高等数学

Sunday 21st December, 2025

目录

Part I

极限

1 基础

1.1 常用极限

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= 1\\
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \mathrm{e}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum a_i^n} &= \max\{a_i\}
\end{aligned}
$$

注：函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

1.2 常用等价无穷小

x 为函数，$\lim\limits_{x\to 0}$ 时，可对乘除因子替换

$$
\begin{gathered}
x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\\
x\sim\left(\mathrm{e}^x-1\right)\sim\ln(x+1)\sim\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\
x^3\sim 6(x-\sin x)\sim 6(\arcsin x-x)\sim 3(\tan x-x)\\
x^3\sim 3(x-\arctan x)\sim 2(\tan x-\sin x)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\cos x &\sim \frac{x^2}{2}\\
\log_a(1+x) &\sim \frac{x}{\ln a}\\
(1+x)^a &\sim ax+1\\
a^x-1 &\sim x\ln a\,(0<a\neq 1)\\
(1+ax)^{\frac{1}{bx}} &\sim \mathrm{e}^{\frac{a}{b}}(1-\frac{a^2}{2b}x)
\end{aligned}
$$

$$\int_{\mathrm{C}}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\sim x^{n(m+1)};\text{其中}n\text{为}\varphi(x)\text{的阶数，}m\text{为}f(x)\text{的阶数}$$

1.3 泰勒展开

详见5.7.5

2 间断点

2.1 第一类间断点

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \text{且} \exists \lim_{x \to x_0^+}$$

2.1.1 可去间断点

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \left(\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A \right)$$

2.1.2 跳跃间断点

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

2.2 第二类间断点

$$\lim_{x \to x_0^-}, \lim_{x \to x_0^+} \text{至少满足有一个} \nexists$$

2.2.1 振荡间断点

左、右极限至少一个为振荡不存在

2.2.2 无穷间断点

左、右极限至少一个为 ∞

3 洛必达法则

3.1 使用条件

去心邻域内导数存在（不能只是一个点导数存在）

$$x \in \mathring{U}(x_0)\text{（}x_0\text{可取}\infty\text{）}; \exists f'(x_0); \exists g'(x_0)$$

极限存在或为无穷

$$g'(x_0) \neq 0; \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{或} = \infty$$

符合 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\text{任意}}{\infty}$

3.2 结论

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \not\Longrightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

4 极限审敛

4.1 单调有界准则

单调有界必有极限

4.2 一类二重极限

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0^+}} \frac{x^p y^q}{x^m + y^n}$$

m、n 全为偶数且 $\dfrac{p}{m} + \dfrac{q}{n} > 1$ 时 $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0^+}} \frac{x^p y^q}{x^m + y^n} = 0$，否则不存在

$\dfrac{p}{m} + \dfrac{q}{n} \leqslant 1$ 时，路径 $y = kx^{\frac{m-p}{q}}$ 可说明极限不存在

Part II

导数

5 基础

5.1 定义

$$\Delta x = x - x_0$$

5.1.1 导数

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0, y_0)}{\mathrm{d}x} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

5.1.2 偏导

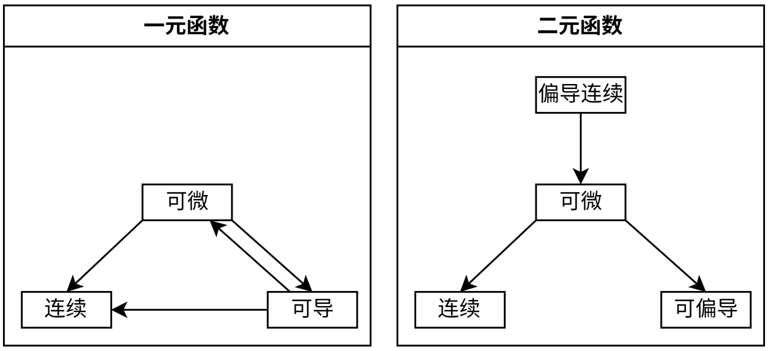
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \partial_x f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

5.1.3 可微

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)-f'_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)-f'_y\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}=0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)-f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x-f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=0$$

5.1.4 关联



5.2 求导法则

$$\begin{aligned}
\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)'&=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)\\
\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)'&=f\left(x\right)g'\left(x\right)+f'\left(x\right)g\left(x\right)\\
\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'&=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)\\
\left(\int_{v(x)}^{u(x)}f\left(t\right)\mathrm{d}t\right)'&=f\left[u\left(x\right)\right]u'\left(x\right)-f\left[v\left(x\right)\right]v'\left(x\right)\\
\left(\int_{v(x)}^{u(x)}f\left(x,t\right)\mathrm{d}t\right)'&=\int_{v(x)}^{u(x)}f'_x\left(x,t\right)\mathrm{d}t+f\left[x,u\left(x\right)\right]u'\left(x\right)-f\left[x,v\left(x\right)\right]v'\left(x\right)
\end{aligned}$$

5.3 极值和凹凸

5.3.1 一般情况

$$\begin{aligned}
f'\left(x_0\right)>0&\implies x_0\text{处是单调递增的}\nearrow\\
f'\left(x_0\right)<0&\implies x_0\text{处是单调递减的}\searrow\\
f''\left(x_0\right)>0&\implies x_0\text{处是凹的}\\
f''\left(x_0\right)<0&\implies x_0\text{处是凸的}
\end{aligned}$$

极值点处 $f\left(x\right)$ 可以不连续

拐点处 $f\left(x\right)$ 必须连续

5.3.2 必要条件

$$
\begin{aligned}
x_0\text{是极值点};\exists f'(x) &\implies f'(x_0)=0 \\
x_0\text{是拐点};\exists f''(x) &\implies f''(x_0)=0
\end{aligned}
$$

