概率论与数理统计

Saturday 13^{th} September, 2025

目录

Part I

概率论

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 AB	$\{\omega \mid \omega \in A \land \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \mid \omega \in A \lor \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \mid \omega \in A \land \omega \notin B\}$
相容事件		$A \cap B \neq \varnothing$
互斥事件		$A \cap B = \varnothing$
对立事件	$\overline{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率（$P(A) > 0$）

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.3 乘法公式

$P(A) > 0$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1.4 古典概型

$$P(A) = \frac{A\text{所含样本点个数}}{\Omega\text{样本点个数}}$$

1.5 几何概型

$$P(A) = \frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

1.6 完备事件组

$\{A_i\}$

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \varnothing \left(i \neq j \right)$$

1.7 全概率公式

$\{A_i\}$ 完备事件组

$$P\left(B\right) = \sum P\left(A_i B\right) = \sum P\left(A_i\right) P\left(B|A_i\right)$$

1.7.1 全概率条件公式

$$P\left(C|B\right) = \sum P\left(A_i C|B\right) = \sum P\left(A_i|B\right) P\left(C|A_i B\right)$$

1.8 贝叶斯公式

$$P\left(A_j|B\right) = \frac{P\left(A_j B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A_j B\right)}{\sum P\left(A_i B\right)} = \frac{P\left(A_j\right) P\left(B|A_j\right)}{\sum P\left(A_i\right) P\left(B|A_i\right)}$$

1.9 独立事件

$$\begin{aligned} A, B\text{相互独立} &\iff P\left(AB\right) = P\left(A\right) P\left(B\right) \\ &\iff P\left(A|B\right) = P\left(A\right) \\ &\iff P\left(A|B\right) = P\left(A|\overline{B}\right) \\ &\iff \overline{A}, B\text{相互独立} \\ &\iff A, \overline{B}\text{相互独立} \\ &\iff \overline{A}, \overline{B}\text{相互独立} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A, B, C\text{相互独立} \iff & P\left(AB\right) = P\left(A\right) P\left(B\right); \\ & P\left(AC\right) = P\left(A\right) P\left(C\right); \\ & P\left(BC\right) = P\left(A\right) P\left(C\right); \\ & P\left(ABC\right) = P\left(A\right) P\left(B\right) P\left(C\right) \end{aligned}$$

1.10 伯努利概型

定义：

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立

3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中，A 事件恰好发生 k 次的概率为 $\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数（概率密度）

$f(x)$、$f(x,y)$ 等

性质

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

2.2 分布函数

$F(x)$、$F(x,y)$ 等

定义

$$P\{X = x_0\} = \lim_{x\to x_0^+} F(x) - \lim_{x\to x_0^-} F(x)$$

当 $F(x)$ 连续时（连续型随机变量）

$$P\{X = x_0\} = 0$$

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

性质

$$F(x) \geqslant 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y)$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leqslant x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(t|y)\,\mathrm{d}t$$

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\leqslant y|X=x\}=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(x|t)\,\mathrm{d}t$$

3.2.1 条件分布律

$$p_{j|i}=P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

$$p_{i|j}=P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

3.2.2 条件密度函数

$$f_{X|Y}\left(x|y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$$

3.3 独立性

$$\left(X,Y\right)\sim f\left(x,y\right)$$

若 X,Y 独立
充要条件 1：

$$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$$

充要条件 2：

$$F\left(x,y\right)=F_X\left(x\right)F_Y\left(y\right)$$

3.4 换元

以下都有

$$\left(X,Y\right)\sim f\left(x,y\right)$$

其中 g 为单调可导函数

3.4.1 一维

$Y=h\left(X\right)$
令 $g=h^{-1}$，即 $X=g\left(Y\right)$，其中 g 为单调可导函数（即 h 的反函数单调可导）

$$\begin{aligned}F_Y\left(y\right)&=P\left\{Y\leqslant y\right\}\\&=P\left\{h\left(X\right)\leqslant y\right\}\quad&=P\left\{X\leqslant g\left(y\right)\right\}\\&=F_{h(X)}\left(y\right)&=F_X\left(g\left(y\right)\right)\\&=\int\limits_{h(X)\leqslant y}f\left(t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$f_Y\left(y\right)=F_Y'\left(y\right)$$

