Solução de alguns exercícios A.L.A. - I

Kelvin (Pol)

- ☺ Exercício resolvido com sucesso!
- ☹ Exercício um tanto complicador.

Exercício 1.

Matrizes nilpotentes N são matrizes quadradas que satisfazem $N^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

a) Verifique que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nilpotente;

b) Mostre que toda matriz estritamente triangular superior (ou seja, triangular com diagonal nula) é nilpotente;

c) Exiba uma matriz nilpotente que não é triangular;

d) Matrizes unipotentes U são as matrizes quadradas que satisfazem $(\mathbf{U} - \mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que matrizes unipotentes triangulares são unitriangulares.

Solução:

a) Calculamos $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos agora $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Portanto, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{A}$ é nilpotente de índice 3.

b) Vamos demonstrar por indução em $n \in \mathbb{N}$ que toda matriz estritamente triangular superior $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é nilpotente.

Caso base: $n = 1$. Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ estritamente triangular superior deve ser da forma $[0]$, já que a diagonal é nula. Assim, $A^1 = \mathbf{0}$, portanto A é nilpotente.

Hipótese de indução: Suponha que toda matriz estritamente triangular superior de ordem $(n-1)\times(n-1)$ é nilpotente. Ou seja, para toda $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ estritamente triangular superior, temos:

$$\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{0}.$$

Passo indutivo: Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz estritamente triangular superior. Podemos escrever A como uma matriz por blocos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

onde:

- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$,
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ é estritamente triangular superior.

Note que

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^k \end{bmatrix};$$

pela hipótese de indução, $\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{0}$. Assim:

- $\mathbf{B}^n = \mathbf{B}\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{0}$,
- $\mathbf{v}^T\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{0}$ (produto com vetor também zera).

Logo, temos:

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

logo $\mathbf{A}$ é nilpotente.☺

c) Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

perceba que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ o que implica que $\mathbf{A}$ é uma matriz nilpotente de índice 3, mas não é triangular.

d) Nos queremos mostrar que, se $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular unipotente, então $\mathbf{U}$ é una matriz unitriangular ($u_{ii} = 1$). De fato, seja $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular (sim perda de generalidade) superior unipotente, da forma

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

ela é unipotente, então $(\mathbf{U} - \mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} u_{11}-1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22}-1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}-1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_{11}-1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22}-1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}-1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

como el produto de matrizes triangulares superiores é ainda uma matriz triangular superior, e para verificar que $\mathbf{U}$ é uma matriz unitriangular superior, só precisamos estudar o que acontece com a diagonal, note que

$$(\mathbf{U} - \mathbf{I})^k = \begin{bmatrix} (u_{11}-1)^k & * & \cdots & * \\ 0 & (u_{22}-1)^k & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (u_{nn}-1)^k \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

o que implica que $(u_{ii} - 1)^k = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, assim $u_{ii} = 1$ para todo $i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. Logo $\mathbf{U}$ é uma matriz unitriangular superior. ☺

Exercício 2.

Mostre que o produto de duas matrizes triangulares inferiores é também uma matriz triangular inferior.

Solução:

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ duas matrizes quadradas de ordem n, ambas triangulares inferiores. Isso significa que:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{e} \quad b_{ij} = 0 \quad \text{sempre que } i < j.$$

Seja $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [c_{ij}]$ o produto das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, definido por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Queremos provar que $\mathbf{C}$ também é triangular inferior, ou seja, que $c_{ij} = 0$ sempre que $i < j$.

Fixemos índices $i < j$ e analisemos os termos da soma. Um termo $a_{ik}b_{kj}$ será diferente de zero apenas se ambos os fatores forem diferentes de zero. Mas:

- $a_{ik} \neq 0$ apenas se $k \leq i$,
- $b_{kj} \neq 0$ apenas se $k \geq j$.

Portanto, para que $a_{ik}b_{kj} \neq 0$, é necessário que:

$$j \leq k \leq i.$$

Contudo, como estamos supondo que $i < j$, não existe nenhum valor de k que satisfaça essa desigualdade dupla. O conjunto de índices k que satisfaz $j \leq k \leq i$ está vazio.

Logo, todos os produtos $a_{ik}b_{kj}$ são nulos, e a soma resulta em:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0.$$

Isso vale para todo $i < j$, portanto a matriz $\mathbf{C}$ é triangular inferior. ☺

Exercício 3.

Prove ou dê um contra-exemplo: se uma matriz quadrada A tem um elemento nulo na diagonal, então não podemos obter uma fatoração na forma A = LU, com L unitriangular inferior e U triangular superior.

