

УДК 519.634

ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА¹⁾

© 2005 г. Л. В. Дородницын

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК)

e-mail: dorodn@cs.msu.su

Поступила в редакцию 21.12.2004 г.
Переработанный вариант 24.02.2005 г.

Рассматривается проблема отражения газодинамических волн от искусственных границ расчетной области при моделировании дозвукового обтекания тел. Неотражающие граничные условия для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера исследуются с точки зрения их применимости к полным постановкам задач. Особое внимание уделено течениям с низким числом Маха. Предлагаются способы адаптации линейных граничных условий к задачам обтекания с учетом нелинейности, двумерности, вязкости и дискретизации. Методика иллюстрируется расчетами существенно дозвуковых течений. Библ. 24. Фиг. 8. Табл. 1.

Ключевые слова: газовая динамика, неотражающие граничные условия, разностные схемы.

ВВЕДЕНИЕ

При численном моделировании внешних течений газа, таких как задачи обтекания тел, в большинстве случаев требуется использовать расчетную область конечных размеров вместо исходной неограниченной области. При расчете дозвукового, в особенности существенно дозвукового течения – с малым числом Маха, в численном решении происходят существенные искажения картины течения, нередко приводящие к неустойчивости или к полной потере физического смысла результатов. Наряду с выбором вычислительного алгоритма, не менее актуальной проблемой является задание граничных условий на искусственных границах.

В принципе формулировка условий на искусственных границах должна быть такой, чтобы решение задачи в ограниченной области являлось следом решения исходной задачи, поставленной в бесконечной области. Поскольку точное решение не известно заранее, возможно только косвенным путем получить точное или приближенное уравнение, которому удовлетворяют искомые функции на границе. С проблемой искусственных границ обычно сталкивается численное моделирование в тех отраслях физики, где важны волновые процессы: в электродинамике и в механике сплошных сред. Необходимо, чтобы волны не отражались от границ, не существующих реально, в связи с чем требуемые граничные условия получили название неотражающих.

Формулировка искусственных граничных условий во многом сложнее, чем постановка условий на физических границах. Так, граничные условия на поверхности твердого тела имеют, как правило, четкий физический смысл. Интерпретация условий на искусственных границах менее очевидна ввиду отсутствия физического смысла самих границ. Эти уравнения должны не противоречить физике исходной задачи и, кроме того, нести в себе дополнительную информацию.

Однако в ряде ситуаций искусственные граничные условия проявляют свое преимущество. Физические граничные условия, как правило, верны только на соответствующей границе (например, на поверхности тела). Неотражающие граничные условия нередко являются уравнениями, справедливыми в некоторой подобласти. Это дает возможность дифференцировать граничные уравнения или подставлять в них основную систему уравнений. Тем самым искусственные граничные условия, в отличие от физических, допускают множество формулировок.

История создания неотражающих граничных условий для различных систем уравнений насчитывает почти 30 лет. Обширная информация по данной тематике содержится в обзорной монографии [1]. Основная доля результатов относится к линейным дифференциальным уравнениям. В ряде случаев, например для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера динамики не-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00606).

вязкого газа, найдены точные неотражающие условия в форме алгебраических либо дифференциальных уравнений. В других ситуациях, когда возможны только нелокальные либо приближенные неотражающие условия, для их разработки существует удобный математический аппарат в виде преобразования Фурье.

Нелинейные задачи исследовать значительно труднее. Предложенная в [2] процедура построения неотражающих граничных условий состоит из нескольких этапов.

1. Линеаризация исходных уравнений относительно возмущений.
2. Преобразование Фурье линеаризованных уравнений.
3. Выявление всех типов гармонических волн и подавление нежелательных мод с помощью граничных условий.
4. Обратное преобразование Фурье граничных условий.
5. Представление граничных условий для возмущений в терминах исходных физических параметров.

Пп. 4 и 5, как правило, вызывают затруднения как математического характера, так и с точки зрения практической применимости получаемых граничных условий. Для линеаризованных систем уравнений газовой динамики предложено достаточно много вариантов неотражающих граничных условий – точных нелокальных или же приближенных различной степени точности. Для нелинейных одномерных уравнений Эйлера в [3] были построены точные неотражающие условия из класса характеристических условий. И поныне основным направлением в постановке искусственных граничных условий для более сложных нелинейных газодинамических моделей являются одномерные характеристические условия, применяемые в неизменном виде либо адаптированные специальными способами [4]–[8]. Имеются некоторые альтернативные подходы [9]–[11], однако линейные граничные условия повышенного порядка точности [12], [13] не нашли применения в нелинейных задачах.

Трудности, возникающие при перенесении на реальные задачи характеристических условий и других граничных условий для линейных одномерных уравнений Эйлера, связаны с рядом факторов. Перечислим их в порядке убывания значимости, опираясь на вычислительный опыт автора и его коллег, а также на теоретические предпосылки. Эти факторы таковы:

- 1) нелинейность;
- 2) дискретизация;
- 3) пространственная многомерность;
- 4) вязкость (диссипация).

В настоящей работе мы будем исследовать в основном нелинейные и дискретные эффекты, не сбрасывая со счетов два других свойства модели. Хотя многомерность линейной задачи изменяет параметры волн и делает невозможной формулировку локальных неотражающих условий, здесь мы не будем затрагивать данную проблему. Во-первых, ей посвящена обширная литература; во-вторых, учет второго пространственного измерения существенно загромождает анализ. Наличие вязкости – при высоких числах Рейнольдса – только увеличивает число необходимых граничных уравнений и усиливает эффект двумерности за счет поперечных градиентов.

В разностных моделях, как правило, также требуется больше граничных уравнений, чем в дифференциальных. Количество этих уравнений зависит от используемого схемой шаблона. На данном этапе сосредоточимся на прямоугольных сетках и схемах с трехточечными по каждому пространственному направлению шаблонами. Проблема использования таких алгоритмов связана с тем, что системам разностных уравнений присущи ложные (паразитные) волны, не имеющие физических прототипов. Обычно это пилообразные пространственные осцилляции, т.е. такие, длина волны которых близка к двум шагам сетки. Эти колебания необходимо подавлять наряду с отраженными физическими волнами.

В нелинейных системах газодинамических уравнений волны и их отражение от границ, как правило, недоступны строгому математическому анализу. Стратегия, изложенная в [2], предполагала лишь селекцию линейных неотражающих граничных условий, применимость которых для нелинейных задач проверялась почти исключительно на основании проводимых расчетов. В настоящей работе построим новые модификации искусственных граничных условий, обосно-

ванные физическими соображениями. Кроме того, впервые будет предпринято теоретическое исследование поведения пилообразных волн в нелинейных разностных схемах, включая взаимодействие волн с искусственной границей.

Следует отметить одно из альтернативных направлений технологии неотражающих граничных условий, связанное с методом разностных потенциалов [14]. Данная методика учитывает многомерность и дискретный вид уравнений и приводит к нелокальным неотражающим условиям, которые не выражаются явными формулами. Для решения нелинейных газодинамических задач разработаны алгоритмы, в которых затраты на реализацию граничных условий не превосходят затрат на вычисления функций во внутренних узлах. Вместе с тем применение метода разностных потенциалов затруднено в случае существенно нестационарных течений или сильного отклонения граничных значений параметров от постоянного фона. Методика, предлагаемая ниже, несмотря на меньшую точность, способна преодолеть указанные проблемы.

В предстоящем анализе и расчетах будут рассматриваться области, внешние искусственные границы которых образуют прямоугольник. Исследуем постановку условий на правой (выходной) и левой (входной) границах области при дозвуковом течении. Формальное обобщение результатов на верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника не составляет труда. Однако в расчетах, поскольку наиболее серьезные практические проблемы создаются отражением волн именно от левой и правой границ, исключительно на них будут испытываться варианты неотражающих условий.

1. О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В данном разделе выпишем те системы уравнений, которые нам предстоит анализировать и применять для расчетов. Изложение имеет две цели: ввести основные обозначения и дать представление о модельных (простых) и реальных (сложных) постановках задач.

Надежным инструментом моделирования сложных течений вязкого газа, включая существенно дозвуковые, является квазигазодинамическая система уравнений [15]. Она используется в расчетах, представленных в конце статьи; на нее же, а также на другие описания вязкого газа в терминах физических переменных направлен анализ более простых моделей. Вычислительный алгоритм основан на достаточно простой разностной аппроксимации квазигазодинамической системы в виде двухслойной схемы. Практическую важность имеет дискретизация производных по пространству, а производные по времени будет достаточно рассматривать в дифференциальном виде. Не будем также останавливаться на различиях между квазигазодинамической системой и классическими уравнениями Навье–Стокса, ибо, как говорилось во Введении, способ описания вязкости для нас несуществен.

Систему уравнений Эйлера в консервативных переменных для двумерной плоской геометрии запишем в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{Q} – вектор консервативных переменных, \mathbf{F} и \mathbf{G} – потоки по x и y соответственно:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix},$$

$$E = (\gamma - 1)^{-1} p + 0.5 \rho (u^2 + v^2), \quad p = \rho \mathcal{R} T = \rho c^2 / \gamma,$$

ρ – плотность, u , v – компоненты скорости, E – полная энергия, p – давление, γ – показатель адиабаты, \mathcal{R} – газовая постоянная, T – температура, c – скорость звука.

Квазигазодинамическая система имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}. \quad (1.2)$$

В правых частях фигурируют величины

$$\mathbf{R} = \tau \left(\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial y} \right), \quad \mathbf{S} = \tau \left(\frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_y}{\partial y} \right), \quad \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u^3 + 3pu \\ \rho u^2 v + p v \\ (u^2 + p/\rho)(E + p) + p u^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho u^2 v + p v \\ \rho u v^2 + p u \\ u v (E + 2p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} \rho v^2 + p \\ \rho u v^2 + p u \\ \rho v^3 + 3p v \\ (v^2 + p/\rho)(E + p) + p v^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tau = \mu/p$ – среднее время свободного пробега молекулы, связанное с естественной вязкостью Навье–Стокса μ . Система уравнений Навье–Стокса также представима в форме (1.2), но при других выражениях для векторов \mathbf{R} и \mathbf{S} .

Кроме дифференциальных систем уравнений, будем рассматривать уравнения, дискретные по пространству. Пусть сетка прямоугольная, равномерная по каждой пространственной переменной, шаг по x обозначим через h . В тексте используются стандартные обозначения [16] разностных операторов в текущей точке x_i :

$$\varphi_x = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h}, \quad \varphi_{\bar{x}} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}, \quad \varphi_x^\circ = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h},$$

а также вводятся обозначения для более специфических операторов. Дивергентная разностная аппроксимация квазигазодинамической системы (1.2) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\mathbf{F})_x^\circ + (\mathbf{G})_y^\circ = (\tau(\mathbf{R}_x))_{\bar{x}} + (\tau(\mathbf{R}_y))_{\bar{y}}, \quad (1.3)$$

где члены, отвечающие смешанным производным, опущены (эти члены не использовались и в расчетах, приводимых в работе).

Предстоящий анализ систем газодинамических уравнений будет так или иначе опираться на линеаризованную форму этих систем. Пока остановимся на линеаризации дифференциальных уравнений Эйлера. Вначале введем примитивные переменные

$$\mathbf{V} = (\rho \ u \ v \ p)^T.$$

Затем представим параметры в виде сумм фоновых значений и возмущений:

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{V}} = (\bar{\rho} \ \bar{u} \ \bar{v} \ \bar{p})^T, \quad \mathbf{U} = (\rho' \ u' \ v' \ p')^T.$$

Для наших целей будет достаточным рассматривать $\bar{\mathbf{V}} = \text{const}$, т.е. выполнить линеаризацию уравнений на постоянном фоне. Линеаризованные уравнения Эйлера (1.1) приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

где

$$C_x = \begin{pmatrix} u & p & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/p \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & p & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/p \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}.$$

Здесь и в последующих линейных уравнениях и системах все коэффициенты являются функциями невозмущенных параметров \bar{V} .

Система основных газодинамических уравнений дополняется начальными и граничными условиями. Вместо начально-краевых задач будем изучать упрощенные постановки: свойства решений при задании условий только на одной границе – входной или выходной. Предположим, что в расчетную область не приходят никакие возмущения извне. Поэтому любую волну, распространяющуюся от границы в глубь области, следует считать отраженной и противоречащей физике.