5.3.3 充分条件 1

$f'(x_0)$ 在 x_0 两侧异（同）号 $\implies$ x_0 是（不是）极值点
$f''(x_0)$ 在 x_0 两侧异（同）号 $\implies$ x_0 是（不是）拐点

5.3.4 充分条件 2

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0;f^{(n)}(x_0)\neq 0\,(n\geqslant 2)$$

$$
\begin{cases}
n\text{为奇数} \implies x_0\text{是拐点} \\
n\text{为偶数} \implies x_0\text{是极值点}
\end{cases}
$$

5.4 渐近线

5.4.1 铅直渐近线

$$x=x_0$$

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty$$

5.4.2 水平渐近线

$$y=A$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=A$$

5.4.3 斜渐近线

$$y=kx+b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=kx+b$$

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k \\
\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-kx=b
\end{cases}
$$

5.5 莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

5.6 中值定理

定理	公式	约束
积分中值定理	$f\left(\xi\right) = \dfrac{\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x}{x\|_a^b}$	$\xi \in [a, b]$
罗尔中值定理	$a = b \Rightarrow f'\left(\xi\right) = 0$	$\xi \in (a, b)$
拉格朗日中值定理	$f'\left(\xi\right) = \dfrac{f\left(x\right)\|_a^b}{x\|_a^b}$	$\xi \in (a, b)$
柯西中值定理	$\dfrac{f'\left(\xi\right)}{g'\left(\xi\right)} = \dfrac{f\left(x\right)\|_a^b}{g\left(x\right)\|_a^b}$	$\xi \in (a, b)$

积分中值定理推广：使用拉格朗日中值定理可得开区间约束 $\xi \in (a, b)$

5.7 泰勒中值定理

$R_n\left(x\right)$ 为余项

$$f\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(x - x_0\right)^i \frac{f^{(i)}\left(x_0\right)}{i!} + R_n\left(x\right)$$
$$f\left(x, y\right) = \sum_{i=0}^{n} \left[\left(x - x_0\right) \partial_x + \left(y - y_0\right) \partial_y\right]^i \frac{f\left(x_0, y_0\right)}{i!} + R_n\left(x, y\right)$$

5.7.1 佩亚诺型余项

$$R_n\left(x\right) = o\left[\left(x - x_0\right)^n\right]$$
$$R_n\left(x, y\right) = o\left[\sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2}^n\right]$$

5.7.2 拉格朗日型余项

ξ 介于 x, x_0

η 介于 y, y_0

$$R_n\left(x\right) = \left(x - x_0\right)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}$$
$$R_n\left(x, y\right) = \left[\left(x - x_0\right) \partial_x + \left(y - y_0\right) \partial_y\right]^{n+1} \frac{f\left(\xi, \eta\right)}{(n+1)!}$$

5.7.3 * 误差估计式

$$n \in \mathbb{N}; \exists M > 0 \forall x \in D \to M \geqslant \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

$$\Longrightarrow \ |R_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

5.7.4 麦克劳林公式（在 0 处的泰勒展开式）

$$\left.\begin{matrix} (5.7.2) \\ x_0 = y_0 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!} + R_n(x) \\ P_n(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} (x\partial_x + y\partial_y)^i \dfrac{f(0,0)}{i!} + R_n(x, y) \end{cases}$$

5.7.5 麦克劳林公式

$f(x)$	0 处泰勒展开式前部分项	0 处泰勒展开式通项	收敛区间
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n (1-4^n)^{2n-1}}{(2n)!}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$[-1, 1]$
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$	$(-1, 1)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{(-x)^n}{n}$	$(-1, 1]$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$	$[-1, 1)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$(-1, 1)$

5.8 多元函数极值（拉格朗日乘数法）

5.8.1 二元情况

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\text{约束条件：}\varphi\left(x,y\right)=0\\ \text{目标函数：}f\left(x,y\right)\end{cases}\\ \begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla\varphi\left(\text{即}\nabla f\parallel\nabla\varphi\right)\\ \varphi\left(x,y\right)=0\end{cases}\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{l}\text{解得几组}\left(x_i,y_i\right)\text{即为可能的极值点}\\ \text{（若无约束条件}\varphi\text{，可设约束为}\varphi\equiv0\text{，}\\ \text{即}\nabla\varphi=\nabla f=\left(0,0\right)\text{）}\end{array}$$

拉格朗日函数写法：

$$L=f\left(x,y\right)+\lambda\varphi\left(x,y\right)$$

$$\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\\ L'_\lambda=0\end{cases}\Longrightarrow\text{解得几组}\left(x_i,y_i\right)\text{即为可能的极值点}$$

5.8.2 二元检验可能的极值点

$A\ =f''^2_{xx}\left(x_0,y_0\right)$

$B\ =f''^2_{xy}\left(x_0,y_0\right)$

$C\ =f''^2_{yy}\left(x_0,y_0\right)$

$$\left.\begin{array}{r}B^2<AC\\ A>0\end{array}\right\}\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{为极小值点}$$

$$\left.\begin{array}{r}B^2<AC\\ A<0\end{array}\right\}\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{为极大值点}$$

$$B^2>AC\Longrightarrow f(x_0,y_0)\text{不取极值}$$

$$B^2=AC\Longrightarrow\text{需进一步讨论}$$

5.8.3 n 元情况

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\text{约束条件}\Phi\text{：}&\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\\ &\varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\\ &\vdots\\ &\varphi_{n-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\\ \quad\text{目标函数：}&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\end{cases}\\ \begin{cases}\nabla f=\sum\limits_i\lambda_i\nabla\varphi_i\text{（三元时共面）}\\ \text{约束条件}\Phi\end{cases}\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{解得几组}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\text{即为可能的极值点}$$

