

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ  
RKDG-МЕТОДОМ**

© 2008 г. М.П. Галанин, Е.Б. Савенков, С.А. Токарева

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Работа проведена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 06-01-00421)

В работе проведен сравнительный анализ RKDG-метода с другими известными расчетными схемами. Рассмотрены варианты RKDG-метода и конечно-объемные схемы годуновского типа. Проведена оценка качества различных схем. Установлено, что RKDG-метод имеет более высокий порядок аппроксимации и обеспечивает лучшее качество решения.

**THE SOLUTION OF GAS DYNAMICS PROBLEMS WITH SHOCK WAVES  
USING RUNGE-KUTTA DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD**

*M.P. Galanin, E.B. Savenkov, S.A. Tokareva*

Keldysh Institute for Applied Mathematics Russian Academy of Sciences

The paper is dedicated to the testing of RKDG method for gas dynamics and to the comparison of this method with other well-known numerical methods. The comparative analysis was carried out between different variants of RKDG method as well as finite-volume Godunov type schemes. The computations allow to estimate the quality of different schemes. RKDG method has a higher order of approximation, which leads to better quality of the solution.

**Введение**

В работе исследован RKDG (Runge-Kutta discontinuous Galerkin) [1, 2, 3] метод применительно к решению задач газовой динамики, проведен детальный сравнительный анализ метода с другими известными методами, такими как метод конечных объемов с численными потоками годуновского типа, а именно: потоками Куранта-Изаксона-Риса (КИР), Лакса-Фридрихса и потоками типа Хартена-Лакса-ван Лира (HLL и HLLC) [4]. Для получения конечно-объемной схемы исходные уравнения интегрируются по элементу (ячейке) сетки. Эта процедура соответствует методу Галеркина-Петрова, когда в качестве пробных функций используются кусочно-постоянные характеристические функции ячеек сетки. В этом случае определяемые в ходе решения величины являются средними значениями искомого решения по ячейке сетки. Таким образом, в методах 1-го порядка аппроксимации решение на каждом элементе сетки приближается постоянной функцией. Межэлементные граничные потоки вычисляются с использованием приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва. RKDG-метод является одним из обобщений конечно-объемных методов на случай кусочно-полиномиальной аппроксимации решения. Главное его отличие от конечно-объемных методов заключается в том, что при построении схемы используется метод Галеркина-Бубнова, то есть пространства базисных и пробных функций совпадают. Численные потоки выбираются аналогично тем, которые используются в конечно-объемных методах. Шаблон аппроксимации состоит из ячейки и ее ближайших соседей, а порядок аппроксимации зависит лишь от порядка полинома базисной функции ячейки. Это дает возможность локально изменять порядок аппроксимации и адаптировать ее к особенностям решения. RKDG-метод позволяет работать с геометрически сложными областями, достигая при этом высокой точности. Благодаря узкому шаблону RKDG-метода можно использовать неструктурированные сетки. В методе достаточно просто реализуются параллельные вычисления.

В дальнейшем при рассмотрении обоих методов используются треугольные сетки, конечные объемы (элементы) выбираются как треугольники сетки. Расчетные величины в обоих случаях также относятся к указанным ячейкам — треугольникам. Таким образом, в обоих случаях приближенное решение представляет собой кусочно-гладкую функцию, заданную на совпадающих треугольных сетках, но полученную разными методами. Отметим, что этот факт позволяет проводить корректное сравнение результатов расчетов и самих методов.

Одним из главных требований, предъявляемых к качеству методов решения задач газовой динамики, является правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве. Решения такого типа и использованы в данной работе для проверки методов. На основе полученных результатов сделаны выводы о целесообразности применения RKDG-метода или конечно-объемных методов.

### 1. RKDG метод для многомерных систем уравнений

Рассмотрим схему RKDG-метода [1, 2, 3] для многомерной системы уравнений

$$\begin{aligned} u_t + \nabla f(u) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как RKDG-метод для систем применяется покомпонентно к каждому уравнению системы, то достаточно рассмотреть схему метода для случая скалярной функции  $u$ .

