Gabarito Programação não linear- Convexidade

Kelvin (Pol)

Exercício 1.

Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimizar} & f(x) \\ \textbf{sujeito a} & x \in C, \end{array} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado.

(a) Prove que se $x^* \in C$ é solução local do problema (1), então

$$\textbf{proj}_C(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) = x^*,$$

para todo $\alpha \geq 0$.

(b) Suponha que f é convexa. Prove que se

$$\textbf{proj}_C(x^* - \nabla f(x^*)) = x^*,$$

então x^* é solução global do problema (1).

Solução:

Observação

Os Teoremas 3.7 e 3.8 (Ribeiro–Karas, *Otimização Contínua*) fornecem uma caracterização equivalente da projeção ortogonal sobre conjuntos convexos e fechados. Mais precisamente, para $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado e $z \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\bar{z} = \text{proj}_S(z) \quad \Longleftrightarrow \quad (z - \bar{z})^T(x - \bar{z}) \leq 0, \ \forall x \in S.$$

Esta equivalência permite substituir problemas de projeção por desigualdades variacionais, o que é particularmente útil em condições de otimalidade de primeira ordem.

(a) Seja $x \in C$. Note que, como C é convexo, temos

$$(1-t)x^* + tx = x^* + t(x - x^*) \in C, \quad \forall t \in [0,1].$$

Como x^* é mínimo local de f sobre C, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \forall y \in C \cap B_\varepsilon(x^*).$$

Tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$x^* + t(x - x^*) \in B_\varepsilon(x^*),$$

logo

$$f(x^*) \leq f(x^* + t(x - x^*)) \Longrightarrow 0 \leq f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*).$$

Como f é diferenciável, temos

$$0 \leq f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) = t\nabla f(x^*)^T(x - x^*) + r(t), \quad \text{onde} \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Dividindo a desigualdade por $t > 0$, obtemos

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T(x - x^*) + \frac{r(t)}{t}.$$

Fazendo $t \to 0$, segue que

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T(x - x^*).$$

Dado $\alpha \geq 0$, tem-se

$$-\alpha \nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq 0 \Longrightarrow (x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^*)^T(x - x^*) \leq 0.$$

Como $x \in C$ foi arbitrário, segue que

$$\text{proj}_C\big(x^* - \alpha \nabla f(x^*)\big) = x^*.$$

(b) Suponha que f é convexa e que

$$\text{proj}_C\big(x^* - \nabla f(x^*)\big) = x^*.$$

Pela caracterização da projeção ortogonal sobre conjuntos convexos e fechados, segue que

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Como f é convexa, vale a desigualdade

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Combinando as duas desigualdades, obtemos

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in C,$$

o que mostra que x^* é solução global do problema. ☺

Exercício 2.

Considere o problema de minimização

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimizar} & f(x) \\ \textbf{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e fechado.

(a) Mostre que se x^* é um minimizador local deste problema, então

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \textbf{para todo } x \in \Omega. \tag{2}$$

(b) Prove que se $x^* \in \Omega$ satisfaz a condição (1) e f é uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$, então x^* é uma solução global do problema.

<u>**Solução:**</u>

(a) Seja $x \in \Omega$. Como Ω é convexo, tem-se

$$(1 - t)x^* + tx = x^* + t(x - x^*) \in C, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como x^* é um minimizador local de f sobre Ω, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \forall y \in \Omega \cap B_\varepsilon(x^*).$$

Tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$x^* + t(x - x^*) \in B_\varepsilon(x^*),$$

e portanto

$$f(x^*) \leq f(x^* + t(x - x^*)) \Longrightarrow 0 \leq f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*).$$

Como f é de classe $\mathcal{C}^1$, segue que

$$0 \leq f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) = t\nabla f(x^*)^T(x - x^*) + r(t), \quad \text{onde} \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Dividindo a desigualdade por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$, obtemos

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0,$$

para todo $x \in \Omega$.