5.9 隐函数存在定理

$F(x,y)$（二元）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y}\left(F'_y \neq 0\right)$$

$F(x,y,z)$（多元）

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}\left(F'_y \neq 0\right)$$

5.10 雅可比行列式

$$\frac{\partial\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)} = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}u_1 & \partial_{x_2}u_1 & \cdots & \partial_{x_n}u_1 \\ \partial_{x_1}u_2 & \partial_{x_2}u_2 & \cdots & \partial_{x_n}u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}u_n & \partial_{x_2}u_n & \cdots & \partial_{x_n}u_n \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}{\partial\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)}\right]^{-1}$$

Part III

积分

6 基础

6.1 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_a^b$$

6.2 第一类换元（凑微分）法

$$\int f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

6.3 第二类换元法

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\varphi(x)} \\ \int_a^b f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\bigg|_{t=\varphi(x)} \end{aligned}$$

6.4 分部积分

$$\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$$

$$uv = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u$$

$$uv|_a^b = \int_a^b u\mathrm{d}v + \int_a^b v\mathrm{d}u$$

6.5 常用积分表

6.5.1 三角函数总表

$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}$	$f(x)$	$f'(x)$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$\sec x$	$\sec x \tan x$	$-\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
	$\mathrm{arcsec} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$		$\mathrm{arccsc} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\ln\lvert\cosh x\rvert$	$\tanh x$	$\mathrm{sech}^2 x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$	$\coth x$	$-\mathrm{csch}^2 x$
$2\arctan(\mathrm{e}^x)$	$\mathrm{sech} x$	$-\mathrm{sech} x \tanh x$	$-\ln\lvert\mathrm{csch} x + \coth x\rvert$	$\mathrm{csch} x$	$-\mathrm{csch} x \coth x$
	$\mathrm{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\mathrm{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\mathrm{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$		$\mathrm{arcoth} x$	$\frac{1}{x^2-1}$
	$\mathrm{arsech} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$		$\mathrm{arcsch} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

6.5.2 其他

$$
\begin{aligned}
&\int a^x \mathrm{d}x && = \frac{a^x}{\ln a} && + \mathrm{C} \\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} && = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| && + \mathrm{C} \\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} && = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} && + \mathrm{C} \\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} && = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| && + \mathrm{C} \\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} && = \arcsin\frac{x}{a} && + \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

6.5.3 华里士公式

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & n\text{为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为正奇数} \end{cases}
$$

6.6 有理函数不定积分

设原式为假分式：

$$
\int \frac{\mathcal{U}(x)}{\mathcal{V}(x)} \mathrm{d}x
$$

先转为多项式加真分式：

$$
\frac{\mathcal{U}(x)}{\mathcal{V}(x)} = \mathcal{U}_1(x) + \frac{r(x)}{\mathcal{V}(x)}
$$

在实数范围内因式分解分母：

$$
\frac{r(x)}{\mathcal{V}(x)} = \frac{r(x)}{\prod (x-A)^p (x^2+Mx+N)}
$$

拆分：

$$
\frac{r(x)}{\mathcal{V}(x)} = \sum \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{a_i}{(x-A)^i} + \frac{bx+c}{x^2+Mx+N} \right]
$$

使用留数法等方法求出系数 a, b, c，后分别积分。

其中二次多项式分母积分方法（为方便起见 A, B, C 代替了部分常数）：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{bx+c}{x^2+Mx+N} \mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{b}{2}(2x+M)}{x^2+Mx+N} \mathrm{d}x + \int \frac{c - \frac{Mb}{2}}{x^2+Mx+\frac{M^2}{4}+N-\frac{M^2}{4}} \mathrm{d}x \\
&= B \int \frac{1}{x^2+Mx+N} \mathrm{d}\left(x^2+Mx+N\right) + C \int \frac{1}{\left(x+\frac{M}{2}\right)^2 + A^2} \mathrm{d}\left(x+\frac{M}{2}\right) \\
&= B \ln\left|x^2+Mx+N\right| + \frac{C}{A} \arctan\frac{x+\frac{M}{2}}{A} + \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

6.6.1 * 通解（递推式）

$$\int \frac{x+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}}\mathrm{d}x\begin{cases}0>p^2-4q\\ a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}\\ b=N-\dfrac{p}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2bx+bp-2a^2}{4\left(\lambda-1\right)a^2\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}}+\dfrac{b\left(2\lambda-3\right)}{2\left(\lambda-1\right)a^2}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}} & \left(\lambda>1\right)\\ \dfrac{\ln\left(x^2+px+q\right)}{2}+\dfrac{b}{a}\arctan\dfrac{x+2p}{2a}+\mathrm{C} & \left(\lambda=1\right)\end{cases}$$

6.7 * 万能代换

$$x=2\arctan u\implies\begin{cases}\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}\\ \cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\\ \mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\end{cases}$$

6.8 反常（广义）积分

$$\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{x\to x_0^-}\int_a^x f\left(x\right)\mathrm{d}x\left(x_0>a\right)$$

其中 x_0 为瑕点或正负无穷大，则若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,x_0\right)$ 上连续，且右式极限存在，则左式反常积分收敛，且值等于右式极限

若上下限都是瑕点 x_0,x_1 或无穷大

$$\int_{x_0}^{x_1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{c}^{x_1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

或区间 $[a,b]$ 包含瑕点 x_0

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

则需拆分区间分别判断，只有分别都收敛才整体收敛

6.8.1 常见判敛

$$\int\frac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}\mathrm{d}x$$

瑕积分

$$x\to0\begin{cases}\alpha<1\\ \alpha=1;\beta>1\end{cases}\text{收敛}$$

无穷区间反常积分

$$x \to +\infty \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1; \beta > 1 \end{cases} \text{收敛}$$

