概率论与数理统计

Thursday 8^{th} August, 2024

目录

Part I

概率论

1 随机事件及其概率

1.1 符号

名词	符号	注释
随机实验	E	
样本点	ω	
样本空间	Ω	
交（积）事件	$A \cap B$ 或 AB	$\{\omega \vert \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
并事件	$A \cup B$	$\{\omega \vert \omega \in A \vee \omega \in B\}$
差事件	$A - B$	$\{\omega \vert \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
互斥事件		$A \cap B = \varnothing$
对立事件	$\overline{A}$	$\Omega - A$
概率	$P(A)$	

1.2 条件概率

已知 A 事件发生，发生 B 事件的概率（$P(A) > 0$）

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.3 乘法公式

$P(A) > 0$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1.4 古典概型

$$P(A) = \frac{A\text{所含样本点个数}}{\Omega\text{样本点个数}}$$

1.5 几何概型

$$P(A) = \frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

1.6 完备事件组

$$\bigcup A_i = \Omega; A_i \cap A_j = \varnothing$$

1.7 全概率公式

$\{A_i\}$ 完备事件组

$$P(B) = \sum P(A_i B) = \sum P(A_i) P(B|A_i)$$

1.7.1 全概率条件公式

$$P(C|B) = \sum P(A_i C|B) = \sum P(A_i|B) P(C|A_i B)$$

1.8 贝叶斯公式

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j B)}{\sum P(A_i B)} = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum P(A_i) P(B|A_i)}$$

1.9 独立事件

$$\begin{aligned}
A, B\text{相互独立} &\iff P(AB) = P(A) P(B) \\
&\iff P(A|B) = P(A) \\
&\iff \overline{A}, B\text{相互独立} \\
&\iff A, \overline{B}\text{相互独立} \\
&\iff \overline{A}, \overline{B}\text{相互独立} \\
&\iff P(A|B) = P\left(A|\overline{B}\right)
\end{aligned}$$

$$\{A_i\}\ \text{相互独立} \iff P\left(\bigcap A_i\right) = \prod P(A_i)$$

1.10 伯努利概型

定义：

1. 每次试验对应样本空间相同
2. 各次试验结果相对独立
3. 只考虑两种结果

n 重伯努利试验中，A 事件恰好发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2 连续型随机变量及其分布函数

2.1 密度函数（概率密度）

$f(x)$、$f(x,y)$ 等

性质

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

随机变量换元

$$X = g(Y)$$

$$f_Y(y) = f_X(g(y))\,|g'(y)|\,(g(y) \in D_x)$$

2.2 分布函数

$F(x)$、$F(x,y)$ 等

定义

$$P\{X = x\} = 0\,(x \in \mathbb{R})$$

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,(x \in \mathbb{R})$$

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,(x,y \in \mathbb{R})$$

性质

$$F(x) \geqslant 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

3 分布

3.1 边缘分布

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F(x,+\infty)\,(x \in \mathbb{R})$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F(+\infty,y)\,(y \in \mathbb{R})$$

3.1.1 边缘分布律

$$P\left\{X=x_i\right\}=\sum_j P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}$$

$$P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_i P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}$$

3.1.2 边缘密度函数

$$f_X\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, y\right) \mathrm{d}y \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

$$f_Y\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, y\right) \mathrm{d}x \left(y \in \mathbb{R}\right)$$

3.2 条件分布

$$F_{X|Y}\left(x|y\right)=P\left\{X \leqslant x | Y=y\right\} \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

$$F_{Y|X}\left(y|x\right)=P\left\{Y \leqslant y | X=x\right\} \left(y \in \mathbb{R}\right)$$

3.2.1 条件分布律

$$P\left\{X=x_i | Y=y_j\right\}=\frac{P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}}{\sum\limits_j P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}}$$

$$P\left\{Y=y_j | X=x_i\right\}=\frac{P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}}{\sum\limits_i P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}}$$

3.2.2 条件分布密度函数

$$f_{X|Y}\left(x|y\right)=\frac{f\left(x, y\right)}{f_Y\left(y\right)} \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x, y\right)}{f_X\left(x\right)} \left(y \in \mathbb{R}\right)$$