Граничное условие представляет собой систему из n граничных уравнений, где $n \leq 4$. Условия как на правой, так и на левой границах для простоты будем считать заданными при $x = 0$, поскольку нам предстоит исследовать каждую границу по отдельности. Для линеаризованных систем уравнений будем рассматривать исключительно линейные однородные граничные условия, которые запишем в общем виде:

$$\mathcal{L}U|_{x=0} = 0. \quad (1.5)$$

Идя от простого к сложному, начнем с изложения теории неотражающих граничных условий для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера.

2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Запишем линеаризованные уравнения Эйлера (1.4) в пространственно-одномерном случае:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Процедура построения неотражающих граничных условий для этой системы целиком опирается на фурье-анализ и разложение решения (2.1) по собственным модам. Способы получения и примеры неотражающих условий для одномерных уравнений Эйлера неоднократно приводились в литературе: наиболее полно – в [12], в контексте двумерного случая. Исчерпывающий анализ проведен в [2]. Ниже представим его основные положения и результаты.

Будем искать решения системы (2.1) в виде гармонических волн:

$$U = \hat{U} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \omega \geq 0, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

где ω – частота, k – волновое число. Все такие решения удовлетворяют уравнению

$$(\omega I - k C_x) \hat{U} = 0 \quad (2.3)$$

(I – единичная матрица), называемому образом Фурье уравнения (2.1) и представляющему собой спектральную задачу. Выпишем полный набор решений задачи (2.3):

$$\begin{aligned} \omega &= (u + c)k, \quad k_1 = \omega/(c + u), \quad \hat{U}_1 = (p \ c \ 0 \ \gamma p)^T, \\ \omega &= (u - c)k, \quad k_2 = -\omega/(c - u), \quad \hat{U}_2 = (p \ -c \ 0 \ \gamma p)^T, \\ \omega &= uk, \quad k_3 = \omega/u, \quad \hat{U}_3 = (p \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ \omega &= uk, \quad k_4 = k_3 = \omega/u, \quad \hat{U}_4 = (0 \ 0 \ c \ 0)^T. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Указанные гармоники описывают правую и левую акустические волны, энтропийную и вихревую волну. При дозвуковом течении ($0 < u < c$) левая акустическая волна (k_2) движется влево, а остальные – вправо.

Наряду с задачей (2.3) рассмотрим задачу на нахождение левых собственных векторов:

$$\check{\mathbf{U}}(\omega I - k C_x) = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Дисперсионные соотношения прежние (2.4), а векторы $\check{\mathbf{U}}_j$ имеют вид

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{U}}_1 &= (0 \ \rho c \ 0 \ 1), \quad \check{\mathbf{U}}_2 = (0 \ -\rho c \ 0 \ 1), \\ \check{\mathbf{U}}_3 &= (c^2 \ 0 \ 0 \ -1), \quad \check{\mathbf{U}}_4 = (0 \ 0 \ 1 \ 0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее рассматривается решение уравнений Эйлера (2.1) вида линейной комбинации гармоник (2.4) с произвольными коэффициентами:

$$\mathbf{U} = a_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \exp\{i\omega t - ik_1 x\} + a_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \exp\{i\omega t - ik_2 x\} + (a_3 \hat{\mathbf{U}}_3 + a_4 \hat{\mathbf{U}}_4) \exp\{i\omega t - ik_3 x\}. \quad (2.7)$$

Такая форма решения сохраняется при задании граничного условия (1.5), но в этом случае коэффициенты удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$V \mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ где } \mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)^T, \quad (2.8)$$

$$V = (\hat{\mathbf{V}}_1 \ \hat{\mathbf{V}}_2 \ \hat{\mathbf{V}}_3 \ \hat{\mathbf{V}}_4), \quad \hat{\mathbf{V}}_j = \hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{\mathbf{U}}_j, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Здесь через $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega)$ обозначен образ Фурье оператора \mathcal{L} для функции (2.2), который является матрицей размерности $n \times 4$. Матрица V также имеет размерность $n \times 4$. Тем самым для всякого линейного однородного граничного условия можно определить соотношения между амплитудами входящих и выходящих волн.

Неотражающим граничным условием является такое уравнение (1.5), для которого система (2.8) имеет решением нулевые коэффициенты при входящих модах (2.7) и произвольные коэффициенты при выходящих модах. На левой границе ко входящим волнам относятся правая акустическая, энтропийная и вихревая волны, а к выходящим – левая акустическая мода. На правой границе – все наоборот.

Формулируется критерий неотражающего граничного условия в терминах образа Фурье оператора \mathcal{L} . Обозначим через \mathcal{T} множество индексов выходящих волн. Условие (1.5) является неотражающим тогда и только тогда, когда при всех ω

$$\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{\mathbf{U}}_j = 0, \quad j \in \mathcal{T}, \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{\mathbf{U}}_j \text{ линейно независимы, } j \notin \mathcal{T}.$$

Для дозвукового выхода ($\mathcal{T} = \{1, 3, 4\}$) критерий (2.9) записывается таким образом:

$$\hat{\mathcal{L}}(k_1, \omega) \hat{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathcal{L}}(k_3, \omega) \hat{\mathbf{U}}_3 = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathcal{L}}(k_4, \omega) \hat{\mathbf{U}}_4 = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathcal{L}}(k_2, \omega) \hat{\mathbf{U}}_2 \neq \mathbf{0} \quad \forall \omega. \quad (2.10)$$

На дозвуковом входе ($\mathcal{T} = \{2\}$) критерий (2.9) приобретает вид

$$\hat{\mathcal{L}}(k_2, \omega) \hat{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{rg } V_{\overline{\mathcal{T}}} = 3, \text{ где } V_{\overline{\mathcal{T}}} = (\hat{\mathbf{V}}_1 \ \hat{\mathbf{V}}_3 \ \hat{\mathbf{V}}_4) \quad \forall \omega. \quad (2.11)$$

Выделяются два основных класса неотражающих граничных условий. Первый из них – алгебраические характеристические условия. Оператор \mathcal{L} не содержит производных, и потому $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) \equiv L$, где L – коэффициентная матрица. Критерий (2.9) удовлетворяется, если матрица L состоит из левых собственных векторов (2.6) с номерами входящих волн:

$$L = \text{col}(\check{\mathbf{U}}_j), \quad j \notin \mathcal{T}.$$

Правое граничное условие есть уравнение

$$\rho c u' - p' = 0, \quad (2.12)$$

а на входе задаются три уравнения:

$$\rho c u' + p' = 0, \quad c^2 \rho' - p' = 0, \quad v' = 0. \quad (2.13)$$

Второй класс неотражающих условий – “скалярные” граничные условия, или условия излучения. Образ Фурье граничного оператора представляет собой дисперсионное соотношение выходящих волн, умноженное на единичную матрицу. На входе имеем $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = (k - k_2)I$, чему отвечает граничное условие

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

На выходе выбираем $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = (k - k_1)(k - k_3)I$, откуда граничное условие есть

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{U} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + (c + 2u) \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial t} + u(c + u) \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Из двух основных классов выводятся новые варианты неотражающих граничных условий. Для этого используются следующие методы и правила.

1. Члены граничных уравнений можно заменять с помощью основной системы уравнений (2.1). Условие остается неотражающим, будучи другой формой записи того же граничного условия.

2. Каждое уравнение граничной системы можно дифференцировать (интегрировать) по t и по x , что равносильно умножению (делению) строк образа граничного оператора $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega)$ на $i\omega$ и на $(-ik)$, а потому оставляет условие неотражающим.

3. Можно строить алгебраические следствия, в частности подсистемы, исходных систем граничных уравнений либо сочетать два разных граничных условия. Пусть \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 – два неотражающих граничных оператора, а L_1 и L_2 – некоторые коэффициентные матрицы. Тогда оператор

$$\mathcal{L} = L_1 \mathcal{L}_1 + L_2 \mathcal{L}_2,$$

будучи использованным в (1.5), не может отражать падающие волны, но априори допускает существование входящих волн с произвольными амплитудами. В формулах критерия (2.9) выполняется равенство столбцов нулю, но не обеспечена линейная независимость остальных столбцов. Последнюю необходимо контролировать при построении нового граничного условия.

Приведем примеры граничных условий, построенных указанными способами. Практический интерес для нас будут представлять прежде всего системы из четырех граничных уравнений. Неотражающее условие на входе получится, если задать три уравнения (2.13) и уравнение (2.14) для давления p' :

$$\rho c u' + p' = 0, \quad c^2 \rho' - p' = 0, \quad v' = 0, \quad \partial p' / \partial t - (c - u) \partial p' / \partial x = 0. \quad (2.16)$$

В дальнейшем нам понадобится дифференциальная форма характеристических граничных условий. Разновидности выходного характеристического условия можно получить, дифференцируя (2.12) по t :

$$\rho c \partial u' / \partial t - \partial p' / \partial t = 0, \quad (2.17)$$

либо по x :

$$\rho c \partial u' / \partial x - \partial p' / \partial x = 0. \quad (2.18)$$

Укажем также общий вид характеристического условия с применением производных по x :

$$\check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad j \notin \mathcal{T}, \quad (2.19)$$

где $\check{\mathbf{U}}_j$ – левые собственные векторы матрицы C_x из (2.5), (2.6).

Один из вариантов граничного условия на выходе строится следующим образом (см. [2]): в условии излучения (2.15) заменяется вторая производная по t с помощью основного уравнения

(2.1), а полученное уравнение интегрируется по x , что приводит к системе граничных уравнений

$$\begin{aligned} \partial p'/\partial t + u \partial p'/\partial x + c^{-1} \partial p'/\partial x &= 0, \quad \partial u'/\partial t + (c + u) \partial u'/\partial x = 0, \\ \partial v'/\partial t + u \partial v'/\partial x &= 0, \quad \partial p'/\partial t + (c + u) \partial p'/\partial x = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, построены разнообразные примеры неотражающих граничных условий для линеаризованных одномерных уравнений Эйлера. Именно они послужат основой искусственных граничных условий для двумерных, вязких, нелинейных и дискретных систем уравнений газовой динамики. Теоретическая база, заложенная в настоящем разделе, также будет многократно использоваться в дальнейшем.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Данная система уравнений обладает тем замечательным свойством, что она, несмотря на нелинейность, допускает точную формулировку неотражающих граничных условий. Хотя класс неотражающих условий здесь не столь широк, как в линейном случае, он позволяет выбрать разновидности граничных уравнений, применимых в более сложных задачах.

Обратимся к нелинейным уравнениям Эйлера (1.1) в одномерной постановке. При условии гладкости решения ($\mathbf{Q} \in C^1$) они представимы в квазилинейной форме

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Матрица C_x здесь та же, что и в линеаризованной системе (1.4), но выражена она через основные переменные. В случае гладкости система (3.1) может быть записана также в характеристической форме (см. [17], [18]):

$$\check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + c_j \check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.2)$$

где $\check{\mathbf{U}}_j$ – левые собственные векторы матрицы C_x , указанные в (2.6), а $c_j = \omega/k_j$ – собственные значения C_x (см. (2.5)).