其他均发散

6.9 区间再现

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

6.9.1 对称区间

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$$

6.10 累次积分

例：二次积分

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

6.10.1 积分换序

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_3}^{x_4} \int_{y_3(x)}^{y_4(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

其中 $x_1(y), x_2(y), y_1, y_2$ 与 $x_3, x_4, y_3(x), y_4(x)$ 围成的区域相同

积分直接换序 若内层积分上下限不包含外层自变量，则可直接换序

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

（求和、连乘等运算同理）

6.11 应用

以下极坐标方程中都有

$$r = r(\theta)$$

以下参数方程中都有，且都可轮换

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

6.11.1 极坐标图形面积

$$A=\iint\limits_{D} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\mathrm{d}\theta$$

6.11.2 旋转体体积（参数方程）

绕 x 轴
圆盘法

$$V=\pi\int_a^b x'y^2\mathrm{d}t=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$$

柱壳法

$$V=2\pi\int_a^b xy'y\mathrm{d}t=2\pi\int_a^b xy\mathrm{d}y$$

6.11.3 旋转体侧面积（参数方程）

绕 x 轴

$$S=2\pi\int_A^B y\mathrm{d}s$$

6.11.4 平面曲线曲率（参数方程）

曲率半径 $\rho=K^{-1}$

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

在点 $M\left(x,y\right)$ 处的曲率中心 $\left(\alpha,\beta\right)$（曲率圆圆心）
其中 $y=y\left(x\right)$（不是参数方程）

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}\\\beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$

曲率圆方程：

$$\left(x-\alpha\right)^2+\left(y-\beta\right)^2=\rho^2$$

6.11.5 平面曲线弧长

$$s_L=\int_L\mathrm{d}s$$

7 重积分

7.1 二重积分

$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

7.1.1 换元

$$\left.\begin{matrix} \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \\ J = \left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{D'} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x,y)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

7.1.2 广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\cos\theta \\ y = y_0 + br\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f(x,y)\,abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

7.2 三重积分

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

7.2.1 换元

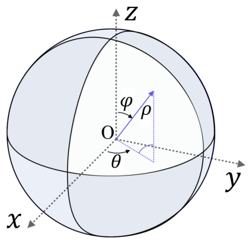
$$\left.\begin{matrix} \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \\ J = \left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Omega'} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(x,y,z)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

7.2.2 柱面坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

7.2.3 球面坐标



$\rho \geqslant 0$ 径向距离

$\theta \in [0, 2\pi]$ 方位角

$\varphi \in [0, \pi]$ 天顶角

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

7.3 轮换对称性

若积分区域约束中，所有自变量任意交换次序，区域不变，则称该积分具有轮换对称性，且积分目标函数可轮换

例：二重积分轮换对称 即 D 关于 $x = y$ 对称

$$D = \left\{\left(x,y\right)|x \in X; y \in Y\right\} = \left\{\left(y,x\right)|y \in X; x \in Y\right\} \implies \iint\limits_{D} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} f\left(y,x\right)\mathrm{d}\sigma$$

7.4 应用

密度为 $\rho\left(x,y\right)$ **或** $\rho\left(x,y,z\right)$

7.4.1 质量

$$M = \iint\limits_{D} \rho\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma; M = \iiint\limits_{\Omega} \rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}V$$

7.4.2 质心

质心的 x 坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma}{M};\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}V}{M}$$

$\rho\left(\cdots\right)\equiv 1$ 时，质心相当于形心

7.4.3 转动惯量

绕 x 轴时

$$I_x=\iint\limits_{D} y^2\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma;I_x=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}V$$

7.4.4 古尔丁定理

旋转体体积（平面图形 D 绕直线 $l:Ax+By+C=0$ 旋转）

$$V=\iint\limits_{D} 2\pi d_l\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=2\pi\iint\limits_{D}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\mathrm{d}\sigma$$

若 D 形心为 $\left(x_0,y_0\right)$

$$V=2\pi d_l\left(x_0,y_0\right)S_D=2\pi\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma$$

7.4.5 曲面面积

$$S_\Sigma=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

8 曲线与曲面积分

8.1 曲线积分

$$\text{平面曲线}\begin{cases}\boldsymbol{r}=\{x,y\}\\ x=r\cos\theta=x\left(t\right)\\ y=r\sin\theta=y\left(t\right)\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\psi}=\{P,Q\}\\ P=P\left(x,y\right)\\ Q=Q\left(x,y\right)\end{cases}\text{空间曲线}\begin{cases}\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}\\ F=F\left(x,y,z\right)=0\\ G=G\left(x,y,z\right)=0\\ x=x\left(t\right)\\ y=y\left(t\right)\\ z=z\left(t\right)\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\psi}=\{P,Q,R\}\\ P=P\left(x,y,z\right)\\ Q=Q\left(x,y,z\right)\\ R=R\left(x,y,z\right)\end{cases}$$

$\boldsymbol{\tau}=\left(\nabla\boldsymbol{r}\right)^0=\dfrac{\nabla\boldsymbol{r}}{\|\nabla\boldsymbol{r}\|}=\left(\nabla F\times\nabla G\right)^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$
$\mathrm{d}s=\|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\|=\sqrt{\left(\mathrm{d}x\right)^2+\left(\mathrm{d}y\right)^2}=\sqrt{\left(\mathrm{d}x\right)^2+\left(\mathrm{d}y\right)^2+\left(\mathrm{d}z\right)^2}$

8.1.1 第一类

$t \in [a,b]$ $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t = \int_{\theta_2}^{\theta_1} f(x,y)\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s = \int_a^b f\left\|\nabla \boldsymbol{r}\right\|\mathrm{d}t$$