3.4.2 二维

$Z=g\left(X,Y\right)$

$$
\begin{aligned}
F_Z\left(z\right)&=P\left\{Z\leqslant z\right\}\\
&=P\left\{g\left(X,Y\right)\leqslant z\right\}\\
&=F_{g(X,Y)}\left(z\right)\\
&=\iint\limits_{g(X,Y)\leqslant z} f\left(u,v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
\text{若}X,Y\text{独立}&=\iint\limits_{g(X,Y)\leqslant z} f_X\left(u\right)f_Y\left(v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

$$
f_Z\left(z\right)=F_Z'\left(z\right)
$$

3.4.3 * 和

$Z=X+Y$

$$
f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y
$$

若 X,Y 独立

$$
f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(z-y\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y=f_X\left(z\right)*f_Y\left(z\right)
$$

3.4.4 * 商

$Z=\dfrac{X}{Y}$

$$
f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f\left(yz,y\right)\mathrm{d}y
$$

若 X,Y 独立

$$
f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f_X\left(yz\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y
$$

3.4.5 * 积

$Z=XY$

$$
f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|x\right|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|y\right|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y
$$

若 X,Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X\left(x\right)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y$$

3.4.6 * 最值分布

若 X,Y 独立

$$M=\max\left\{X,Y\right\},N=\min\left\{X,Y\right\}$$

则

$$\begin{gathered}F_M=F_XF_Y\\1-F_N=\left(1-F_X\right)\left(1-F_Y\right)\\f_M=F_M'=f_XF_Y+f_YF_X\\f_N=F_N'=f_X\left(1-F_Y\right)+f_Y\left(1-F_X\right)\end{gathered}$$

4 一维离散型随机变量及其分布律

以下都有

$$p\in\left(0,1\right)$$

4.1 两点分布

$X\sim B\left(1,p\right)$

X	0	1
P	$1-p$	p

4.2 二项（伯努利）分布

$X\sim B\left(n,p\right)$

$n\in\mathbb{N}^+$

$k\geqslant k\in\mathbb{N}$

$$P\left\{X=k\right\}=\mathrm{C}_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k}$$

4.3 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$\lambda > 0$

$k \in \mathbb{N}$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

4.3.1 泊松定理

n 重伯努利试验中，事件发生概率 $p_n \in (0,1)$ 与试验次数有关，当 $p_n < 0.1; n > 100$ 时可近似为泊松分布。若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{C}_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

n 重伯努利试验：只有两种结果，且每次实验概率相同、相互独立，做 n 次

4.4 几何分布

$X \sim G(p)$

k 前 $k-1$ 次都失败，第 k 次成功 $k \in \mathbb{N}^+$

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$$

4.5 超几何分布

$X \sim H(M,N,n)$

$N > 1$ 总样本数

$n \leqslant N$ 抽取样本数

$M \leqslant N$ 指定样本数

$k \in \mathbb{N} \cap [\max\{0, n+M-N\}, \min\{M,n\}]$ 抽到指定样本数

$$P\{X=k\} = \frac{\mathrm{C}_M^k \mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$$

5 一维连续型随机变量及其密度、分布函数

5.1 均匀分布

$X \sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & x\in(-\infty,a]\cup[b,+\infty)\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & x\in(a,b)\\ 1 & x\geqslant b\end{cases}$$

5.2 指数分布

$X \sim E(\lambda)$

$\lambda > 0$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

5.3 正态（高斯）分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$\mu \in \mathbb{R}$ 期望

$\sigma > 0$ 标准差

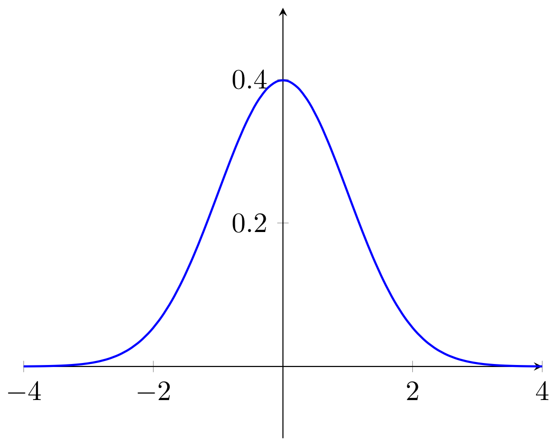
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\frac{1}{2}$$

