) \implies b_n = 0$

奇谐函数性质

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \implies \begin{cases} a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt & n = 2k + 1 \end{cases} \\ b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt & n = 2k + 1 \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 7.2 指数形式

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{jn\omega t}$$

复系数  $F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt$

幅度谱  $|F_n| \sim n\omega$

相位谱  $\varphi_n \sim n\omega$

其他关系

$$F_{\pm n} = |F_{\pm n}| e^{\pm j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n \mp j b_n)$$

$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{c_n}{2}$$

功率  $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |F_n|^2$

### 7.3 周期矩形脉冲信号

一个周期内

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \frac{\tau}{2} < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_n = c_n = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

$$b_n = 0$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \cos n\omega t \\ &= \frac{E\tau}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

## 8 傅里叶变换

傅里叶变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

充分条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$

幅度谱  $|F(\omega)| \sim \omega$

相位谱  $|\varphi(\omega)| \sim \omega$

## 8.1 频带宽度

$\tau$ : 等效脉冲宽度

$$f(0)\tau = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$B$ : 等效频带宽度

$$F(0)B_{\omega} = 2\pi f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$B_f = \frac{1}{\tau}$$

## 8.2 典型非周期信号傅里叶变换

### 8.2.1 单边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \\ |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$

### 8.2.2 双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ |F(\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

### 8.2.3 矩形脉冲信号

$$f(t) = E \cdot g_T(t)$$

$$F(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$B_f = \frac{1}{\tau}$$

### 8.2.4 符号函数

$$f(t) = \text{sgn}(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\omega) = \frac{2}{j\omega} \\ |F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

### 8.3 常用变换对

$f(t)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$g_\tau(t)$	$\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$

### 8.4 性质

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$$

#### 8.4.1 线性

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

### 8.4.2 对称性

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) = 2\pi f(-\omega)$$

### 8.4.3 奇偶虚实性

略

### 8.4.4 尺度变换特性

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

### 8.4.5 时移特性

$$\mathcal{F}(f(t+t_0)) = e^{j\omega t_0} \cdot F(\omega)$$

### 8.4.6 频移特性

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-j\omega_0 t}) = F(\omega + \omega_0)$$

频谱搬移

$$\mathcal{F}(f(t)\cos\omega_0 t) = \mathcal{F}\left(\frac{f(t)}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right) = \frac{1}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$$

下式不常用

$$\mathcal{F}(f(t)\sin\omega_0 t) = \mathcal{F}\left(\frac{f(t)}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right) = \frac{j}{2}(F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0))$$

### 8.4.7 时域微分特性

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(t)) = (j\omega)^n \cdot F(\omega)$$

### 8.4.8 频域微分特性

$$\mathcal{F}((jt)^n \cdot f(t)) = F^{(n)}(\omega)$$

### 8.4.9 时域积分特性

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$



#### 8.4.10 频域积分特性

略

#### 8.4.11 时域卷积特性

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

#### 8.4.12 频域卷积特性

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

### 8.5 周期信号傅里叶变换

$f(t)$  角频率为  $\omega_0$ ，第一个周期的频域  $F_0(\omega)$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$
$$F_n = \frac{1}{T} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

### 8.6 抽样信号的傅里叶变换

抽样信号 = 连续信号 · 抽样脉冲

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n F(\omega - n\omega_s)$$

#### 8.6.1 均匀抽样脉冲

$p(t)$  角频率（抽样频率）为  $\omega_s$ ，周期（抽样周期）为  $T_s$

冲激抽样

$$\delta_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s)$$
$$\begin{cases} P_n = \frac{1}{T_s} \\ \delta_T(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{jn\omega_s t} \\ P(\omega) = \omega_s \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_s) \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega - n\omega_s)$$

矩形脉冲（自然）抽样

$$\delta_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s)$$

$$P_n = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

### 8.6.2 时域抽样定理

奈奎斯特频率

$$f_s \geq 2f_m$$

奈奎斯特周期

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m}$$

### 8.6.3 LTI 系统的频域分析

$$Y_f(\omega) = \mathcal{F}(y_f(t)) = F(\omega) H(\omega)$$

## Part V

# 拉普拉斯变换

$$s = \sigma + j\omega$$

## 9 拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

单边拉普拉斯变换（以下拉普拉斯变换都指单边）

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

## 拉普拉斯逆变换

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

### 9.1 常用变换对

定义域  $D \subseteq \mathbb{R}^+$ , 收敛域  $\sigma > \sigma_0$

$f(t)$	$F(s)$	$\sigma_0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{s + \lambda}$	$-\lambda$
$e^{j\omega t}$	$\frac{1}{s - j\omega}$	0
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0
$\delta^{(n)}(t)$	$s^n$	$-\infty$
$t^n e^{-\lambda t}$	$\frac{n!}{(s + \lambda)^{n+1}}$	$-\lambda$
$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}$	$-\lambda$
$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}$	$-\lambda$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	0
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	0

