概率论与数理统计

Tuesday 16^{th} December, 2025

目录

Part I

概率论

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$或AB	$\{\omega \vert \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \vert \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \vert \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
相容事件		$A \cap B \neq \varnothing$
互斥事件		$A \cap B = \varnothing$
对立事件	$\overline{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 减法

$$A \supseteq B \implies P(A-B) = P(A) - P(B)$$

推论：$P\left(A\overline{B}\right) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$

1.3 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率（$P(A) > 0$）

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.4 乘法公式

$P(A) > 0$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1.5 古典概型

$$P\left(A\right)=\frac{A\text{所含样本点个数}}{\Omega\text{样本点个数}}$$

1.6 几何概型

$$P\left(A\right)=\frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

1.7 完备事件组

$\left\{A_i\right\}$

$$\bigcup A_i=\Omega;A_i\cap A_j=\varnothing\left(i\neq j\right)$$

1.8 全概率公式

$\left\{A_i\right\}$ 完备事件组

$$P\left(B\right)=\sum P\left(A_iB\right)=\sum P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)$$

1.8.1 全概率条件公式

$$P\left(C|B\right)=\sum P\left(A_iC|B\right)=\sum P\left(A_i|B\right)P\left(C|A_iB\right)$$

1.9 贝叶斯公式

$$P\left(A_j|B\right)=\frac{P\left(A_jB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_jB\right)}{\sum P\left(A_iB\right)}=\frac{P\left(A_j\right)P\left(B|A_j\right)}{\sum P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)}$$

1.10 独立事件

$$\begin{aligned}
A,B\text{相互独立}&\iff P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\\
&\iff P\left(A|B\right)=P\left(A\right)\\
&\iff P\left(A|B\right)=P\left(A|\overline{B}\right)\\
&\iff \overline{A},B\text{相互独立}\\
&\iff A,\overline{B}\text{相互独立}\\
&\iff \overline{A},\overline{B}\text{相互独立}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A,B,C\text{相互独立} \iff & P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right);\\
& P\left(AC\right)=P\left(A\right)P\left(C\right);\\
& P\left(BC\right)=P\left(B\right)P\left(C\right);\\
& P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)
\end{aligned}
$$

1.11 伯努利概型

定义：

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中，A 事件恰好发生 k 次的概率为 $\mathrm{C}_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数（概率密度）

$X\sim f\left(x\right)$、$\left(X,Y\right)\sim f\left(x,y\right)$ 等

性质

$$f\left(x\right)\geqslant 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

2.2 分布函数

$F\left(x\right)$、$F\left(x,y\right)$ 等

定义

$$P\left\{X=x_0\right\}=\lim_{x\to x_0^+}F\left(x\right)-\lim_{x\to x_0^-}F\left(x\right)$$

当 $F\left(x\right)$ 连续时（连续型随机变量）

$$P\left\{X=x_0\right\}=0$$

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

性质

$$F(x) \geqslant 0; F(x) \nearrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F(+\infty,y)$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leqslant x|Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)\,\mathrm{d}t$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leqslant y|X = x\} = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t$$

3.2.1 条件分布律

$$p_{j|i} = P\{Y = y_j|X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

$$p_{i|j} = P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

3.2.2 条件密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

3.3 独立性

$$(X,Y) \sim f(x,y)$$

若 X, Y 独立
充要条件 1：

$$f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

充要条件 2：

$$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

3.4 换元

以下都有

$$(X,Y) \sim f(x,y)$$

其中 g 为单调可导函数

3.4.1 一维

$Y=g\left(X\right)$

令 $h=g^{-1}$，即 $X=h\left(Y\right)$，其中 h 为单调可导函数（即 g^{-1} 单调可导）

$$\begin{aligned}F_Y\left(y\right)&=P\left\{Y\leqslant y\right\}\\&=P\left\{g\left(X\right)\leqslant y\right\}\quad&=P\left\{X\leqslant h\left(y\right)\right\}\\&=F_{g\left(X\right)}\left(y\right)\quad&=F_X\left(h\left(y\right)\right)\\&=\int\limits_{g(X)\leqslant y}f\left(t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$f_Y\left(y\right)=F'_Y\left(y\right)$$