3.3 独立性

充要条件

$$F\left(x, y\right)=F_X\left(x\right) F_Y\left(y\right)$$

4 一维离散型随机变量及其分布律

以下都有

$$p \in (0,1)$$

4.1 两点分布

$X \sim B(1,p)$

k $k \in \{0,1\}$

$$P\{X=k\} = p^k (1-p)^{1-k}$$

4.2 二项（伯努利）分布

$X \sim B(n,p)$

n $n \in \mathbb{N}^+$

k $n \geqslant k \in \mathbb{N}$

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

4.3 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

λ $\lambda > 0$

k $k \in \mathbb{N}$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

4.3.1 泊松定理

n 重伯努利试验中，事件发生概率 $p_n \in (0,1)$ 与试验次数有关，若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

4.4 几何分布

$X \sim G(p)$

k 前 $k-1$ 次都失败，第 k 次成功 $k \in \mathbb{N}^+$

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

4.5 超几何分布

$X \sim H(M, N, n)$

N 总样本数 $N > 1$

n 抽取样本数 $n \leqslant N$

M 指定样本数 $M \leqslant N$

k 抽到指定样本数 $k \in \mathbb{N} \cap [\max\{0, M+n-N\}, \min\{M, n\}]$

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

5 一维连续型随机变量及其密度、分布函数

5.1 均匀分布

$X \sim U[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

5.2 指数分布

$X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

5.3 正态（高斯）分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ $\mu \in \mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma > 0$ 标准差

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\frac{1}{2}$$

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$$

5.3.1 标准正态分布

$X\sim N\left(0,1\right)$

$$\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}$$

5.3.2 经验原则

$$\begin{cases}P\left\{\left|X-\mu\right|<\ \ \sigma\right\}=0.6826\\P\left\{\left|X-\mu\right|<2\sigma\right\}=0.9544\\P\left\{\left|X-\mu\right|<3\sigma\right\}=0.9974\end{cases}$$

6 二维连续型随机变量及其密度函数

6.1 均匀分布

$\left(X,Y\right)\sim U\left(D\right)$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D} & \left(x,y\right)\in D\\0 & \left(x,y\right)\notin D\end{cases}$$

6.2 正态分布

$\left(X,Y\right)\sim N\left(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho\right)$

μ $\mu\in\mathbb{R}$ 期望

σ $\sigma>0$ 标准差

ρ $\rho\in\left(-1,1\right)$，相关系数（$\rho=0$ 时 X、Y 独立）

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-\mu_X\right)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{\left(y-\mu_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

若 X、Y 独立

$$\left.\begin{aligned}X\sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)\\ Y\sim N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right)\end{aligned}\right\}\implies\left(X,Y\right)\sim N\left(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,0\right)$$

$$Z=aX+bY\sim N\left(a\mu_X+b\mu_Y,a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2\right)$$

6.3 换元

$Z=X+Y$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y$$

若 X、Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(z-y\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y=f_X\left(z\right)*f_Y\left(z\right)$$

$Z=\dfrac{X}{Y}$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f\left(yz,y\right)\mathrm{d}y$$

若 X、Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f_X\left(yz\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y$$

$Z=XY$

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|x\right|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|y\right|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$$

若 X、Y 独立

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|x\right|}f_X\left(x\right)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|y\right|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y$$

6.3.1 最值分布

若 X、Y 独立

$$M=\max\{X,Y\},N=\min\{X,Y\}$$

则

$$F_M=F_XF_Y$$

$$1-F_N=(1-F_X)(1-F_Y)$$

$$f_M=F'_M=f_XF_Y+f_YF_X$$

$$f_N=F'_N=f_X(1-F_Y)+f_Y(1-F_X)$$

Part II

数理统计

7 数字特征

7.1 期望

	离散型	连续型
$E(X)$	$\sum x_ip_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$
$E(Y)\,(Y=g(X))$	$\sum g(x_i)\,p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$
$E(Z)\,(Z=g(X,Y))$	$\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)\,p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

7.1.1 性质

线性

$$E(kX+c)=kE(X)+c$$

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

独立 若 X、Y 独立

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

平均

$\bar{X}$ $\frac{1}{n}\sum X_i$

$$E\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}\sum E(X_i)$$

7.2 方差

$$D(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E\left(X^2\right)-(E(X))^2$$

7.2.1 标准差

$$\sqrt{D(X)}$$

7.2.2 离散型

$$D(X)=\sum (x_i-E(X))^2 p_i$$

7.2.3 连续型

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

7.2.4 性质

线性

$$D(kX+c)=k^2D(X)$$

独立 若 X、Y 独立

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

$$D(XY)=D(X)D(Y)$$

平均

$\bar{X}\ \ \frac{1}{n}\sum X_i$

$$D\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n^2}\sum D\left(X_i\right)$$