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

5.3.1 标准正态分布

$X \sim N\left(0, 1\right)$



$$\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Phi_0\left(x\right) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}$$

5.3.2 经验原则

$$P\left\{|X-\mu| < k\sigma\right\} = 2\Phi_0\left(k\right) - 1\left(k \geqslant 0\right)$$

$$\begin{cases} P\left\{|X-\mu| < \ \ \sigma\right\} = 0.6827 \\ P\left\{|X-\mu| < 2\sigma\right\} = 0.9545 \\ P\left\{|X-\mu| < 3\sigma\right\} = 0.9973 \end{cases}$$

6 二维连续型随机变量及其密度函数

6.1 均匀分布

$\left(X, Y\right) \sim U\left(D\right)$

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & \left(x, y\right) \in D \\ 0 & \left(x, y\right) \notin D \end{cases}$$

6.2 正态分布

$\left(X, Y\right) \sim N\left(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho\right)$

$\mu \in \mathbb{R}$ 期望

$\sigma > 0$ 标准差

$\rho \in (-1,1)$，相关系数（$\rho = 0$ 时 X,Y 独立）

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若 X,Y 独立

$$\left.\begin{matrix} X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2) \end{matrix}\right\} \implies (X,Y) \sim N(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,0)$$

$$Z = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

Part II

数理统计

7 数字特征

7.1 期望

	离散型	连续型
$E(X)$	$\sum x_i p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
$E(Y)\,(Y = g(X))$	$\sum g(x_i)\,p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$
$E(Z)\,(Z = g(X,Y))$	$\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)\,p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

7.1.1 性质

线性

$$E(kX + c) = kE(X) + c$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

线性相关性

$$X,Y\text{不相关} \iff E(XY) = E(X)E(Y)$$

7.2 方差

$$D\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$$

7.2.1 标准差

$$\sqrt{D\left(X\right)}$$

7.2.2 离散型

$$D\left(X\right)=\sum\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2p_i$$

7.2.3 连续型

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E\left(X\right)\right)^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

7.2.4 性质

线性

$$D\left(kX+c\right)=k^2D\left(X\right)$$

线性相关性

$$X,Y\text{不相关}\iff D\left(X\pm Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)$$

7.3 标准化随机变量

$$X^*=\frac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}}$$
$$E\left(X^*\right)=0$$
$$D\left(X^*\right)=1$$

7.4 常见分布期望方差

$X \sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	λ	λ
$G(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{(1-p)}{p^2}$
$H(M,N,n)$	$\dfrac{nM}{N}$	$n \cdot \dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right) \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$
$U[a,b]$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

7.5 协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

7.5.1 性质

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,X) = D(X)$$

交换律

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

线性

$$\mathrm{Cov}(X,c) = 0$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

7.5.2 协方差矩阵（对称矩阵）

X,Y 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X,X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & D(Y) \end{bmatrix}$$

7.6 （线性）相关系数

7.6.1 *（线性）均方误差

用 $aX+b$ 去拟合 Y

$e(a,b)$ 越小表明线性关系越强，越大越弱

$e(a_0,b_0)$ 最小均方误差

(a_0,b_0) 驻点

a_0 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$

b_0 $E(Y)-a_0E(X)$

$$e(a,b)=E\left[(Y-(aX+b))^2\right]$$

$$e(a_0,b_0)=\left(1-\rho_{XY}^2\right)D(Y)$$

7.6.2 定义

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

7.6.3 性质

$$\rho\in[-1,1]$$

$$|\rho_{XY}|=1 \iff P\{Y=aX+b\}=1\,(a\neq 0)\begin{cases} a>0 \text{（正相关）} \rho_{XY}= & 1 \\ a<0 \text{（负相关）} \rho_{XY}= & -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)}=\frac{ab}{|ab|}\rho_{XY}$$