(b) Suponha que $x^* \in \Omega$ satisfaz

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

e que f é convexa e de classe $\mathcal{C}^1$. Pela convexidade de f, vale a desigualdade

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Combinando com a condição acima, segue que

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in \Omega,$$

o que mostra que x^* é uma solução global do problema. ☺

Exercício 3.

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$.

(a) Prove que se x^* é um minimizador local de f, então $\nabla f(x^*) = 0$;

(b) Prove que se x^* é um minimizador local de f e, adicionalmente, f é duas vezes diferenciável em x^*, então $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva.

<u>**Solução:**</u>

(a) **Mostremos a condição necessária de primeira ordem.**
Note que x^* é um minimizador local de f, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B_\varepsilon(x^*).$$

Seja $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$x^* + td \in B_\varepsilon(x^*).$$

Como f é diferenciável em x^*, pelo desenvolvimento de Taylor de primeira ordem, obtemos

$$f(x^* + td) = f(x^*) + t\nabla f(x^*)^T d + r(t), \quad \text{onde} \quad \lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Como x^* é mínimo local, segue que

$$0 \leq f(x^* + td) - f(x^*) = t\nabla f(x^*)^T d + r(t).$$

Dividindo por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$, obtemos

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, tomando $d = -\nabla f(x^*)$, segue que

$$0 \leq -\|\nabla f(x^*)\|^2,$$

o que implica

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

(b) **Mostremos agora a condição necessária de segunda ordem.**
Suponha que x^* é um minimizador local de f e que f é duas vezes diferenciável em x^*. Seja $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Como x^* é um minimizador local, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B_\varepsilon(x^*).$$

Tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$x^* + td \in B_\varepsilon(x^*).$$

Pelo desenvolvimento de Taylor de segunda ordem em torno de x^*, segue que

$$f(x^* + td) = f(x^*) + t\nabla f(x^*)^T d + \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(t),$$

onde

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t^2} = 0.$$

Como $x^* + td \in B_\varepsilon(x^*)$ e x^* é um mínimo local de f, obtemos

$$0 \leq f(x^* + td) - f(x^*) = t\nabla f(x^*)^T d + \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(t).$$

Pelo item (a), tem-se $\nabla f(x^*) = 0$, e portanto

$$0 \leq \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(t).$$

Dividindo a desigualdade por $t^2 > 0$ e fazendo $t \to 0$, obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d,$$

para todo $d \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n,$$

o que mostra que $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva. ☺

Observação

Obsérvese que, bajo la hipótesis de que x^* es apenas um minimizador local (não necessariamente estrito), o argumento anterior permite concluir somente que

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0 \quad \text{para todo } d \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, que a matriz Hessiana é semidefinida positiva. De fato, essa hipótese não exclui a possibilidade da existência de direções não nulas $d \neq 0$ tais que

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d = 0,$$

as quais correspondem a direções degeneradas (ou planas) do funcional no ponto x^*.
Por outro lado, se fortalecermos a hipótese e assumirmos que x^* é um minimizador local estrito, então a desigualdade acima deve ser estrita para todo $d \neq 0$, o que implica

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0 \quad \text{para todo } d \neq 0,$$

e, consequentemente, a Hessiana $\nabla^2 f(x^*)$ é positiva definida.

Exercício 4.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se x^* é um ponto estacionário de f e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então x^* é minimizador local estrito de f.

Solução:

Mostremos que x^* é um minimizador local estrito de f (**Teorema da condição suficiente de segunda ordem**).
Como x^* é um ponto estacionário de f, temos

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Além disso, por hipótese, a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva. Logo, todos os seus autovalores são estritamente positivos. Denotando por $\lambda > 0$ o menor autovalor de $\nabla^2 f(x^*)$, segue que

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq \lambda \|d\|^2, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Como f é duas vezes diferenciável em x^*, pela fórmula de Taylor de segunda ordem, existe uma função resto $r(d)$ tal que

$$f(x^* + d) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(d),$$

onde

$$\lim_{\|d\| \to 0} \frac{r(d)}{\|d\|^2} = 0.$$

Usando que $\nabla f(x^*) = 0$, obtemos

$$f(x^* + d) - f(x^*) = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(d) \geq \frac{\lambda}{2} \|d\|^2 + r(d).$$