7.3 标准化随机变量

$$X^* = \frac{X - E\left(X\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}}$$

7.4 常见分布期望方差

$X \sim F\left(X\right)$	$E\left(X\right)$	$D\left(X\right)$
$B\left(n,p\right)$	np	$np\left(1-p\right)$
$P\left(\lambda\right)$	λ	λ
$G\left(p\right)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{\left(1-p\right)}{p^2}$
$H\left(M,N,n\right)$	$\frac{nM}{N}$	$n\cdot\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$
$U\left[a,b\right]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{\left(b-a\right)^2}{12}$
$E\left(\lambda\right)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N\left(\mu,\sigma^2\right)$	μ	σ^2

7.5 协方差

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right] = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

7.6 性质

$$D\left(X\pm Y\right) = D\left(X\right) + D\left(Y\right) \pm 2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(X,X\right) = D\left(X\right)$$

交换律

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = \mathrm{Cov}\left(Y,X\right)$$

线性

$$\mathrm{Cov}\left(X, c\right) = 0$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathrm{Cov}\left(X_i, Y_j\right)$$

7.7 （线性）相关系数

7.7.1 （线性）均方误差

用 $aX + b$ 去拟合 Y

$e\left(a, b\right)$ 越小表明线性关系越强，越大越弱

$e\left(a_0, b_0\right)$ 最小均方误差

$\left(a_0, b_0\right)$ 驻点

a_0 $\dfrac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{D\left(X\right)}$

b_0 $E\left(Y\right) - a_0 E\left(X\right)$

$$e\left(a, b\right) = E\left[\left(Y - \left(aX + b\right)\right)^2\right]$$

$$e\left(a_0, b_0\right) = \left(1 - \rho_{XY}^2\right) D\left(Y\right)$$

7.7.2 定义

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Y\right)}}$$

7.7.3 性质

$$\rho \in \left[-1, 1\right]$$

$$\left|\rho_{XY}\right| = 1 \Longleftrightarrow P\left\{Y = aX + b\right\} = 1\left(a \neq 0\right) \begin{cases} a > 0 \text{（正相关）} \rho_{XY} = & 1 \\ a < 0 \text{（负相关）} \rho_{XY} = & -1 \end{cases}$$

$$\rho_{(aX)(bY)} = \frac{ab}{\left|ab\right|} \rho_{XY}$$

7.7.4 不（线性）相关

$$
\begin{aligned}
&\rho = 0 \\
\Longleftrightarrow &\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 \\
\Longleftrightarrow &E(XY) = E(X)E(Y) \\
\Longleftrightarrow &D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)
\end{aligned}
$$

独立 $\Longrightarrow$ 不相关

8 统计量

8.1 样本联合分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod F(x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod f(x_i)$$

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod p_i$$

8.2 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

8.3 （修正）样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

8.4 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}$$

8.5 其他

样本均值的期望等于总体均值（期望），样本方差的期望等于总体方差

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu = E(X)$$

$$E\left(S^2\right) = \sigma^2 = D(X)$$

$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

8.6 矩

$k,l\in\mathbb{N}^+$

名称	定义	离散	连续
k阶原点矩	$E\left(X^k\right)$	$\sum x_i^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f\left(x\right)\mathrm{d}x$
k阶中心矩	$E\left(\left(X-\bar{X}\right)^k\right)$	$\sum\left(x_i-\bar{X}\right)^k p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\bar{X}\right)^k f\left(x\right)\mathrm{d}x$
$k+l$阶混合原点矩	$E\left(X^kY^l\right)$		
$k+l$阶混合中心矩	$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^k\left(Y-E\left(Y\right)\right)^l\right]$		

1 阶原点矩 $=E\left(X\right)$
1 阶中心矩 $=0$
2 阶中心矩 $=D\left(X\right)$
1+1 阶混合中心矩 $=\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$

9 抽样分布

9.1 伽马分布

$X\sim\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$

9.1.1 伽马函数

$$\Gamma\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\left(x>0\right)$$

9.1.2 密度函数

$$f\left(x,\alpha,\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

9.1.3 性质

再生性

$X_1 \sim \Gamma\left(\alpha_1, \beta\right)$

$X_2 \sim \Gamma\left(\alpha_2, \beta\right)$

$X_3 \sim \Gamma\left(\alpha_1 + \alpha_2, \beta\right)$

$$X_1 + X_2 = X_3$$

9.2 卡方分布

$\chi^2 \sim \chi^2\left(n\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

n 自由度

$X_i \sim N\left(0, 1\right)$，且相互独立

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

9.2.1 非中心的卡方分布

$X_i \sim N\left(\mu_i, 1\right)$

δ 非中心参数

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}$$

$$\chi_{n,\delta}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

9.2.2 密度函数

$$f\left(x, n\right) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

9.2.3 性质

再生性

$\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$

$\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$

$\chi_3^2 \sim \chi^2(m+n)$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi_3^2$$