Имеется очевидное сходство между линейным уравнением (2.1) и квазилинейным (3.1). По тому же принципу дифференциальные граничные системы уравнений (1.5) преобразуются к нелинейному виду: в коэффициентах берутся текущие значения параметров вместо фоновых, а производные возмущений заменяются производными самих параметров. Формально выразим это в виде подстановки

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{V}})\mathbf{U} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{V})\mathbf{V}. \quad (3.3)$$

Выделим класс линейных граничных операторов, которые содержат только первые производные по пространству и/или времени:

$$\mathcal{L}\mathbf{U} = L_t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + L_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \quad (3.4)$$

где L_t, L_x – матрицы. Большинство граничных условий из предыдущего раздела принадлежит этому классу. Оператор вида (3.4) допускает однозначную трактовку преобразования (3.3) как способа получения квазилинейного граничного оператора

$$\mathcal{L}(\mathbf{V})\mathbf{V} = L_t(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + L_x(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Именно таким путем из линейных граничных условий (2.19) выводятся известные нелинейные характеристические условия (см. [3], [5])

$$\check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad j \notin \mathcal{T}. \quad (3.6)$$

Для наглядности выпишем также нелинейные аналоги выходных характеристических условий

(2.17) и (2.18) в скалярной форме:

$$\rho c \partial u / \partial t - \partial p / \partial t = 0, \quad (3.7)$$

$$\rho c \partial u / \partial x - \partial p / \partial x = 0. \quad (3.8)$$

Зададимся следующим вопросом. Пусть дано граничное условие, неотражающее для одномерных линейных уравнений Эйлера. Становится ли оно после преобразования (3.3) неотражающим для нелинейных уравнений? В [3] доказано, что характеристическое условие (3.6) является неотражающим для одномерных нелинейных уравнений Эйлера. Это означает, что (3.6) является тождеством, справедливым в окрестности искусственной границы при условии гладкости решения и отсутствия входящих волн, и одновременно (3.6) обеспечивает отсутствие таких волн. В [19] получен более общий результат: любое граничное условие, неотражающее в случае линейных уравнений Эйлера и содержащее только первые производные возмущений, приводит к неотражающему условию для нелинейных уравнений. Ниже, ввиду важности данного положения, воспроизведем его еще раз.

Теорема. Пусть линейный оператор имеет вид (3.4) и удовлетворяет (2.9). Тогда при соответствующем нелинейном операторе (3.5) граничное условие

$$\mathcal{L}(\mathbf{V})\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

для уравнения (3.1) эквивалентно условию (3.6), если решение $\mathbf{V} \in C^1(\Delta)$, где $\Delta = \{(x, t): -\delta < x < \delta, t > 0\}$.

Доказательство. Выпишем образ оператора (3.4) при подстановке $k = k_j$:

$$\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) = i\omega L_t - ik_j L_x = ik_j(c_j L_t - L_x). \quad (3.9)$$

Обозначим

$$\xi_j = \check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad \eta_j = \check{\mathbf{U}}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \quad (3.10)$$

и запишем (3.2) в виде

$$\xi_j + c_j \eta_j = 0. \quad (3.11)$$

Нормируем левые и правые собственные векторы таким образом, чтобы выполнялось равенство $\check{\mathbf{U}}_j \hat{\mathbf{U}}_k = \delta_{jk}$ (символу Кронекера). Тогда справедливо выражение

$$\sum_j \hat{\mathbf{U}}_j \check{\mathbf{U}}_j = I.$$

С учетом написанного представим (3.5) в виде

$$\mathcal{L}\mathbf{V} = \sum_j (L_t \hat{\mathbf{U}}_j \xi_j + L_x \hat{\mathbf{U}}_j \eta_j). \quad (3.12)$$

Далее, применяя последовательно формулы (3.11) и (3.9), получаем

$$\mathcal{L}\mathbf{V} = -\sum_j (c_j L_t - L_x) \hat{\mathbf{U}}_j \eta_j = i \sum_j k_j^{-1} \hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{\mathbf{U}}_j \eta_j. \quad (3.13)$$

Необходимость в утверждении теоремы доказывается тем, что для неотражающего линейного оператора в сумме (3.13), согласно (2.9), исчезает часть членов и

$$\mathcal{L}\mathbf{V} = i \sum_{j \notin \mathcal{T}} k_j^{-1} \hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{\mathbf{U}}_j \eta_j. \quad (3.14)$$

Поскольку выписанное выражение равно нулю, а векторы, согласно (2.9), линейно независимы, то обращаются в нуль все коэффициенты:

$$\eta_j = 0, \quad j \notin \mathcal{T},$$

что совпадает с (3.6).

Достаточность следует из того, что в сумме (3.13) члены с $j \notin \mathcal{T}$ обращаются в нуль за счет $\eta_j = 0$, а остальные члены – благодаря неотражающему свойству оператора \mathcal{L} . Теорема доказана.

Таким образом, для нелинейных одномерных уравнений Эйлера любые неотражающие условия с первыми производными (3.5) тождественны характеристическим условиям. Однако указанная эквивалентность не имеет места для более сложных систем основных уравнений: двумерных уравнений Эйлера, уравнений динамики вязкого газа. В конечно-разностных моделях совершенно различные результаты дает дискретизация разных вариантов неотражающих граничных условий, что проявляется даже в линейном случае.

Мы рассмотрели линейные неотражающие операторы с первыми производными (3.4), из которых элементарным образом выводятся нелинейные неотражающие граничные условия. Обсудим другие типы линейных граничных операторов. Алгебраические граничные условия, или, шире, граничные уравнения, содержащие алгебраические члены, – в общем случае непредставимы в нелинейной форме. В то же время алгебраические уравнения могут входить в нелинейные неотражающие условия, о чем будет сказано в следующем разделе.

Если линейное граничное условие содержит члены с производными второго порядка и выше, то нелинейное его преобразование (3.3) допускает неоднозначное толкование: подвергать коэффициенты дифференцированию или нет? Четкий алгоритм можно предложить в следующей ситуации. Пусть к неотражающему линейному оператору из класса (3.4) применено дифференцирование по x или t , так что итоговый оператор остался неотражающим. Тогда оператор, неотражающий для нелинейных уравнений Эйлера, получается путем применения к соответствующему оператору (3.5) такого же дифференцирования. Доказывается данное свойство тем, что равенство (3.5) нулю является тождеством, верным в некоторой окрестности границы. В качестве примера приведем уравнение (3.7), продифференцированное по x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho c \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = 0.$$

4. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

При наличии двумерности и вязкости одномерные неотражающие граничные условия перестают быть точными. В нелинейном случае, кроме того, трудно оценить погрешность, вносимую двумя указанными факторами. Практика расчетов показывает неустойчивость ряда постановок граничных условий, безукоризненных с точки зрения предыдущего анализа. В связи с этим некоторые граничные уравнения придется подвергнуть коррекции, руководствуясь физическими соображениями. В то же время желательно, чтобы при возврате к одномерным уравнениям Эйлера такие граничные условия сводились к ранее исследованным образцам.

Условия на входной границе могут быть сформулированы на основе физических предпосылок. Линеаризация получаемых уравнений на постоянном фоне должна приводить к неотражающим условиям для одномерных линейных уравнений Эйлера. Оправдал себя следующий подход. Поскольку набегающий поток изэнтропический и безвихревой, в одномерном приближении можно задать на левой границе значения энтропии, правого инварианта Римана и вертикальной скорости, взятые с бесконечности (для любой величины ϕ обозначим их через ϕ_0):

$$p/\rho^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma, \quad u + \frac{2}{\gamma-1}c = u_0 + \frac{2}{\gamma-1}c_0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} - (c-u)\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Линеаризация выписанных уравнений и последующие алгебраические преобразования дают одномерное неотражающее условие (2.16).

На выходной границе постановка граничных условий сталкивается с трудностями. В этой области течения не существует ни одного глобального алгебраического инварианта нелинейных уравнений Эйлера [17], в связи с чем любое алгебраическое уравнение делает граничное условие отражающим. При задании на выходной границе чисто дифференциальных граничных условий, в частности характеристических, наблюдается медленный дрейф (блуждание) газодинамических параметров. Данный процесс искажает физическую картину течения и может вести к неустойчивости. Именно по этой причине в [10], [11] отдано предпочтение алгебраическим выходным условиям, которые в линейном приближении не отражают акустические волны, но отражают

энтропийные и вихревые волны. Ниже мы выберем в некотором смысле компромиссный способ задания граничных условий.

Небезынтересен вопрос: чем вызван плавный дрейф значений газодинамических параметров при моделировании течений в искусственно ограниченных областях? Дать обоснованный ответ на него едва ли возможно, не зная точных решений начально-краевых задач для двумерных нелинейных уравнений динамики вязкого газа. Один из факторов, способствующих данному явлению, будет рассмотрен ниже, и связан он не с дифференциальной, а с конечно-разностной формулировкой основных уравнений и граничных условий.

При низких скоростях течения ($u \ll c$) проблема неустойчивости особо актуальна. Горизонтальная скорость u , в отличие от термодинамических параметров, может изменять свою величину в несколько раз или становиться отрицательной. Вполне очевиден факт, что незначительное изменение термодинамических параметров компенсируется изменением скорости, сопоставимым с ее масштабом. Поэтому особое внимание следует уделить влиянию граничных уравнений на поведение скорости, а также было бы желательно этим поведением управлять.

Обратимся к граничному условию (2.20), которое представим в нелинейной форме:

$$\begin{aligned} \partial p / \partial t + u \partial p / \partial x + c^{-1} \partial p / \partial x &= 0, \quad \partial u / \partial t + (c + u) \partial u / \partial x = 0, \\ \partial v / \partial t + u \partial v / \partial x &= 0, \quad \partial p / \partial t + (c + u) \partial p / \partial x = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Воспользуемся тем, что система (4.2) содержит уравнение, замкнутое относительно продольной скорости u . В его правую часть добавим релаксационный член:

$$\partial u / \partial t + (c + u) \partial u / \partial x = \alpha(u_0 - u), \quad (4.3)$$

где u_0 – фиксированное значение скорости, α – параметр, который подбирается из тех или иных соображений. Аналогичные граничные уравнения предлагались ранее в [4], [6]:

$$\partial p / \partial t - \rho c \partial u / \partial t = \alpha(p_0 - p). \quad (4.4)$$

Данное выражение представляет собой модификацию характеристического условия (3.7). В [2] применялось граничное уравнение для скорости вида

$$\partial u / \partial x = \beta(u_0 - u). \quad (4.5)$$

При расчетах задач существенно дозвукового обтекания граничное условие (4.4) непригодно. Два других выходных граничных условия – как (4.3), так и (4.5) – в сочетании с неизменными остальными условиями (4.2) обеспечивают установление решения, правдоподобного с физической точки зрения. Однако следует отметить, что каждое из граничных уравнений (4.3)–(4.5) делает правое граничное условие отражающим даже в случае одномерных уравнений Эйлера.

Обсудим проблему выбора параметров u_0 , α и β в граничных уравнениях (4.3) и (4.5). Эти величины могут быть как константами, так и функциями, определенными в точках выходной границы. В случае $u_0 = \text{const}$ значение u_0 , очевидно, следует положить равным скорости невозмущенного потока. Процедура подбора остальных параметров не столь тривиальна.

Рассмотрим поведение скорости в типичных задачах обтекания. Так, в ламинарном стационарном следе позади симметричного тела, обтекаемого несжимаемой жидкостью, справедлива следующая асимптотическая формула (см. [20]):

$$\frac{u_0 - u}{u_0} = C \sqrt{L/x} \exp \left\{ -\frac{u_0 y^2}{4\nu x} \right\} + O(L/x), \quad (4.6)$$

где L – длина тела, $\nu = \mu/\rho$, а константа C зависит от формы тела. При низких числах Маха сжимаемостью газа в следе можно пренебречь. Выражение (4.6) (с отброшенным остаточным членом) позволяет найти функцию $u(y)$ на выходной границе. Но следует иметь в виду, что эти значения u не совпадают с точным решением задачи, тем более нестационарной. Кроме того, всякое условие Дирихле, поставленное не для характеристического инварианта, приводит к полному отражению малых возмущений от границы.

Следствием формулы (4.6) является выражение, более полезное для наших целей:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0 - u}{2x} \left(1 - \frac{u_0 y^2}{2\nu x} \right). \quad (4.7)$$

Равенство (4.7) замечательно тем, что оно не содержит постоянную C , а следовательно, более универсально, чем (4.6). С другой стороны, (4.7) имеет форму (4.5), откуда сразу определяется величина $\beta(y)$ или же $\alpha(y)$ в (4.3). Между тем, как показали расчеты, такой способ задания параметров α и β ведет к потере устойчивости. Действительно, выражение в круглых скобках в (4.7) не сохраняет знак: оно положительно при достаточно малых y (в ядре следа) и отрицательно при больших y (на периферии). При отрицательных α или β в уравнениях (4.3) и (4.5) вместо релаксации имеет место нарастание отклонения u .

