# Problema de Transporte Logístico Discreto

## Diseño y Análisis de Algoritmos

Richard A. Matos Arderí
Abel Ponce González
Abraham Romero Imbert

Facultad de Matemática y Computación

20 de enero de 2026

# Contenidos

# Descripción del Problema

**Escenario Real:**

- **n** paquetes con peso y valor
- **k** vehículos con capacidad máxima
- Distribuir respetando límites de capacidad
- **Objetivo:** Equilibrar la carga

**Ejemplo Simple:**

- 4 paquetes: 2kg, 3kg, 4kg, 1kg
- 2 camiones: 6kg uno y 5kg otro
- Desafío: distribución equitativa

**[ESPACIO PARA ILUSTRACIÓN: Camiones y paquetes]**

# Definiciones Fundamentales

**Entrada del Problema:**

- Ítems: Un ítem $i \in I$ se caracteriza por un par $(w_i, v_i)$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Pesos: $w_i > 0$ para cada ítem $i$
- Valores: $v_i \geq 0$ para cada ítem $i$
- $k$ contenedores con capacidades $C_1, \ldots, C_k$

**Variables de Decisión:**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si ítem } i \text{ va a contenedor } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Objetivo:** Minimizar: $\max_j V_j - \min_j V_j$
donde $V_j = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_{ij}$
**Sujeto a:** $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : \sum_{i:\sigma(i)=j} w_i \leq C_j$

# Formulación como Programa Lineal Entero

**Planteo ILP:**

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z^+ - z^- \\
\text{s.a.:} \quad & \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1, \quad \forall i \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_{ij} \leq C_j, \quad \forall j \\
& \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_{ij} \leq z^+, \quad \forall j \\
& \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_{ij} \geq z^-, \quad \forall j \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

**Propiedad:** En optimalidad: $z^+ = \max_j V_j$ y $z^- = \min_j V_j$

# Problema de Decisión vs Optimización

**Problema de Decisión (BALANCED-BIN-PACKING-DEC):**

*Dados $n$ ítems con pesos y valores, $k$ bins con capacidades $C_1, \ldots, C_k$, y un umbral $B$, ¿existe una asignación factible tal que la diferencia máxima de valores entre bins sea $\leq B$?*

**Problema de Optimización (BALANCED-BIN-PACKING-OPT):**

*Dados $n$ ítems con pesos y valores, $k$ bins con capacidades $C_1, \ldots, C_k$, encontrar una asignación factible que minimice la diferencia máxima de valores entre bins.*

**Proposición:** Si el problema de decisión BALANCED-BIN-PACKING-DEC está en NP, entonces el problema de optimización BALANCED-BIN-PACKING-OPT está en NPO (problemas de optimización NP).

**Paso 1: BALANCED-BIN-PACKING-DEC $\in$ NP**

Un certificado para una instancia con respuesta 'sí' es una asignación $\sigma : I \to \{1, \ldots, k\}$. La verificación requiere:

1. Verificar que cada ítem está asignado: $O(n)$
2. Calcular peso total de cada bin: $O(n)$
3. Verificar restricciones de capacidad: $O(k)$
4. Calcular valor total de cada bin: $O(n)$
5. Verificar que $\max_j V_j - \min_j V_j \leq B$: $O(k)$

Total: $O(n + k)$, por lo tanto el certificado es verificable en tiempo polinomial. $\square$

# Cadena de Reducciones

**Cadena clásica para NP-completitud fuerte:**

$$\text{3-SAT} \leq_p \text{3DM} \leq_p \text{4-PARTITION} \leq_p \text{3-PARTITION} \leq_p \text{BALANCED-BIN-PACKING}$$

**Fuentes originales de las reducciones:**

- **3-SAT $\rightarrow$ 3DM:** Karp (1972) — *Reducibility Among Combinatorial Problems*
- **3DM $\rightarrow$ 4-PARTITION $\rightarrow$ 3-PARTITION:** Garey & Johnson (1975, 1979)

**Implicación:** El problema es **fuertemente NP-Hard**

# Reducción: 3-PARTITION $\leq_p$ BALANCED-BIN-PACKING

**Construcción** (Garey & Johnson, 1979):
Dada instancia de 3-PARTITION con $\{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ y objetivo $B$:

- **Ítems:** Para cada $a_i$ crear ítem con peso $w_i = a_i$ y valor $v_i = a_i$
- **Bins:** $k = m$ contenedores, cada uno con capacidad $C_j = B$
- **Umbral:** $\beta = 0$ (balance perfecto)

**Correctitud ($\Rightarrow$):** Si existe 3-partición válida $\{A_1, \ldots, A_m\}$:

- Cada $A_j$ tiene 3 elementos que suman $B \Rightarrow$ bin $j$ tiene valor $B$
- Diferencia: $\max_j V_j - \min_j V_j = B - B = 0 \leq \beta$ ✓

**Correctitud ($\Leftarrow$):** Si existe asignación con diferencia $\leq 0$:

- Todos los bins tienen valor $B$ (pues suma total $= mB$ y hay $m$ bins)
- Restricciones $\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2} \Rightarrow$ exactamente 3 elementos por bin
- Esto constituye una 3-partición válida ✓

# Implicaciones de la NP-Completitud

**Corolario 1: NP-Hardness del problema de optimización**

*El problema BALANCED-BIN-PACKING-OPT es* **NP-hard**.

*Razón:* Un algoritmo polinomial para optimización resolvería el problema de decisión comparando con $B$, implicando P $=$ NP.

**Corolario 2: Capacidades heterogéneas**

*El problema con capacidades* **diferentes** $C_1, \ldots, C_k$ *es al menos tan difícil como el caso uniforme.*

*Razón:* El caso uniforme es instancia particular del heterogéneo.

**Consecuencias prácticas:**

- No existe algoritmo polinomial exacto (asumiendo P $\neq$ NP)
- Se requiere **trade-off: optimalidad vs velocidad**
- Métodos aproximados y heurísticas son necesarios

# Métodos Implementados (por tipo)

**Exactos (garantizan óptimo):**

- Fuerza Bruta
- Branch & Bound
- Programación Dinámica

**Greedy / Aproximados (muy rápidos):**

- FFD (First Fit Decreasing)
- BFD (Best Fit Decreasing)
- WFD (Worst Fit Decreasing)
- LDF (Largest Difference First)
- LPT Balanced (Longest Processing Time)
- KK (Karmarkar-Karp) para particionamiento
- Round Robin balanceado

**Metaheurísticas (búsqueda inteligente):**

- Simulated Annealing
- Algoritmos Genéticos
- Búsqueda Tabú

**Nota:** Greedy prioriza velocidad; metaheurísticas balancean calidad/tiempo; exactos garantizan optimalidad en instancias pequeñas.

# Búsqueda Exhaustiva (Fuerza Bruta)

**Estrategia:** Enumerar y evaluar todas las $k^n$ asignaciones posibles.

**Garantías:** **Encuentra el óptimo global garantizado**

**Límites prácticos (1 segundo):**

- $k = 2$: hasta $n = 14$ (16K asignaciones)
- $k = 3$: hasta $n = 11$ (177K asignaciones)
- $k = 4$: hasta $n = 8$ (65K asignaciones)

**Complejidad:**

- **Tiempo:** $O(k^n \cdot n)$ - Exponencial en ambas dimensiones
- **Espacio:** $O(n + k)$ - Muy eficiente

**Aplicabilidad:** Validar heurísticas, instancias pequeñas ($n \leq 14$)

# Branch and Bound - Búsqueda con Poda

**Idea Central:** Fuerza Bruta + Cotas Inferiores = Poda Inteligente

**Algoritmo:**

1. Construir árbol de decisión rama por rama
2. Para cada nodo: calcular **cota inferior** optimista
3. Si cota $\geq$ mejor solución encontrada: **podar rama**
4. Continuar con ramas prometedoras

**Mejora respecto Fuerza Bruta:**

- Explora **solo subárbol prometedor**
- Cotas ajustadas = mayor poda
- Encontrar óptimo rápido = mejor umbral de poda

**Complejidad:** $O(k^n)$ peor caso, pero mucho mejor en práctica

**Garantías:** **Optimalidad + velocidad** en instancias medianas

# Programación Dinámica - Construcción Óptima

**Estrategia:** Construir solución de forma incremental: contenedor por contenedor.

**Subestructura Óptima:** Si tenemos la mejor asignación a $j-1$ contenedores, podemos encontrar la mejor para $j$ contenedores añadiendo uno nuevo.