3.4.2 二维

$Z=g\left(X,Y\right)$，即 $Y=h\left(X,Z\right)$，其中 $h:\forall x\to z\mapsto y=h\left(x,z\right)$ 单调可导（用 X 同理）

$$\begin{aligned}F_Z\left(z\right)&=P\left\{Z\leqslant z\right\}\\&=P\left\{g\left(X,Y\right)\leqslant z\right\}\quad&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P\left\{Y\leqslant h\left(x,z\right)|X=x\right\}P\left\{X=x\right\}\mathrm{d}x\\&=F_{g\left(X,Y\right)}\left(z\right)\\&=\iint\limits_{g(X,Y)\leqslant z}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\text{若}X,Y\text{独立}&=P\left\{g\left(X,Y\right)\leqslant z\right\}\quad&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P\left\{Y\leqslant h\left(x,z\right)\right\}P\left\{X=x\right\}\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{g(X,Y)\leqslant z}f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(x\right)\int\limits_{-\infty}^{h(x,z)}f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$f_Z\left(z\right)=F'_Z\left(z\right)$$

3.4.3 * 特殊

和 $Z=X+Y$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y$$

若 X,Y 独立（卷积公式）

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(z-y\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y=f_X\left(z\right)*f_Y\left(z\right)$$

商 $Z=\dfrac{X}{Y}$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f\left(yz,y\right)\mathrm{d}y$$

若 X,Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f_X\left(yz\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y$$

积 $Z=XY$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|x\right|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|y\right|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$$

若 X,Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|x\right|}f_X\left(x\right)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|y\right|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y$$

最值分布 若 X,Y 独立

$$M=\max\left\{X,Y\right\},N=\min\left\{X,Y\right\}$$

则

$$\begin{gathered}F_M=P\left\{M\leqslant m\right\}=P\left\{X\leqslant m,Y\leqslant m\right\}=P\left\{X\leqslant m\right\}P\left\{Y\leqslant m\right\}=F_XF_Y\\1-F_N=P\left\{N>m\right\}=P\left\{X>m,Y>m\right\}=P\left\{X>m\right\}P\left\{Y>m\right\}=\left(1-F_X\right)\left(1-F_Y\right)\\f_M=F_M'=f_XF_Y+f_YF_X\\f_N=F_N'=f_X\left(1-F_Y\right)+f_Y\left(1-F_X\right)\end{gathered}$$

4 一维离散、连续型随机变量及其分布律、密度、分布函数

分布	期望	方差	注释	密度函数	分布函数或分布律
两点分布 $B(1,p)$	p	$p(1-p)$	$p\in(0,1)$		$\begin{array}{c\|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p\end{array}$
二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$	$p\in(0,1)$ $n\in\mathbb{N}^+$ $k\geqslant 0$		$\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ	$\lambda>0$ $k\geqslant 0$		$\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$
几何分布 $G(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{(1-p)}{p^2}$	$p\in(0,1)$ $k>0$ 前$k-1$次都失败，第k次成功		$(1-p)^{k-1}p$
超几何分布 $H(M,N,n)$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM}{N}\cdot\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$	$N>1$ 总样本数 $n\leqslant N$ 抽取样本数 $M\leqslant N$ 指定样本数 k 抽到指定样本数 $\max\{0,n+M-N\}\leqslant k\leqslant\min\{M,n\}$		$\dfrac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$
均匀分布 $U[a,b]$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$		$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & x\in(a,b)\\ 1 & x\geqslant b\end{cases}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$	$\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$	$\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$
标准正态分布 $N(0,1)$	0	1		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$\mu\in\mathbb{R}$ 期望 $\sigma>0$ 标准差	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\dfrac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}$

二项分布又名伯努利分布

正态分布又名高斯分布

4.1 泊松定理

n 重伯努利试验中，事件发生概率 $p_n\in(0,1)$ 表示试验总数 n 次时事件发生的概率，当 $p_n<0.1; n>100$ 时可近似为泊松分布。若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{C}_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

n 重伯努利试验：只有两种结果，且每次实验概率相同、相互独立，做 n 次

4.2 经验原则

$$P\left\{|X-\mu|<k\sigma\right\}=2\Phi_0\left(k\right)-1\left(k\geqslant 0\right)$$

$$\begin{cases} P\left\{|X-\mu|<\ \ \sigma\right\}=0.6827 \\ P\left\{|X-\mu|<2\sigma\right\}=0.9545 \\ P\left\{|X-\mu|<3\sigma\right\}=0.9973 \end{cases}$$