7.6.4 不（线性）相关

$$\begin{aligned} &\rho=0 \\ \iff &\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \\ \iff &E(XY)=E(X)E(Y) \\ \iff &D(X\pm Y)=D(X)+D(Y) \end{aligned}$$

独立 $\implies$ 不相关

8 大数定律与中心极限定理

8.1 切比雪夫不等式

设 X 有有限方差（即有界）

$$
\begin{aligned}
&\exists E(X), D(X); \forall \varepsilon > 0 \\
&\rightarrow P\{|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \\
&\text{或} P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

8.2 大数定律

8.2.1 依概率收敛

随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于常数 a

$$X_n \xrightarrow{P} a\,(n \to \infty)$$

定义为

$$\forall \varepsilon > 0 \to \lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

8.2.2 伯努利大数定律

设事件 A 每次实验发生概率为 p，且 n 重伯努利试验中发生次数为 n_A，则

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&\to \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \\
&\text{或} \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0
\end{aligned}
$$

8.2.3 切比雪夫大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立，且有有限方差，则

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&\to \lim_{n\to\infty} \left\{\left|\bar{X} - E\left(\bar{X}\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1 \\
&\text{或} \lim_{n\to\infty} \left\{\left|\bar{X} - E\left(\bar{X}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0
\end{aligned}
$$

8.2.4 辛钦大数定律

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，则有相同的期望 μ，则

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1 \\
&\text{或} \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \bar{X} - \mu \right| \geqslant \varepsilon \right\} = 0
\end{aligned}
$$

8.3 中心极限定理

8.3.1 定理

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 相互独立，期望、方差均存在，则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right), D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \right)}} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \right)}} \leqslant x \right\} = \Phi_0(x)$$

8.3.2 列维-林德伯格定理（独立同分布）

设随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布，存在相同的期望 μ、方差 σ^2，则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2 \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right\} = \Phi_0(x)$$

8.3.3 棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布）

设随机变量 $\eta_n \sim B(n,p)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n \sim N(np, np(1-p))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}} \leqslant x\right\} = \Phi_0\left(x\right)$$

显然 $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，其中随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同服从 $B\left(1,p\right)$ 分布

9 统计量

9.1 样本容量

$$n$$

9.2 简单随机样本

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \text{相互独立且同分布}$$

9.3 样本联合分布函数

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \prod F\left(x_i\right)$$

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \prod f\left(x_i\right)$$

$$P\left\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\right\} = \prod p_i$$

9.4 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

9.5 （修正）样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

9.6 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

9.7 极差

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$$

9.8 其他

样本均值的期望等于总体均值（期望），样本方差的期望等于总体方差

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu = E\left(X\right)$$

$$E\left(S^2\right) = \sigma^2 = D\left(X\right)$$

$$D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

9.9 矩

名称	定义	离散	连续
k阶原点矩	$E\left(X^k\right)$	$\sum x_i^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f\left(x\right) \mathrm{d}x$
k阶中心矩	$E\left(\left(X-\bar{X}\right)^k\right)$	$\sum \left(x_i-\bar{X}\right)^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\bar{X}\right)^k f\left(x\right) \mathrm{d}x$
$k+l$阶混合原点矩	$E\left(X^k Y^l\right)$		
$k+l$阶混合中心矩	$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^k \left(Y-E\left(Y\right)\right)^l\right]$		

$k, l \in \mathbb{N}^+$

1 阶原点矩 $= E\left(X\right)$

1 阶中心矩 $= 0$

2 阶中心矩 $= D\left(X\right)$

1+1 阶混合中心矩 $= \mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$

10 抽样分布

10.1 * 伽马分布

$X \sim \Gamma\left(\alpha, \beta\right)$

10.1.1 伽马函数

$$\Gamma(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,(x>0)$$

10.1.2 密度函数

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

10.1.3 性质

再生性 若 $X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$ 且 $X_2\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$，且 X_1,X_2 相互独立

$$X_1+X_2\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$$

10.2 卡方分布

$\chi^2\sim\chi^2(n)=\Gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

n 自由度

$X_i\sim N(0,1)$，共 n 个且相互独立

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

10.2.1 非中心的卡方分布

$X_i\sim N(\mu_i,1)$

δ 非中心参数

$$\delta=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

10.2.2 * 密度函数

$$f(x,n)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

10.2.3 性质

非负

再生性 若 $\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$ 且 $\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$，且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$$