Выражение (4.7) может служить не для точного задания параметров в граничных условиях (4.3) и (4.5), а скорее для определения порядка их величины. Например, в (4.5) разумно положить константу

$$\beta = \frac{1}{4x}.$$

Существует другой способ применения формулы (4.6). Как говорилось выше, в граничных условиях (4.3), (4.5) можно использовать переменную величину $u_0(y)$. Возьмем в качестве этой функции значения u , получаемые из выражения (4.6) при фиксированном x , переобозначив скорость внешнего потока через u_∞ :

$$\frac{u_\infty - u_0(y)}{u_\infty} = C \sqrt{L/x} \exp \left\{ -\frac{u_\infty y^2}{4\nu x} \right\}. \quad (4.8)$$

Величину u_0 , найденную из (4.8), подставим в граничные уравнения (4.3) и (4.5). Данный подход во всех отношениях более корректен, чем непосредственное задание $u = u_0(y)$ на границе. Вместе с тем определение параметров α и β в таком случае затрудняется и, по-видимому, вынуждено носить эмпирический характер.

Остановимся на еще одном варианте граничного условия для продольной скорости, который можно трактовать как специальный метод задания величины α в уравнении (4.3):

$$\partial u / \partial t + (c + u) \partial u / \partial x = \alpha_1 |u_0 - u| (u_0 - u). \quad (4.9)$$

Данное выражение условимся называть уравнением квадратичной релаксации. Граничное условие (4.9) обладает рядом преимуществ перед (4.3) и (4.5). Во-первых, при линеаризации уравнения (4.9) на постоянном фоне правая часть исчезает:

$$\partial u' / \partial t + (c + u) \partial u' / \partial x = 0.$$

Это выражение совпадает с соответствующим уравнением из граничного условия (2.20), неотражающего для одномерных уравнений Эйлера (2.1). Во-вторых, правая часть (4.9), будучи “терпимой” к малым отклонениям u от u_0 , налагает большие “штрафы” на значительные изменения скорости. Разумеется, условие (4.9) предполагает правильный выбор величины u_0 и параметра α_1 .

Таким образом, из широкого набора граничных условий, неотражающих для линейных одномерных уравнений Эйлера, выбраны варианты и адаптированы к нелинейным дифференциальным задачам. В более простых случаях дано математическое обоснование выполненной процедуры, в более сложных приведены физические аргументы. Следующая проблема состоит в том, что для численного моделирования используются дискретные постановки задач. Чтобы выявить особенности поведения решений разностных задач по сравнению с дифференциальными, требуется достаточно обширное исследование.

5. РАЗНОСТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть система дифференциальных уравнений аппроксимируется некоторой разностной схемой. Как упоминалось выше, в большинстве случаев для корректной постановки разностной задачи необходимо большее количество граничных уравнений, чем требуется для исходной дифференциальной задачи. Кроме того, таким разностным уравнениям присущи дополнительные ложные волны. Наиболее распространены схемы с пилообразными колебаниями, т.е. с пример-

ным чередованием значений функций в соседних узлах. Граничные условия для разностных схем должны обеспечивать существование единственного решения, минимизировать отражение физических волн и подавлять паразитные волны.

Будем исследовать системы уравнений, разностные по пространству и дифференциальные по времени. Начнем с линеаризованных разностных схем. Они допускают строгий анализ гармонических волн и их отражений. Трудности могут носить только алгебраический характер. Свойства линейных волн во многом переносятся на нелинейный случай. Принципы исследования нелинейных систем будут другими, но они должны опираться на более простые линейные подходы.

Рассмотрим элементарный пример схемы, которой свойственны ложные волны и для которой требуется дополнительное граничное условие. Пусть уравнение переноса

$$\partial u / \partial t + c_0 \partial u / \partial x = 0 \quad (5.1)$$

аппроксимируется с помощью центрально-разностной схемы

$$\partial u / \partial t + c_0 u_{\bar{x}} = 0. \quad (5.2)$$

Схема использует трехточечный шаблон и нуждается в граничном условии на правом конце области.

Образ Фурье (5.2) представляет собой дисперсионное уравнение

$$\omega - c_0 \sin(kh)/h = 0,$$

имеющее два корня относительно k :

$$k_1 = (1/h) \arcsin r, \quad k_2 = \pi/h - k_1, \quad (5.3)$$

где $r = \omega h / c_0$. Уравнению (5.2) удовлетворяют гармоники двух видов:

$$u_1(x, t) = \exp\{i\omega t - ik_1 x\}, \quad u_2(x, t) = \exp\{i\omega t - ik_2 x\}. \quad (5.4)$$

Как следует из (5.3), при невысоких частотах ω функция u_1 близка к физической волне, а u_2 является паразитной пространственной коротковолновой осцилляцией, которая имеет пилообразный вид: $u_2(x_l, t) = (-1)^l u_1(-x_l, t)$. Общее гармоническое решение (5.2) удобно представить в форме

$$u(x, t) = u_1(x, t) + K u_2(x, t),$$

где K назовем коэффициентом отражения.

Теперь обсудим постановку условия на правой границе. Оно должно подавить паразитную волну u_2 . Граничное условие, обозначаемое как $\mathcal{L}u = 0$, определяет коэффициент отражения по формуле

$$K = -\frac{\hat{\mathcal{L}}(k_1, \omega)}{\hat{\mathcal{L}}(k_2, \omega)}, \quad (5.5)$$

где $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega)$ – образ Фурье оператора \mathcal{L} .

Рассмотрим в качестве правых граничных условий для схемы (5.2) различные варианты аппроксимации уравнения переноса (5.1), не совпадающие с (5.2). Будем выписывать граничные уравнения, их образы Фурье и главные члены разложения коэффициента K из (5.5) по степеням r . Первый пример – аппроксимация (5.1) направленной разностью (с первым порядком):

$$\partial u / \partial t + c_0 u_{\bar{x}} = 0, \quad \hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = \omega - \frac{c_0}{h} \{ \sin(kh) + i[1 - \cos(kh)] \}, \quad K \approx -r^2/4. \quad (5.6)$$

Два следующих уравнения приближают (5.1) со вторым порядком. Один способ – аппроксимация в полужелой точке:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_l + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{l-1} \right] + c_0 u_{\bar{x}} = 0, \quad \hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = \omega \cos \frac{kh}{2} - \frac{2c_0}{h} \sin \frac{kh}{2}, \quad K \approx -r^3/8. \quad (5.7)$$

Другой пример – использование трехточечной направленной разности:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + c_0 u_{\bar{x}} &= 0, \quad \varphi_{\bar{x}} = (3\varphi_l - 4\varphi_{l-1} + \varphi_{l-2}) / (2h), \\ \hat{\mathcal{L}}(k, \omega) &= \omega - \frac{c_0}{h} \{ \sin(kh)[2 - \cos(kh)] + i[1 - \cos(kh)]^2 \}, \quad K \approx ir^3/8. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Можно и дальше повышать порядок аппроксимации. При этом следует приближать не исходное дифференциальное уравнение (5.1), а его дискретный аналог (5.2). Один из путей – построение пространственного оператора на расширенном шаблоне по примеру [13]. Рассмотрим аппроксимацию $O(h^3)$ вида

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + c_0 u_{\bar{x}} &= 0, \quad \varphi_{\bar{x}} = (4\varphi_l - 7\varphi_{l-1} + 4\varphi_{l-2} - \varphi_{l-3}) / (2h), \\ \hat{\mathcal{L}}(k, \omega) &= \omega - \frac{ic_0}{2h} (4 - 7e^{ikh} + 4e^{2ikh} - e^{3ikh}), \quad K \approx -r^4/16. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Вместо уравнения переноса (5.1) возьмем за основу его следствие при дифференцировании по x , одна из аппроксимаций $O(h^2)$ которого дает

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\bar{x}} + c_0 u_{\bar{x}x} = 0, \quad \hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = \omega \frac{\sin(kh)}{h} - \frac{4c_0}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}, \quad K \approx -r^4/16. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) задается в предграничной точке и решается относительно значения u в правом узле шаблона.

Таким образом, формулы (5.6)–(5.9) показывают, что повышение порядка аппроксимации основного уравнения на гладких решениях приводит к такому же увеличению порядка малости амплитуд пилообразных решений. Одновременно граничный оператор \mathcal{L} не должен быть близким к оператору центральной разности на осцилляции u_2 из (5.4). Определенный выигрыш по сравнению с предыдущим дает удачный выбор разностного оператора второго порядка (5.10), при котором аппроксимация $O(h^2)$ обеспечивает отражение $O(r^4)$.

Перейдем к рассмотрению линеаризованных одномерных уравнений Эйлера (2.1). Пусть они аппроксимируются схемой с центральными разностями, аналогичной (5.2):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \mathbf{U}_{\bar{x}} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Как правило, для дискретизации (5.11) по времени используется схема с весом $1/2$ (Кранка–Николсона). Образом Фурье уравнения (5.11) для (2.2) служит спектральная задача

$$(\omega I - \tilde{k} C_x) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

где

$$\tilde{k} = \sin(kh)/h. \quad (5.13)$$

Спектральная задача (5.12) очевидным образом сводится к (2.3), отвечающей дифференциальным уравнениям Эйлера. Поэтому набор параметров \tilde{k}_j совпадает с волновыми числами k_j из (2.4), а собственные векторы $\hat{\mathbf{U}}_j$ в обоих случаях одни и те же.

Система (5.11) задает следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= \frac{\omega}{c+u}, \quad k_{11} = \frac{1}{h} \arcsin r_+, \quad k_{12} = \frac{\pi}{h} - k_{11}, \\ \tilde{k}_2 &= -\frac{\omega}{c-u}, \quad k_{21} = -\frac{1}{h} \arcsin r_-, \quad k_{22} = -\frac{\pi}{h} - k_{21}, \\ \tilde{k}_3 &= \omega/u, \quad k_{31} = \frac{1}{h} \arcsin \frac{\omega h}{u}, \quad k_{32} = \frac{\pi}{h} - k_{31}, \quad k_{41} = k_{31}, \quad k_{42} = k_{32}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь и ниже фигурируют безразмерные параметры

$$r = \omega h/c, \quad r_+ = \omega h/(c+u), \quad r_- = \omega h/(c-u). \quad (5.15)$$

Из (5.14) следует, что каждую из физических волн (k_{j1}) сопровождает пилообразная осцилляция (k_{j2}). Общее гармоническое решение (5.11) имеет следующий вид:

$$U = \sum_{j=1}^4 \hat{U}_j [a_{j1} \exp\{i\omega t - ik_{j1}x\} + a_{j2} \exp\{i\omega t - ik_{j2}x\}]. \quad (5.16)$$

Пусть для разностной схемы (5.11) задано граничное условие (1.5), которое в данном случае должно всегда состоять из четырех уравнений. Тогда коэффициенты a_{jm} в (5.16) удовлетворяют системе уравнений, аналогичной (2.8):

$$V^\phi \mathbf{a}^\phi + V^h \mathbf{a}^h = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\phi &= (a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41})^T, \quad \mathbf{a}^h = (a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42})^T, \\ V^\phi &= (\hat{V}_1^\phi \ \hat{V}_2^\phi \ \hat{V}_3^\phi \ \hat{V}_4^\phi), \quad V^h = (\hat{V}_1^h \ \hat{V}_2^h \ \hat{V}_3^h \ \hat{V}_4^h), \\ \hat{V}_j^\phi &= \hat{\mathcal{L}}(k_{j1}, \omega) \hat{U}_j, \quad \hat{V}_j^h = \hat{\mathcal{L}}(k_{j2}, \omega) \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь V^ϕ и V^h являются матрицами 4×4 .

Для типичных граничных условий система (5.17) такова, что амплитуды коротковолновых осцилляций \mathbf{a}^h однозначно выражаются через амплитуды физических мод \mathbf{a}^ϕ . Вопрос корректности постановки граничного условия на входе и на выходе подробно обсуждается в [2].

Рассмотрим способы применения неотражающих граничных условий для одномерных уравнений Эйлера (разд. 2) к разностной схеме (5.11). Если граничный оператор алгебраический ($\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) \equiv L$) или не содержит производных по пространству ($\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = \mathcal{L}'(\omega)$), он не может отличать физические моды (k_{j1}) от ложных (k_{j2}). Действительно, в этом случае, согласно (5.18), столбцы $\hat{V}_j^\phi = \hat{V}_j^h$, а потому в системе (5.17) матрицы $V^\phi = V^h$ и она представима в виде

$$V^\phi (\mathbf{a}^\phi + \mathbf{a}^h) = \mathbf{0}.$$

Если решение единственно, то амплитуды физических и паразитных мод одинаковы:

$$a_{j2} = -a_{j1}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Следовательно, граничное условие должно содержать хотя бы одно уравнение с пространственными разностными производными.