8.1.2 第二类（坐标积分）

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\Gamma \frac{Px'+Qy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\mathrm{d}s = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{Px'+Qy'+Rz'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\mathrm{d}s = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s = \int_\Gamma \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$$

$t: A \to B$

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B (Px'+Qy')\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_A^B (Px'+Qy'+Rz')\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s = \int_A^B \boldsymbol{\psi}\cdot\nabla\boldsymbol{r}\mathrm{d}t$$

8.1.3 格林公式

（右手定则）曲线逆时针时为正，顺时针时取负

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{\psi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D |\nabla, \boldsymbol{\psi}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8.1.4 斯托克斯公式

根据右手定则确定有向曲面方向

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(R_y'-Q_z'\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(P_z'-R_x'\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(Q_x'-P_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint\limits_{\partial\Sigma}\boldsymbol{\psi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_{\Sigma}\left|\mathrm{d}\boldsymbol{S},\nabla,\boldsymbol{\psi}\right|$$

注：$\iint_{\Sigma}\left(R_y'-Q_z'\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(P_z'-R_x'\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(Q_x'-P_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 显然路径无关，所以路径曲面可以任取符合边界 $\partial\Sigma$ 的即可

8.1.5 平面曲线积分路径无关

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与积分路径无关

$$\begin{aligned}&\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\ \iff&\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\\ \iff&D\text{内};Q_x'=P_y'\\ \iff&\exists u=u\left(x,y\right);\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\end{aligned}$$

8.1.6 空间曲线积分路径无关

$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与积分路径无关

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\ \iff&\oint\limits_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0\\ \iff&\Sigma\text{内};\begin{cases}R_y'=Q_z'\\ P_z'=R_x'\\ Q_x'=P_y'\end{cases}\end{aligned}$$

8.2 曲面积分

$$F = F(x,y,z) = 0 \begin{cases} \boldsymbol{\psi} = \{P, Q, R\} \\ P = P(x,y,z) \\ Q = Q(x,y,z) \\ R = R(x,y,z) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{n} = (\nabla F)^0 = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
$$\mathrm{d}S = \|\mathrm{d}\boldsymbol{S}\| = \sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}z\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}$$

8.2.1 第一类（可轮换）

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\,\|\nabla F\|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8.2.2 第二类（坐标积分、可轮换）

取曲面法向量与投影坐标轴（z 轴为例）夹角余弦的符号（$\operatorname{sgn}(\nabla F \cdot \boldsymbol{e}_z)$）

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{\Sigma} \frac{-Pz_x' - Qz_y' + R}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}}\mathrm{d}S = \pm\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\iint_{\Sigma} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

8.2.3 合一投影法（可轮换）

取曲面法向量与投影坐标轴（z 轴为例）夹角余弦的符号（$\operatorname{sgn}(\nabla F \cdot \boldsymbol{e}_z)$）

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} \left(-Pz_x' - Qz_y' + R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\iint_{D_{xy}} \boldsymbol{\psi} \cdot \nabla F\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据右手定则确定有向曲面方向

取曲面法向量与投影坐标轴（z 轴为例）夹角余弦的符号（$\operatorname{sgn}(\nabla F \cdot \boldsymbol{e}_z)$）

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \left[-\left(R_y' - Q_z'\right)z_x' - \left(P_z' - R_x'\right)z_y' + \left(Q_x' - P_y'\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm \iint_{D_{xy}} |\boldsymbol{n}, \nabla, \boldsymbol{\psi}| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8.2.4 高斯公式

曲面法向量朝外时为正，朝内时取负

$$\oiint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) \mathrm{d}V$$

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}V$$

8.2.5 曲面积分路径无关

$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与积分路径无关

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{与积分路径无关} \\
\Longleftrightarrow &\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \\
\Longleftrightarrow &\Omega\text{内}; P'_x + Q'_y + R'_z = 0
\end{aligned}$$

8.3 应用

向量场

$$\boldsymbol{\psi} = \{P, Q, R\}$$

8.3.1 梯度

$$\nabla F = \left\{F'_x, F'_y, F'_z\right\}$$

向量微分算子：

$$\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$$

8.3.2 散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = P'_x + Q'_y + R'_z$$