5 二维连续型随机变量及其密度函数

5.1 均匀分布

$(X,Y)\sim U\left(D\right)$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

5.2 正态分布

$(X,Y)\sim N\left(\mu_X,\mu_Y;\sigma_X^2,\sigma_Y^2;\rho\right)$

$\mu\in\mathbb{R}$ 期望

$\sigma\ >0$ 标准差

$\rho\in(-1,1)$ 相关系数（$\rho=0$ 时 X,Y 独立）

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-\mu_X\right)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{\left(y-\mu_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若 X,Y 独立

$$\left.\begin{aligned} X\sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right) \\ Y\sim N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right) \end{aligned}\right\}\implies(X,Y)\sim N\left(\mu_X,\mu_Y;\sigma_X^2,\sigma_Y^2;0\right)$$

$$Z=aX+bY\sim N\left(a\mu_X+b\mu_Y,a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2\right)$$

二维正态分布中 X,Y 线性无关即为独立

Part II

数理统计

6 数字特征

6.1 期望

期望	离散型	连续型
$E\left(X\right)$	$\sum x_ip_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)\mathrm{d}x$
$E\left(g\left(X\right)\right)$	$\sum g\left(x_i\right)p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$
$E\left(g\left(X,Y\right)\right)$	$\sum\limits_i\sum\limits_j g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

6.1.1 性质

线性

$$E\left(kX+c\right)=kE\left(X\right)+c$$

$$E\left(X\pm Y\right)=E\left(X\right)\pm E\left(Y\right)$$

线性相关性

$$X,Y\text{不相关}\iff E\left(XY\right)=E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

6.2 方差

$$D\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$$

6.2.1 标准差

$$\sqrt{D\left(X\right)}$$

6.2.2 离散型

$$D\left(X\right)=\sum\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2p_i$$

6.2.3 连续型

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E\left(X\right)\right)^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

6.2.4 性质

线性

$$D\left(kX+c\right)=k^2D\left(X\right)$$

线性相关性

$$X,Y\text{不相关}\iff D\left(X\pm Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)$$

6.3 标准化随机变量

$$X^*=\frac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}}$$
$$E\left(X^*\right)=0$$
$$D\left(X^*\right)=1$$

6.4 协方差

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right]=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

6.4.1 性质

$$D\left(X\pm Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)\pm2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(X,X\right)=D\left(X\right)$$

交换律

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\mathrm{Cov}\left(Y,X\right)$$

线性

$$\mathrm{Cov}\left(X,c\right)=0$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum a_iX_i,\sum b_jY_j\right)=\sum_i\sum_j a_ib_j\mathrm{Cov}\left(X_i,Y_j\right)$$

6.4.2 协方差矩阵（对称矩阵）

X, Y 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X,X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & D(Y) \end{bmatrix}$$

6.5 （线性）相关系数

6.5.1 *（线性）均方误差

用 $aX + b$ 去拟合 Y

$e(a,b)$ 越小表明线性关系越强，越大越弱

$e(a_0,b_0)$ 最小均方误差

(a_0,b_0) 驻点

a_0 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$

b_0 $E(Y) - a_0E(X)$

$$e(a,b) = E\left[(Y - (aX+b))^2\right]$$

$$e(a_0,b_0) = \left(1 - \rho_{XY}^2\right) D(Y)$$

6.5.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

6.5.3 性质

$$\rho \in [-1,1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1\,(a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \text{（正相关）} \rho_{XY} = & 1 \\ a < 0 \text{（负相关）} \rho_{XY} = & -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|}\rho_{XY}$$

6.5.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned}&\rho=0\\\Longleftrightarrow&\operatorname{Cov}(X,Y)=0\\\Longleftrightarrow&E(XY)=E(X)E(Y)\\\Longleftrightarrow&D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\end{aligned}$$

独立 $\Longrightarrow$ 不相关

7 大数定律与中心极限定理

7.1 切比雪夫不等式

设 X 有有限方差（即有界）

$$\begin{aligned}&\exists E(X),D(X);\forall\varepsilon>0\\\to&P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\\\text{或}&P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

