离散数学

Thursday 23$^{\text{rd}}$ February, 2023

目录

命题中

1. 以分号 ; 分隔命题、作合取用
2. 以逗号 , 分隔变量
3. 定义中竖线 | 左边指定义的对象（一定是自由变元），右边是定义需要满足的命题
4. 条件 → 左边是前提，右边是需要满足的条件（一般优先级最低）
5. 量词 $\forall, \exists$ 指定了约束变元，最好不要省略；可以写为形如 $\forall x \in A$ 或 $\exists x\,(0 > x > 1)$ 两种形式

1 命题逻辑

名词	符号	定义
否定（非）	$\neg P$	$\overline{P}$
合取（与）	$P \wedge Q$	$P \cdot Q$
析取（或）	$P \vee Q$	$P + Q$
条件	$P \to Q$	$\overline{P} + Q$
同或	$P \leftrightarrow Q$	$P \cdot Q + \overline{P} \cdot \overline{Q}$
与非	$P \uparrow Q$	$\overline{P} + \overline{Q}$
或非	$P \downarrow Q$	$\overline{P} \cdot \overline{Q}$
条件否定	$P \mapsto Q$	$P \cdot \overline{Q}$
异或	$P \nabla Q$	$P \cdot \overline{Q} + \overline{P} \cdot Q$
任意	$\forall P \in \{P_i\}$	$\prod P_i$
存在	$\exists P \in \{P_i\}$	$\sum P_i$

2 集合与关系

名词	符号
相等	$A = B$
属于	$a \in A$
子集	$A \subseteq B$
真子集	$A \subset B$
空集	$\varnothing$
全集	E
交	$A \cap B$
并	$A \cup B$

以下默认条件为 $R \subseteq A \times A; x, y, z \in A$

表 1:

名词	符号	定义或备注
基数	$\lvert A\rvert$	A 集合中元素的个数
平凡子集		A 的 $\sim$ 是 $\varnothing$ 和其本身
幂集	2^A 或 $P(A)$	$\{B \mid B \subseteq A\}$
差（相对差）	$A - B$	$\{a \mid a \in A; a \notin B\}$
绝对差	$\sim A$ 或 $\overline{A}$	$E - A$
对称差	$A \oplus B$	$(A \cup B) - (A \cap B)$
n 元组	$\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle$	$\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$
序偶	$\langle a, b\rangle$	二元组
笛卡尔积	$A \times B$	$\{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$（$\varnothing \times \varnothing = \varnothing$）
关系	aRb	a 和 b 有关系 R
无关系	$a\overline{R}b$	a 和 b 没有关系 R
空关系		$\varnothing$ 是 $A \times B$ 的 $\sim$
全域关系		$A \times B$ 是 $A \times B$ 的 $\sim$
前域	$\mathrm{dom}(R)$	$\{x \mid \langle x, y\rangle \in R\}$
值域	$\mathrm{ran}(R)$	$\{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}$
域	$\mathrm{FLD}(R)$	$\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$
恒等关系	I_A	$\{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$
自反关系		$R \mid \forall \to \langle x, x\rangle \in R$
反自反关系		$R \mid \forall \to \langle x, x\rangle \notin R$
对称关系		$R \mid \forall \langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R$
反对称关系		$R \mid \forall \langle x, y\rangle \in R \to x = y$
传递关系		$R \mid \forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R$
反传递关系		$R \mid \forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \notin R$
等价关系		$R \mid R$ 为自反关系、对称关系、传递关系
等价类	$[a]_R$	$\{x \mid a \in A, \langle x, a\rangle \in R\}$（$R$ 是 A 上等价关系）
商集	A/R	$\{[a]_R \mid a \in A\}$（R 是 A 上等价关系）
划分		由非空、互不相交、并为 A 的集合作为元素构成的集合

Continued on next page

表 1: (Continued)