**Estado DP:** $DP[j][mask]$ = mejor configuración de ítems en *mask* usando primeros $j$ contenedores

- $j$: número de contenedores (1 a $k$)
- *mask*: subconjunto binario de ítems

**Recurrencia:** Para cada contenedor $j$, probar todos los subconjuntos de ítems que le caben

**Complejidad:**

- **Tiempo:** $O(k^2 \cdot 3^n)$ - Factor 3 por subconjuntos
- **Espacio:** $O(k \cdot 2^n)$ - Tabla completa

**Límites:** Instancias pequeñas ($n \leq 15$)

# Algoritmos Greedy - Primera Parte

**Estrategia común:** Ordena ítems y asigna cada uno usando una regla local.

**First Fit Decreasing (FFD):**

- Ordena por peso decreciente
- Asigna al **primer contenedor** con espacio disponible
- Tiempo: $O(n \log n + n \cdot k)$ — Gap: 5-15 %

**Best Fit Decreasing (BFD):**

- Ordena por valor decreciente
- Asigna al contenedor que **minimiza diferencia** resultante
- Tiempo: $O(n \log n + n \cdot k)$ — Gap: 4-12 %

**Worst Fit Decreasing (WFD):**

- Ordena por valor decreciente
- Asigna al contenedor con **mayor espacio libre**
- Distribución uniforme — Tiempo: $O(n \log n + n \log k)$ — Gap: 5-15 %

**LPT Balanced:**

- **Longest Processing Time** para balance
- Asigna al contenedor con **menor valor** actual
- Muy rápido — Tiempo: $O(n \log n + n \log k)$ — Gap: 3-10 %

# Algoritmos Greedy y Aproximación - Segunda Parte

**Round Robin Greedy:**

- Distribución secuencial por **mínimo valor actual**
- Tiempo: $O(n \log n + n \log k)$ — Gap: 4-14 %

**Largest Difference First (LDF):**

- En cada paso, **evalúa todas combinaciones** (ítem, contenedor)
- Elige la que **minimiza diferencia** resultante
- Más lento pero mejor balance
- Tiempo: $O(n^2 \cdot k)$ — Gap: 2-8 %

**Karmarkar-Karp (KK) - Particionamiento:**

- Algoritmo clásico de **diferenciación**
- Combina valores: reemplaza dos máximos por su diferencia
- Excelente para 2 contenedores
- Tiempo: $O(n \log n)$ — Gap: 2-6 %

**Resumen Greedy:**

- **Ventaja:** Muy rápidos, $O(n \log n)$
- **Desventaja:** Gap 2-15 %, sin garantías teóricas
- **Uso:** Baseline rápido, problemas grandes

# Metaheurísticas

Simulated Annealing, Algoritmos Genéticos, Búsqueda Tabú

**Esquema general:**

1. Generar solución inicial
2. Mejorar iterativamente con movimientos locales
3. Aceptar movimientos malos ocasionalmente
4. Detener por convergencia o tiempo