Solução:

É falso ! lembre o teorema:

Teorema 1: Condição suficiente para a existência da fatoração LU

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\det(\mathbf{A}^{[k]}) \neq 0$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Então existem uma matriz unitriangular inferior $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz triangular superior $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Nesse caso, se $\mathbf{A}$ for não-singular, então a fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ é única e $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{U}) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.

Este teorema estabelece uma condição ($\det(\mathbf{A}^{[k]}) \neq 0$ para todo k) que é **suficiente** para garantir a existência da fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. No entanto, esta condição **não é necessária**.

A presença de um elemento nulo na diagonal de $\mathbf{A}$ ($a_{ii} = 0$) não implica, por si só, que algum dos determinantes dos menores principais líderes ($\det(\mathbf{A}^{[k]})$) seja zero, nem que a fatoração $\mathbf{LU}$ seja impossível. Portanto, a afirmação não é verdadeira em todos os casos.

Contraexemplo: Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

note que $\det \mathbf{A} = -6$, então,

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \mathbf{A}^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

assim,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{M}_1\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}^{(1)} =: \mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{U}$ onde $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior. Portanto temos a fatoração $\mathbf{LU}$ da matriz $\mathbf{A}$ da forma $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ onde $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ mesmo que tenha um zero na diagonal. Perceba que $\det \mathbf{A} = -6 = \det \mathbf{U}$.☺

Exercício 4.

Mostre que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não pode ser escrita na forma LU

Solução:

Suponha que $\mathbf{A}$ tem fatoração $\mathbf{LU}$, assim, existe uma matriz unitriangular $\mathbf{L}$, e uma matriz triangular superior $\mathbf{L}$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0 \\ u_{12} &= 1 \\ l_{21}u_{11} &= 1 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} &= 0 \end{aligned}$$

mas da primeira e terceira equações temos uma contração. Logo $\mathbf{A}$ não tem fatoração $\mathbf{LU}$.☺

Exercício 5.

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha a fatoração A = LU e utilize-a para resolver os sistemas $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2$.

Solução:

Temos

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 1L_1]{L_2 + 1L_1} \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

note que $\mathbf{A}^{(1)}$ é uma matriz triangular superior, então definamos $\mathbf{A}^{(1)} =: \mathbf{U}$. Por outro lado

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{L},$$

Assim temos que $\mathbf{L}$ é uma matriz unitriangular inferior, logo

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Para o sistema $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$:

  Como $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{LUx}_1 \Longrightarrow \mathbf{LUx}_1 = \mathbf{b}_1$, definamos $\mathbf{y} := \mathbf{Ux}_1$, assim calculamos o primeiro sistema triangular:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

logo $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Agora calculamos o segundo sistema triangular $\mathbf{U}\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente obtemos $\mathbf{x}_1 = [-1, 0, 0]^T$.

- Para o sistema $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, obtemos analogamente $\mathbf{x}_2 = [-1/6, -3/2, 5/3]^T$.☺

Exercício 6.

Prove ou dê um contra-exemplo: matrizes quadradas que têm uma coluna nula são singulares.

Afirmação 1: Imagem como combinação linear das colunas

Toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem sua imagem gerada pelos vetores coluna.

Mais precisamente,

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\},$$

onde $\mathbf{a}_i$ denota a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Prova: Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e considere $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n
\end{aligned}$$

Note que $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}$, como hemos demostrado que cada vector em $\mathrm{Im}(A)$ pode expressar-se como una combinação lineal de las colunas de $\mathbf{A}$, podemos concluir

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\},$$

onde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vectores coluna da matria $\mathbf{A}$.

Solução:

Queremos provar que toda matriz quadrada que possui um vetor coluna nulo é singular.

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz com vetores coluna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Suponhamos que para algum índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, ou seja, o j-ésimo vetor coluna é o vetor nulo.

Consideremos agora o conjunto dos demais vetores coluna:

$$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

Esse conjunto contém, no máximo, $n-1$ vetores coluna. Como $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, é claro que $\mathbf{a}_j$ é combinação linear trivial dos demais vetores (por exemplo, $0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$), portanto, o conjunto total de vetores coluna de $\mathbf{A}$ é **linearmente dependente**.

Seja $V = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Então:

$$\dim V \leq n - 1$$

ou seja, o espaço gerado pelos vetores coluna de $\mathbf{A}$ tem dimensão estritamente menor que n, o que implica que:

$$\mathrm{posto}(\mathbf{A}) < n$$

Mas sabemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível se, e somente se, seu posto é n. Como isso não acontece aqui, segue que **A não é invertível**, ou seja, é singular.☺

Exercício 7.

Uma matriz de permutação elementar P é construída pela permutação de duas linhas da matriz identidade. Prove ou dê um contra-exemplo:

a) toda matriz de permutação elementar satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$;

b) toda matriz de permutação satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$;

c) toda matriz que satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$ é uma permutação.

