

概率论与数理统计

Sunday 5th March, 2023

目录

1 随机事件及其概率	4
1.1 符号	4
1.2 条件概率	4
1.3 乘法公式	4
1.4 古典概型	4
1.5 几何概型	4
1.6 完备事件组	4
1.7 全概率公式	5
1.7.1 全概率条件公式	5
1.8 贝叶斯公式	5
1.9 独立事件	5
1.10 伯努利概型	5
2 连续型随机变量及其分布函数	5
2.1 密度函数（概率密度）	5
2.2 分布函数	6
3 分布	6
3.1 边缘分布	6
3.1.1 边缘分布律	6
3.1.2 边缘密度函数	7
3.2 条件分布	7
3.2.1 条件分布律	7
3.2.2 条件分布密度函数	7
3.3 独立性	7
4 一维离散型随机变量及其分布律	7
4.1 两点分布	8
4.2 二项（伯努利）分布	8
4.3 泊松分布	8
4.3.1 泊松定理	8
4.4 几何分布	8
4.5 超几何分布	9
5 一维连续型随机变量及其密度函数	9
5.1 均匀分布	9
5.2 指数分布	9
5.3 正态（高斯）分布	9
5.3.1 标准正态分布	9
5.3.2 3σ 原则	10
5.4 换元	10

5.4.1	离散型	10
5.4.2	连续型	10
6	二维连续型随机变量及其密度函数	10
6.1	均匀分布	10
6.2	正态分布	10
6.3	换元	11
6.3.1	卷积定理	11
6.3.2	最大最小值	11
7	数字特征	11
7.1	期望	11
7.1.1	离散型	11
7.1.2	连续型	12
7.1.3	换元	12
7.1.4	性质	12
7.2	方差	13
7.2.1	标准差	13
7.2.2	离散型	13
7.2.3	连续型	13
7.2.4	性质	13
7.3	标准化随机变量	13
7.4	常见分布期望方差	14
7.5	协方差	14
7.6	性质	14
7.7	(线性) 相关系数	14
7.7.1	(线性) 均方误差	14
7.7.2	定义	15
7.7.3	性质	15
7.7.4	不(线性) 相关	15
8	统计量	15
8.1	样本均值	15
8.2	样本方差	16
8.3	样本标准差	16
8.4	其他	16
8.5	矩	16
8.5.1	k 阶原点矩	16
8.5.2	k 阶中心矩	16
8.5.3	k+1 阶混合原点矩	16
8.5.4	k+1 阶混合中心矩	17

9 抽样分布	17
9.1 伽马分布	17
9.1.1 伽马函数	17
9.1.2 密度函数	17
9.1.3 性质	17
9.2 卡方分布	17
9.2.1 非中心的卡方分布	18
9.2.2 密度函数	18
9.2.3 性质	18
9.3 t 分布	18
9.3.1 密度函数	18
9.3.2 性质	19
9.4 F 分布	19
9.4.1 密度函数	19
9.4.2 性质	19
9.5 常见分布期望方差	19
9.6 上侧分位点	20
9.7 单正态总体样本均值和样本方差的分布	20
10 参数估计	20
10.1 矩估计	20
10.1.1 基本思想	20
10.2 极大似然估计	20
10.3 估计量评价标准	21
10.3.1 均方误差	21
10.3.2 无偏性	21
10.3.3 有效性	21

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 AB	$\{\omega \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
互斥事件		$A \cap B = \emptyset$
对立事件	\bar{A}	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率 ($P(A) > 0$)

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.3 乘法公式

$$P(A) > 0$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1.4 古典概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点个数}}{\Omega \text{ 样本点个数}}$$

1.5 几何概型

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何测度}}{\Omega \text{ 的几何测度}}$$

1.6 完备事件组

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \emptyset$$

1.7 全概率公式

$\{A_i\}$ 完备事件组

$$P(B) = \sum P(A_i) P(B|A_i)$$

1.7.1 全概率条件公式

$$P(C|B) = \sum P(A_i|B) P(C|A_i B)$$

1.8 贝叶斯公式

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum P(A_i) P(B|A_i)}$$

1.9 独立事件

$$A, B \text{ 相互独立} \iff P(AB) = P(A) P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff \bar{A}, B \text{ 相互独立}$$

$$\iff A, \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff \bar{A}, \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

$$\{A_i\} \text{ 相互独立} \iff P\left(\bigcap A_i\right) = \prod P(A_i)$$

1.10 伯努利概型

定义:

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中, A 事件恰好发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数 (概率密度)