9.3 t 分布

$T \sim t(n)$

n 自由度

$X \sim N(0,1)$

$Y \sim \chi^2(n)$

且 X、Y 相互独立

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

9.3.1 密度函数

$$f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

9.3.2 性质

$n=1$ 时，为柯西分布
n 充分大时，为标准正态分布

9.4 F 分布

$F \sim F(m,n)$

m 第一自由度

n 第二自由度

$X \sim \chi^2(m)$

$Y \sim \chi^2(n)$

且 X、Y 相互独立

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

9.4.1 密度函数

$$f\left(x,m,n\right)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\dfrac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\dfrac{m+n}{2}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

9.4.2 性质

$T\sim t\left(n\right)\implies T^2\sim F\left(1,n\right)$

$F\sim F\left(m,n\right)\implies \dfrac{1}{F}\sim F\left(n,m\right)$

9.5 常见分布期望方差

X	服从分布	$E\left(X\right)$	$D\left(X\right)$
X	$\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$
χ^2	$\chi^2\left(n\right)$	n	$2n$
T	$t\left(n\right)$	$0\left(n>1\right)$	$\dfrac{n}{n-2}\left(n>2\right)$
F	$F\left(m,n\right)$	$\dfrac{n}{n-2}\left(n>2\right)$	$\dfrac{2n^2\left(m+n-2\right)}{m(n-2)^2\left(n-4\right)}\left(n>4\right)$

9.6 上侧分位点

x_p 上侧分位点

p x_p 右侧区域的概率

$$P\left\{X\geqslant x_p\right\}=p\left(p\in\left(0,1\right)\right)$$

9.7 正态总体的常用统计量分布

9.7.1 单个正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
X_1, X_2, \cdots, X_n &\sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \\
&\Downarrow \\
\bar{X}, S^2 &\text{相互独立} \\
\bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\
\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0,1) \\
\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 &\sim \chi^2(n) \\
\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 &\sim \chi^2(n-1) \\
\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} &\sim t(n-1)
\end{aligned}
$$

9.7.2 两个正态总体的抽样分布

$$
\begin{aligned}
X_1, X_2, \cdots, X_m &\sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \\
Y_1, Y_2, \cdots, Y_n &\sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \\
&\Downarrow \\
\bar{X} \pm \bar{Y} &\sim N\left(\mu_X \pm \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \\
\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}} &\sim N(0,1) \\
\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2}+\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} &\sim \chi^2(m+n-2) \\
\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_X\right)^2/m\sigma_X^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_Y\right)^2/n\sigma_Y^2} &\sim F(m,n) \\
\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} &\sim F(m-1,n-1) \\
\text{当}\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2\text{时}& \\
\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} &\sim t(m+n-2)
\end{aligned}
$$

10 参数估计

10.1 矩估计

10.1.1 基本思想

样本矩代替总体矩，建立 k 个方程，从中解出 k 个未知参数的矩估计量（低阶矩优先）

$k=1$ 一般采用 $\bar{X}=E\left(X\right)$

$k=2$ 一般采用 $\begin{cases} E\left(X\right)=\bar{X} \\ D\left(X\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \end{cases}$

也可以用 $\begin{cases} E\left(X\right)=\bar{X} \\ E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$

10.2 极大似然估计

$p\left(x,\theta\right)$ 分布律或者密度函数

$$L\left(x_1,x_2,\cdots;\theta\right)=\prod p\left(x_i,\theta\right)$$

$$L\left(x_1,x_2,\cdots;\hat{\theta}\right)=\max_{\theta\in\Theta}\left\{L\left(x_1,x_2,\cdots;\theta\right)\right\}$$

常用解法：

$$\ln L\left(\theta\right)=\sum\ln p\left(x_i,\theta\right)$$

求驻点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L\left(\theta\right)=0$$

若有多个参数 θ_i，令每个偏导为 0 即可

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L\left(\theta\right)=0$$

10.3 估计量评价标准

10.3.1 均方误差

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=D\left(\hat{\theta}\right)+\left(\theta-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