相容关系	$R\|R$ 为自反关系、对称关系	
相容类	$B\|\varnothing \neq B \subseteq A; \forall a, b \in B \rightarrow \langle a, b\rangle \in R$（$R$ 是 A 上相容关系）	
极大相容类	$B\|B$是相容类$; \forall x \in A - B \rightarrow B \cup \{x\}$ 不是相容类	
最大相容类	相容类中元素最多的	
覆盖	由非空、并为 A 的集合作为元素构成的集合	
完全覆盖	$C_R(A)$	R 的全部极大相容类的集合（R 是 A 上相容关系）
偏序关系	$R\|R$ 为自反关系、反对称关系、传递关系	
偏序集	$\langle A, \preccurlyeq\rangle$	
偏序	$a \preccurlyeq b$、$b \succcurlyeq a$	$\langle a, b\rangle \in \preccurlyeq$、$\langle b, a\rangle \in \succcurlyeq$
可比	$a \preccurlyeq b$	
不可比	$a \npreceq b; b \npreceq a$	
拟序关系	R 为反自反关系、传递关系	
拟序集	$\langle A, \prec\rangle$	
拟序	$a \prec b$、$b \succ a$	$\langle a, b\rangle \in \prec$、$\langle b, a\rangle \in \succ$
盖住	$b \sim a\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; a, b \in A; a \neq b; a \preccurlyeq b; \nexists z \in A \rightarrow a \preccurlyeq z \preccurlyeq b$	
盖住关系	$\operatorname{cov}(A, \preccurlyeq)$	$\{\langle a, b\rangle \| a, b \in A; b$盖住$a\}$
最大元	$a\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; a \in A; \forall x \in A; x \preccurlyeq a$	
最小元	$a\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; a \in A; \forall x \in A; a \preccurlyeq x$	
极大元	$a\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; a \in A; \nexists x \in A; a \preccurlyeq x$	
极小元	$a\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; a \in A; \nexists x \in A; x \preccurlyeq a$	
上界	a 是 B 的 $\sim \| \langle A, \preccurlyeq\rangle; \varnothing \neq B \subseteq A; a \in A; \forall b \in B \rightarrow b \preccurlyeq a$	
上确界	$\mathrm{LUB}(B)$	B 的最小上界
下界	a 是 B 的 $\sim \| \langle A, \preccurlyeq\rangle; \varnothing \neq B \subseteq A; a \in A; \forall b \in B \rightarrow a \preccurlyeq b$	
下确界	$\mathrm{GLB}(B)$	B 的最大下界
链	$B\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; \varnothing \neq B \subseteq A; \forall a, b \in B \rightarrow ab$ 可比	
反链	$B\| \langle A, \preccurlyeq\rangle; \varnothing \neq B \subseteq A; \forall a, b \in B \rightarrow ab$ 不可比	
全（线）序集	$\langle A, \preccurlyeq\rangle \|A$ 是链（此时偏序关系称为全（线）序关系）	
良序集	$\langle A, \preccurlyeq\rangle \|\forall B(\varnothing \neq B \subseteq A) \rightarrow B$ 有最小元	
复合关系	$R \circ S$	$\{\langle a, d\rangle \| a \in A; d \in D; \exists b \in B \rightarrow aRb; bSd\}$
逆关系	R^{-1}	$\{\langle y, x\rangle \| \langle x, y\rangle \in R\}$

Continued on next page

表 1: (Continued)

自反闭包	$r(R)$	$R' \mid R' \supseteq R; R'$ 自反关系 ;$\forall R'' \supseteq R; R''$ 自反关系 $\to R'' \supseteq R'$
对称闭包	$s(R)$	$R' \mid R' \supseteq R; R'$ 对称关系 ;$\forall R'' \supseteq R; R''$ 对称关系 $\to R'' \supseteq R'$
传递闭包	$t(R)$	$R' \mid R' \supseteq R; R'$ 传递关系 ;$\forall R'' \supseteq R; R''$ 传递关系 $\to R'' \supseteq R'$

3 图论

4 抽象代数

以下默认条件为 A, B 是集合 ;$*, \triangle : A^2 \to A; a \in A; b \in B; \forall x, y, z \in A; \langle S, * \rangle$ 是群 ;$\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的非空子群