$f(x)$ 、 $f(x, y)$ 等

定义

$$F(x) = P\{X = x\} (x \in \mathbb{R})$$

性质

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2.2 分布函数

$F(x)$ 、 $F(x, y)$ 等

定义

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt (x \in \mathbb{R})$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv (x, y \in \mathbb{R})$$

性质

$$F(x) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) (x \in \mathbb{R})$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) (y \in \mathbb{R})$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y | X = x\} \quad (y \in \mathbb{R})$$

3.2.1 条件分布律

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$
$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{\sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}}$$

3.2.2 条件分布密度函数

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (y \in \mathbb{R})$$

3.3 独立性

充要条件

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

4 一维离散型随机变量及其分布律

以下都有

$$p \in (0, 1)$$

4.1 两点分布

$$X \sim B(1, p)$$

$$k \quad k \in \{0, 1\}$$

$$P\{X = k\} = p^k(1 - p)^{1-k}$$

4.2 二项（伯努利）分布

$$X \sim B(n, p)$$

$$n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$k \quad n \geq k \in \mathbb{N}$$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

4.3 泊松分布

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\lambda \quad \lambda > 0$$

$$k \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

4.3.1 泊松定理

n 重伯努利试验中，事件发生概率 $p_n \in (0, 1)$ 与试验次数有关，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

4.4 几何分布

$$X \sim G(p)$$

$$k \quad \text{前 } k-1 \text{ 次都失败，第 } k \text{ 次成功 } k \in \mathbb{N}^+$$

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p$$

4.5 超几何分布

$$X \sim H(M, N, n)$$

N 总样本数 $N > 1$

n 抽取样本数 $n \leq N$

M 指定样本数 $M \leq N$

k 抽到指定样本数 $k \in \mathbb{N} \cap [\max\{0, M + n - N\}, \min\{M, n\}]$

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

5 一维连续型随机变量及其密度函数

5.1 均匀分布

$$X \sim U[a, b]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \end{cases}$$

5.2 指数分布

$$X \sim E(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

5.3 正态（高斯）分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

μ $\mu \in \mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma > 0$ 标准差

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

5.3.1 标准正态分布

$$X \sim N(0, 1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

5.3.2 3σ 原则

$$\begin{cases} P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0.6826 \\ P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9544 \\ P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.9974 \end{cases}$$

5.4 换元

5.4.1 离散型

$$Y = g(X)$$

5.4.2 连续型

$$\begin{cases} y = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ Y = g(X) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) |g^{-1'}(y)| & y \in (\min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

6 二维连续型随机变量及其密度函数

6.1 均匀分布

$$(X, Y) \sim U(D)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

6.2 正态分布

$$(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$$

μ $\mu \in \mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma > 0$ 标准差

ρ $\rho \in (-1, 1)$, 相关系数 ($\rho = 0$ 时 X 、 Y 独立)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right) \right]$$

若 X 、 Y 独立

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \Rightarrow (X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, 0)$$

$$Z = aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

6.3 换元

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

6.3.1 卷积定理

若上式 X 、 Y 独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = f_X(z) * f_Y(z)$$

6.3.2 最大最小值

$$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$$

则

$$F_M = F_X F_Y$$

$$1 - F_N = (1 - F_X)(1 - F_Y)$$

$$f_M = F'_M = f_X F_Y + f_Y F_X$$

$$f_N = F'_N = f_X(1 - F_Y) + f_Y(1 - F_X)$$

7 数字特征

7.1 期望

7.1.1 离散型

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

7.1.2 连续型

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

7.1.3 换元

一维

$$Y = g(X)$$

离散

$$E(Y) = \sum g(x_i) p_i$$

连续

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

二维

$$Z = g(X, Y)$$

离散

$$E(Z) = \sum \sum g(x_i, y_j) p_{ij}$$

连续

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

7.1.4 性质

线性

$$E(kX + c) = kE(X) + c$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

独立 若 X 、 Y 独立

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum E(X_i)$$

7.2 方差

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

7.2.1 标准差

$$\sqrt{D(X)}$$

7.2.2 离散型

$$D(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$$

7.2.3 连续型

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 f(x) dx$$

7.2.4 性质

线性

$$D(kX + c) = k^2 D(X)$$

独立 若 X 、 Y 独立

$$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$$

$$D(XY) = D(X) D(Y)$$

平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum D(X_i)$$

7.3 标准化随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

7.4 常见分布期望方差

$X \sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
$B(n, p)$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	λ	λ
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
$H(M, N, n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$
$U[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

7.5 协方差

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

7.6 性质

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, X) = D(X)$$

交换律

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

线性

$$\text{Cov}(X, c) = 0$$

$$\text{Cov}\left(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j\right) = \sum \sum a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