Пусть  $T_h$  — правильное разбиение области  $\Omega$ , т.е. такое ее разбиение на непересекающиеся конечные элементы (ячейки), что любые две ячейки имеют либо пустое пересечение, либо общее ребро, либо общую вершину. При этом считается, что ячейки покрывают всю расчетную область  $\Omega$ . Введем конечномерное пространство  $V_h$ , в котором будем искать решение задачи. Умножив уравнения (1) на произвольную функцию  $v_h \in V_h$ , проинтегрируем по элементу  $K$  из разбиения  $T_h$ . Точное решение  $u$  заменим приближенным  $u_h \in V_h$ . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K u_h(x, t) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e f(u_h(x, t)) \cdot n_{e,K} v_h(x) d\Gamma - \\ - \int_K f(u_h(x, t)) \cdot \text{grad} v_h(x) dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

где  $n_{e,K}$  — внешняя единичная нормаль к ребру  $e$ . Заметим, что величина  $f(u_h(x, t)) \cdot n_{e,K}$ , вообще говоря, может быть разрывной при  $x \in e \subset \partial K$ . Поэтому эту величину следует заменить функцией  $h_{e,K}(u_h(x^{int(K)}, t), u_h(x^{ext(K)}, t))$ , зависящей от значений приближенного решения по обе стороны ребра, где  $h_{e,K}(\cdot, \cdot)$  — произвольная функция монотонного численного потока, соответствующая  $f(u) \cdot n_{e,K}$ . В качестве численного потока может быть использован поток HLLC, Лакса-Фридрихса и другие [4]. Они определяются из приближенного решения задачи Римана (если используемый численный поток — годуновского типа) или каким-либо другим способом [5].

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K u_h(x, t) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}(u_h(x^{int(K)}, t), u_h(x^{ext(K)}, t)) v_h(x) d\Gamma - \\ - \int_K f(u_h(x, t)) \cdot \text{grad} v_h(x) dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Интегралы в последнем уравнении заменяем квадратурными формулами нужного порядка.

Далее будем рассматривать двумерную задачу. Введем в области  $\Omega$  некоторую треугольную сетку и зададим на каждом из треугольников  $K$  систему базисных функций. В простейшем случае кусочно-линейных базисных функций (и, соответственно, методе второго порядка аппроксимации) они строятся следующим образом. Пусть  $m_i$  — центр  $i$ -го ребра треугольника. Тогда базисная функция  $\varphi_i(x, y)$  — линейная функция в пределах каждого треугольника, принимающая значение 1 в центре  $i$ -го ребра и значение 0 в центрах двух других ребер.

Приближенное решение в треугольнике  $K$  ищем в виде разложения по базису  $\{\varphi_i\}$ , то есть

$$u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) \varphi_i(x, y), \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $u_i(t)$  равно значению численного решения в центре  $i$ -го ребра.

Матрица Грама системы  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  является диагональной:

$$M = |K| \text{diag} \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

что позволяет получить явную схему для определения коэффициентов  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

В случае линейной аппроксимации для вычисления интегралов следует воспользоваться квадратурными формулами

$$\int_K g(x, y) dx dy \approx \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 g(m_i), \quad \int_{-1}^1 g(x) dx \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Окончательно система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_i(t)$  записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) \frac{|K|}{3} = \int_K f(u_h(x, y, t)) \text{grad} \varphi_i(x, y) dx dy - \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}(u_h(x, y, t)) \varphi_i(x, y) d\Gamma,$$

$$u_i(0) = \frac{3}{|K|} \int_K u_0(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy, \quad \forall K \in T_h, \quad i = 1, 2, 3.$$

Запишем эту систему в виде

$$\frac{d}{dt} u_i = L_h(u_h), \quad t \in (0, T], \quad u_i|_{t=0} = u_{i0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть  $\{t^n\}_{n=0}^M$  — разбиение отрезка  $[0, T]$ ,  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Для решения системы воспользуемся явным методом Рунге-Кутты порядка  $(k+1)$ , применяя на каждом промежуточном шаге специальный ограничитель, что обеспечивает монотонность схемы. Тогда

RKDG-метод записывается следующим образом:

1.  $u_h^0 = \Lambda \Pi_h P_{V_h}(u_0)$ ;
2.  $\forall n = 0, \dots, M - 1$  :
  - 1)  $u_h^{(0)} = u_h^n$ ;
  - 2)  $\forall i = 1, \dots, k + 1$  :  $u_h^{(i)} = \Lambda \Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}) \right\}$ ;
  - 3)  $u_h^{n+1} = u_h^{(k+1)}$ ,