7.2 大数定律

7.2.1 依概率收敛

随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于常数 a

$$X_n\xrightarrow{P}a\,(n\to\infty)$$

定义为

$$\forall\varepsilon>0\to\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$$

7.2.2 伯努利大数定律

设事件 A 每次实验发生概率为 p，且 n 重伯努利试验中发生次数为 n_A，则

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0\\\to&\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1\\\text{或}&\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0\end{aligned}$$

7.2.3 切比雪夫大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立（可不同分布），且有有限方差，则

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - E\left(\bar{X}\right) \right| < \varepsilon \right\} = 1 \\
&或 \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - E\left(\bar{X}\right) \right| \geqslant \varepsilon \right\} = 0
\end{aligned}$$

7.2.4 辛钦大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，则有相同的期望 μ，则

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1 \\
&或 \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - \mu \right| \geqslant \varepsilon \right\} = 0
\end{aligned}$$

7.3 中心极限定理

7.3.1 定理

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立（可不同分布），期望、方差均存在，则

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X} \sim N\left(E\left(\bar{X}\right), D\left(\bar{X}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{X} - E\left(\bar{X}\right)}{\sqrt{D\left(\bar{X}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\bar{X} - E\left(\bar{X}\right)}{\sqrt{D\left(\bar{X}\right)}} \leqslant x \right\} = \Phi_0(x)$$

7.3.2 列维-林德伯格定理（独立同分布）

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，存在相同的期望 μ、方差 σ^2，则

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant x \right\} = \Phi_0(x)$$

7.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布）

设随机变量 $\eta_n \sim B(n,p)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n \sim N(np, np(1-p))$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\sim N\left(0,1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\leqslant x\right\}=\Phi_0\left(x\right)$$

显然 $\eta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，其中随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同服从 $B\left(1,p\right)$ 分布

8 统计量

8.1 样本容量

$$n$$

8.2 简单随机样本

$$X_1,X_2,\cdots,X_n\text{相互独立且同分布}$$

8.3 样本联合分布函数（密度函数）

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod F\left(x_i\right)$$

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod f\left(x_i\right)$$

$$P\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\right\}=\prod p_i$$

8.4 样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

8.5 （修正）样本方差

注：下文所谓“样本方差”均指“修正样本方差”

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

8.6 样本标准差

$$S=\sqrt{S^2}$$

8.7 极差

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$$

8.8 其他

以下都有，若随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，则

$$E\left(X_1\right)=E\left(X_2\right)=\cdots=E\left(X_n\right)=\mu$$
$$D\left(X_1\right)=D\left(X_2\right)=\cdots=D\left(X_n\right)=\sigma^2$$

样本均值的期望等于总体期望，样本方差的期望等于总体方差

$$E\left(\bar{X}\right)=\mu$$
$$E\left(S^2\right)=\sigma^2$$
$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

在正态分布中，样本均值与样本方差相互独立

$$\bar{X}, S_X^2 \text{相互独立}$$

若 X, Y 相互独立，f, g 是任意可测函数，则 $f\left(X\right), g\left(Y\right)$ 相互独立

8.9 矩

名称	定义	离散	连续
k 阶原点矩	$E\left(X^k\right)$	$\sum x_i^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f\left(x\right)\mathrm{d}x$
k 阶中心矩	$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^k\right]$	$\sum\left(x_i-\bar{X}\right)^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\bar{X}\right)^k f\left(x\right)\mathrm{d}x$
$k+l$ 阶混合原点矩	$E\left(X^kY^l\right)$		
$k+l$ 阶混合中心矩	$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^k\left(Y-E\left(Y\right)\right)^l\right]$		