### 9.2 性质

以下函数收敛域

$$\mathcal{L}(f) : \sigma > \sigma_1$$

$$\mathcal{L}(g) : \sigma > \sigma_2$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

#### 9.2.1 线性

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \quad (\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2))$$

### 9.2.2 尺度变换特性

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) (\sigma > a\sigma_1)$$

### 9.2.3 时移特性

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-st_0} F(s) (t_0 \geq 0) (\sigma > \sigma_1)$$

### 9.2.4 复频域平移特性

$$\mathcal{L}(e^{-\lambda t} f(t)) = F(s+\lambda) (\sigma > \sigma_1 - \lambda)$$

### 9.2.5 时域微分特性

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0) (\sigma > \sigma_1)$$

### 9.2.6 复频域微分特性

$$\mathcal{L}((-t)^n f(t)) = F^{(n)}(s) (\sigma > \sigma_1)$$

### 9.2.7 时域积分特性

$$\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} \left(F(s) + \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau\right) (\sigma > \max(\sigma_1, 0))$$

### 9.2.8 复频域积分特性

略

### 9.2.9 时域卷积特性

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) (\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2))$$

### 9.2.10 复频域卷积特性

$$\mathcal{L}(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi j} \mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g) (\sigma > \sigma_1 + \sigma_2)$$

### 9.2.11 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

### 9.2.12 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

## 10 拉普拉斯逆变换

### 10.1 部分分式展开法

有理分式

$$F(s) = \frac{\mathcal{P}_m(s)}{\mathcal{Q}_n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

若为有理真分式 ( $m < n$ )

$$F(s) = \frac{\mathcal{P}_m(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

若  $s = p_i$  项都为单阶极点 可分解为:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}$$

$$k_i = (s - p_i) F(s)|_{s=p_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

若  $s = u$  项为  $r$  重阶极点 可分解为:

$$F(s) = \frac{\mathcal{P}_m(s)}{(s - u)^r \cdot \prod_{i=1}^{n-r} (s - p_i)} = \sum_{j=1}^r \frac{q_j}{(s - u)^j} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{k_i}{s - p_i}$$

$$\begin{cases} q_j = \frac{1}{(r-j)!} \left( \frac{d}{ds} \right)^{r-j} [(s - u)^r F(s)] \Big|_{s=u} & 1 \leq j \leq r \\ k_i = (s - p_i) F(s)|_{s=p_i} & 1 \leq i \leq n - r \end{cases}$$

若为有理假分式 ( $m \geq n$ )

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m-n} B_i s^i + \frac{\mathcal{R}_{n-1}(s)}{\mathcal{Q}_n(s)}$$

后按有理真分式变换

## 10.2 留数法

略

## 11 连续系统响应的复频域分析

### 11.1 二阶 LTI 系统响应

激励方程

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) = b_0 f(t) + b_1 f'(t) + b_2 f''(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i f^{(i)}(t)$$

拉普拉斯变换后

$$\underbrace{a_0 Y(s)}_{\mathcal{L}(a_0 y(t))} + \underbrace{a_1 [sY(s) - y(0_-)]}_{\mathcal{L}(a_1 y'(t))} + \underbrace{a_2 [s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)]}_{\mathcal{L}(a_2 y''(t))} = \underbrace{b_0 F(s)}_{\mathcal{L}(b_0 f(t))} + \underbrace{b_1 sF(s)}_{\mathcal{L}(b_1 f'(t))} + \underbrace{b_2 s^2 F(s)}_{\mathcal{L}(b_2 f''(t))}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( s^i Y(s) + \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-1-j} y^{(j)}(0_-) \right) = \sum_{i=0}^n b_i s^i F(s)$$

全响应

$$Y(s) = \underbrace{\frac{a_2 [sy(0_-) + y'(0_-)] + a_1 y(0_-)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\frac{\overbrace{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}^{H(s)}}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{Y_f(s)} F(s)$$

零输入响应  $y_x(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_x(s))$

零状态响应  $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_f(s))$

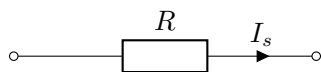
### 11.2 电路的复频域模型

元件	时域	复频域
电阻	$u_t = Ri_t$	$U_s = RI_s$
电感	$u_t = Li'_t$	$U_s = L(sI_s - i_t(0_-))$
电容	$i_t = Cu'_t$	$I_s = C(sU_s - u_t(0_-))$