где  $P_{V_h}(u_0)$  — проекция начального условия на пространство  $V_h$ . Коэффициенты  $\alpha_{il}$ ,  $\beta_{il}$  должны быть неотрицательными и удовлетворять условию

$$\sum_{l=1}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad i = 1, \dots, k + 1.$$

Перейдем к описанию ограничителя  $\Lambda \Pi_h$  [1]. Ограничитель  $\Lambda \Pi_h$  для кусочно-линейных функций  $u_h$  должен удовлетворять следующим условиям:

1. Точность: если  $u_h$  — линейная функция, то  $\Lambda \Pi_h u_h = u_h$ .
2. Сохранение „массы“: для любого элемента  $K \in T_h$

$$\int_K \Lambda \Pi_h u_h \, dx dy = \int_K u_h \, dx dy.$$

3. Ограничение наклона: на каждом элементе  $K \in T_h$  градиент  $\Lambda \Pi_h u_h$  не больше, чем градиент  $u_h$ .

Построим ограничитель на треугольных элементах (см. рис.1.1).

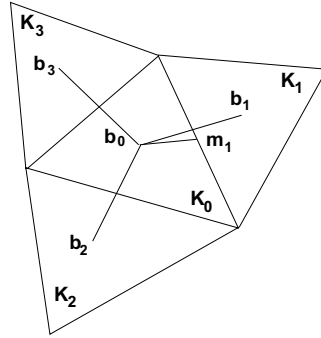


Рис.1.1. Построение ограничителя

Обозначим через  $b_i$  центр масс треугольника  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Поскольку

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0)$$

для некоторых неотрицательных коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$ , которые зависят только от геометрии сетки, то для любой линейной функции  $u_h$  справедливо равенство

$$u_h(m_1) - u_h(b_0) = \alpha_1(u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2(u_h(b_2) - u_h(b_0)).$$

Так как

$$\bar{u}_{K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u_h dx dy = u_h(b_i), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

то

$$u_h(m_1) - u_h(b_0) = \alpha_1(\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}) + \alpha_2(\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0}).$$

Введем обозначения:

$$\tilde{u}_h(m_1, K_0) \equiv u_h(m_1) - u_h(b_0), \quad \Delta \bar{u}(m_1, K_0) \equiv \alpha_1(\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}) + \alpha_2(\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0}).$$

Теперь рассмотрим кусочно-линейную функцию  $u_h$ . Пусть  $m_i, i = 1, 2, 3$  — центры ребер треугольника  $K_0$ . Тогда для  $(x, y) \in K_0$  можно записать (в фиксированный момент времени  $t$ ):

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \varphi_i(x, y) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_h(m_i, K_0) \varphi_i(x, y).$$

Для определения  $\Lambda \Pi_h u_h$  вычислим величины

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(m_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(m_i, K_0)),$$

где  $\nu > 1$ , а  $\bar{m}$  — функция "TVB minmod" (в случае TVB-ограничителя):

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & \text{если } |a_1| \leq M(\Delta x)^2, \\ m(a_1, \dots, a_n), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$M$  — заданная константа,  $\Delta x$  — характерный шаг сетки. Под последним может пониматься, например, такая величина  $\Delta x$ , что для любой ячейки  $K_i$  сетки справедливо

$$C_1 \Delta x \leq \text{diam}(K_i) \leq C_2 \Delta x,$$

где  $C_1, C_2$  — константы, не зависящие от  $\Delta x$ . В этом случае также говорят, что сетка является квазиравномерной. Именно такие сетки в дальнейшем используются в расчетах.

Если вместо функции  $\bar{m}$  используется функция

$$m(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min(|a_1|, \dots, |a_n|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то получим TVD-ограничитель.

Далее, если  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ , то полагаем

$$\Lambda \Pi_h u_h = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y).$$

Иначе, если  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$ , то вычисляем

$$pos = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad neg = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i)$$

и полагаем

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right).$$

Определим величину

$$\tilde{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i).$$

Тогда окончательно получим

$$\Lambda \Pi_h u_h(x, y) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{\Delta}_i \varphi_i(x, y).$$

Легко видеть, что представленный ограничитель удовлетворяет перечисленным выше требованиям.