通过 Σ 流向指定侧的通量：

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

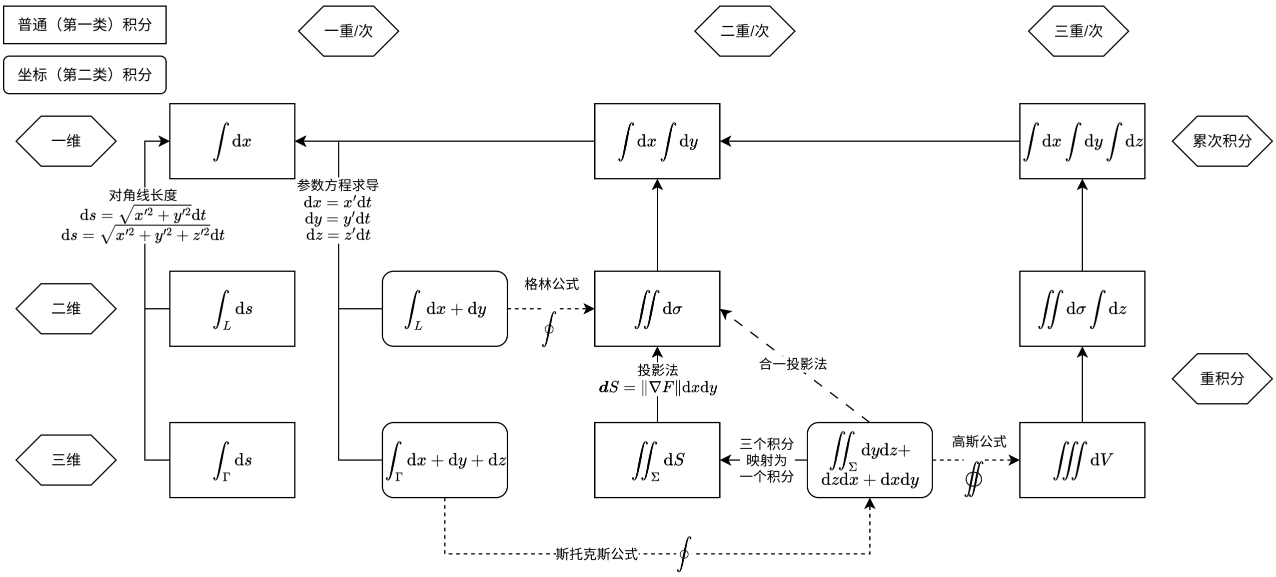
8.3.3 旋度

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \left\{R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right\}$$

沿封闭曲线 Γ 的环流量：

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

9 关联



Part IV

空间解析几何

10 空间曲面

$$F\left(x, y, z\right) = 0$$

10.1 参数方程

$$\begin{cases} x = x\left(u, v\right) \\ y = y\left(u, v\right) \\ z = z\left(u, v\right) \end{cases}$$

10.2 法向量

$$\boldsymbol{n}=\nabla F$$

10.3 方向导数

$\boldsymbol{l}$ 方向向量

$\boldsymbol{l}^0=\dfrac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 方向余弦（单位方向向量）

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{l}}=\nabla F\cdot\boldsymbol{l}^0$$

梯度的方向为方向导数最大时的方向，梯度的模为方向导数的最大值

$$\max\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{l}}\right\}=\|\nabla F\|$$

10.4 平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

10.4.1 平面点法式

过 (x_0,y_0,z_0)，法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

10.4.2 平面截距式

a,b,c 分别表示平面在 x,y,z 轴上的截距

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

10.4.3 点面距离公式

点 (x_0,y_0,z_0)

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

11 空间曲线

$$\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0\\G\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$$

11.1 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

11.2 切向量

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla F \times \nabla G$$

11.3 空间曲线到坐标面的投影

1. 合并直线方程消去坐标面不含的变量，得到投影柱平面方程（$F = G$）
2. 联立坐标面方程（如 xOy 平面则联立 $z = 0$）

11.4 直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

11.4.1 对称式（点向式）方程

过 (x_0, y_0, z_0)，方向向量 $\boldsymbol{\tau} = \{m, n, p\}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

11.4.2 参数方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \implies \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

11.5 空间直线到任意平面的投影

1. 叉乘直线方向向量和目标平面的法向量，得到投影柱面的法向量（$\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$）
2. 任取直线中一点 (x_0, y_0, z_0)，与法向量一起求出投影柱平面方程
3. 联立投影柱平面、目标平面方程

12 特殊曲面

绕 z 轴旋转曲面：（原曲线为 $f(y_1, z) = 0$）

$$\left.\begin{array}{c} f(y_1, z) = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| \end{array}\right\} \implies f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

以下二次曲面方程中都有

$$pq > 0$$

12.1 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

12.2 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

12.3 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

12.4 双曲抛物面（马鞍面）

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

$$z = xy$$

12.5 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

12.6 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Part V

微分方程

13 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}p_i\left(x\right)y^{(i)}=f\left(x\right)$$

13.1 线性相关

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\mathrm{C}(\mathrm{C}\in\mathbb{C})$$

13.2 伯努利方程

$$y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)y^{\alpha}\xrightarrow{z=y^{1-\alpha}}z'+\left(1-\alpha\right)P\left(x\right)z=\left(1-\alpha\right)Q\left(x\right)$$

13.3 欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}p_ix^iy^{(i)}=0$$

令 $x=\mathrm{e}^t$ 换元
记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\begin{aligned}xy'_x&=Dy\\x^2y''_{xx}&=D\left(D-1\right)y\\&\vdots\\x^ny^{(n)}_x&=D\left(D-1\right)\left(D-2\right)\cdots\left(D-n+1\right)y=\prod_{i=1}^{n}\left(D-i+1\right)y\end{aligned}$$

14 一阶线性微分方程

$f\left(x\right)\equiv0$ 时，为齐次

$$\left.\begin{aligned}(13)\\n=1\end{aligned}\right\}\implies y'+P\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

14.1 通解

$$y=\frac{\int f\left(x\right)\exp\left(\int P\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\mathrm{C}}{\exp\left(\int P\left(x\right)\mathrm{d}x\right)}$$

15 n 阶常系数线性齐次微分方程

$$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}p_iy^{(i)}=0\left(p_i\in\mathbb{C}\right)$$

15.1 特征方程

$$r^n+\sum_{i=0}^{n-1}p_ir^i=0$$

15.2 通解对应项

k 重实根 r 在通解中对应项

$$y_r=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{C}_ix^{i-1}\cdot\mathrm{e}^{rx}$$

特别的：r 为共轭复根（$r=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$）时，可改写为两个实根

$$y_r=(\mathrm{C}_1\cos\beta x+\mathrm{C}_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

16 二阶常系数线性微分方程

$$y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

16.1 非齐次通解

16.1.1 大致形式

$$y=\underbrace{\overbrace{\mathrm{C}_1\overbrace{a\left(x\right)\mathrm{e}^{r_1x}}^{\text{齐次特解}}+\mathrm{C}_2\overbrace{b\left(x\right)\mathrm{e}^{r_2x}}^{\text{齐次特解}}}^{\text{齐次通解}}+\overbrace{x^kc\left(x\right)\mathrm{e}^{\lambda x}}^{\text{非齐次特解}}}_{\text{非齐次通解}}$$