10.3 t 分布

$T \sim t(n)$

n 自由度

$X \sim N(0,1)$

$Y \sim \chi^2(n)$

且 X, Y 相互独立

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

10.3.1 * 密度函数

$$f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

10.3.2 性质

偶函数 $n=1$ 时，为柯西分布
n 充分大时，为标准正态分布

10.4 F 分布

$F \sim F(m,n)$

m 第一自由度

n 第二自由度

$X \sim \chi^2(m)$

$Y \sim \chi^2(n)$

且 X, Y 相互独立

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

10.4.1 * 密度函数

$$f(x,m,n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\dfrac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\dfrac{m+n}{2}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

10.4.2 性质

非负 $T\sim t(n)\implies T^2\sim F(1,n)$

$F\sim F(m,n)\implies \dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$

10.5 常见分布期望方差

分布	$E(X)$	$D(X)$
$\Gamma(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$
$\chi^2(n)$	n	$2n$
$t(n)$	$0\,(n>1)$	$\dfrac{n}{n-2}\,(n>2)$
$F(m,n)$	$\dfrac{n}{n-2}\,(n>2)$	$\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\,(n>4)$

10.6 上侧分位点

x_p 上侧分位点

p x_p 右侧区域的概率

$$P\{X\geqslant x_p\}=p\,(p\in(0,1))$$

11 参数估计

11.1 点估计

11.1.1 矩估计

基本思想 样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$ 一般采用 $\bar{X}=E(X)$

$k=2$ 一般采用 $\begin{cases}E(X)=\bar{X}\\ E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$

也可以用 $\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \end{cases}$

11.1.2 极大似然估计

θ_i 估计量（即分布的未知参数）

$p\ (x;\theta_1,\theta_2,\cdots)\ X_1, X_2, \cdots$ 的分布律或密度函数

$L\ (\theta_1,\theta_2,\cdots) = L(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 似然函数（样本联合分布函数）

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为分布 $F(\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 的简单随机样本
构造似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots) = \prod p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots)$$

调整估计量 θ_i，令似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots)$ 取极大值

$$L\left(x_1,x_2,\cdots;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots\right) = \max\left\{L(x_1,x_2,\cdots;\theta_1,\theta_2,\cdots)\right\}$$

则此时估计值为 $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots)$

$$\ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots) = \sum \ln p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots)$$

令每个偏导为 0 即可求驻点（若只有一个估计量则直接求导）

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots) = 0$$

11.2 估计量评价标准

11.2.1 * 均方误差

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = D\left(\hat{\theta}\right) + \left(\theta - E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

11.2.2 无偏性

无偏估计 $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$
否则为有偏估计

渐进无偏估计 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

性质 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，即 $E\left(\bar{X}\right) = \mu$
S^2 是 σ^2 的无偏估计，即 $E\left(S^2\right) = \sigma^2$
S 不是 σ 的无偏估计，$E(S) = \sqrt{\sigma^2 - D(S)} \leqslant \sigma$
未修正样本方差 $S_0^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 是 σ^2 的有偏估计，也是 σ^2 的渐进无偏估计

11.2.3 有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若 $D\left(\hat{\theta}_1\right) < D\left(\hat{\theta}_2\right)$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

11.2.4 相合（一致）性

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

11.3 区间估计

θ 未知参数

T 已知参数

F 已知分布且与 θ 无关

$I(T, \theta)$ 枢轴变量，服从分布 F

$\alpha \in (0, 1)$ 显著性水平（通常取值为 0.05 或 0.01）

$1 - \alpha$ 置信度（置信水平）

$v_{\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$v_{1-\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ 双侧置信区间，置信下限 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(T)$，置信上限 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(T)$