В случае систем уравнений процедура монотонизации проводится для локальных характеристических переменных. При этом, чтобы определить величину  $\Delta_i$ , нужно использовать матрицу Якоби

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\bar{u}_{K_0}) \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|}.$$

## 2. Система уравнений газовой динамики

Запишем нестационарную систему Эйлера уравнений газовой динамики, описывающую двумерные течения идеального нетеплопроводного газа [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \hat{I}) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{v}] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $t$  — время;  $(x, y)$  — точка пространства в декартовых координатах;  $\rho = \rho(x, y, t)$  — плотность среды;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = [u, v]^T$  — скорость движения газа;  $\hat{I} = \operatorname{diag}[1, 1]$  — единичный тензор размерности  $2 \times 2$ ;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $E = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$  — полная энергия единицы объема;  $p = p(\rho, \varepsilon)$  — давление.

Систему (2) следует дополнить уравнением состояния. Будем рассматривать случай идеального совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

где  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты.

### 3. Тестовые задачи

**3.1. Задача 1: течение газа в канале со ступенькой.** Расчетная область (рис.3.1) представляет собой прямоугольник шириной 1 и длиной 3; на расстоянии 0.6 от левой границы канала начинается ступенька высотой 0.2, продолжающаяся до правой границы.

Набегающий поток газа — сверхзвуковой (число Маха  $M = 3$ ). Движущийся в трубе газ считается идеальным, показатель адиабаты равен  $\gamma = 7/5$ .

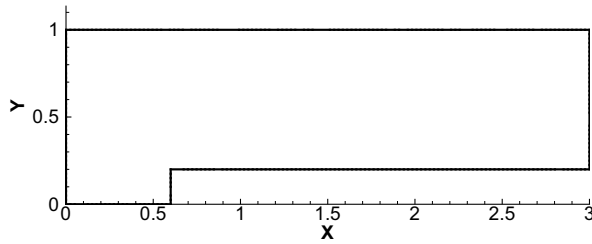


Рис.3.1. Расчетная область

Начальные условия:  $\rho_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 0$ ,  $v = 0_0$ ,  $E_0 = 0.125$ .

Граничные условия:

- на левой границе канала — условие свободного втекания, при этом  $\rho = 1$ ,  $u = 3$ ,  $v = 0$ ,  $E = 6.286$ ,  $p = 1/\gamma$ ;
- на правой — условие свободного вытекания;
- на нижней и верхней, включая ступеньку, — условие непротекания, характеризующееся равенством нулю нормальной компоненты скорости.

Постановку задачи и ряд примеров ее решения см. в [6, 7]. Результаты многочисленных вычислительных экспериментов показывают, что в данной задаче образуется ударная волна, которая последовательно отражается от ступеньки и от стенок канала. После отражения от ступеньки образуется ударная волна в виде колокола, которая при взаимодействии с верхней стенкой приводит к появлению так называемой „ножки Маха“ и контактного разрыва, в котором может развиваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Методы расчета оцениваются исходя из качества разрешения этих структур.

Для вычислений использовались сетки, полученные с помощью генератора из системы MatLab.

Рис.3.2–3.9 изображают 20 линий уровня плотности. Представлены результаты расчетов разными численными методами и на различных сетках. Расчеты, проведенные методом RKDG, получены с использованием TVD-ограничителя. Применение TVB-ограничителя дает схожие результаты. Рассмотрена кусочно-линейная аппроксимация решения.

На рис.3.2–3.7 приведены расчеты для сетки, в которой на единицу длины по оси  $Y$  приходится приблизительно 40 треугольников. В расчетах используются квазиравномерные сетки. По построению треугольники сетки имеют диаметры одного порядка и близки к правильным. Поэтому шаг сетки на границе расчетной области можно характеризовать длиной ребра треугольника. В этом смысле мы и будем говорить „сетка 1/40“ и т.д. Сетка содержит 13574 ячейки и 6949 узлов. Представленные результаты соответствуют моменту времени  $t = 4$ .

Результаты вычислений, представленные на рис.3.2–3.7, показывают, что качество вычислений в сильной степени зависит от метода расчета. Так, везде наблюдается ударная волна в виде так называемого „колокола“. В методе Лакса-Фридрикса фронт ударной волны „размазан“ на 5 вычислительных ячеек, в методе КИР — примерно на 3, в HLLC — на 2–3 вычислительные ячейки, а в HLL — на 3. В RKDG-методах фронт „размазан“ на 2–3 вычислительных ячейки вне зависимости от используемого потока. Причиной сильного „размазывания“ решения, вычисленного с использованием метода Лакса-Фридрикса, является его (метода) значительная, по сравнению с другими, численная вязкость. Как показывают расчеты применительно к методу Лакса-Фридрикса, при измельчении сетки до 330 ячеек на единицу длины по вертикали контуры набегающей и отраженной волн, а также „ножки Маха“ становятся отчетливыми. Сравнение же с другими методами (RKDG, HLL, HLLC и КИР) показывает, что даже для достаточно грубой сетки очертания набегающей и отраженной волн, а также „ножки Маха“ отчетливо видны из-за малой численной вязкости приведенных выше схем.