$k, l \in \mathbb{N}^+$

1 阶原点矩 $=E\left(X\right)$

1 阶中心矩 $=0$

2 阶中心矩 $=D\left(X\right)$

1+1 阶混合中心矩 $=\operatorname{Cov}\left(X, Y\right)$

9 抽样分布

<table>
<tr><td rowspan="2">分布</td><td>期望</td><td>方差</td><td>注释</td><td>性质</td></tr>
<tr><td colspan="4">* 密度函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">* 伽马分布
$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$</td><td>$\dfrac{\alpha}{\beta}$</td><td>$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$</td><td>伽马函数
$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \, (x > 0)$</td><td>非负 再生性
$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$
且 X_1, X_2 相互独立
则 $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x, \alpha, \beta) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \left(x > 0, \text{其余概率密度为}0\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">卡方分布
$\chi^2 \sim \chi^2(n)$
$= \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$</td><td>$n$</td><td>$2n$</td><td>$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$
n 自由度
$X_i \sim N(0,1)$ 共n个且独立同分布</td><td>非负 再生性
$\chi_1^2 \sim \chi^2(m), \chi_2^2 \sim \chi^2(n)$
且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立
则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x, n) = \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(x > 0, \text{其余概率密度为}0\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t 分布
$T \sim t(n)$</td><td>0
$(n > 1)$</td><td>$\dfrac{n}{n-2}$
$(n > 2)$</td><td>$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$
n 自由度
$X \sim N(0,1)$
$Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立</td><td>偶函数
$n = 1$ 时，为柯西分布
n 充分大时，为标准正态分布</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x, n) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F 分布
$F \sim F(m, n)$</td><td>$\dfrac{n}{n-2}$
$(n > 2)$</td><td>$\dfrac{m+n-2}{m(n-2)^2}$
$\cdot \dfrac{2n^2}{n-4}$
$(n > 4)$</td><td>$F = \dfrac{X/m}{Y/n}$
m 第一自由度
n 第二自由度
$X \sim \chi^2(m)$
$Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立</td><td>非负
$T \sim t(n) \implies T^2 \sim F(1, n)$
$F \sim F(m, n) \implies F^{-1} \sim F(n, m)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x, m, n) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \left(x > 0, \text{其余概率密度为}0\right)$</td></tr>
</table>

9.1 * 非中心的卡方分布

$X_i \sim N(\mu_i, 1)$ 共 n 个且独立

δ 非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

9.2 上侧分位点

x_p 上侧分位点

$p \in (0,1)$ x_p 右侧区域的概率

$$P\left\{X \geqslant x_p\right\} = p$$

10 参数估计

10.1 点估计

10.1.1 矩估计

基本思想 样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$ 一般采用 $\bar{X} = E(X)$

$k=2$ 一般采用 $\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E\left(X^2\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

也可以用 $\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \end{cases}$

10.1.2 极大似然估计

θ_i 估计量（即分布的未知参数）

p $(x;\theta_1,\theta_2,\cdots)$ $X_1, X_2, \cdots$ 的分布律或密度函数

L $(\theta_1,\theta_2,\cdots) = L(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 似然函数（样本联合分布函数）

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为分布 $F(\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 的简单随机样本
构造似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots) = \prod p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots)$$

调整估计量 θ_i，令似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 取极大值

$$L\left(x_1,x_2,\cdots;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots\right)=\max\left\{L\left(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots\right)\right\}$$

则此时估计值为 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i\left(x_1,x_2,\cdots\right)$

$$\ln L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots\right)=\sum\ln p\left(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots\right)$$

令每个偏导为 0 即可求驻点（若只有一个估计量则直接求导）

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots\right)=0$$

10.2 点估计量评价标准

10.2.1 * 均方误差

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=D\left(\hat{\theta}\right)+\left(\theta-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

10.2.2 无偏性

无偏估计 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计 $\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

性质 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，即 $E\left(\bar{X}\right)=\mu$

S^2 是 σ^2 的无偏估计，即 $E\left(S^2\right)=\sigma^2$

S 不是 σ 的无偏估计，$E\left(S\right)=\sqrt{\sigma^2-D\left(S\right)}\leqslant\sigma$

未修正样本方差 $S_0^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 是 σ^2 的有偏估计，也是 σ^2 的渐进无偏估计

10.2.3 有效性

$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若 $D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

10.2.4 相合（一致）性

$$\forall\varepsilon>0\to\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$$

10.3 区间估计

θ 未知参数

T 已知参数

F 已知分布且与 θ 无关

$I(T,\theta)$ 枢轴变量，服从分布 F

$\alpha \in (0,1)$ 显著性水平（通常取值为 0.05 或 0.01）

$1-\alpha$ 置信水平（置信度）

$v_{\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$v_{1-\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ 双侧置信区间，置信下限 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(T)$，置信上限 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(T)$