$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的（双侧）置信区间

$$P\left\{v_{1-\frac{\alpha}{2}} < I(T, \theta) < v_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha \implies P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1 - \alpha$$

12 假设检验

H_0 原假设（零假设）

H_1 备择假设（取原假设的逆命题）

弃真错误（第一类错误、α 错误）H_0 为真，且被拒绝

纳伪错误（第二类错误、β 错误）H_0 为假，且被接受

α $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in W) | H_0\text{为真}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_W}\left\{H_0\text{为真}\right\}$；显著性水平、弃真错误的概率

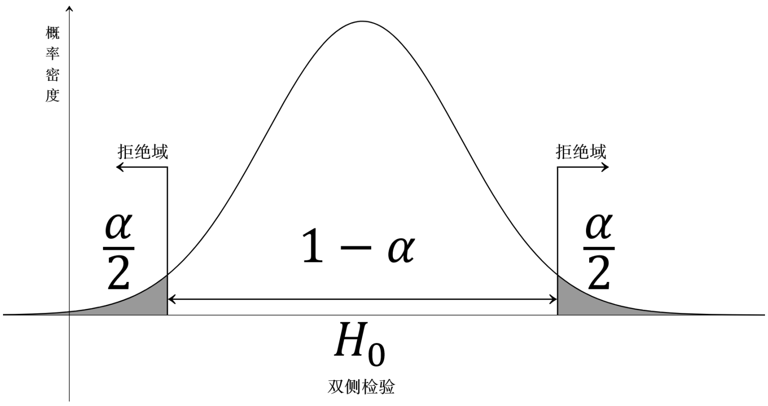
β $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in D) | H_0\text{为假}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_D}\left\{H_0\text{为假}\right\}$；纳伪错误的概率

W 拒绝域；若统计量的值属于拒绝域，则拒绝 H_0

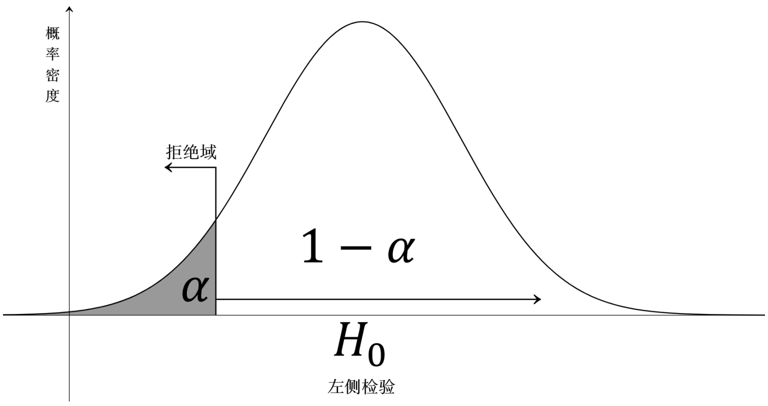
D 接受域；若统计量的值属于接受域，则接受 H_0

决策	总体情况	
	H_0 为真	H_0 为假
接受 H_0	正确 $(1-\alpha)$	纳伪 (β)
拒绝 H_0	弃真 (α)	正确 $(1-\beta)$

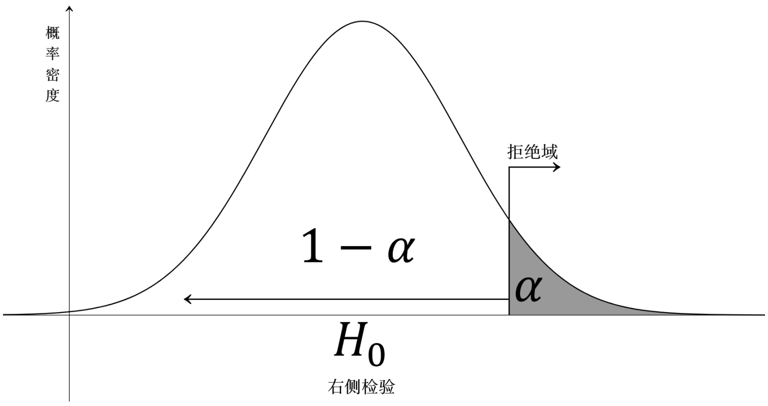
$H_0: \theta = \theta_0$ 时，选择双侧检验（拒绝两侧偏离 θ_0 的值）
$H_0: \theta > \theta_0$ 时，选择左侧检验（拒绝左侧远小于 θ_0 的值）
$H_0: \theta < \theta_0$ 时，选择右侧检验（拒绝右侧远大于 θ_0 的值）