**Ventajas:** Rápidas, buenos resultados
**Desventajas:** Sin garantías, aleatoriedad, parámetros

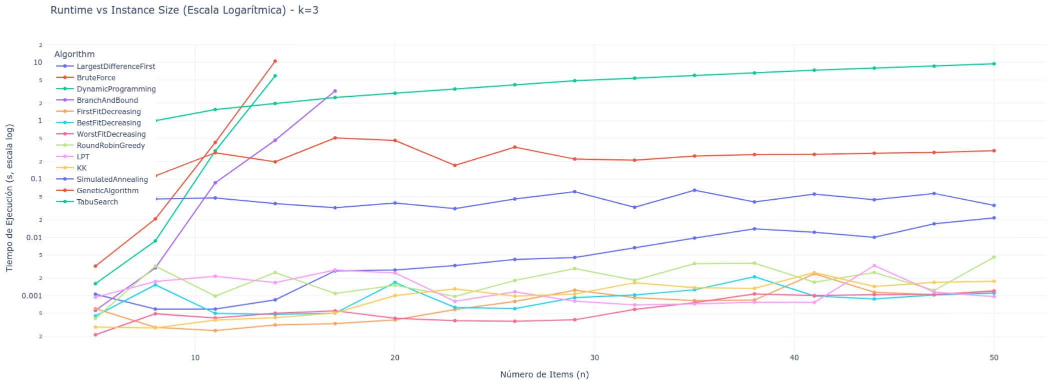
# Análisis de Complejidad - Comparativa

**Complejidad temporal y espacial de los algoritmos implementados**

| **Algoritmo** | **Tiempo** | **Espacio** |
|---|---|---|
| Fuerza Bruta | $O(k^n \cdot n)$ | $O(n + k)$ |
| FFD | $O(n \log n + n \cdot k)$ | $O(n + k)$ |
| BFD | $O(n \log n + n \cdot k)$ | $O(n + k)$ |
| WFD | $O(n \log n + n \log k)$ | $O(n + k)$ |
| LPT Balanced | $O(n \log n + n \log k)$ | $O(n + k)$ |
| Round Robin | $O(n \log n + n \log k)$ | $O(n + k)$ |
| LDF | $O(n^2 \cdot k)$ | $O(n + k)$ |
| KK (Karmarkar-Karp) | $O(n \log n)$ | $O(n)$ |
| Prog. Dinámica | $O(k^2 \cdot 3^n)$ | $O(k \cdot 2^n)$ |
| Branch & Bound | $O(k^n)$ peor caso | $O(n \cdot k)$ |
| Simulated Annealing | $O(I \cdot n)$ | $O(n)$ |
| Genetic Algorithm | $O(G \cdot P \cdot n)$ | $O(P \cdot n)$ |
| Tabu Search | $O(I \cdot N)$ | $O(n + T)$ |

**Leyenda:** $n$=ítems, $k$=contenedores, $I$=iteraciones, $G$=generaciones, $P$=población, $N$=vecindario, $T$=lista tabú

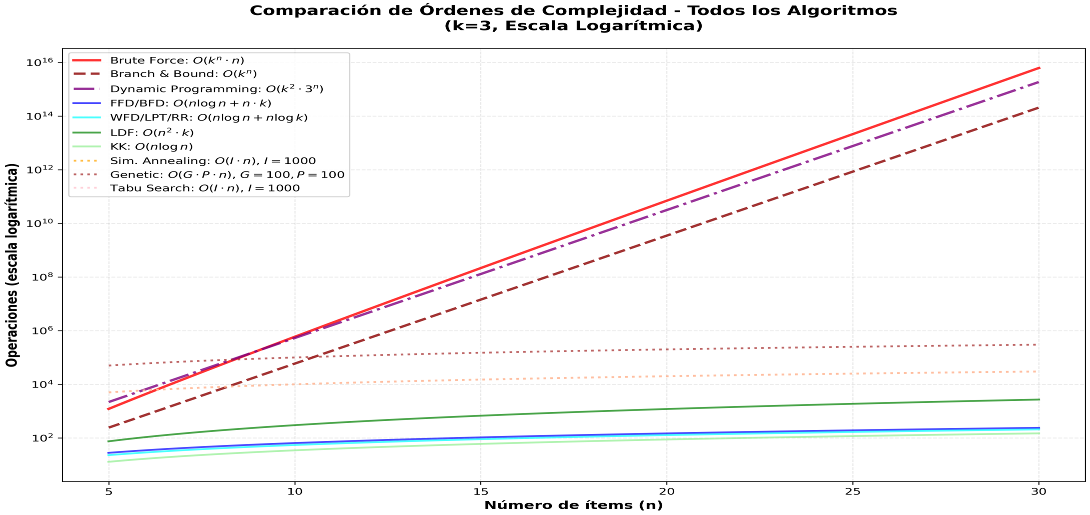
# Comparación de Tiempos




Instancias aleatorias con $n \in [5, 50]$ e $k = 3$

Eje Y: tiempo (segundos, escala logarítmica)