Solução:

a) Verdadeiro.

Seja $\mathbf{P}$ uma matriz de permutação elementar, construída a partir da matriz identidade $\mathbf{I}_n$ pela troca de duas linhas, digamos as linhas i e j, com $i \neq j$. Aplicar novamente $\mathbf{P}$ equivale a trocar novamente as mesmas duas linhas, o que restaura a matriz original. Assim, temos:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_n.$$

Exemplo: no caso $n = 3$, seja $\mathbf{P}$ a matriz que troca as linhas 1 e 2 da identidade $\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3.$$

Isso confirma que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_3$, como queríamos demonstrar.

b) Falso.

Nem toda matriz de permutação satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$. Isso só é verdade para as permutações elementares (transposições de duas linhas). Em geral, matrizes de permutação podem corresponder a permutações mais complexas, como ciclos com mais de dois elementos.

Contraexemplo: Considere a permutação cíclica $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_3$, que envia:

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1.$$

A matriz de permutação associada, construída permutando as linhas da identidade segundo σ, é:

$$\mathbf{P}_{123} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificamos agora que:

$$\mathbf{P}_{123}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

Logo, $\mathbf{P}^2 \neq \mathbf{I}$, e a afirmação é falsa.

c) Falso.

A afirmação diz que toda matriz $\mathbf{P}$ que satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$ é uma matriz de permutação. No entanto, isso não é verdade: existem matrizes involutivas (ou seja, tais que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$) que não são matrizes de permutação.

Contraexemplo: considere a matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Portanto, $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_2$, mas $\mathbf{P}$ não é uma matriz de permutação, pois contém o número -1 e não possui exatamente um elemento 1 em cada linha e cada coluna.

Logo, a afirmação é falsa.

Exercício 8.

Seja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a matriz de permutação tal que o produto PA permuta as linhas 1 e 3 da matriz quadrada A.

a) Exiba P;

b) Prove ou dê um contra-exemplo: o produto AP pode ser obtido da permutação das colunas 1 e 3 de A;

c) Prove ou dê um contra-exemplo: XA = AX para qualquer matriz de permutação X, desde que os produtos sejam possíveis.

Solução:

a) A matriz de permutação $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que permuta as linhas 1 e 3 da matriz $\mathbf{A}$ é dada por:

$$\mathbf{P}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Considere uma matriz genérica $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

O produto $\mathbf{P}_{13}\mathbf{A}$ resulta na permutação das linhas 1 e 3 de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P}_{13}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{13}$$

Agora, vamos analisar o produto $\mathbf{AP}$. Multiplicar uma matriz por uma matriz de permutação à direita ($\mathbf{AP}$) permuta as colunas da matriz. Neste caso, $\mathbf{AP}$ permuta as colunas 1 e 3 de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{AP}_{13} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{13}$$

De fato, o produto $\mathbf{AP}$ é obtido da permutação das colunas 1 e 3 de $\mathbf{A}$.

c) Vamos usar a mesma matriz $\mathbf{A}$ e a matriz de permutação $\mathbf{P}$ do item anterior como contra-exemplo. Já calculamos:

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

E também:

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, $\mathbf{PA} \neq \mathbf{AP}$ na maioria dos casos (a menos que a matriz $\mathbf{A}$ possua uma estrutura muito específica, como ser uma matriz escalar ou diagonal com elementos simétricos em certas posições, o que não é o caso geral).

Portanto, $\mathbf{XA} = \mathbf{AX}$ não é verdadeiro em geral para qualquer matriz de permutação $\mathbf{X}$. As matrizes de permutação não comutam com todas as matrizes.

Exercício 9.

Verdadeiro ou falso: os pivôs de uma matriz não-singular são unicamente definidos.

Solução:

Verdadeiro ou falso: os pivôs de uma matriz não-singular são unicamente definidos.

Falso.

Os pivôs não são únicos. Por exemplo, considere a matriz (ainda não singular):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$$

Note que $\det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$, então ela é não-singular. Para a fatoração LU, o pivô não é único, pois $a_{11} = 0$. Assim, é necessário fazer um pivotamento (troca de linhas) para obter $a_{11} = 1$ (ou outro valor não nulo), alterando a ordem dos pivôs ou os valores que seriam considerados pivôs sem a troca. Portanto, os pivôs não são unicamente definidos. ☺

Exercício 10.

Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Encontre a fatoração PA = LU da matriz A do sistema usando pivotamento parcial, onde P é uma matriz de permutação, L é unitriangular inferior e U é triangular superior; depois utilize a fatoração calculada para encontrar a solução do sistema.