双侧检验



左侧检验



右侧检验

Part III

附录

A 正态总体的常用统计量分布

A.1 单个正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
X_1, X_2, \cdots, X_n &\sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \\
&\Downarrow \\
\bar{X}, S^2 &\text{相互独立} \\
\bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\
\bar{X}^* &\sim N(0,1) \\
\sum_{i=1}^{n} X_i^{*2} &\sim \chi^2(n) \\
\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 &\sim \chi^2(n-1) \\
\frac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} &\sim t(n-1)
\end{aligned}
$$

A.2 两个正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
X_1, X_2, \cdots, X_m &\sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \\
Y_1, Y_2, \cdots, Y_n &\sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \\
\text{且两个样本相互独立} &\Downarrow \\
\bar{X} \pm \bar{Y} &\sim N\left(\mu_X \pm \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \\
\left(\bar{X} \pm \bar{Y}\right)^* &\sim N(0,1) \\
\frac{(m-1) S_X^2}{\sigma_X^2}+\frac{(n-1) S_Y^2}{\sigma_Y^2} &\sim \chi^2(m+n-2) \\
\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^{*2} / m}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^{*2} / n} &\sim F(m, n) \\
\frac{S_X^2 / S_Y^2}{\sigma_X^2 / \sigma_Y^2} &\sim F(m-1, n-1) \\
\text{当} \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 &= \sigma^2 \text{时} \\
\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{(m-1) S_X^2+(n-1) S_Y^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} &\sim t(m+n-2)
\end{aligned}
$$

B 正态总体相关表

表 1: 正态总体的区间估计枢轴变量

待估参数 θ	其他参数 T	枢轴变量 I	服从分布 F
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
	σ^2 未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$
	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$
$\mu_X-\mu_Y$	σ_X^2,σ_Y^2 已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$
	$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S_\omega\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$
$\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	μ_X,μ_Y 已知	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m,n)$
	μ_X,μ_Y 未知	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$

† $S_\omega=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S^2 代替 σ^2

表 2: 正态总体的假设检验

原假设	条件	检验统计量	服从分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	σ^2 已知	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert u\rvert \geqslant u_{\alpha/2}$
$\mu \leqslant \mu_0$				$u \geqslant u_\alpha$
$\mu \geqslant \mu_0$				$u \leqslant -u_\alpha$
$\mu = \mu_0$	σ^2 未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert t\rvert \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \leqslant \mu_0$				$t \geqslant t_\alpha(n-1)$
$\mu \geqslant \mu_0$				$t \leqslant -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	μ 已知	$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$				$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$				$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$				$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$				$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$U = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\lvert u\rvert \geqslant u_{\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y \leqslant \delta$				$u \geqslant u_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y \geqslant \delta$				$u \leqslant -u_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 未知	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\lvert t\rvert \geqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \leqslant \delta$				$t \geqslant t_\alpha(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \geqslant \delta$				$t \leqslant -t_\alpha(m+n-2)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 已知	$F = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i - \mu_X)^2/m}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_Y)^2/n}$	$F(m,n)$	$F \geqslant F_{\alpha/2}(m,n)$ 或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m,n)$
$\sigma_X^2 \leqslant \sigma_Y^2$				$F \geqslant F_\alpha(m,n)$
$\sigma_X^2 \geqslant \sigma_Y^2$				$F \leqslant F_{1-\alpha}(m,n)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 未知	$F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$	$F \geqslant F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$
$\sigma_X^2 \leqslant \sigma_Y^2$				$F \geqslant F_\alpha(m-1,n-1)$
$\sigma_X^2 \geqslant \sigma_Y^2$				$F \leqslant F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

† $S_\omega = \sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S^2 代替 σ^2