10.3.2 无偏性

无偏估计 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

否则为有偏估计

渐进无偏估计 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

性质 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，即 $E\left(\bar{X}\right)=\mu$

S^2 是 σ^2 的无偏估计，即 $E\left(S^2\right)=\sigma^2$

未修正样本方差 $S_0^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 是 σ^2 的有偏估计，也是 σ^2 的渐进无偏估计

10.3.3 有效性

$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，均方误差准则就是方差准则，若 $D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

10.3.4 相合（一致）性

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\epsilon\right\}=1$$

10.4 区间估计

θ 未知参数

T 已知参数

F 已知分布且与 θ 无关

$I\left(T,\theta\right)$ 枢轴变量，服从分布 F

$1-\alpha$ 置信度

$v_{\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$v_{1-\frac{\alpha}{2}}$ F 的上 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点

$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ 置信区间

$$P\left\{v_{1-\frac{\alpha}{2}}<I\left(T,\theta\right)<v_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha \implies P\left\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha$$

11 假设检验

H_0 原假设（零假设）

H_1 备择假设（取原假设的逆命题）

弃真错误（第一类错误、α 错误）H_0 为真，且被拒绝

纳伪错误（第二类错误、β 错误）H_0 为假，且被接受

α $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in W) \,|H_0\text{为真}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_W}\left\{H_0\text{为真}\right\}$；显著性水平、弃真错误的概率

β $P\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n \in D) \,|H_0\text{为假}\right\}$ 或 $P_{\theta\in\Theta_D}\left\{H_0\text{为假}\right\}$；纳伪错误的概率

W 拒绝域；若统计量的值属于拒绝域，则拒绝 H_0

D 接受域；若统计量的值属于接受域，则接受 H_0

决策	总体情况	
	H_0 为真	H_0 为假
接受 H_0	正确 $(1-\alpha)$	纳伪 (β)
拒绝 H_0	弃真 (α)	正确 $(1-\beta)$

表 1: 置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间表

待估参数	其他参数	枢轴变量	服从分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
	σ^2 未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
$\mu_X-\mu_Y$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$
	$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}\right)$
$\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	μ_X, μ_Y 已知	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2/m\sigma_X^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2/n\sigma_Y^2}$	$F(m,n)$	$\left(\dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2 F_{\alpha/2}(m,n)}, \dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_X)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2 F_{1-\alpha/2}(m,n)}\right)$
	μ_X, μ_Y 未知	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$	$\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}, \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

† $S_\omega = \sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S 代替 σ

表 2: 正态总体的假设检验

原假设	备择假设	条件	检验统计量	服从分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 已知	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert z \rvert \geqslant z_{\alpha/2}$
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$				$z \geqslant z_\alpha$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$				$z \leqslant -z_\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert t \rvert \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$				$t \geqslant t_\alpha(n-1)$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$				$t \leqslant -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 已知	$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$				$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$				$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$				$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$				$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 已知	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\lvert z \rvert \geqslant z_{\alpha/2}$
$\mu_X - \mu_Y \leqslant \delta$	$\mu_X - \mu_Y > \delta$				$z \geqslant z_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y \geqslant \delta$	$\mu_X - \mu_Y < \delta$				$z \leqslant -z_\alpha$
$\mu_X - \mu_Y = \delta$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta$	σ_X^2, σ_Y^2 未知	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_\omega \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\lvert t \rvert \geqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \leqslant \delta$	$\mu_X - \mu_Y > \delta$				$t \geqslant t_\alpha(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y \geqslant \delta$	$\mu_X - \mu_Y < \delta$				$t \leqslant -t_\alpha(m+n-2)$

Continued on next page

表 2: 正态总体的假设检验 (Continued)

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 已知	$F = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left(X_i - \mu_X\right)^2 / m}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(Y_i - \mu_Y\right)^2 / n}$	$F(m, n)$	$F \geqslant F_{\alpha/2}(m, n)$ 或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m, n)$
$\sigma_X^2 \leqslant \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$				$F \geqslant F_{\alpha}(m, n)$
$\sigma_X^2 \geqslant \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$				$F \leqslant F_{1-\alpha}(m, n)$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y 未知	$F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$F \geqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ 或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \leqslant \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$				$F \geqslant F_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X^2 \geqslant \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$				$F \leqslant F_{1-\alpha}(m-1, n-1)$

† $S_\omega = \sqrt{\dfrac{(m-1) S_X^2 + (n-1) S_Y^2}{m+n-2}}$

‡ 对应参数未知时，用 $\bar{X}$ 代替 μ，用 S 代替 σ