表 2:

名词	符号	定义或备注
n 元运算		$f \mid f : A^n \to B$
封闭		$* \mid x * y \in A$
交换		$* \mid x * y = y * x$
幂等		$* \mid x * x = x$
左分配		$*$ 对于 $\triangle \mid x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z)$
右分配		$*$ 对于 $\triangle \mid (y \triangle z) * x = (y * x) \triangle (z * x)$
分配		$*$ 对于 $\triangle$ 同时满足左、右分配
吸收		$*$ 和 $\triangle \mid x * (x \triangle y) = x = x \triangle (x * y)$
结合		$* \mid (x * y) * z = x * (y * z)$
代数运算		$f \mid f : A^n \to A$
代数系统（结构）	$\langle A, f_1, \cdots, f_n \rangle$	$f_i : A^n \to A$
半群		$\langle A, * \rangle \mid *$ 结合
子半群		B 是 A 的 $\sim \mid \langle A, * \rangle, \langle B, * \rangle$ 是半群 ;$\varnothing \neq B \subseteq A$
幂等元		$a \mid a * a = a$
幺元（左、右）	e	$e_l * x = x = x * e_r; e \in A$
零元（左、右）	θ	$\theta_l * x = \theta = x * \theta_r; \theta \in A$
逆元（左、右）	a^{-1}	$a_l^{-1} * a = e = a * a_r^{-1}; a^{-1} \in A$
独异点		$\langle A, * \rangle \mid$ 半群 $\langle A, * \rangle$ 中有幺元

Continued on next page

表 2: (Continued)

子独异点	$\langle B,*\rangle$ 是 $\langle A,*\rangle$ 的 $\sim \mid \langle A,*\rangle,\langle B,*\rangle$ 是独异点；$\varnothing \neq B \subseteq A$	
群	$\langle A,*\rangle \mid \langle A,*\rangle$ 是独异点；$\forall a \in A \to a^{-1} \in A$	
子群	$\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的 $\sim \mid \varnothing \neq H \subseteq G$	
真子群	$\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的 $\sim \mid \varnothing \neq H \subset G$	
有（无）限群	$\langle G,*\rangle \mid G$ 是有（无）限集	
有限群的阶	$\lvert G\rvert$	G 中元素个数
元素的阶	$\lvert a\rvert$	满足 $a^k = e$ 的最小正整数 $k; a \in G$
生成子群	$\langle H\rangle$	$\bigcap S_i \mid H \subseteq S \subseteq G$
生成系	H 是 $\langle H\rangle$ 的 $\sim$	
集合乘积	AB	$\{a * b \mid \varnothing \neq A, B \subseteq G\}$
左陪集	aH	H 在 G 中的 $\sim \mid \{a\} H$
右陪集	Ha	H 在 G 中的 $\sim \mid H\{a\}$
陪集	H 在 G 中的 $\sim \mid aH = Ha$	
代表元	a 是陪集 H 的 $\sim \mid aH = Ha$	
陪集分解式（左）	$(G =) \bigcup\limits_{i\in[1,r]} a_iH \mid a_jH \cap a_kH = \varnothing; j,k = [1,r]; j \neq k$	
指数	$[G:H]$	H 在 G 中的 $\sim \mid H$ 的左或右陪集的个数
拉格朗日定理	$\lvert G\rvert = \lvert H\rvert\,[G:H] \mid \langle G,*\rangle$ 是有限群	
正规子群	$\langle H,*\rangle \trianglelefteq \langle G,*\rangle$	$\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的 $\sim \mid \forall a \in G \to aH = Ha$
平凡（正规）子群	$\langle G,*\rangle$ 的 $\sim$ 是 $\langle\{e\},*\rangle$ 和其本身	
单群	$\langle G,*\rangle$ 的正规子群只有平凡正规子群；$G \neq \{e\}$	
	G/H	$\sim$ 是 H 的所有陪集构成的集合
商群	$\langle G/H,\bigstar\rangle$	$\bigstar \mid \forall aH, bH \in G/H \to aH \bigstar bH = (a*b)H$