Если в уравнениях граничной системы все производные $\partial \phi / \partial x$ заменяются центральными разностями $\phi_{\bar{x}}$, то такое граничное условие также неприемлемо. В данном случае справедливо выражение $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega) = \mathcal{L}''(\tilde{k}, \omega)$ (см. (5.13)). Поскольку $\tilde{k}(k_{j1}) = \tilde{k}(k_{j2})$, опять в (5.18) имеем $\hat{V}_j^\phi = \hat{V}_j^h$ и возвращаемся к предыдущему результату.

Приведем примеры корректной адаптации граничных условий к дискретному случаю. Выпишем аппроксимацию выходного условия (2.20) с применением оператора $\phi_{\bar{x}}$ из (5.8):

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u p'_{\bar{x}} + \frac{1}{c} p'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + (c+u) u'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + u v'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} + (c+u) p'_{\bar{x}} = 0. \quad (5.19)$$

Система (5.17) для (5.19) дает соотношения между амплитудами волн (с точностью до главных членов разложения по степеням r из (5.15)):

$$a_{12} = \frac{i}{8} r_+^3 a_{11}, \quad a_{22} = -\frac{i}{2c-u} r_+ a_{21}, \quad a_{32} = \frac{i}{8} M^{-3} r^3 a_{31}, \quad a_{42} = \frac{i}{8} M^{-3} r^3 a_{41}, \quad (5.20)$$

где $M = u/c$ – число Маха. Амплитуды паразитных мод связаны только с амплитудами соответствующих физических мод, причем выходящие физические волны по амплитудам a_{11} , a_{31} , a_{41} значительно превосходят сопутствующие осцилляции.

На входе рассмотрим сочетание алгебраических уравнений с одним разностным – аппроксимацию системы (2.16):

$$\rho c u' + p' = 0, \quad c^2 p' - p' = 0, \quad v' = 0, \quad \partial p' / \partial t - (c - u) p'_{x*} = 0, \quad (5.21)$$

где ϕ_{x*} – зеркальный аналог оператора $\phi_{\bar{x}}$ из (5.8). Решение системы (5.17), с точностью до главных членов (5.15), есть

$$a_{12} = -a_{11}, \quad a_{22} = a_{11} + \frac{i}{8} r^3 a_{21}, \quad a_{32} = -a_{31}, \quad a_{42} = -a_{41}.$$

Амплитуда выходящей акустической моды a_{21} велика по сравнению с амплитудами как входящих, так и паразитных мод.

Таковы свойства граничных условий, неотражающих для линеаризованных одномерных уравнений Эйлера и адаптированных к дискретному случаю. Отметим, что при использовании неравномерных сеток проведенный анализ теряет силу. Вместе с тем для квазиравномерной сетки (см. [16]) результаты вполне достоверны, но проверяется данный факт только путем вычислительного эксперимента.

6. РАЗНОСТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

В нелинейном случае фурье-анализ становится неприменимым. Исследование возможно провести только при ряде допущений, и в любом случае оно будет носить приблизительный характер. В данном разделе рассматриваются два подхода: первый, более строгий, относится к одномерным схемам, второй – к более общим системам уравнений. При этом первый метод дает достаточно полный результат, а второй позволяет получить лишь отдельные выводы.

Исследуем свойства граничных условий, когда они применяются к простейшей нелинейной системе разностных уравнений – аппроксимации одномерных уравнений Эйлера (2.1) вида (1.3):

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\mathbf{F})_{\bar{x}} = \mathbf{0}. \quad (6.1)$$

Более того, начнем мы с примеров граничных условий для скалярного квазилинейного уравнения переноса. Выберем для него, по образцу системы (6.1), дивергентную аппроксимацию с центральными разностями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2)_{\bar{x}} = 0. \quad (6.2)$$

Будем считать, что имеет место свойство $u > u_* > 0$ и решение не испытывает “градиентную катастрофу”.

Обратимся к типичному поведению решений разностных задач дозвуковой газовой динамики. Как линейный анализ, так и результаты расчетов, приводимые в [2] и в конце настоящей статьи, показывают следующую картину. На фоне медленно меняющегося основного течения присутствуют пилообразные пространственные осцилляции, амплитуда которых также изменяется по-степенно. В связи с этим рассмотрим решение скалярного разностного уравнения (6.2) в виде

$$u = \bar{u}(x_b, t) + (-1)^l a(x_b, t), \quad |a| \ll |\bar{u}|, \quad (6.3)$$

где функции непрерывных аргументов $\bar{u}(x, t)$ и $a(x, t)$ – гладкие и плавно меняющиеся. Между амплитудой a и поведением фоновой функции \bar{u} имеются соотношения, которые следуют из сочетания основного уравнения с тем или иным правым граничным условием. Для дальнейшего анализа достаточно предположить, что $|a| \leq O(h)$. Это подтверждается практикой газодинамических расчетов и линейной теорией [21] даже при постановке безусловно отражающих граничных условий. Действительный же порядок величины амплитуды будет определен вследствие математической процедуры.

Выясним, что дает подстановка функции (6.3) в уравнение (6.2) независимо от краевого условия. Учитывая гладкость функций \bar{u} и a , в каждой точке $x = x_l$ получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2)_{\bar{x}} + (-1)^l \frac{\partial a}{\partial t} - (-1)^l (\bar{u}a)_{\bar{x}} + O(a^2) = \\ & = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) + (-1)^l \left(\frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} \right) + O(h^4 + ah^2 + a^2) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в обеих парах квадратных скобок стоят гладкие функции, все выражение не может изменяться с чередованием знака $(-1)^l$. Следовательно, выполняются два равенства:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = O(h^4 + ah^2 + a^2), \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} = O(h^4 + ah^2 + a^2). \quad (6.5)$$

Уравнения (6.4) и (6.5) справедливы в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, находящейся в пределах расчетной области.

Рассмотрим теперь граничное условие, заданное при $x = x_N$. В этой фиксированной точке свяжем значение амплитуды a с динамикой изменения функции \bar{u} . Исследуем аналоги тех граничных условий, которые применялись в предыдущем разделе для линейного уравнения (5.2).

Условие

$$\partial u / \partial t + uu_{\bar{x}} = 0 \quad (6.6)$$

отвечает (5.6) и приближает квазилинейное уравнение переноса с первым порядком. Подставляя (6.3) в (6.6) и используя разложение Тейлора, получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{h}{2} \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + (-1)^N \left(\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{2}{h} \bar{u} a - \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} \right) = O(h^2 + a^2).$$

В данном выражении заменим производные по t с помощью равенств (6.4) и (6.5):

$$-\frac{h}{2} \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + (-1)^N \left(\frac{2}{h} \bar{u} a + 2a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = O(h^2 + a^2).$$

Отсюда

$$a = (-1)^N \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + O(h^3). \quad (6.7)$$

Аппроксимация нелинейного уравнения (6.2) вида (5.8) дает граничное условие

$$\partial u / \partial t + uu_{\bar{x}} = 0. \quad (6.8)$$

С помощью тех же формул (6.4) и (6.5) получаем следующую асимптотику амплитуды осцилляции из (6.3):

$$-\frac{h^2}{2} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + (-1)^N \left(\frac{4}{h} \bar{u} a + 2a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 2\bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} \right) = O(h^3 + ah + a^2),$$

или

$$a = (-1)^N \left(\frac{h^3}{8} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{h^3}{8\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) + O(h^4). \quad (6.9)$$

Нелинейный аналог граничного условия (5.7) имеет вид

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_l + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{l-1} \right] + \frac{1}{2} (u^2)_{\bar{x}} = 0. \quad (6.10)$$

Анализ этого уравнения несколько сложнее предыдущих. Подстановка (6.3) в (6.10) и последующее разложение Тейлора приводят к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{h}{2} \left[\bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right] + \frac{h^2}{6} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + \\ + (-1)^N \left(\frac{2}{h} \bar{u} a - a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} \right) = O(h^3 + ah + a^2). \end{aligned}$$

Чтобы уничтожить лишние члены, потребуются не только основные уравнения (6.4) и (6.5), но и результаты их дифференцирования по x . В итоге получаем

$$a = (-1)^N \left(\frac{h^3}{8} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{3h^3}{8\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) + O(h^4). \quad (6.11)$$

Аппроксимация уравнения (6.2) на широком шаблоне по образцу (5.9) выглядит как

$$\partial u / \partial t + uu_{\bar{x}} = 0. \quad (6.12)$$

Подстановка сюда (6.3) и уравнений (6.4), (6.5) приводит к выражению

$$a = (-1)^N \frac{h^3}{16\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + O(h^4). \quad (6.13)$$

Перейдем к граничному условию, аналогичному (5.10), т.е. к дискретизации квазилинейного уравнения переноса, продифференцированного по x :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u_{\bar{x}} + \frac{1}{2} (u^2)_{\bar{x}x} \right)_{N-1} = 0. \quad (6.14)$$

После подстановки (6.3), разложения Тейлора, использования формул (6.4), (6.5) и их дифференциальных следствий получим следующее выражение для амплитуды осцилляций:

$$a = (-1)^N \left[\frac{h^4}{16} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} + \frac{h^4}{4\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + \frac{3h^4}{16\bar{u}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + O(h^6). \quad (6.15)$$

Достаточно высокий порядок малости амплитуды a достигнут благодаря правильному способу нелинейной адаптации неотражающего граничного условия, почерпнутому из разд. 3: от всего граничного уравнения взята производная по x . Если следовать принципу замороженных коэффициентов, то соответствующее граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\bar{x}} + uu_{\bar{x}x} = 0$$

дает, в противоположность (6.14), неприемлемо большую амплитуду осцилляций

$$a = (-1)^N \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + O(h^4).$$

Итак, для ряда граничных условий к квазилинейному уравнению переноса получены приближенные выражения для величины амплитуды осцилляций a в граничной точке $x = x_N$. Насколько сохраняются эти оценки внутри расчетной области, позволяет судить уравнение (6.5). Оно описывает перенос значения a , но в противоположную сторону: от правой границы внутрь области. В процессе переноса это значение постепенно меняется за счет градиента \bar{u} , но, по-видимому, порядок величины a не может резко возрасти.

Мы нашли зависимость амплитуды паразитных пилообразных волн от поведения сглаженного (фонового) решения при задании различных граничных условий для нелинейного разностного уравнения (6.2). Есть общее между этими амплитудами и коэффициентами отражения, получен-

ными для линейного уравнения (5.2). Сравним величину K и первый член правой части выражения для a в следующих парах формул: (5.6) и (6.7); (5.7) и (6.11); (5.8) и (6.9); (5.10) и (6.15). При задании соответствия

$$r^q \longleftrightarrow h^q \partial^q \bar{u} / \partial x^q$$

во всех случаях указанные выражения совпадают по абсолютной величине. Однако всюду, кроме формулы (6.7), относящейся к уравнению первого порядка аппроксимации (6.6), появляются дополнительные члены одного порядка малости с основным членом. Добавочные члены суть произведения функции \bar{u} и ее производных, и они, очевидно, происходят от нелинейности модели. Таким образом, если граничное условие приближает основное уравнение со вторым порядком малости, то степень отражения волн одинакова по порядку величины с линейным случаем, но отличается количественно.

Эффект нелинейности начинает преобладать при использовании аппроксимаций третьего и более высоких порядков по h . В формуле (6.13) главный член имеет меньший порядок малости, чем в аналогичном выражении из (5.9). Заметим, что квазилинейное уравнение переноса (6.2) дает такие возможности выбора способа дискретизации, какие не свойственны системе (6.1). Схема (6.1) записана в дивергентной форме, тогда как дифференциальные неотражающие граничные условия представимы только в квазилинейном виде. Проведенный выше анализ показывает, что для схемы, аппроксимирующей основные уравнения с порядком h^2 , нет смысла строить аппроксимации граничных условий более высокого порядка. Возможно, для схем большей точности (например, компактной схемы $O(h^4)$ из [22], использовавшейся в [13] для линеаризованных уравнений Эйлера) целесообразно применять более точные граничные условия.