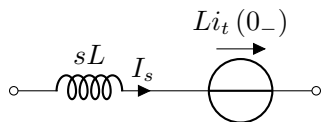
### 11.3 串联形式的复频域模型

$U_s$  为两端电势差

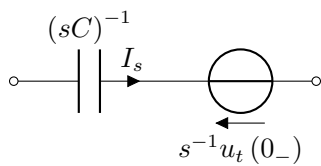
电阻



电感



电容



## 11.4 LTI 系统的复频域分析

$$Y_f(s) = \mathcal{F}(y_f(t)) = F(s)H(s)$$

## 12 零极点

类似于10.1

$$H(s) = \frac{\mathcal{P}_m(s)}{\mathcal{Q}_n(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

零点  $z_i$

极点  $p_i$

### 12.1 系统稳定性

稳定系统充要条件（绝对可积条件）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

### 12.1.1 不稳定系统

存在极点的实部大于等于 0

$$\exists p_i, \sigma_{p_i} \geq 0$$

或

存在多阶极点的实部等于 0

$$\exists p_i = p_j \rightarrow \sigma_{p_i} = 0$$

### 12.1.2 临界稳定系统

所有极点实部都小于等于 0

$$\forall p_i = p_j \rightarrow \sigma_{p_i} \leq 0$$

并且

极点的实部等于 0 的都是一阶极点

$$\forall \sigma_{p_i} = \sigma_{p_j} = 0; p_i = p_j \rightarrow i = j$$

### 12.1.3 稳定系统

所有极点实部都小于 0

$$\forall p_i, \sigma_{p_i} < 0$$

## 13 频响特性

系统稳定时，令  $s = j\omega$ （即退化为傅里叶变换后的频域响应）

$$H(\omega) = |H(\omega)| \varphi(\omega)$$

幅频特性  $|H(\omega)|$

相频特性  $\varphi(\omega)$



## Part VI

# 离散系统时域分析

## 14 LTI 离散系统的响应

### 14.1 差分

一阶前向差分

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

一阶后向差分（以下差分都指后向差分）

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$$

### 14.2 性质

#### 14.2.1 线性

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

#### 14.2.2 多阶差分

$$\nabla^2 f(k) = \nabla(\nabla f(k)) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

$$\nabla^n f(k) = f(k) + \sum_{i=1}^n b_i f(k-i)$$

### 14.3 零输入响应

$$y_x(k) = y(k) \quad (k < 0)$$

### 14.4 零状态响应

$$y_f(k) = 0 \quad (k < 0)$$

## 15 卷积和

$$f(k) * g(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(k-n)$$

## 15.1 性质

除了微积分性质变为差分性质，其他与连续性质（5）相同

### 15.1.1 差分性质

$$\begin{aligned} s(k) = f(k) * g(k) &\implies \nabla^i s(k) = \nabla^j f(k) * \nabla^{i-j} g(k) \\ &\implies E^{-i} s(k) = E^{-j} f(k) * E^{-(i-j)} g(k) \end{aligned}$$

## 16 位移算子分析

$$E^n f(k) = f(k+n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

## Part VII

## Z 变换

$$z = e^{sT}$$

## 17 Z 变换

双边 Z 变换

$$F(z) = \mathcal{Z}(f(k)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) z^{-k}$$

单边 Z 变换（以下 Z 变换都指单边）

$$F(z) = \mathcal{Z}(f(k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) z^{-k}$$

Z 逆变换

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

### 17.1 常用变换对

定义域  $D \in \mathbb{N}$ ，收敛域  $|z| > |R_f|$

— 表示  $|z| \geq 0$

$f(k)$	$F(z)$	$R_f$
$\delta(k)$	1	—
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	1
$k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
$e^{j\omega k}$	$\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$	1
$\cos \omega k$	$\frac{z(z-\cos \omega)}{z^2-2z\cos \omega+1}$	1
$\sin \omega k$	$\frac{z\sin \omega}{z^2-2z\cos \omega+1}$	1
$a^k$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$a$
$ka^k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$a$

## 17.2 性质

以下函数收敛域

$$\mathcal{Z}(f) : |z| > R_{f1}$$

$$\mathcal{Z}(g) : |z| > R_{f2}$$

$$\mathcal{Z}(f(k)) = F(z)$$

### 17.2.1 线性

$$\mathcal{Z}(f+g) = \mathcal{Z}(f) + \mathcal{Z}(g) (|z| > \max(R_{f1}, R_{f2}))$$