Solução:

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -12 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Fatoração PA = LU:

Passo 1: Encontrar o primeiro pivô e realizar o pivotamento parcial. A primeira coluna da matriz $\mathbf{A}[:,1] = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. O maior elemento em valor absoluto é 3. Como $|3| > |2|$ e $|3| > |-2|$, permutamos a linha 1 com a linha 3. A matriz de permutação essa troca é:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando $\mathbf{P}_1$ em $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -12 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Zerar os elementos abaixo do primeiro pivô na primeira coluna. O pivô atual é 3. Os vetores de

Gauss são $m_2^{(1)} = \frac{-2}{3}$ e $m_3^{(1)} = \frac{2}{3}$, como $\mathbf{M}_k = \mathbf{I} - \mathbf{m}^{(k)}\mathbf{e}_k^T$ então a matriz transformação de Gauss $\mathbf{M}_1$ é:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando $\mathbf{M}_1$ em $\mathbf{P}_1\mathbf{A}$:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Encontrar o segundo pivô e realizar o pivotamento parcial. A submatriz relevante é $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$. A segunda coluna, a partir da segunda linha, tem elementos $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$. O maior elemento em valor absoluto é $|-5| = 5$. Como $|-5| > |4|$, não é necessário permutar linhas neste passo, então:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Zerar os elementos abaixo do segundo pivô na segunda coluna. O pivô atual é -5. O vetor de Gauss é $m_3^{(2)} = -\frac{4}{5}$. então a matriz transformação de Gauss $\mathbf{M}_2$ é:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando $\mathbf{M}_2$:

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix},$$

esta é a matriz $\mathbf{U}$, o seja, $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior. Perceba que $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ são não-singulares ($\det \mathbf{M} \neq 0$) além disso sabemos que $\mathbf{M}_k^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{m}^{(k)}\mathbf{e}_k^T$, por outro lado $\mathbf{P}_1$ é também não-singular ($\mathbf{PP} = \mathbf{I}$), logo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} &= \mathbf{U} \\ \mathbf{P}_1\mathbf{A} &= \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{U} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{P}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{U}, \end{aligned}$$

Definamos: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ e $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}$, por uma observação temos $\mathbf{L} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{m}^{(k)}\mathbf{e}_k^T$, então

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a fatoração $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ é:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/5 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizando a fatoração $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$:

Temos $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, então $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \Longrightarrow \mathbf{Pb} = \mathbf{LUx}$. Fazendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ temos $\mathbf{Pb} = \mathbf{Ly}$ assim calculamos em dos sistemas triangulares.

- Para o sistema $\mathbf{Pb} = \mathbf{Ly}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{y} = [-18, -12, \frac{2}{5}]^T$

- Para o sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -12 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{x} = [2, 1, -1]^T$. ☺

Exercício 11.

Mostre que se uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ satisfaz $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Solução:

Dada a equação:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Multiplicando pela direita por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{-1} - 3\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{0}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A} - 3\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{-1} &= 3\mathbf{I} - \mathbf{A} \end{aligned}$$

Exercício 12.

Mostre que se as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são similares e as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são similares então as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ são similares.

Afirmação 2: A relação de semelhança de matrizes é uma relação de equivalência

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ duas matrizes, a relação $\sim$ definida por: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff \exists\, \mathbf{S}$ não-singular $\mid \mathbf{B} = \mathbf{SAS}^{-1}$; é uma relação de equivalência.

Prova:

- **Simetria $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$:**

  Note que existe a matriz identidade $\mathbf{I}$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{IAI}^{-1}$.

- **Reflexividade $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$:**

  Suponha que $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, então existe a matriz $\mathbf{S}$ não-singular tal que
  $\mathbf{B} = \mathbf{SAS}^{-1} \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS} \Longrightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$.

- **Transitividade $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Longrightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$:**

  Suponha que $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, então existe as matrizes não singulares $\mathbf{S}, \widetilde{\mathbf{S}}$ tais que

  $$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{SAS}^{-1} \\ \mathbf{C} &= \widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{S}}^{-1}, \end{aligned}$$

  então

  $$\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{SAS}^{-1}\widetilde{\mathbf{S}}^{-1} \Longrightarrow \mathbf{C} = (\widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{S})\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{S})^{-1} \Longrightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}.$$ ☺

Exercício 13.

Mostre que a inversa de uma matriz triangular inferior (quando existir) é triangular inferior.

Solução:

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz triangular inferior $n \times n$ e inversível, e $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. Nosso objetivo é mostrar que $\mathbf{C}$ também é triangular inferior, ou seja, que $c_{ij} = 0$ para $i < j$.