$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（双侧）置信区间

$$P\left\{v_{1-\frac{\alpha}{2}} < I(T,\theta) < v_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha \implies P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1-\alpha$$

11 假设检验

H_0 原假设（零假设）

H_1 备择假设（取原假设的逆命题）

弃真错误（第一类错误、α 错误）H_0 为真，且被拒绝

纳伪错误（第二类错误、β 错误）H_0 为假，且被接受

α $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in W) \,|\, H_0\text{为真}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_W}\left\{H_0\text{为真}\right\}$；显著性水平、弃真错误的概率

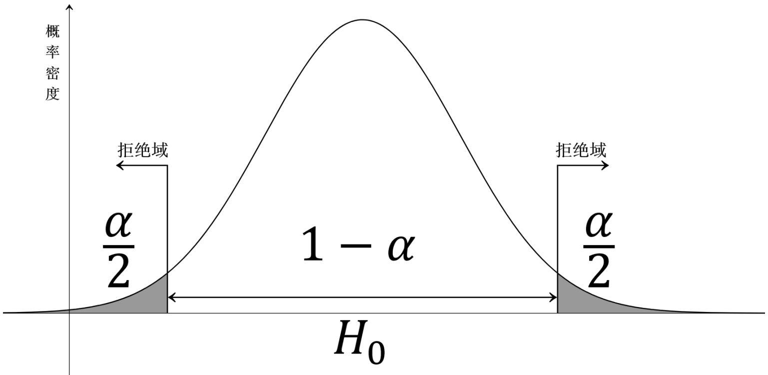
β $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in D) \,|\, H_0\text{为假}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_D}\left\{H_0\text{为假}\right\}$；纳伪错误的概率

W 拒绝域；若统计量的值属于拒绝域，则拒绝 H_0

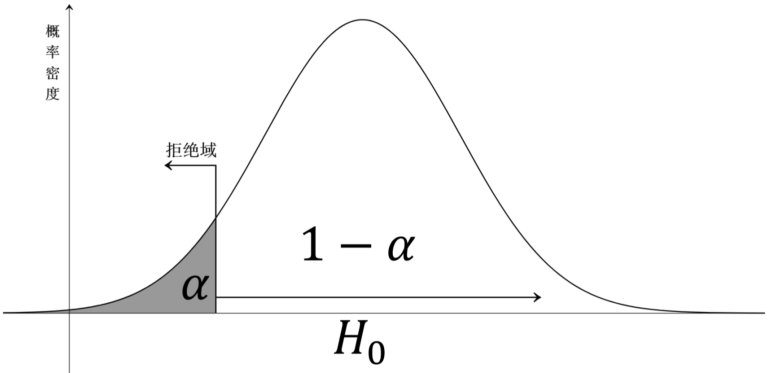
D 接受域；若统计量的值属于接受域，则接受 H_0

决策	总体情况	
	H_0 为真	H_0 为假
接受 H_0	正确 $(1-\alpha)$	纳伪 (β)
拒绝 H_0	弃真 (α)	正确 $(1-\beta)$

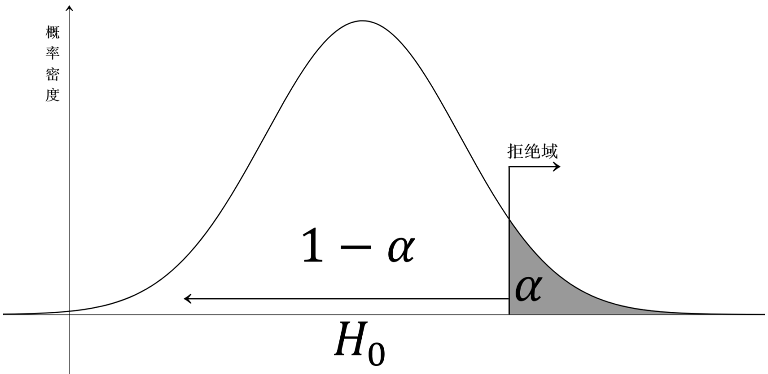
$H_0: \theta = \theta_0$ 时，选择双侧检验（拒绝两侧偏离 θ_0 的值）
$H_0: \theta > \theta_0$ 时，选择左侧检验（拒绝左侧远小于 θ_0 的值）
$H_0: \theta < \theta_0$ 时，选择右侧检验（拒绝右侧远大于 θ_0 的值）