7.7 (线性) 相关系数

7.7.1 (线性) 均方误差

用 $aX + b$ 去拟合 Y

$e(a, b)$ 越小表明线性关系越强, 越大越弱

$e(a_0, b_0)$ 最小均方误差

(a_0, b_0) 驻点

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}$$

$$b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$$

$$e(a, b) = E[(Y - (aX + b))^2]$$

$$e(a_0, b_0) = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

7.7.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

7.7.3 性质

$$\rho \in [-1, 1]$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 \ (a \neq 0) \begin{cases} a > 0 & (\text{正相关}) \ \rho_{XY} = 1 \\ a < 0 & (\text{负相关}) \ \rho_{XY} = -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{|ab|} \rho_{XY}$$

7.7.4 不(线性)相关

$$\rho = 0$$

$$\iff \text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\iff E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\iff D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

独立 \implies 不相关

8 统计量

8.1 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

8.2 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

8.3 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

8.4 其他

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

8.5 矩

$$k \in \mathbb{N}^+$$

8.5.1 k 阶原点矩

$$k=1 \quad 1 \text{ 阶原点矩} = E(X)$$

$$E(X^k)$$

8.5.2 k 阶中心矩

$$E[(X - E(X))^k]$$

$$k=1 \quad 1 \text{ 阶中心矩} = 0$$

$$k=2 \quad 2 \text{ 阶中心矩} = D(X)$$

8.5.3 k+1 阶混合原点矩

$$E(X^k Y^l)$$

8.5.4 k+l 阶混合中心矩

$$E \left[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l \right]$$

$$k = l = 1 \quad 1+1 \text{ 阶混合中心矩} = \text{Cov}(X, Y)$$

9 抽样分布

$$x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

9.1 伽马分布

9.1.1 伽马函数

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

9.1.2 密度函数

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

9.1.3 性质

再生性

$$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$$

$$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$$

$$X_3 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

$$X_1 + X_2 = X_3$$

9.2 卡方分布

$$\chi^2 \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

n 自由度

$$X_i \sim N(0, 1)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

9.2.1 非中心的卡方分布

$$X_i \sim N(\mu_i, 1)$$

δ 非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

9.2.2 密度函数

$$f(x, n) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

9.2.3 性质

再生性

$$\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\chi_3^2 \sim \chi^2(m+n)$$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi_3^2$$

9.3 t 分布

$$T \sim t(n)$$

n 自由度

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

9.3.1 密度函数

$$f(x, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

9.3.2 性质

$n = 1$ 时, 为柯西分布

n 充分大时, 为标准正态分布

9.4 F 分布

$$F \sim F(m, n)$$

m 第一自由度

n 第二自由度

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

9.4.1 密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

9.4.2 性质

若 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1, n)$

若 $F \sim F(m, n)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n, m)$

9.5 常见分布期望方差

X	$\sim F(X)$	$E(X)$	$D(X)$
X	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
χ^2	$\chi^2(n)$	n	$2n$
T	$t(n)$	$0 (n > 1)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$
F	$F(m, n)$	$\frac{n}{n-2} (n > 2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} (n > 4)$

9.6 上侧分位点

x_p

$$P\{X \geq x_p\} = p \quad (p \in (0, 1))$$

9.7 单正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \\ \chi^2 &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{且 } \bar{X}, S^2 \text{ 相互独立} \\ \bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ U &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \\ T &= \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)\end{aligned}$$

10 参数估计

10.1 矩估计

10.1.1 基本思想

样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$ 一般采用 $\bar{X} = E(X)$

$$k=2 \text{ 一般采用 } \begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = D(X) \end{cases}$$

$$\text{也可以用 } \begin{cases} \bar{X} = E(X) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = E(X^2) \end{cases}$$

10.2 极大似然估计

$p(x, \theta)$ 分布律或者密度函数

$$L(x_1, x_2, \dots; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

$$L(x_1, x_2, \dots; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \{L(x_1, x_2, \dots; \theta)\}$$

一般解法：求 $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta} = 0$ 的驻点

10.3 估计量评价标准

10.3.1 均方误差

$$E \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 \right] = D(\hat{\theta}) + \left(\theta - E(\hat{\theta}) \right)^2$$

10.3.2 无偏性

无偏估计 $E(\hat{\theta}) = \theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

性质 \bar{X} 是 μ 的无偏估计，即 $E(\bar{X}) = \mu$

S^2 是 σ^2 的无偏估计，即 $E(S^2) = \sigma^2$

10.3.3 有效性

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效