Sabemos que $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Assim, o elemento (i,j) do produto é $(\mathbf{AC})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$. Para $i < j$ (elementos acima da diagonal principal), temos

$(\mathbf{AC})_{ij} = I_{ij} = 0$. Como $\mathbf{A}$ é triangular inferior, $a_{ik} = 0$ para $k > i$. Logo, a soma se reduz a:

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ik} c_{kj} = 0 \quad \text{para } i < j$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{i,i-1}c_{i-1,j} + a_{ii}c_{ij} = 0$$

Vamos provar que $c_{ij} = 0$ para $i < j$ passo a passo:

- **Primeira linha de C ($i = 1$):** Para $j > 1$, a equação se torna $a_{11}c_{1j} = 0$. Como $\mathbf{A}$ é invertível, $a_{11} \neq 0$. Assim, $c_{1j} = 0$ para todo $j > 1$. Isso zera todos os elementos acima da diagonal na primeira linha de $\mathbf{C}$.
- **Passo geral ($i > 1$):** Assumimos que já provamos que todos os elementos $c_{pk} = 0$ para $p < k$ onde $p < i$ (ou seja, todas as linhas anteriores de $\mathbf{C}$ já têm seus elementos acima da diagonal zerados). Retornando à equação $a_{i1}c_{1j} + \cdots + a_{i,i-1}c_{i-1,j} + a_{ii}c_{ij} = 0$ para $i < j$: Para cada termo $a_{ik}c_{kj}$ no somatório onde $k < i$: Sabemos que $k < i$ e que $i < j$, o que implica $k < j$. Pela nossa suposição, como $k < i$ e $k < j$, todos os c_{kj} que aparecem nesse somatório ($c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{i-1,j}$) já foram demonstrados como zero em etapas anteriores da prova. Portanto, a soma $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}c_{kj}$ é zero.

  A equação se reduz a:

  $$a_{ii}c_{ij} = 0$$

  Como $\mathbf{A}$ é invertível, $a_{ii} \neq 0$. Logo, concluímos $c_{ij} = 0$.

Isso demonstra que todos os elementos de $\mathbf{C}$ acima da diagonal principal são zero, confirmando que $\mathbf{C}$ é uma matriz triangular inferior.☹

Exercício 14.

Mostre que $(\mathbf{AB})^{-T} = \mathbf{A}^{-T}\mathbf{B}^{-T}$.

Solução:

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singulares, pelas propriedades da inversa e transposta, temos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{-T} &= [(\mathbf{AB})^T]^{-1} \\ &= (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-T}\mathbf{B}^{-T}\end{aligned}$$

Exercício 15.

Prove ou dê um contra-exemplo: $\mathbf{uv}^\mathrm{T} = \mathbf{vu}^\mathrm{T}$ para qualquer par de vetores u e v de mesma dimensão.

Solução:

A afirmação $\mathbf{uv}^\mathrm{T} = \mathbf{vu}^\mathrm{T}$ para qualquer par de vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de mesma dimensão é **falsa**.

Considere os vetores: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

Primeiro, calculamos $\mathbf{uv}^\mathrm{T}$:

$$\mathbf{uv}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$$

Agora, calculamos $\mathbf{vu}^\mathrm{T}$:

$$\mathbf{vu}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{bmatrix}$$

Comparando os resultados, vemos que:

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{bmatrix}$$

Portanto, $\mathbf{uv}^\mathrm{T} \neq \mathbf{vu}^\mathrm{T}$.

Exercício 16.

Considere as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que se $\mathbf{u}^\mathbf{T}\mathbf{Av} = \mathbf{u}^\mathbf{T}\mathbf{Bv}$ para todos os vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Solução:

Note que

$$\mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{Av} - \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{Bv} = 0,$$

seja $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Pela hipótese, temos:

$$\mathbf{u}^\top\mathbf{Dv} = 0 \quad \text{para todos } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Escolhendo vetores canônicos $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, obtemos:

$$\mathbf{e}_i^\top\mathbf{De}_j = D_{ij} = 0$$

Como isso vale para todos os i, j, segue que $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. ☺

Exercício 17.

Verdadeiro ou falso: se A e B são matrizes simétricas de mesma ordem, então AB é simétrica.

Solução:

A afirmação é **falsa**.

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ simétricas, ou seja, $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}$. Para que o produto $\mathbf{AB}$ seja simétrico, precisaríamos que:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{AB}$$

Mas, pela propriedade da transposta de um produto:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top = \mathbf{BA}$$

Assim, $\mathbf{AB}$ será simétrica se e somente se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, o que não é verdade em geral, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Logo, $\mathbf{AB}$ não é necessariamente simétrica.☺

Exercício 18.

Seja A simétrica. Mostre que $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I}$ é simétrica.

Solução:

Seja $\mathbf{C} = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I}$. Queremos mostrar que $\mathbf{C}^\top = \mathbf{C}$.