双侧检验



左侧检验



右侧检验

Part III

附录

A 正态总体相关表

以下都有，两个样本相互独立：

$$X_1, X_2, \cdots, X_m \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$$
$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

表 1: 正态总体的常用统计量分布

符号	统计量	服从分布
	$\bar{X}$	$N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
U	$\bar{X}^* = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
V	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$	$\chi^2(n-1)$
W	$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^{*2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$
$\dfrac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
	$\bar{X} \pm \bar{Y}$	$N\left(\mu_X \pm \mu_Y, \dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right)$
U_1	$\left(\bar{X} \pm \bar{Y}\right)^* = \dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$
$V_1 = V_X + V_Y$	$\dfrac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} + \dfrac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}$	$\chi^2(m+n-2)$
$\dfrac{W_X/m}{W_Y/n}$	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} X_i^{*2}/m}{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^{*2}/n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m,n)$
$\dfrac{V_X/(m-1)}{V_Y/(n-1)}$	$\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$时 $\dfrac{U_1}{\sqrt{V_1/(m+n-2)}}$	$\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$

† $\bar{X}, S_X^2$ 相互独立，$\bar{Y}, S_Y^2$ 相互独立

表 2: 正态总体的区间估计枢轴变量和置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间

待估参数 θ	条件 T	枢轴变量 I	服从分布 F	双侧置信区间 $\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
	σ^2 未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
$\mu_X-\mu_Y$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$
	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ 未知	$\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_X-\mu_Y)}{S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}\right)$
$\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	μ_X, μ_Y 已知	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m,n)$	$\left(\dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2 F_{\alpha/2}(m,n)}, \dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2 F_{1-\alpha/2}(m,n)}\right)$
	μ_X, μ_Y 未知	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$	$\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}, \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

† $S_\omega = \sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S^2 代替 σ^2

表 3: 正态总体的假设检验检验统计量和置信水平为 $1-\alpha$ 的拒绝域

原假设 H_0	其他参数 T	检验统计量 I	服从分布 F	拒绝域 W
$\mu=\mu_0$	σ^2 已知	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert u\rvert \geqslant u_{\alpha/2}$
$\mu\leqslant\mu_0$				$u\geqslant u_\alpha$
$\mu\geqslant\mu_0$				$u\leqslant -u_\alpha$
$\mu=\mu_0$	σ^2 未知	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert t\rvert \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu\leqslant\mu_0$				$t\geqslant t_\alpha(n-1)$
$\mu\geqslant\mu_0$				$t\leqslant -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	μ 已知	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$				$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n)$
$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$				$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$				$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$				$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_X-\mu_Y=\delta$	σ_X^2,σ_Y^2 已知	$U=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\lvert u\rvert \geqslant u_{\alpha/2}$
$\mu_X-\mu_Y\leqslant\delta$				$u\geqslant u_\alpha$
$\mu_X-\mu_Y\geqslant\delta$				$u\leqslant -u_\alpha$
$\mu_X-\mu_Y=\delta$	σ_X^2,σ_Y^2 未知	$T=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\delta}{S_\omega\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\lvert t\rvert \geqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_X-\mu_Y\leqslant\delta$				$t\geqslant t_\alpha(m+n-2)$
$\mu_X-\mu_Y\geqslant\delta$				$t\leqslant -t_\alpha(m+n-2)$
$\sigma_X^2=\sigma_Y^2$	μ_X,μ_Y 已知	$F=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2/m}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2/n}$	$F(m,n)$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(m,n)$ 或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(m,n)$
$\sigma_X^2\leqslant\sigma_Y^2$				$F\geqslant F_\alpha(m,n)$
$\sigma_X^2\geqslant\sigma_Y^2$				$F\leqslant F_{1-\alpha}(m,n)$
$\sigma_X^2=\sigma_Y^2$	μ_X,μ_Y 未知	$F=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$
$\sigma_X^2\leqslant\sigma_Y^2$				$F\geqslant F_\alpha(m-1,n-1)$
$\sigma_X^2\geqslant\sigma_Y^2$				$F\leqslant F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

† $S_\omega=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S^2 代替 σ^2