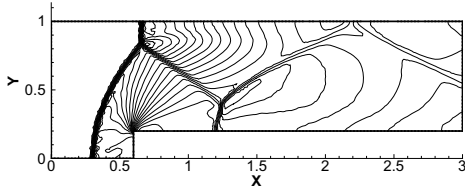


Рис.3.2. Расчет методом HLLC (сетка 1/40).

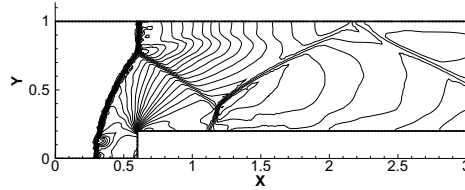


Рис.3.3. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка 1/40).

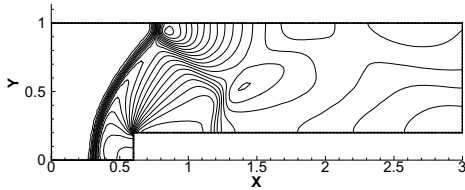


Рис.3.4. Расчет методом Лакса-Фридрикса (сетка 1/40).

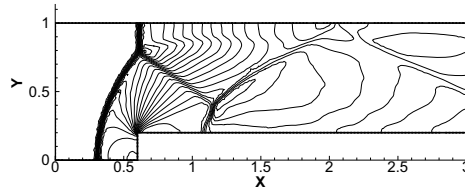


Рис.3.5. Расчет методом RKDG с потоком Лакса-Фридрикса (сетка 1/40).

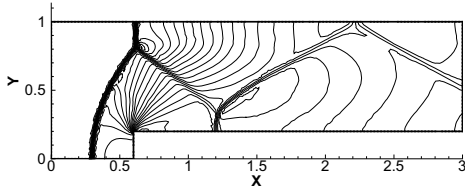


Рис.3.6. Расчет методом HLL (сетка 1/40).

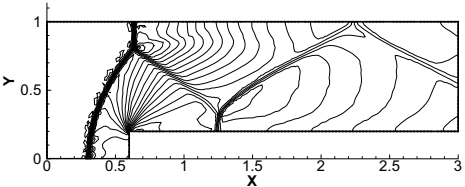


Рис.3.7. Расчет методом КИР (сетка 1/40).

Приведем результаты расчетов, выполненных с помощью методов HLLC и RKDG с потоком HLLC на более подробной сетке, где на единицу длины по оси  $Y$  приходится 80 треугольников. Эта сетка состоит из 55314 элементов и 27979 узлов. Представленные результаты также соответствуют моменту времени  $t = 4$ .

Сравним рис.3.3 и 3.8. Они соответствуют одному и тому же моменту времени  $t = 4$ , но рассчитаны на разных сетках и разными методами. На рис.3.3 представлен расчет на сетке 1/40 RKDG-методом с потоком HLLC, тогда как на рис.3.8 сетка мельче — 1/80, а расчеты выполнены с использованием метода HLLC. Необходимо отметить, что все структуры, передаваемые HLLC-методом на сетке 1/80, отчетливо передаются с использованием RKDG-метода и на сетке 1/40, т.е. на более грубой сетке. Наилучшее качество решения



достигается при использовании RKDG-метода с потоком HLLC и TVB-ограничителем на сетке  $1/80$  (рис.3.9).

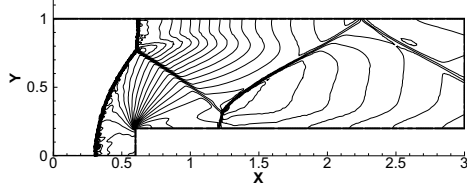


Рис.3.8. Расчет методом HLLC (сетка  $1/80$ ).

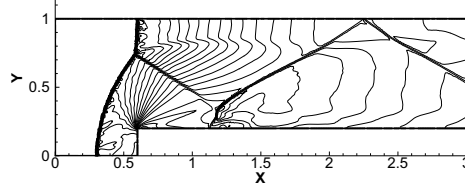


Рис.3.9. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка  $1/80$ ).