其中 $b\left(x\right)\mathrm{e}^{r_2x}+x^kc\left(x\right)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 下方标注：非齐次特解

16.1.2 运算关系

齐特 + 齐特（线性无关）= 齐通
齐通 + 非特 = 非通
齐特 + 非特 = 非特
非特 − 非特 = 齐特

16.2 齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

16.2.1 特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

16.2.2 通解

$r_1 \neq r_2$

$$y = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{r_2 x}$$

$r_1 = r_2$

$$y = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 x)\,\mathrm{e}^{r_1 x}$$

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$

$$y = (\mathrm{C}_1 \cos\beta x + \mathrm{C}_2 \sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

16.3 非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

16.3.1 特解

$\mathcal{P}_n$ 表示 n 次多项式

$$\left.\begin{aligned} &(16.3) \\ f(x) = \left[\mathcal{P}_{n_1}(x)\cos\omega x + \mathcal{P}_{n_2}(x)\sin\omega x\right]&\mathrm{e}^{\lambda x} \\ m = \max\{n_1, n_2\}& \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$y^* = x^k \left[\mathcal{U}_m(x)\cos\omega x + \mathcal{V}_m(x)\sin\omega x\right]\mathrm{e}^{\lambda x} \begin{cases} k = 0 & (\lambda \pm \omega\mathrm{i}\text{不是特征方程根}) \\ k = 1 & (\lambda \pm \omega\mathrm{i}\text{是特征方程根}) \end{cases}$$

当 $\omega = 0$ 时，$m = n_1$

$$\left.\begin{array}{l}(16.3)\\ f(x)=\mathcal{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\end{array}\right\} \implies y^*=x^k\mathcal{Q}_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\begin{cases}k=0 & (\lambda\text{不是特征方程根})\\ k=1 & (\lambda\text{是特征方程单根})\\ k=2 & (\lambda\text{是特征方程重根})\end{cases}$$

16.3.2 算子法求特解

D 算子：

$$Df(x)=f'(x)\,;\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

对于 (16.3)：

$$y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}f(x)=\frac{1}{\mathcal{F}(D)}f(x)$$

若代入 D 后分母 $\mathcal{F}(D)$ 出现为 0 的状况，则（可多次使用，D 算子只对右侧 $f(x)$ 有效）：

$$y^*=x^n\frac{1}{\mathcal{F}(D)}f(x)\longrightarrow y^*=x^{n+1}\frac{1}{\mathcal{F}'(D)}f(x)$$

$f(x)=\mathrm{e}^{kx}$：D 换为 k

$$y^*=\frac{1}{\mathcal{F}(D)}\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{kx}\frac{1}{\mathcal{F}(k)}$$

$f(x)=\sin ax$ 或 $\cos ax$：D^2 换为 $-a^2$

$$y^*=\frac{1}{D^2+q}\sin ax=\sin ax\frac{1}{-a^2+q}$$

若代入 D^2 后，分母有 $mD+n\,(mn>0)$ 一次多项式，可以配平方将一次多项式化到分子，再代入 D^2 后直接使用 D 算子求导

$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{D^2+pD+q}\sin ax=\frac{1}{-a^2+pD+q}\sin ax\\&=\frac{1}{pD-(a^2-q)}\sin ax=\frac{pD+(a^2-q)}{[pD-(a^2-q)]\,[pD+(a^2-q)]}\sin ax\\&=\frac{pD+a^2-q}{p^2D^2-(a^2-q)^2}\sin ax=\frac{pD+a^2-q}{-p^2a^2-(a^2-q)^2}\sin ax\end{aligned}$$

$f(x)=\mathcal{P}(x)$： 使用 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 泰勒展开 $\dfrac{1}{\mathcal{F}(D)}$（不考虑收敛域，但对应 x 不包含常数项），使得展开后 D 的最高次幂不小于 $\mathcal{P}(x)$ 即可

$$y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}\mathcal{P}(x)=\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{1+\frac{D^2+pD}{q}}\mathcal{P}(x)=\frac{1}{q}\cdot\left[1+\frac{D^2+pD}{q}+\left(\frac{D^2+pD}{q}\right)^2+\cdots\right]\mathcal{P}(x)$$

若 $\mathcal{F}(D)=D^2+pD$ 不含常数项，则先提出 $\dfrac{1}{D}$

$$y^*=\frac{1}{D^2+pD}\mathcal{P}(x)=\frac{1}{pD}\cdot\frac{1}{1+\frac{D}{p}}\mathcal{P}(x)=\frac{1}{pD}\cdot\left[1+\frac{D}{p}+\left(\frac{D}{p}\right)^2+\cdots\right]\mathcal{P}(x)$$

$f(x) = \mathrm{e}^{kx} y(x)$：**移位定理**

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathrm{e}^{kx} y(x) = \mathrm{e}^{kx} \frac{1}{\mathcal{F}(D+k)} y(x)$$

$f(x) = \mathcal{P}(x) \sin ax$：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}(x) \sin ax = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right] = \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \frac{1}{\mathcal{F}(D+\mathrm{i}a)} \mathcal{P}(x)\right]$$

$f(x) = \mathcal{P}(x) \cos ax$：

$$y^* = \frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}(x) \cos ax = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathcal{F}(D)} \mathcal{P}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \frac{1}{\mathcal{F}(D+\mathrm{i}a)} \mathcal{P}(x)\right]$$

17 全微分方程

17.1 条件（微分换序）

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \text{是全微分方程} \iff P'_y = Q'_x$$