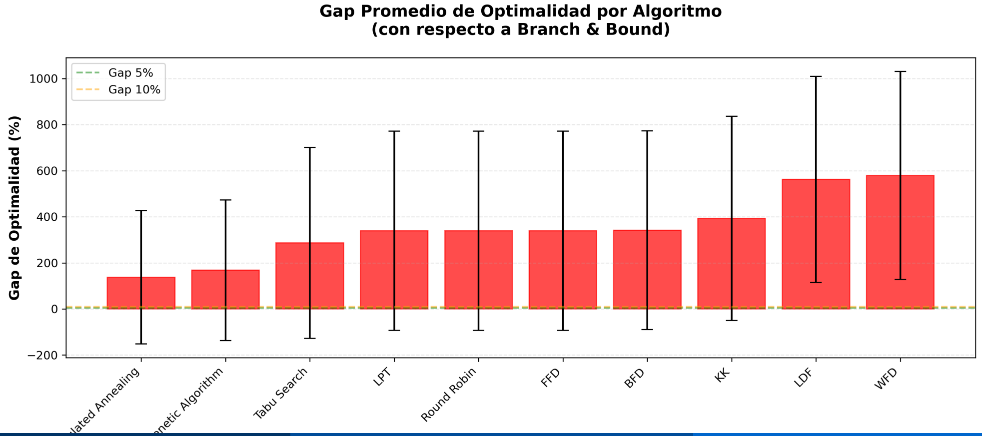
Eje X: número de ítems




Comparación teórica de órdenes de complejidad con $k = 3$ contenedores

**Gap de Optimalidad:**

$$\text{Gap}(\%) = \frac{\text{Heurístico} - \text{Óptimo}}{\text{Óptimo}} \times 100$$



# Resumen Comparativo

| Algoritmo | Óptimo | Velocidad | Rango | Aplicación |
|---|---|---|---|---|
| **Métodos Exactos (Garantizan optimalidad)** | | | | |
| Fuerza Bruta | Sí | Muy lenta | $n < 15$ | Validación, instancias mínimas |
| Branch & Bound | Sí | Media | $n < 25$ | Instancias medianas, mejor relación |
| Prog. Dinámica | Sí | Media | $n < 20$ | Instancias pequeñas con subproblemas |
| **Métodos Aproximados/Greedy (Rápidos, sin garantía)** | | | | |
| FFD (First Fit Dec.) | No | Muy rápida | Todos | Baseline rápido, gap 5-15 % |
| BFD (Best Fit Dec.) | No | Muy rápida | Todos | Equilibrio simple, gap 4-12 % |
| WFD (Worst Fit Dec.) | No | Muy rápida | Todos | Distribución balanceada, gap 5-15 % |
| LDF (Largest Diff. First) | No | Rápida | Todos | Balance óptimo, gap 2-8 % |
| LPT Balanced | No | Muy rápida | Todos | Greedy mejorado, gap 3-10 % |
| KK (Karmarkar-Karp) | No | Muy rápida | Todos | Particionamiento, gap 2-6 % |
| Round Robin | No | Muy rápida | Todos | Distribución uniforme, gap 4-14 % |
| **Metaheurísticas (Búsqueda inteligente, mejor calidad)** | | | | |
| Simulated Annealing | No | Rápida | Todos | Escape de mínimos locales, gap 0.5-2 % |
| Algoritmos Genéticos | No | Rápida | Todos | Problemas complejos, gap 0.5-3 % |
| Búsqueda Tabú | No | Rápida | Todos | Mejor calidad promedio, gap 0.2-1.5 % |

# Conclusiones

1. **NP-Hard:** No existe algoritmo polinomial (bajo P $\neq$ NP)
2. **Trade-off:** Optimalidad vs velocidad

**Elección depende del contexto:**

- Instancias pequeñas: B&B o DP
- Problemas reales: Metaheurísticas
- Baseline rápido: Greedy (FFD, LPT, KK, LDF)

3. **Herramientas:** 14 algoritmos, dashboard interactivo, benchmarking
4. **Aplicaciones:** Logística, distribución de carga, computación distribuida

# Gracias por su atención

**Preguntas y Discusión**

Código disponible en GitHub