Расчет с использованием каждого из приведенных методов проводился до  $t_{\max} = 4$ . Для достижения такого момента времени требовалось 40000 временных слоев. Отметим, что при использовании мелкой сетки время вычислений достаточно велико, в особенности при расчетах методом RKDG.

**3.2. Задача 2: распространение ударной волны в канале клинообразной формы.** Область представляет собой канал формы клина (рис.3.10) размером  $3.2 \times 2.2$  в координатах  $(x, y)$ . Начальное условие задается в виде ударной волны, фронт которой расположен в точке  $x = 0.15$ , клин находится на расстоянии 0.2 по  $x$ , угол  $\varphi = 30^\circ$ . Число Маха ударной волны равно 10. Параметры течения за фронтом волны следуют из условий Гюгонио [8].

Начальные условия: при  $x < 0.15$   $\rho_0 = 8.0$ ,  $u_0 = 8.25$ ,  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 563.5$ , в противном случае  $\rho_0 = 1.4$ ,  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 2.5$ .

Граничные условия:

- на левой границе канала — условие свободного втекания, при этом  $\rho = 8.0$ ,  $u = 8.25$ ,  $v = 0$ ,  $E = 563.5$ ;
- на правой — условие свободного вытекания;
- на нижней и верхней, включая клин, — условие непротекания, характеризующееся равенством нулю нормальной компоненты скорости.

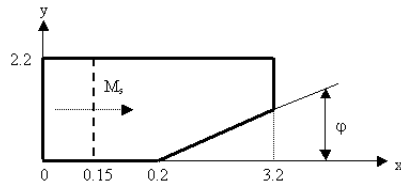


Рис.3.10. Расчетная область

Постановку задачи и ряд примеров ее решения см. в [5, 6, 7]. Поскольку падающая ударная волна достаточно сильна, наблюдается так называемое нерегулярное маховское отражение. Углы наклона падающей и отраженной ударных волн к грани клина не равны между собой, так как явление в целом нелинейно. Характерная особенность картины состоит в том, что отраженная ударная волна над клином состоит из прямолинейной и криволинейной частей. Двойное отражение Маха содержит как устойчивую, так и неустойчивую структуры. Изогнутая ударная волна, растягивающаяся по всей вычислительной области, быстро движется в ее правый конец и совсем не движется в левый. Третья ударная волна — маховская ножка — идет практически под углом  $90^\circ$  к поверхности и в тройной точке пересекается с падающей и отраженной ударными волнами. Контактные разрывы

являются наиболее сложными для вычислений структурами, поэтому сравнение схем целесообразно проводить исходя из качества разрешения данных структур.

На рис.3.11–3.18 представлены 30 линий уровня плотности. Рис.3.11–3.18 демонстрируют конфигурацию ударной волны в канале клинообразной формы, рассчитанную с помощью методов RKDG, HLLC и Лакса-Фридрихса на различных сетках, полученных с помощью MatLab. Для каждого численного метода результаты представлены на сетках  $1/30$  и  $1/60$  (здесь в знаменателе дроби указано количество треугольников на единицу длины по оси  $Y$ ), а для RKDG-метода также на сетке  $1/120$ . Момент времени  $t$  для всех результатов равен  $0.2$ .

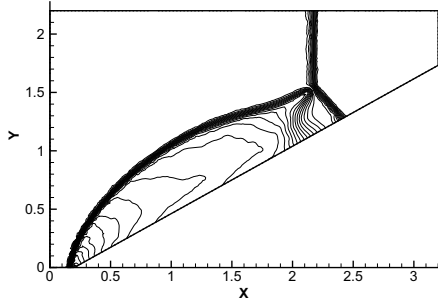


Рис.3.11. Расчет методом HLLC (сетка  $1/30$ ).

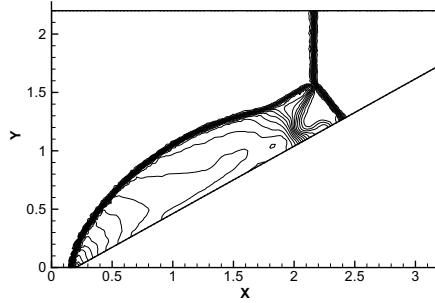


Рис.3.12. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка  $1/30$ ).