Граничные условия со вторыми производными дают не вполне ясные перспективы. Несмотря на успешный результат (6.15) для уравнения (6.14), дивергентная форма которого совпадает с квазилинейной, на практике могут проявиться эффекты, не учтенные в настоящем анализе. Вычислительный опыт автора свидетельствует о том, что такие граничные условия надежны в применении, но по свойствам решений они не превосходят лучших вариантов граничных уравнений с первыми производными, причем эти решения близки друг к другу.

Аналогичному исследованию можно подвергнуть схему для нелинейных уравнений Эйлера (6.1) и граничные условия для нее. Анализ систем уравнений значительно сложнее, чем скалярного случая, еще и потому, что на границе присутствуют входящие физические волны. По этой причине оценки будут более грубыми, чем для схемы (6.2).

Рассмотрим решение уравнения (6.1) в виде

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}}(x, t) + (-1)^l \mathbf{U}^h(x, t), \quad (6.16)$$

где векторы \mathbf{Q} и \mathbf{F} выражаются через \mathbf{V} с учетом данного разложения. Обозначим порядок величины \mathbf{U}^h через a . При условии гладкости функций $\bar{\mathbf{V}}$ и \mathbf{U}^h из основного уравнения (6.1) получаем два уравнения:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial x} = O(h^2 + a^2), \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} - C_x \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} - M_x \mathbf{U}^h = O(h^2 + a^2). \quad (6.18)$$

Здесь матрица C_x , как и все последующие матрицы и коэффициенты, зависит от фоновых величин $\bar{\mathbf{V}}$. Матрица M_x содержит также первые производные от $\bar{\mathbf{V}}$.

Пусть уравнение (6.1) дополнено граничным условием. Рассмотрим достаточно узкий класс граничных систем уравнений: квазилинейные, содержащие только первые производные (аналогично (3.5)), причем с одинаковой аппроксимацией всех производных по x . На правой границе это уравнения общего вида

$$\mathcal{L}(\mathbf{V})\mathbf{V} \equiv L_t(\mathbf{V})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + L_x(\mathbf{V})\mathbf{V}_{\bar{x}} = \mathbf{0}, \quad (6.19)$$

с оператором $\Phi_{\bar{x}}$ из (5.8). Подставляя выражение (6.16) в (6.19), приходим к соотношению

$$L_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + L_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + (-1)^N \left(\frac{4}{h} L_x U^h + N U^h + L_t \frac{\partial U^h}{\partial t} - 3 L_x \frac{\partial U^h}{\partial x} \right) = O(h^2 + a^2). \quad (6.20)$$

Матрица N выражается не только через \bar{V} , но и через его первые производные. Цель дальнейшего анализа будет состоять в оценке порядка величины U^h в случае, когда (6.19) аппроксимирует неотражающее граничное условие.

Вначале преобразуем члены (6.20), не зависящие от U^h . Рассуждения будут аналогичны доказательству теоремы из разд. 3. Интересующее нас выражение таково:

$$\mathcal{L}_0(\bar{V})\bar{V} = L_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + L_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \sum_j (L_t \hat{U}_j \xi_j + L_x \hat{U}_j \eta_j). \quad (6.21)$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулами (3.10) и (3.12). Из уравнения (6.17) вытекает (ср. (3.11)), что

$$\xi_j + c_j \eta_j = O(h^2 + a^2).$$

Учитывая это, перепишем (6.21) по аналогии с (3.13):

$$\mathcal{L}_0(\bar{V})\bar{V} = - \sum_j (c_j L_t - L_x) \hat{U}_j \eta_j + O(h^2 + a^2). \quad (6.22)$$

Теперь предположим, что \mathcal{L}_0 как линейный оператор (3.4) является неотражающим. Тогда (см. (3.14)) сумма в (6.22) берется только по индексам входящих волн:

$$\mathcal{L}_0(\bar{V})\bar{V} = - \sum_{j \notin \mathcal{T}} (c_j L_t - L_x) \hat{U}_j \eta_j + O(h^2 + a^2). \quad (6.23)$$

Обратимся к членам (6.20), содержащим U^h . Воспользуемся уравнением (6.18), которое ключевой роли здесь не играет, но позволяет унифицировать выражение (6.20), стоящее в квадратных скобках. Имеем

$$L_t \frac{\partial U^h}{\partial t} - 3 L_x \frac{\partial U^h}{\partial x} = (L_t C_x - 3 L_x) \frac{\partial U^h}{\partial x} + M_x U^h + O(h^2 + a^2). \quad (6.24)$$

Вернемся к уравнению (6.20). Преобразуем его, учитывая (6.23), (6.24) и вводя обозначения матриц

$$-4H = L_t C_x - 3 L_x, \quad 4M = N + M_x,$$

откуда

$$(L_x + hM)U^h - hH \frac{\partial U^h}{\partial x} = (-1)^N \frac{h}{4} \sum_{j \notin \mathcal{T}} (c_j L_t - L_x) \hat{U}_j \eta_j + O(h^3 + a^2 h). \quad (6.25)$$

Амплитуды осцилляций связаны с поведением входящих физических волн.

Предъявим к граничному оператору дополнительное требование: пусть матрица L_x невырожденная, т.е. существует обратная ей матрица L_x^{-1} . Тогда при достаточно малых h (на практике шаг h должен быть много меньше характерной длины изменения газодинамических параметров) в (6.25) матрица при U^h обратима. Ввиду того, что $|U^h| \leq O(h)$, получаем:

$$U^h - [h + O(h^2)] L_x^{-1} H \frac{\partial U^h}{\partial x} = (-1)^N \left[\frac{h}{4} + O(h^2) \right] \sum_{j \notin \mathcal{T}} (c_j L_x^{-1} L_t - I) \hat{U}_j \eta_j + O(h^3). \quad (6.26)$$

Таким образом, величина амплитуды паразитных осцилляций определяется масштабом вхо-

дящих волн η_j и добавкой $O(h^3)$. Для удобства обозначим

$$\eta_{\overline{\mathcal{T}}} = \sum_{j \in \mathcal{T}} |\eta_j|.$$

То, что в левой части (6.26) первый член преобладает над вторым, гарантировать нельзя. Однако более естественно предположить, что второе слагаемое по крайней мере не превосходит U^h по порядку величины. Тогда из (6.26) можно сделать следующий вывод:

$$U^h = O(h\eta_{\overline{\mathcal{T}}} + h^3).$$

Примером правого граничного условия из класса (6.19) с невырожденной матрицей L_x является разностная аппроксимация нелинейной системы (4.2) по образцу (5.19):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\rho_{\bar{x}} + \frac{1}{c}p_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (c+u)u_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + uv_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + (c+u)p_{\bar{x}} = 0. \quad (6.27)$$

Проведенный выше анализ относится к простейшим разностным схемам – одномерным и с центральными разностями. Учет вязкости и пространственной многомерности, имеющих место, например, в схеме (1.3) для квазигазодинамической системы уравнений, значительно затруднил бы исследование. Сложность объекта иллюстрирует анализ осцилляций в линеаризованной схеме для одномерных уравнений Навье–Стокса, предпринятый в [2].

Попытаемся упростить задачу. Рассмотрим случай, когда есть граничное уравнение, но неизвестна основная система уравнений. В этой ситуации также возможно извлечь определенную информацию о поведении искомых функций. Единственной гипотезой будет существование гладких и пилообразных решений основной системы при отсутствии решений других видов. На сей раз мы свяжем поведение фоновой функции с амплитудой высокочастотной осцилляции.

Пусть условие релаксации скорости на правой границе (4.5) аппроксимируется с использованием направленной разности:

$$u_{\bar{x}} = \beta(u_0 - u). \quad (6.28)$$

Разложим скорость u на фоновую и осцилляционную составляющие (6.3) и подставим эту сумму в (6.28). Применение формулы Тейлора с центром в граничной точке x_N дает выражение

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \beta(u_0 - \bar{u}) - \frac{2}{h}(-1)^N a + O(h+a).$$

Переписывая эту формулу в виде

$$\bar{u} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = u_0 - (-1)^N \frac{2a}{\beta h} + O\left(\frac{h}{\beta} + \frac{a}{\beta}\right),$$

приходим к выводу, что скорость релаксирует не к значению u_0 , как в дифференциальном случае (4.5), а к некоторой величине, близкой к

$$u_0^* = u_0 - (-1)^N \frac{2a}{\beta h}. \quad (6.29)$$

Заметим, что на полученный результат в принципе не влияет зависимость функций \bar{u} и a от t и от y , если последняя имеется.

Обратимся к нестационарному граничному уравнению (4.3). Пусть оно заменяется дискретным аналогом

$$\partial u / \partial t + (c+u)u_{\bar{x}} = \alpha(u_0 - u), \quad (6.30)$$

где $u_{\bar{x}} = (3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2})/(2h)$. Рассмотрим установившееся решение, которое удовлетворяет граничному условию

$$u_{\bar{x}} = \beta(u_0 - u). \quad (6.31)$$

Подставим в (6.31) выражение $u = \bar{u}(x_l) + (-1)^l a(x_l)$. После такой же процедуры, какая проводи-

лась в предыдущем случае, заключаем, что скорость \bar{u} тяготеет к значению

$$u_0^* = u_0 - (-1)^N \frac{4a}{\beta h}, \quad (6.32)$$

которое отличается от u_0 еще сильнее, чем в случае (6.28), (6.29).

Дискретизация условия квадратичной релаксации (4.9) в виде

$$\partial u / \partial t + (c + u) u_{\bar{x}} = \alpha_1 |u_0 - u| (u_0 - u) \quad (6.33)$$

также приводит к аналогичному выражению для u_0^* , только более громоздкому.

Обсудим, какие свойства проявляет выписанная ранее система граничных уравнений (6.27). Уравнение для определения скорости u здесь совпадает с обоими выражениями (6.30) и (6.33) при нулевых коэффициентах в правых частях. В стационарном случае (6.31) имеем $\beta = 0$. С другой стороны, формула (6.32) показывает, что отклонение асимптотического значения скорости u_0^* от фонового u_0 обратно пропорционально β . При $\beta \rightarrow 0$, поскольку амплитуда a остается конечной даже в линейном одномерном случае (5.20), получаем $u_0^* \rightarrow \pm\infty$. Это объясняет (но не доказывает строго) неустойчивость скорости при аппроксимации граничных уравнений (4.2) с использованием направленных разностей.

По поводу формул (6.29) и (6.32) возникает вопрос: нельзя ли в соответствующих граничных уравнениях поправить значение u_0 на определенную величину? Ответ, по-видимому, отрицательный, так как значение амплитуды a на границе изначально не известно. Возможно, проблема разрешима путем применения техники адаптивных граничных условий, наподобие предложенного в [23] метода определения угла падения плоской волны.

Поступим иным образом: изменим аппроксимацию пространственной производной в уравнениях релаксации скорости. Используя оператор центральной разности, преобразуем, например, граничное условие (4.5):

$$u_{x, N-1}^s = \beta(u_0 - u_N).$$

В таком случае уравнение для фоновой скорости приобретает вид

$$\bar{u} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{h}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \approx u_0 - (-1)^N \left(a + \frac{1}{\beta} \frac{\partial a}{\partial x} \right). \quad (6.34)$$

Поправка к u_0 здесь меньше по порядку величины, чем в выражениях (6.29) и (6.32). При $\beta \rightarrow 0$, однако, левая часть (6.34) становится неустойчивым оператором, который перестает обеспечивать релаксацию. По этой причине отказываться от правых частей в граничных уравнениях для скорости u нецелесообразно.