Sabemos que:

- $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$, pois $\mathbf{A}$ é simétrica;
- $\mathbf{I}^\top = \mathbf{I}$, pois a identidade é simétrica;
- $(\mathbf{A}^2)^\top = (\mathbf{AA})^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^2$.

Aplicando essas propriedades:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^T &= (\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I})^T \\ &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}^T - 3\mathbf{A}^T + \mathbf{I}^T \\ &= \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{C}$ é simétrica. ☺

Exercício 19.

Matrizes antissimétricas satisfazem $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Mostre que toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

Solução:

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definimos:

$$\mathbf{S} := \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{K} := \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T);$$

note que:

$$\mathbf{S}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}) = \mathbf{S} \quad \text{(simétrica)}$$

$$\mathbf{K}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = -\mathbf{K}, \quad \text{(antissimétrica)}$$

além disso,

$$\mathbf{S} + \mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}$$

Portanto, toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica. ☺

Exercício 20.

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo. Mostre que $\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ é inversível.

Solução:

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Note que a expressão

$$\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$$

define a matriz de Householder associada ao vetor $\mathbf{v}$, ou seja,

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T.$$

A matriz de Householder é uma matriz quadrada ortogonal, ou seja, seus vetores coluna formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Além disso, matrizes ortogonais são invertíveis e sua inversa coincide com a transposta:

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T.$$

Logo, a matriz

$$\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

é inversível.☺

Exercício 21.

Seja α uma variável escalar. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ cujos elementos dependem de α, com cada função $\mathbf{A}[i,j](\alpha)$ diferenciável, podemos definir a matriz $\frac{d\mathbf{A}}{d\alpha}$, cujo elemento (i,j) é dado por $\frac{d}{d\alpha}(\mathbf{A}[i,j](\alpha))$. Suponha que $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sejam matrizes cujos elementos são funções diferenciáveis de α.

a) Mostre que

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha)] = \left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{A}(\alpha)\right]\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{B}(\alpha)\right];$$

b) Supondo $\mathbf{A}(\alpha)$ não-singular para todo α, mostre que

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)^{-1}] = -\mathbf{A}(\alpha)^{-1}\left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{A}(\alpha)\right]\mathbf{A}(\alpha)^{-1}.$$

Solução:

a) Seja

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & \cdots & a_{1n}(\alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\alpha) & \cdots & a_{mn}(\alpha) \end{bmatrix},$$

onde cada $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável para todos i, j.

Suponha que $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, com entrada geral $b_{jk}(\alpha)$ também diferenciável.

O produto matricial $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha)$ está definido como

$$[\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha)]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha)b_{jk}(\alpha).$$

Aplicando a derivada com respeito a α e usando a linearidade da derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha)]_{ik} &= \frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha)b_{jk}(\alpha)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{d\alpha}[a_{ij}(\alpha)b_{jk}(\alpha)] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{d\alpha}a_{ij}(\alpha)\cdot b_{jk}(\alpha) + a_{ij}(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}b_{jk}(\alpha)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{d\alpha}a_{ij}(\alpha)\cdot b_{jk}(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}b_{jk}(\alpha) \\
&= \left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{A}(\alpha)\right]\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{B}(\alpha)\right].
\end{aligned}$$

b) Suponha que $\mathbf{A}(\alpha)$ é invertível para todo α. Consideremos la matriz identidade $\mathbf{I}$ definamos $\mathbf{I} = i_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $i_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $i_{ij} = 1$ se $i = j$, então

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{I}] = \mathbf{0}.$$

Note que

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}^{-1}(\alpha) = \mathbf{I},$$

derivando ambos lados da igualdade acima:

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}^{-1}(\alpha)] = \frac{d}{d\alpha}[\mathbf{I}] = \mathbf{0},$$

pelo item (a), aplicamos a regra do produto para a derivada matricial:

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)]\cdot\mathbf{A}^{-1}(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}^{-1}(\alpha)] = \mathbf{0},$$

isolando a derivada da inversa:

$$\mathbf{A}(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}^{-1}(\alpha)] = -\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)]\cdot\mathbf{A}^{-1}(\alpha),$$

multiplicando à esquerda por $\mathbf{A}^{-1}(\alpha)$, obtemos:

$$\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}^{-1}(\alpha)] = -\mathbf{A}^{-1}(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}[\mathbf{A}(\alpha)]\cdot\mathbf{A}^{-1}(\alpha).☺$$

Exercício 22.

Prove que se a matriz $\mathbf{A}$ pode ser escrita como $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}$, onde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é triangular superior não-singular, então $\mathbf{A}$ é simétrica positiva definida.