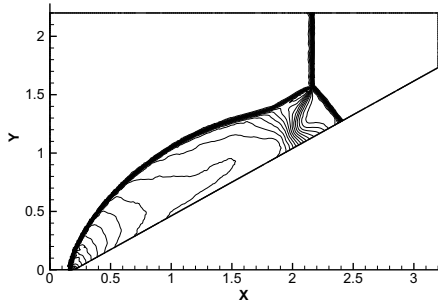


Рис.3.13. Расчет методом HLLC (сетка  $1/60$ ).

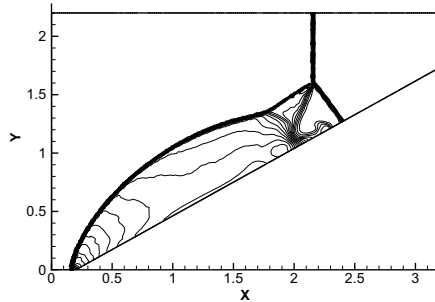


Рис.3.14. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка  $1/60$ ).

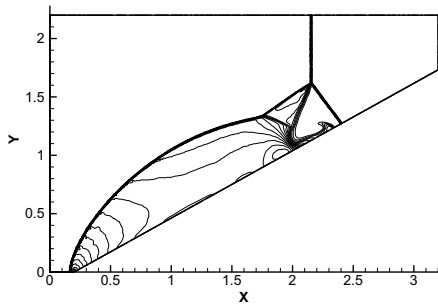


Рис.3.15. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка  $1/120$ ).

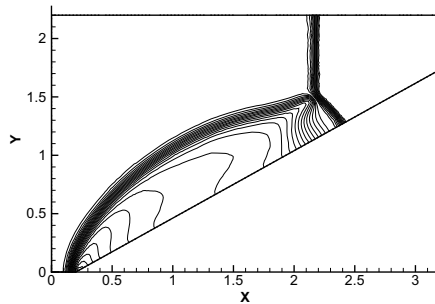


Рис.3.16. Расчет методом Лакса-Фридрихса (сетка  $1/30$ ).

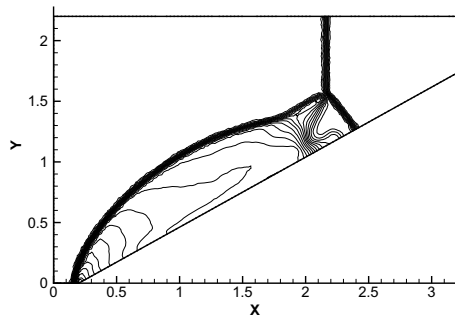


Рис.3.17. Расчет методом RKDG с потоком Лакса-Фридрихса (сетка 1/30).

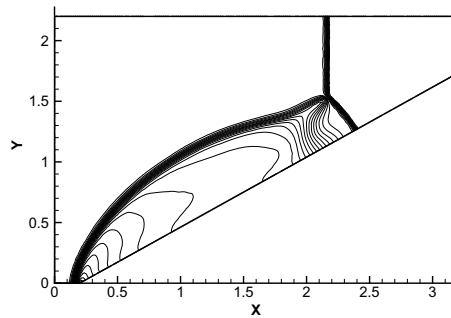


Рис.3.18. Расчет методом Лакса-Фридрихса (сетка 1/60).

Рассмотрим рис.3.12, 3.13, 3.17, 3.18. Поток, сформированный двойным отражением Маха, остается неразрешенным при расчетах методами Лакса-Фридрихса и HLLC на сетке 1/60. В то же время RKDG-метод позволяет увидеть эту структуру уже на сетке 1/30, что свидетельствует о более высоком порядке аппроксимации RKDG-метода. Наилучшее качество решения достигается при использовании RKDG-метода с потоком HLLC на сетке 1/120 (рис.3.15).

#### 4. Сравнение вычислительных затрат методов

RKDG-метод, обладая более высоким порядком аппроксимации по сравнению с рассмотренными методами годуновского типа, является и существенно более трудоемким. Годуновские методы первого порядка требуют для каждого треугольника трех вычислений численного потока (по одному для каждой стороны). RKDG-метод из-за использования двухточечных квадратурных формул для интегралов по границе требует по 2 вычисления потока на каждой стороне треугольника, т.е. всего 6 вычислений на каждый треугольник. Кроме того, используется двухшаговый метод Рунге-Кутты, поэтому при переходе на новый временной слой необходимо 12 раз вычислить поток. Использование лимитера также существенно увеличивает время выполнения расчетов.