Применяя оператор центральной разности в условии квадратичной релаксации (4.9), имеем выражение

$$(\partial u / \partial t + (c + u) u_{\bar{x}})_{N-1} = \alpha_1 |u_0 - u_N| (u_0 - u_N). \quad (6.35)$$

Подставим его в выписанное ранее граничное условие (6.27) вместо второго уравнения и получим

$$\begin{aligned} \partial p / \partial t + u p_{\bar{x}} + c^{-1} p_{\bar{x}} &= 0, & (\partial u / \partial t + (c + u) u_{\bar{x}})_{N-1} &= \alpha_1 |u_0 - u_N| (u_0 - u_N), \\ \partial v / \partial t + u v_{\bar{x}} &= 0, & \partial p / \partial t + (c + u) p_{\bar{x}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

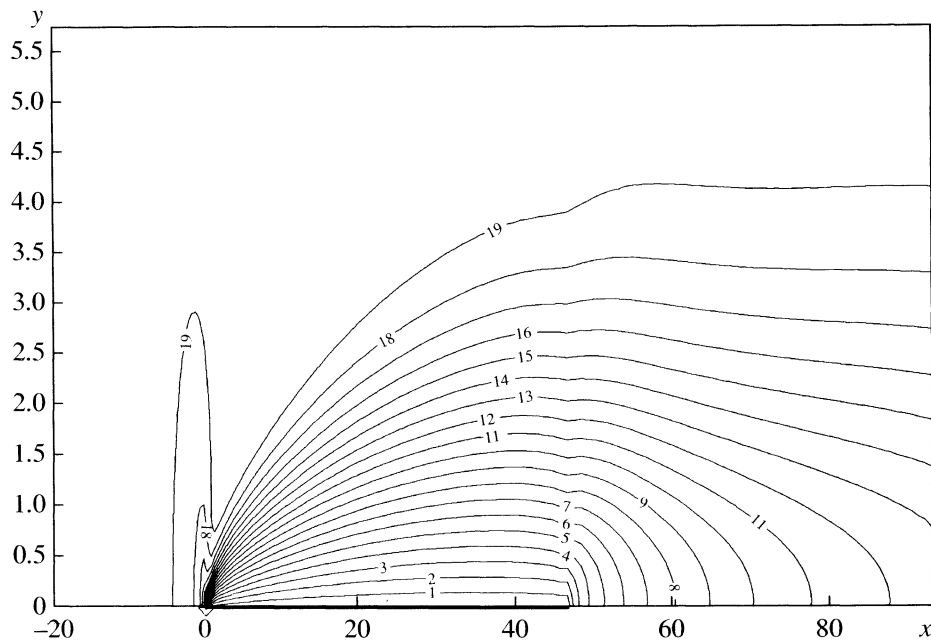
Необходимо проверить отражающие свойства системы (6.36) для случая одномерных линейных уравнений Эйлера. Линеаризация (6.36) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u p'_{\bar{x}} + \frac{1}{c} p'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + (c + u) u'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + u v'_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} + (c + u) p'_{\bar{x}} = 0. \quad (6.37)$$

Система (5.17) для (6.37) дает соотношения между амплитудами волн, выписанные ниже с точностью до главных членов разложения по степеням r из (5.15):

$$a_{12} = \frac{i}{8} r^3 a_{11} - a_{21}, \quad a_{22} = a_{21}, \quad a_{32} = \frac{i}{8} M^{-3} r^3 a_{31}, \quad a_{42} = \frac{i}{8} M^{-3} r^3 a_{41}. \quad (6.38)$$

Сравнение (6.38) с (5.20) показывает, что граничное условие (6.37) в целом не хуже, чем (5.19). Присутствующий в первых двух уравнениях (6.38) член a_{21} отвечает отраженной левой акусти-



Фиг. 1.

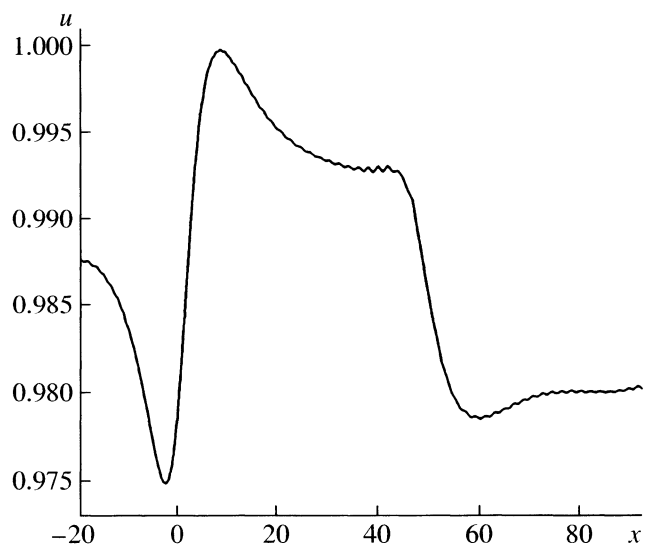
ческой моде, амплитуда которой, в отличие от (5.20), равновелика амплитуде осцилляции a_{22} , распространяющейся вправо.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

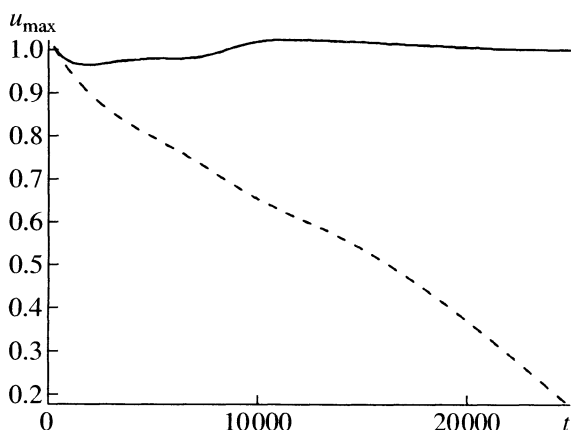
Для испытания методики, изложенной в данной работе, проведено прямое численное моделирование двух нелинейных задач: обтекания пластины конечной длины и течения в канале с парой сильно нагретых участков стенки. Оба течения при выбранных ниже параметрах относятся к классу существенно дозвуковых. Во всех расчетах использовалась квазигазодинамическая система уравнений (1.2), дискретный вид которой указан в (1.3). Аппроксимация производных по времени осуществлялась посредством двухслойной схемы с весом $1/2$ из [15], [24]. Для численной реализации схемы использовались явные итерации. Найдены установившиеся решения.

В задаче об обтекании пластины расчетная область представляет собой прямоугольник $\{-20 \leq x \leq 93, 0 \leq y \leq 8\}$, расположенный, ввиду симметрии течения, выше пластины $\{0 \leq x \leq 47, y = 0\}$. Число Маха $M = u_\infty/c_\infty = 0.01$ (здесь и далее параметры внешнего потока снабжены индексом ∞), число Рейнольдса $Re \sim 10^3$. Пластина изотермична и имеет температуру $T_w = 1.4T_\infty$. Расчеты велись на прямоугольной неравномерной сетке 181×35 узлов по x, y . Сетка по y сгущается в сторону пластины, а сетка по x – в окрестности передней кромки пластины, будучи равномерной в правой части области.

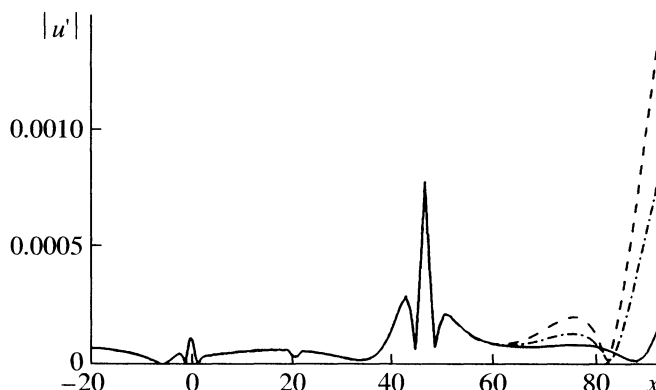
В качестве начальных условий задавались постоянные значения параметров в невязкой части течения и плавное их изменение в областях пограничного слоя и следа. Граничные условия на левой и правой границах являются предметом нашего исследования и будут указаны ниже. На остальных границах ставились



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

условия, типичные для квазигазодинамической системы [15]. Укажем условия на пластине:

$$u = v = 0, \quad T = T_w, \quad \partial p / \partial y = 0.$$

Более детальная постановка задачи сформулирована в [24].

На левой границе выбрано входное условие (4.1) с аппроксимацией производной по x , как в (5.21):

$$p/\rho^\gamma = p_\infty/\rho_\infty^\gamma, \quad u + \frac{2}{\gamma-1}c = u_\infty + \frac{2}{\gamma-1}c_\infty, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} - (c-u)p_{x*} = 0. \quad (7.1)$$

На правой границе задавалась система (6.27), но с заменой уравнения, содержащего du/dt , тем или иным способом. В граничных условиях всюду, где есть производные по времени, производные по пространству применялись на двух слоях, с весом 1/2. При этом коэффициенты брались с нижнего слоя (по образцу [9]) как полусуммы значений в двух соседних узлах.

Первый пример расчета использует правое граничное условие (6.36) с уравнением квадратичной релаксации скорости, в котором присутствует центральная разность. Источниковый член в правой части уравнения аппроксимируется на верхнем слое по времени:

$$\frac{u_{N-1}^{n+1} - u_{N-1}^n}{\Delta t} + (c+u)_{N-1/2}^n \frac{1}{2} (u_x^{n+1} + u_x^n)_{N-1} = \alpha_1 |u_\infty - u_N^{n+1}| (u_\infty - u_N^{n+1}).$$

Параметр α_1 выбран экспериментально.

На фиг. 1 представлены изолинии продольной скорости u : $\min u = 0$, $\max u = 1.0056u_\infty$. Пластина выделена жирной линией. Верхняя часть области не показана ввиду отсутствия отображаемых изолиний. Фиг. 2 демонстрирует горизонтальное распределение скорости u/u_∞ при $y = 5.11$, т.е. во внешней части пограничного слоя и следа. Видны небольшие пилообразные осцилляции, полупериод которых почти совпадает с шагом сетки по x . Амплитуда осцилляций поперечной скорости v приблизительно такая же, как продольной u . Температура T также испытывает колебания, но они мало заметны в сравнении с изменением фона. Давление p практически не колеблется. При этом давление почти не меняется и близко к значению во внешнем потоке: по всей расчетной области $|p - p_\infty| < 2 \times 10^{-4} p_\infty$. Отметим, что ни в каких граничных условиях давление не фиксируется и не задается его релаксация.

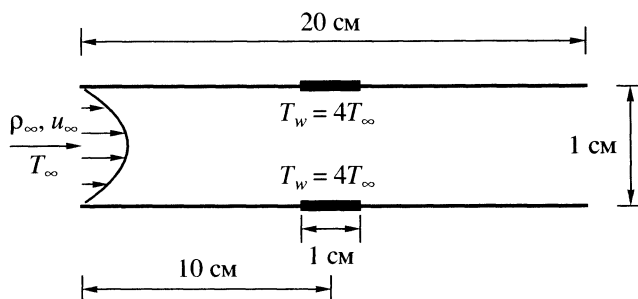
В подтверждение необходимости введения релаксационного члена в граничном уравнении для скорости выполнен также расчет с нулевой правой частью, т.е. по граничному условию (6.36) при $\alpha_1 = 0$. При такой постановке задачи не сохраняется характерная скорость течения. На фиг. 3 показана эволюция во времени величины

$$u_{\max}(t) = \max_{x,y} u(x, y, t),$$

полученной в двух расчетах: предыдущем (сплошная линия) и при $\alpha_1 = 0$ (штриховая).

Исследовались также условия линейной релаксации скорости (4.5) и (4.3), в которых задавалось $u_0 = u_\infty$. В качестве дискретных аналогов использованы уравнения с направленными разностями (6.28) и (6.30), правые части которых брались на верхнем слое по времени. Проведена се-

рия расчетов с целью проверки гипотез о зависимости асимптотики скорости от амплитуды паразитных осцилляций. Из расчетных распределений скорости u вдоль оси x с помощью процедуры линейной фильтрации выделялись фоновая составляющая \bar{u} и коротковолновое колебание a . Значения u_0^* , полученные из (6.29) и (6.32), сравнивались со своими выражениями через \bar{u} . В таблице приведены данные для двух значений y : на периферии следа и в его ядре. Здесь полагается $u_0 = 1$. Тем самым подтверждается достоверность формул (6.29) и (6.32).