Solução:

Queremos mostrar que, se $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$, com $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior e inversível, então $\mathbf{A}$ é simétrica definida positiva.

1. Simetria: Como $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$, temos:

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A},$$

pois $(\mathbf{U}^T)^T = \mathbf{U}$ e a transposta de um produto é o produto das transpostas em ordem reversa. Logo, $\mathbf{A}$ é simétrica.

2. Definida positiva: Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Considere a forma quadrática associada:

$$q(x) = x^T\mathbf{A}x = x^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}x = (\mathbf{U}x)^T(\mathbf{U}x) = \|\mathbf{U}x\|^2 \geq 0,$$

como $\mathbf{U}$ é inversível, temos $\ker\mathbf{U} = \{0\}$, então $\mathbf{U}x \neq 0$ sempre que $x \neq 0$, o que implica:

$$\|\mathbf{U}x\|^2 > 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Portanto, $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ou seja,

$$\mathbf{A} > 0 ☺$$

Exercício 23.

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ com $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Determine $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $\mathbf{Pu} = \mathbf{v}$.

<u>**Solução:**</u>

Suponhamos que $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1$ onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar la matriz $\mathbf{P}$ ortogonal com $\mathbf{Pu} = \mathbf{v} \implies \|\mathbf{Pu}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$, ou seja queremos encontrar a matriz $\mathbf{P}$ tal que $\|\mathbf{Pu}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$

Considere a matriz de Householder $\mathbf{P}$ para o vetor $\mathbf{w} := \frac{u-v}{\|u-v\|_2}$, note que $\mathbf{w}$ é unitário ($\|\mathbf{w}\|_2 = \mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1$). Além disso, como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_2 = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$, e como $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1 \Longrightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = 1$. Logo

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \text{ (pois } \mathbf{w} \text{ é unitário).}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{Pu} &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - 2\mathbf{w}(\mathbf{w}^T\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2}\left[\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^T\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2}\right] \\ &= \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}-\mathbf{v})\left[\frac{(\mathbf{u}^T-\mathbf{v}^T)\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2}\right] \\ &= \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}-\mathbf{v})\left[\frac{\mathbf{u}^T\mathbf{u}-\mathbf{v}^T\mathbf{u})}{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle_2}\right] \\ &= \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}-\mathbf{v})\left[\frac{1-\mathbf{u}^T\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_2^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 + \|\mathbf{v}\|_2^2}\right] \\ &= \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}-\mathbf{v})\left[\frac{1-\mathbf{u}^T\mathbf{v})}{2(1-\mathbf{u}^T\mathbf{v})}\right] \\ &= \mathbf{u} - (\mathbf{u}-\mathbf{v})\end{aligned}$$

então $\mathbf{Pu}) = \mathbf{v}$, note que $\mathbf{P}$ é um refletor de Householder e ele é uma matriz ortogonal. ☺

Exercício 24.

Considere uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m \geq n$, e sua fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, onde as colunas de $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ formam um conjunto ortonormal e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é triangular superior. Mostre que se a matriz $\mathbf{A}$ tem posto completo então a matriz $\mathbf{R}$ é não-singular.

<u>**Solução:**</u>

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \geq n$. Temos a fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, onde:

- As colunas de $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ formam um conjunto ortonormal. Isso implica que $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade $n \times n$.
- $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz triangular superior.

Por hipótese, a matriz $\mathbf{A}$ tem posto completo, o que significa que posto$(\mathbf{A}) = n$. Para uma matriz com n colunas, ter posto n implica que suas colunas são linearmente independentes.

Para mostrar que $\mathbf{R}$ é não-singular, precisamos provar que seu núcleo (espaço nulo) contém apenas o vetor nulo. Ou seja, se $\mathbf{Rx} = \mathbf{0}$ para algum vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{x}$ deve ser o vetor nulo.

Considere a equação:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{0}$$

Multiplicando ambos os lados por $\mathbf{Q}$ à esquerda, obtemos:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{Rx}) = \mathbf{Q0}$$

$$(\mathbf{QR})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, podemos substituir:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Agora, vamos analisar a equação $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ utilizando a representação de $\mathbf{Ax}$ como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$. Seja $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n]$, onde $\mathbf{a}_j$ denota a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$, e seja $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$. A equação $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pode ser escrita como:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Esta é uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ igual ao vetor nulo. Sabemos que a matriz $\mathbf{A}$ tem posto completo n, o que significa que suas colunas $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ são linearmente independentes. Pela definição de linear independência, a única maneira de uma combinação linear de vetores linearmente independentes ser igual ao vetor nulo é se todos os escalares da combinação forem zero. Assim, $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, o que implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Portanto, partindo de $\mathbf{Rx} = \mathbf{0}$, chegamos à conclusão de que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Isso significa que o núcleo de $\mathbf{R}$ é trivial ($\operatorname{Ker} \mathbf{R} = \{\mathbf{0}\}$). Uma matriz quadrada cujo núcleo é trivial é injetiva e, consequentemente, é uma matriz não-singular (ou invertível).

