

\dot{o}_1

Introducción La leptospirosis es una enfermedad infecciosa bacteriana zoonótica causada por la bacteria *Leptospira*. Este estudio propone un modelo matemático compartimental para analizar la transmisión de la leptospirosis y evaluar su control. El informe está organizado como sigue: se formula el modelo matemático base (SEIR), se presenta su extensión con vacunación, se formula el modelo con intervención de roedores, se presenta su extensión con intervención de roedores y vacunación. Formulación del Modelo SEIR Básico

Supuestos y condiciones iniciales

La población humana total, denotada como $N_{0,h}$, se divide en susceptibles (S_h), expuestos (E_h), infectados (I_h) y recuperados (R_h). La transmisión ocurre por contacto con roedores infectados o ambientes contaminados.

La población de roedores incluye susceptibles (S_v), infectados (I_v) y recuperados (R_v).

Existe una población ambiental de bacterias patógenas B_l .

Compartimentos y diagrama

Ecuaciones diferenciales

El sistema completo de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \Lambda + \gamma R_h - \lambda_h S_h - \mu S_h - \frac{dE_h}{dt} = \lambda_h S_h - (\theta + \mu) E_h - \frac{dI_h}{dt} = \theta E_h - (\alpha + \delta + \mu) I_h - \frac{dR_h}{dt} \\ \frac{dS_v}{dt} &= \Pi + \rho R_v - (\beta_3(t) I_h + \mu_v) S_v - \frac{dI_v}{dt} = \beta_3(t) I_h S_v - (\sigma + \mu_v) I_v - \frac{dR_v}{dt} = \sigma I_v - (\rho + \mu_v) R_v \\ \frac{dB_l}{dt} &= \tau_1 I_h + \tau_2 I_v - \mu_b B_l \end{aligned}$$

Donde:

S_h, E_h, I_h, R_h : humanos susceptibles, expuestos, infectados y recuperados.

S_v, I_v, R_v : roedores susceptibles, infectados y recuperados.

B_l : bacterias patógenas en el ambiente.

λ_h : fuerza de infección humana, dependiente del tiempo y del ambiente.

En el modelo, la fuerza de infección humana se define como:

donde λ_h representa la tasa instantánea a la que los susceptibles humanos se infectan, considerando tanto la transmisión humana como la ambiental:

Parámetro	Descripción	Valor promedio	Unidad
Λ	Tasa de reclutamiento humana	$\mu \times N_{0,h}$	hu/año
Π	Tasa de reclutamiento de roedores	2	ro/año
$\beta_{1,m}$	Transmisión roedor-humano (promedio)	0.00033	1/ro
$\beta_{2,m}$	Transmisión ambiente-humano (promedio)	0.0815	1/ro
$\beta_{3,m}$	Transmisión humano-roedor (promedio)	0.0007	1/ro
γ	Pérdida de inmunidad humana	0.089	1/año
μ	Mortalidad natural humana	0.0009	1/año
μ_v	Mortalidad natural roedores	0.0029	1/año
μ_b	Mortalidad bacterias	0.05	1/año
θ	Progresión expuesto a infectado	0.092	1/año
α	Mortalidad por enfermedad	0.04	1/año
δ	Recuperación humana	0.072	1/año
ρ	Pérdida de inmunidad roedores	0.083	1/año
σ	Recuperación roedores	0.064	1/año
κ	Constante de saturación ambiental	10000	-
τ_1	Liberación de patógeno por humanos	0.06	ba/año
τ_2	Liberación de patógeno por roedores	0.2	ba/año

[1] Engida, H. A., Theuri, D. M., Gathungu, D., Gachohi, J., Alemneh, H. T. (2022). A Mathematical Model Analysis of the Leptospirosis Epidemic in an Urban Environment. *Mathematics*, 10(12), 2000.

[5] R. Paisanwarakiat and R. Thamchai, Optimal Control of a Leptospirosis Epidemic Model, *Science Technology and Innovation*, 2021, pp. 1-10.

[6] A. Minter, F. Costa, H. Khalil et al., "Optimal control of rat-borne leptospirosis in an urban environment," *Frontiers in Public Health*, vol. 9, p. 645811, 2021.

[29] H. T. Alemneh, "A co-infection model of dengue and leptospirosis diseases," *Advances in Difference Equations*, vol. 2021, p. 1, 2021.

[30] M. A. Khan, G. Zaman, S. Islam, and M. I. Chohan, "Optimal campaign in leptospirosis epidemic by multiple interventions," *Mathematics*, vol. 9, p. 1, 2021.

[31] M. A. Khan, S. Islam, S. A. Khan, I. Khan, S. Shafie, and T. Gul, "Prevention of leptospirosis infected vector and human by optimal control," *Mathematics*, vol. 9, p. 1, 2021.

Parámetros estacionales o dependientes del tiempo Las tasas de transmisión β_1 , β_2 y β_3 varían estacionalmente según:

$$\beta_i(t) = \beta_{i,m} \left[1 + A \cos \left(2\pi \frac{m(t) - t_{pico}}{12} \right) \right]$$

donde:

$\beta_{i,m}$: valor promedio anual de la tasa de transmisión ($i = 1, 2, 3$).

A : amplitud estacional ($0 < A < 1$). Valores cercanos a 0 indican poca variación estacional en la transmisión, mientras que valores cercanos a 1 indican alta variación estacional.

$m(t)$: mes correspondiente al día t ($m(t) = [t/30] \bmod 12 + 1$).

t_{pico} : mes de máximo estacional.

Por ejemplo, para la transmisión ambiente-humano:

Este mismo esquema se aplica a β_1 y β_3 .

Extensión del Modelo con Vacunación

Modificación del sistema y nuevas ecuaciones

Para modelar la intervención vacunal, se añade el compartimento V_h (humanos vacunados) y se modifica la dinámica de los humanos:

Las ecuaciones modificadas y añadidas son:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda + \gamma R_h + \omega V_h - \lambda_h S_h - \mu S_h - \nu(t) S_h - \frac{dV_h}{dt} = \nu(t) \varepsilon S_h - (\omega + \mu) V_h$$

El resto de ecuaciones para roedores y ambiente permanecen igual que en el modelo base.

Donde:

V_h : humanos vacunados.

$\nu(t)$: tasa diaria de vacunación dinámica, definida abajo.

ε : eficacia de la vacuna.

ω : tasa de pérdida de inmunidad anual.