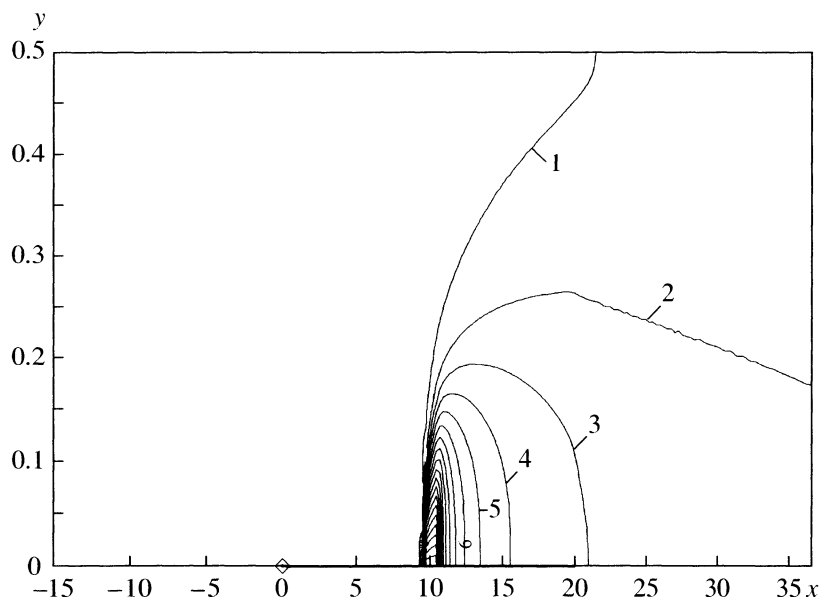


Фиг. 5.

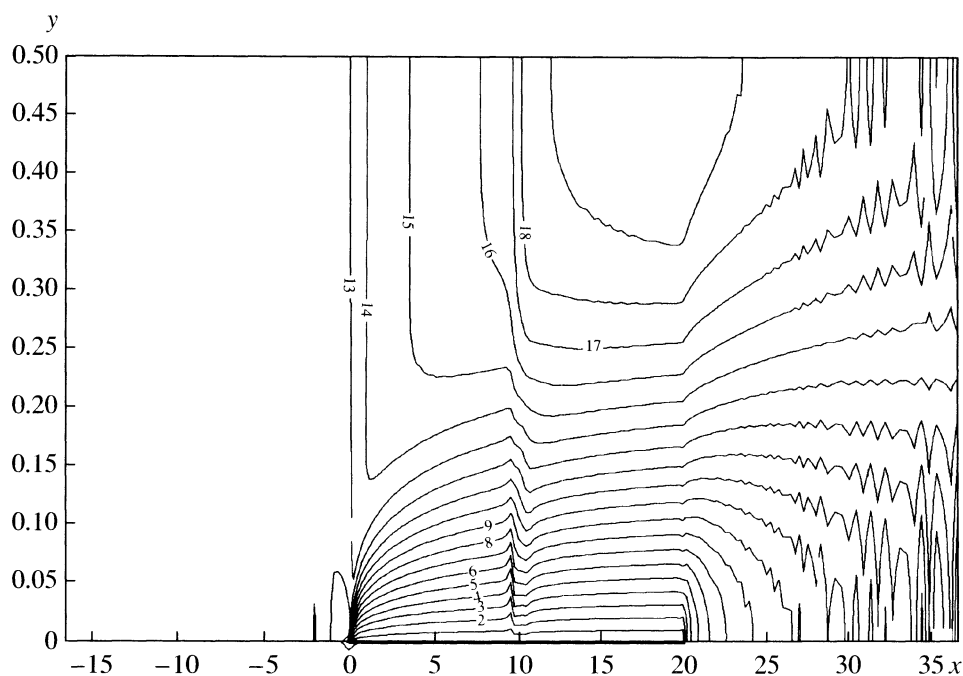
Таблица

Условие		(6.28)		(6.31)	
		$\beta = 0.1$	$\beta = 0.05$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.05$
$y = 5.11$	u_0^*	1.0196	1.0163	1.0181	1.0151
	$\bar{u} + \beta^{-1} \partial \bar{u} / \partial x$	1.0184	1.0147	1.0150	1.0120
$y = 2.54$	u_0^*	0.967	0.956	0.938	0.927
	$\bar{u} + \beta^{-1} \partial \bar{u} / \partial x$	0.967	0.957	0.938	0.929

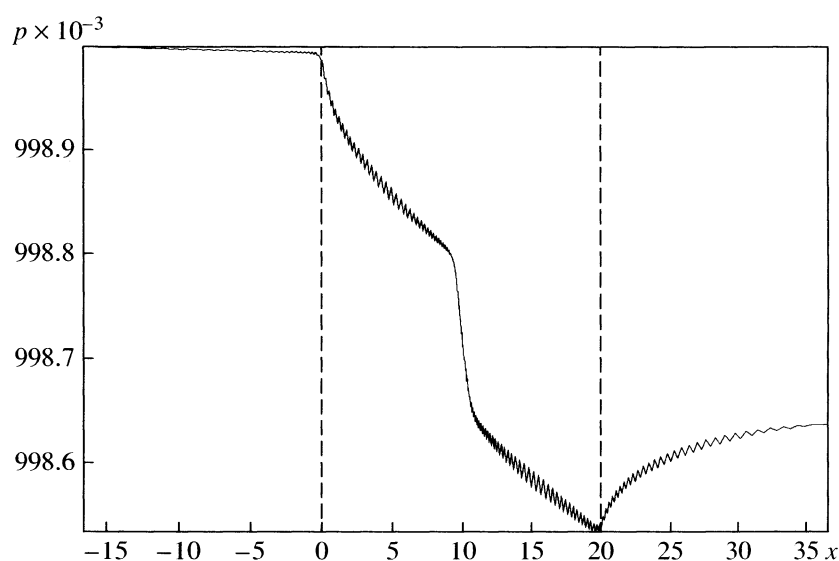
На фиг. 4 изображены продольные распределения амплитуды осцилляций горизонтальной скорости, т.е. $|a(x)|/u_0$, в сечении $y = 2.54$ в расчетах с условиями (6.35) и (6.30) при двух значениях α . Сплошная линия соответствует уравнению (6.35), штриховая – линейной релаксации для $\beta = 0.1$, штрихпунктирная – для $\beta = 0.05$. Колебания решения проявляют очень схожее поведение, а основные различия наблюдаются вблизи выходной границы. Условие (6.30) негативно влияет как на гладкость скорости, так и на плавность изменения ее фона в окрестности границы.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Ясно, что при выборе параметров релаксации α , β и α_1 приходится искать компромисс между уменьшением амплитуды осцилляций и стабилизацией скорости. Во всех рассмотренных выше расчетах получены вполне удовлетворительные результаты. Однако при более сильных осцилляциях разностные граничные уравнения (6.28) и (6.30) уже дают нежелательные эффекты. В задаче, о которой пойдет речь далее, такие граничные условия приводят к длинноволновой неустойчивости и потере физического смысла решения. Единственно приемлемым оказывается граничное уравнение (6.35).

Во второй задаче рассматривается течение между двумя пластинами, посредине каждой из которых находится небольшой участок с постоянной высокой температурой. Геометрия течения показана на фиг. 5. Пластина адиабатична, за исключением изотермического элемента с температурой $T_w = 4T_\infty$. Число Маха входящего потока $M = 0.02$, число Рейнольдса $Re = 2300$. Подобная

задача решалась в [15, с. 222], но с помощью неявной схемы. Сложность моделирования такого течения связана как с низкими скоростями, так и с большими градиентами температуры и мощными тепловыми волнами.

Расчетная область – прямоугольник. Его нижняя сторона совпадает с нижней пластиной, а верхняя лежит посередине между пластинами (задача симметрична). Спереди и сзади канала оставлены области свободного течения. В приводимом ниже варианте расчета это $\{-17 \leq x \leq 0\}$ и $\{20 \leq x \leq 37\}$. Использовалась прямоугольная сетка 301×35 узлов по x, y . Сетка по y сгущается по направлению к пластине. Сетка по x равномерная и максимально подробная над нагревательными элементами; далее она постепенно разреживается, несколько сгущаясь в окрестностях передней и задней кромок пластины.

В качестве начальных условий задавались постоянные значения параметров впереди канала и плавное их изменение в области между пластинами, а также позади канала. Распределение горизонтальной скорости u согласовано с теориями Пуазейля и ламинарного следа [20]. Начальная температура всюду, кроме нагретого участка поверхности, полагалась $T = T_\infty$. Граничные условия на пластине следующие: $u = v = 0, \partial T / \partial y = 0, \partial p / \partial y = 0$. На нагревательном элементе ставилось другое условие для температуры: $T = T_w$. Условия симметрии задавались на верхней границе области и на участках нижней – впереди и позади пластины.

На левой и правой границах ставились неотражающие граничные условия. Входное условие по-прежнему имеет вид (7.1). На выходе использовалось условие (6.36), но с переменным значением ориентировочной скорости u_0 в уравнении для u :

$$\frac{u_{N-1}^{n+1} - u_{N-1}^n}{\Delta t} + (c + u)_{N-1/2}^n \frac{1}{2} (u_x^{n+1} + u_x^n)_{N-1} = \alpha_1 |u_0(y) - u_N^{n+1}| [u_0(y) - u_N^{n+1}],$$

где α_1 – константа, подобранная экспериментально. Функция $u_0(y)$ определялась по формуле, аналогичной (4.8), но относящейся к ламинарной затопленной струе [20]. При этом начальное распределение скорости u совпадает с $u_0(y)$ на границе.

На фиг. 6 и 7 показаны изолинии температуры и продольной скорости (пластина выделена жирной чертой). Распределение температуры выглядит вполне достоверно, тогда как скорость испытывает сильные колебания вблизи выхода. Однако практический интерес представляет течение внутри канала, где осцилляции скорости едва заметны. Фиг. 8 демонстрирует распределение давления p/p_∞ в горизонтальном сечении, близком к середине канала. Постепенное слабое падение давления в промежутке от начала до конца канала соответствует теории Пуазейля, а пилообразные осцилляции невелики по амплитуде.

Результаты проведенных расчетов дают ряд качественных и количественных подтверждений выводов из нелинейного анализа. Тем не менее требуются дальнейшие теоретические исследования искусственных граничных условий и получение новых данных вычислительного эксперимента.

Автор выражает глубокую признательность Б.Н. Четверушкину за поддержку настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
2. Дородницын Л.В. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 522–549.
3. Hedstrom G.W. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 1979. V. 30. № 2. P. 222–237.
4. Rudy D.H., Strikwerda J.C. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations // J. Comput. Phys. 1980. V. 36. № 1. P. 55–70.
5. Thompson K.W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 1990. V. 89. № 2. P. 439–461.
6. Poinot T.J., Lele S.K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows // J. Comput. Phys. 1992. V. 101. № 1. P. 104–129.
7. Kim J.W., Lee D.J. Generalized characteristic boundary conditions for computational aeroacoustics // AIAA Journal. 2000. V. 38. № 11. P. 2040–2049.
8. Okong'o N., Bellan J. Consistent boundary conditions for multicomponent real gas mixtures based on characteristic waves // J. Comput. Phys. 2002. V. 176. № 2. P. 330–344.

9. *Bayliss A., Turkel E.* Far field boundary conditions for compressible flows // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 48. № 2. P. 182–199.
10. *Федорченко А.Т.* О задачах численного моделирования нестационарных пространственных течений вязкого газа в соплах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1982. Т. 22. № 1. С. 178–196.
11. *Федорченко А.Т.* Нелинейные модели звукопоглощающих граничных сечений расчетного участка канала // *Акустич. журн.* 1984. Т. 30. № 6. С. 827–833.
12. *Giles M.B.* Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations // *AIAA Journal.* 1990. V. 28. № 12. P. 2050–2058.
13. *Rowley C.W., Colonius T.* Discretely nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 157. № 2. P. 500–538.
14. *Рябенький В.С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2002.
15. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
16. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
17. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
18. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
19. *Дородницын Л.В.* Неотражающие граничные условия для газодинамических задач в нелинейной постановке // *Прикл. матем. и информатика.* М.: МАКС Пресс, 2002. № 11. С. 38–74.
20. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
21. *Дородницын Л.В.* Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия // *Прикл. матем. и информатика.* М.: Диалог-МГУ, 1999. № 3. С. 43–64.
22. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
23. *Luchini P., Tognaccini R.* Direction-adaptive nonreflecting boundary conditions // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 128. № 1. P. 121–133.
24. *Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н.* Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // *Матем. моделирование.* 1997. Т. 9. № 5. С. 108–118.