Assim, a matriz $\mathbf{R}$ é não-singular.☺

Exercício 25.

Mostre que se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então $|\det \mathbf{A}| \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|_2$, onde $\mathbf{a}_i$ denota a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$. Dica: Use a fatoração QR.

<u>**Solução:**</u>

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com colunas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Aplicamos a fatoração QR da matriz $\mathbf{A}$ usando refletores de Householder. Esse método constrói, a cada passo, uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}_k = \mathbf{H}_k^\top$, onde:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^\top}{\mathbf{v}_k^\top\mathbf{v}_k},$$

sendo $\mathbf{v}_k$ escolhido para que $\mathbf{H}_k$ anule os elementos abaixo da posição (k, k) da matriz resultante.

Para isso, tomamos a subcoluna ativa no passo k, dada por

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{A}[k:n,\, k],$$

e escolhemos $\mathbf{v}_k$ de forma que:

$$\mathbf{H}_k\mathbf{z}^{(k)} = \pm\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2\,\mathbf{e}_1.$$

Multiplicando à esquerda por cada refletor, obtemos a matriz triangular superior:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{n-1}\cdots\mathbf{H}_1\mathbf{A}.$$

Como cada $\mathbf{H}_k$ é ortogonal, também é ortogonal o produto

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{n-1} = \mathbf{H}_1^\top\mathbf{H}_2^\top\cdots\mathbf{H}_{n-1}^\top,$$

e temos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \quad \text{com } \mathbf{Q} \text{ ortogonal e } \mathbf{R} \text{ triangular superior.}$$

A matriz $\mathbf{R}$ tem a forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & r_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix},$$

note que em que cada entrada r_{kk} satisfaz:

$$|r_{kk}| = \|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \leq \|\mathbf{a}_k\|_2.$$

Como $\mathbf{Q}$ é ortogonal, então $|\det(\mathbf{Q})| = 1$, e segue que:

$$|\det(\mathbf{A})| = |\det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{R})| = |\det(\mathbf{R})|.$$

A determinante de uma matriz triangular é o produto de suas entradas diagonais, portanto:

$$|\det(\mathbf{A})| = \prod_{k=1}^{n} |r_{kk}| \leq \prod_{k=1}^{n} \|\mathbf{a}_k\|_2. ☺$$

Exercício 26.

Mostre que refletores de Householder são ortogonais.

Solução:

Seja $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ um refletor de Householder associado a um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Por definição, temos:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}.$$

Vamos verificar se $\mathbf{H}$ é ortogonal, isto é, se $\mathbf{H}\mathbf{H}^\top = \mathbf{I}$.

Note que

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} - 2\frac{(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} = \mathbf{H},$$

então $\mathbf{H}$ é simétrica, basta mostrar que $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^2 &= \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\right)^2 \\ &= \mathbf{I} - 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} + 4\left(\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\right)^2.\end{aligned}$$

Perceba que:

$$\left(\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\right)^2 = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{(\mathbf{v}^T\mathbf{v})^2} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{v})\mathbf{v}^T}{(\mathbf{v}^T\mathbf{v})^2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}.$$

Portanto,

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{I} - 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} + 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \mathbf{I}.$$

Logo, $\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$, o que implica que $\mathbf{H}^\top\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

Portanto, $\mathbf{H}$ é uma matriz ortogonal.☺

Exercício 27.

Mostre que o produto $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$ é uma matriz positiva definida quando $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem colunas linearmente independentes e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz positiva definida.

Solução:

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com colunas linearmente independentes e seja $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ uma matriz simétrica e definida positiva.

Primeiro, observamos que o produto $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$ é simétrico. De fato, como $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$, temos:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}.$$

Agora, para mostrar que $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$ é positiva definida, consideramos a forma quadrática associada:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Reescrevendo:

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{y}, \quad \text{onde } \mathbf{y} := \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Como $\mathbf{C}$ é definida positiva, temos que $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{y} > 0$ sempre que $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Assim, resta mostrar que $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Isso decorre do fato de que as colunas de $\mathbf{A}$ são linearmente independentes, o que implica que o núcleo de $\mathbf{A}$ é trivial:

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Ou seja, a única solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Isso equivale a dizer que $\mathbf{A}$ é injetora.

Portanto, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, temos $\mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e como $\mathbf{C}$ é definida positiva, resulta:

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}) > 0.$$

Logo, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica e definida positiva.☺