Part VI

无穷级数

18 收敛与发散

18.1 绝对收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = s; s \in \mathbb{C}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛

18.2 条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s; \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散}; s \in \mathbb{C}$$

$$\text{绝对收敛} \cap \text{条件收敛} = \varnothing$$

18.3 性质

$$\sum u_n\text{与}\sum ku_n\text{同敛散}\,(k\neq 0)$$

$$\sum u_n=a;\sum v_n=b\implies\sum(u_n\pm v_n)=a\pm b$$

改变前有限项，不改变级数敛散性

收敛级数加括号仍收敛，且和不变：

$$\sum u_n=s\implies\sum(u_{2n-1}+u_{2n})=s$$

级数收敛必要条件：

$$\sum u_n\text{收敛}\implies\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

18.4 运算关系

$$\left.\begin{matrix}\sum a_n\\ \sum b_n\end{matrix}\right\}\implies\left\{\begin{matrix}\sum(a_n+b_n)\\ \sum a_nb_n\end{matrix}\right.$$

收敛 + 收敛 = 收敛

收敛 + 发散 = 发散

发散 + 发散 = 不确定

绝对收敛 + 绝对收敛 = 绝对收敛

绝对收敛 + 条件收敛 = 条件收敛

条件收敛 + 条件收敛 = 收敛（不确定条件还是绝对）

绝对收敛 × 条件收敛 = 绝对收敛

18.5 无穷大比较

$$n\to+\infty$$

$$n^n\gg n!\gg a^n\,(a>1)\gg n^p\,(p>1)\gg|\gg n^p\,(1\geqslant p>0)\gg(\ln n)^q\,(q>0)$$

$\sum\dfrac{1}{u_n}$ 中，若 u_n 在 $|$ 记号左侧则收敛，在 $|$ 记号右侧则发散

$\sum\dfrac{v_n}{u_n}$ 中，若 u_n 在 $|$ 记号左侧，且 v_n 在 u_n 右侧时收敛，否则发散（$\dfrac{n^p\,(1\geqslant p>0)}{n^q\,(q>1)}$ 除外，需进一步 $p>q+1$ 才收敛）

19 任意项级数

20 正项级数

$$u_n > 0$$

收敛 $\iff$ 绝对收敛

20.1 比值审敛法（达朗贝尔判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\begin{cases}<1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{（绝对）收敛}\\ =1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{可能收敛可能发散}\\ >1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{发散}\end{cases}$$

20.2 根值审敛法（柯西判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\begin{cases}<1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{（绝对）收敛}\\ =1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{可能收敛可能发散}\\ >1 & \Longrightarrow \sum u_n\text{发散}\end{cases}$$

20.3 积分审敛法

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\text{敛散同}\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

20.4 比较审敛法

大收敛则小收敛，小发散则大发散

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\begin{cases}=0 & \Longrightarrow \sum v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum u_n\text{收敛};\sum u_n\text{发散}\Rightarrow\sum v_n\text{发散}\\ \in(0,+\infty) & \Longrightarrow \sum v_n\text{敛散同}\sum u_n\text{（同阶同敛散）}\\ =+\infty & \Longrightarrow \sum v_n\text{发散}\Rightarrow\sum u_n\text{发散};\sum u_n\text{收敛}\Rightarrow\sum v_n\text{收敛}\end{cases}$$

21 交错级数

21.1 莱布尼兹判别法

$$\left.\begin{array}{r}\text{正项级数}u_n\searrow\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{交错级数}\sum(-1)^{n\text{（或}n-1\text{）}}u_n\text{收敛}$$

22 幂（泰勒）级数

以下默认幂级数形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \text{收敛半径为} R; R \geqslant 0$$

22.1 阿贝尔定理

$$\begin{cases} |x| < R & \text{绝对收敛} \\ |x| = R & \text{单独讨论（可能条件收敛）} \\ |x| > R & \text{发散} \end{cases}$$

收敛区间为 $(-R, R)$，收敛域需要讨论端点 $|x| = R$ 处的值（$R = 0$ 除外）

22.2 性质

$$\left.\begin{matrix} \sum a_n x^n \text{收敛域为} I_a \\ \sum b_n x^n \text{收敛域为} I_b \end{matrix}\right\} \implies \sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum \left(a_n \pm b_n\right) x^n, x \in I_a \cap I_b$$

幂级数对 x 逐项求导、积分后，收敛半径不变
求导后，收敛域可能缩小（边界点可能发散）
积分后，收敛域可能扩大（边界点可能收敛）

$$\sum a_n x^n = \int_0^x \left[\sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(a_n x^n\right)\right] \mathrm{d}x$$

注：定积分下限 0 表示原级数常数项

22.3 系数模比值法

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \implies R = \frac{1}{\rho}$$

22.4 系数模根值法

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \implies R = \frac{1}{\rho}$$

22.5 定义法

将幂级数 $\sum a_n x^n$ 作为任意项级数 $\sum a_n(x)$ 求敛散性

22.6 泰勒级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

23 三角（傅里叶）级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

$f(x)$ 周期为 $T=2l$ 时（l 常取 π），有傅里叶系数：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x; n\in\mathbb{N} \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x; n\in\mathbb{N}^+ \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$$

余弦级数 若 $f(x)$ 是在一个周期上是偶函数，则 $b_n = 0$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

正弦级数 若 $f(x)$ 是在一个周期上是奇函数，则 $a_n = 0$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

23.1 狄利克雷收敛定理

$f(x)$ 在一个周期内有：

1. 连续或只有有限个第一类间断点
2. 只有有限个极值点

即 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $\mathbb{R}$ 连续，且

1. x_0 连续时，级数收敛于 $f(x_0)$
2. x_0 是第一类间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$