Для тестовой задачи 2 (течение газа в канале клинообразной формы) время расчетов RKDG-методом на сетке 1/30 и каким-либо конечно-объемным методом (Лакса-Фридрихса, HLLC, КИР) на сетке 1/120 приблизительно одинаково. Проводя расчеты указанными методами на различных сетках при одинаковых затратах машинного времени можно видеть, что RKDG-метод передает контактные разрывы с тем же качеством, но на сетке, содержащей приблизительно в 16 раз меньше треугольников, чем методы HLLC и Лакса-Фридрихса (рис.3.12, 3.17, 4.1, 4.2).

В таблице приведены параметры сеток, а также относительные затраты машинного времени (в условных единицах) на 1 временной слой для сравниваемых методов при расчетах на различных сетках. Для вычислений требовалось 20000 временных слоев.

Сетка	1/30	1/60	1/120
Число элементов	17086	54800	221330
Число узлов	8704	27688	111239
Метод HLLC	1	3	12
Метод Лакса-Фридрихса	1	3,6	15
RKDG-метод с потоком HLLC	16,7	52	207
RKDG-метод с потоком Лакса-Фридрихса	18,6	58,8	232

#### Заключение

В работе решены две тестовые задачи для системы уравнений газовой динамики. На их примере исследованы свойства RKDG-метода для численного решения задач газовой

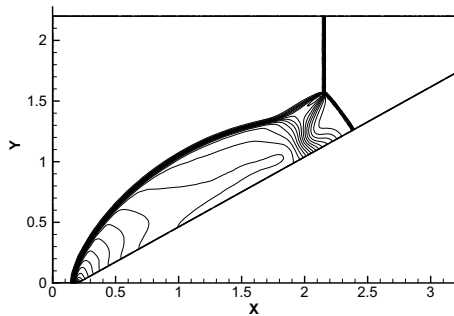


Рис.4.1. Расчет методом Лакса-Фридрихса на сетке 1/120.

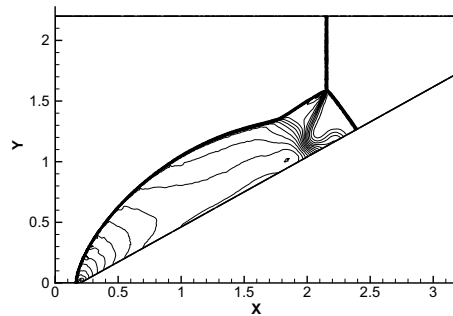


Рис.4.2. Расчет методом HLLC на сетке 1/120.

динамики, проведен сравнительный анализ данного метода с другими хорошо известными численными методами. На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что RKDG-метод обеспечивает более высокое качество решения даже на грубых сетках, наблюдается меньшее размазывание разрывов решения. RKDG-метод подтвердил свою работоспособность для решения задач данного класса, что позволяет использовать его для решения сложных задач в области газовой динамики, магнитной гидродинамики и др.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernardo Cockburn, Chi-Wang Shu. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // Journal of scientific computing, 2001, № 3, v.16, p. 173–261.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, № 105, 35 с.
3. Галанин М.П., Грищенко Е.В., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2006, № 52, 31с.
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608 с.
5. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. – Berlin: Springer, 1999, 624 p.
6. Кузнецов О.А. Математическое моделирование двойных звездных систем : Дис. д.ф.-м.н. – М.: 1999, 323 с.
7. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics, 1984, № 54, p. 115.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004, 424 с.
9. Чжен П.К. Отрывные течения. – М.: Мир, 1972, т.1, 299 с.; 1973, т.2, 279 с.; 1973, т.3, 333 с.
10. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т. Аэродинамика отрывных течений. – М.: Высшая школа, 1988, 351 с.
11. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Прикладная аэродинамика. – М.: Высшая школа, 1974, 731 с.
12. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Захарченко В.Ф., Данилов А.И. Основы прикладной аэродинамики. Кн. 2. Обтекание тел вязкой жидкостью. Рулевые устройства. – М.: Высшая школа, 1991, 351 с.
13. Дейч М.Е. Техническая газодинамика (основы газодинамики турбин). – М., – Л.: Энергоиздат, 1953, 544 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003, 840 с.

Поступила в редакцию 10.09.2007