### 17.2.2 指数加权（尺度变换）特性

$$\mathcal{Z}(a^k f(k)) = F\left(\frac{z}{a}\right) (|z| > |a| R_{f1})$$

### 17.2.3 序列平移特性

$$\mathcal{Z}(f(k+k_0)) = z^{k_0} F(z) (|z| > R_{f1})$$

### 17.2.4 Z 域微分特性

$$\mathcal{Z}(kf(k)) = -zF'(z) (|z| > R_{f1})$$

### 17.2.5 序列卷积特性

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) (|z| > \max(R_{f1}, R_{f2}))$$

### 17.2.6 初值定理

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

### 17.2.7 终值定理

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

## 18 Z 逆变换

### 18.1 部分分式展开法

有理分式

$$F(z) = \frac{\mathcal{P}_m(z^{-1})}{\mathcal{Q}_n(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}$$

若为有理真分式 ( $m < n$ )

$$F(z) = \frac{\mathcal{P}_m(z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})}$$

若  $z = p_i$  项都为单阶极点 可分解为:

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1 - p_i z^{-1}}$$

$$k_i = (1 - p_i z^{-1}) F(z) \Big|_{z=p_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

若  $z = u$  项为  $r$  重阶极点 可分解为:

$$F(z) = \frac{\mathcal{P}_m(z^{-1})}{(1 - uz^{-1})^r \cdot \prod_{i=1}^{n-r} (1 - p_i z^{-1})} = \sum_{j=1}^r \frac{q_j}{(1 - p_1 z^{-1})^j} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{k_i}{1 - p_i z^{-1}}$$

$$\begin{cases} q_j = \frac{1}{(-u)^{r-j} (r-j)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{r-j} [(1 - uz^{-1})^r F(z)] \Big|_{z=u} & 1 \leq j \leq r \\ k_i = (1 - p_i z^{-1}) F(z) \Big|_{z=p_i} & 1 \leq i \leq n-r \end{cases}$$

若为有理假分式 ( $m \geq n$ )

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m-n} B_i z^{-i} + \frac{\mathcal{R}_{n-1}(z^{-1})}{\mathcal{Q}_n(z^{-1})}$$

后按有理真分式变换

## 18.2 留数法

略

## 18.3 长除法

略

# 19 离散系统响应的 Z 域分析

## 19.1 二阶 LTI 系统响应

激励方程

$$a_0 y(k) + a_1 E^{-1} y(k) + a_2 E^{-2} y(k) = b_0 f(k) + b_1 E^{-1} f(k) + b_2 E^{-2} f(k)$$

Z 变换后

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_0 Y(z)}_{\mathcal{Z}(a_0 y(k))} + \underbrace{a_1 [z^{-1} Y(z) + y(-1)]}_{\mathcal{Z}(a_1 E^{-1} y(k))} + \underbrace{a_2 [z^{-2} Y(z) + z^{-1} y(-1) + y(-2)]}_{\mathcal{Z}(a_2 E^{-2} y(k))} \\ &= \underbrace{b_0 F(z)}_{\mathcal{Z}(b_0 f(k))} + \underbrace{b_1 z^{-1} F(z)}_{\mathcal{Z}(b_1 E^{-1} f(k))} + \underbrace{b_2 z^{-2} F(z)}_{\mathcal{Z}(b_2 E^{-2} f(k))} \end{aligned}$$

全响应

$$Y(z) = - \underbrace{\frac{a_2 [z^{-1} y(-1) + y(-2)] + a_1 y(-1)}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}}_{Y_x(z)} + \underbrace{\frac{\overbrace{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}^{H(z)}}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}}_{Y_f(z)} F(z)$$

零输入响应  $y_x(t) = \mathcal{Z}^{-1}(Y_x(z))$

零状态响应  $y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1}(Y_f(z))$

## 20 零极点

类似于18.1

$$H(z) = \frac{\mathcal{P}_m(z)}{\mathcal{Q}_n(z)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

零点  $z_i$

极点  $p_i$

$$R_f > \max \{z_i\}$$

## 20.1 系统稳定性

稳定系统充要条件（绝对可积条件）

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < +\infty$$

### 20.1.1 不稳定系统

有极点均在单位圆外

$$\exists p_i \rightarrow |p_i| > 1$$

或

存在多阶段极点在单位圆上

$$\exists p_i = p_j \rightarrow |p_i| = 1$$

### 20.1.2 临界稳定系统

所有极点都位于单位圆内

$$\forall p_i \rightarrow |p_i| \leq 1$$

并且

位于单位圆上的极点都是一阶极点

$$\forall |p_i| = |p_j| = 1; p_i = p_j \rightarrow i = j$$

### 20.1.3 稳定系统

$H(z)$  的收敛域包含单位圆（即所有极点均在单位圆内）

$$R_f > 1$$

或（等价于）

$$\forall p_i \rightarrow |p_i| < 1$$