Dividindo ambos os lados por $\|d\|^2$, com $d \neq 0$, segue que

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} \geq \frac{\lambda}{2} + \frac{r(d)}{\|d\|^2}.$$

Como

$$\lim_{\|d\| \to 0} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{r(d)}{\|d\|^2} \right) = \frac{\lambda}{2} > 0,$$

pela preservação do sinal do limite, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x^* + d) - f(x^*) > 0 \quad \text{para todo } d \in B(0, \delta) \setminus \{0\}.$$

Definindo $d = x - x^*$, concluímos que

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in B(x^*, \delta) \setminus \{x^*\},$$

isto é, x^* é um minimizador local estrito de f. ☺

Exercício 5.

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita convexa em C quando

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y), \tag{3}$$

para todos $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$.

(a) **Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Prove que f é convexa em C se, e somente se,**

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \tag{4}$$

para todos $x, y \in C$;

(b) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Prove que se $\nabla f(x^*) = 0$, então x^* é um minimizador global de f em C;

<u>**Solução:**</u>

(a) Provemos a equivalência.

($\Rightarrow$) Suponha que f é convexa em C. Sejam $x, y \in C$ arbitrários e $t \in [0, 1]$. Pela convexidade de C, temos

$$(1-t)x + ty = x + t(y-x) \in C.$$

Pela convexidade de f,

$$f(x + t(y-x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Reescrevendo a desigualdade,

$$f(x + t(y-x)) - f(x) \leq t\big(f(y) - f(x)\big).$$

Como f é diferenciável em x, pelo desenvolvimento de Taylor de primeira ordem, existe uma função resto $r(t)$ tal que

$$f(x + t(y-x)) = f(x) + t\,\nabla f(x)^T(y-x) + r(t), \quad \text{onde } \lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$t\,\nabla f(x)^T(y-x) + r(t) \leq t\big(f(y) - f(x)\big).$$

Dividindo ambos os lados por $t > 0$, segue que

$$\nabla f(x)^T(y-x) + \frac{r(t)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

Fazendo $t \to 0$, concluímos que

$$\nabla f(x)^T(y-x) \leq f(y) - f(x),$$

ou seja,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x),$$

para todos $x, y \in C$.

($\Leftarrow$) Agora suponha que

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x), \quad \forall x, y \in C.$$

Sejam $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$. Defina

$$z := (1-t)x + ty \in C.$$

Aplicando a desigualdade acima aos pares (z, x) e (z, y), obtemos

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T(x-z) \quad \text{e} \quad f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T(y-z).$$

Multiplicando a primeira desigualdade por $(1-t)$ e a segunda por t, e somando, segue que

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T\big((1-t)(x-z) + t(y-z)\big).$$

Observando que

$$(1-t)(x-z) + t(y-z) = 0,$$

concluímos que

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(z) = f((1-t)x + ty),$$

o que mostra que f é convexa em C.

(b) Mostremos que x^* é um minimizador global de f em C.

Como f é convexa e diferenciável em C, pelo item (a) temos que

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad \forall x \in C.$$

Por hipótese, x^* satisfaz $\nabla f(x^*) = 0$. Substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in C.$$

Logo,

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in C,$$

o que mostra que x^* é um minimizador global de f em C. ☺

Exercício 6.

Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Mostre que $T(C)$ é convexo.

<u>**Solução:**</u>

Sejam $y_1, y_2 \in T(C)$. Pela definição de imagem, existem $x_1, x_2 \in C$ tais que

$$y_1 = T(x_1) \quad \text{e} \quad y_2 = T(x_2).$$

Como C é convexo, para todo $t \in [0,1]$ tem-se

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in C.$$

Como T é linear, preserva combinações lineares. Logo,

$$T\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)T(x_1) + tT(x_2).$$

Substituindo $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$, obtemos

$$(1-t)y_1 + ty_2 = T\big((1-t)x_1 + tx_2\big).$$

Logo

$$(1-t)y_1 + ty_2 \in T(C).$$

Portanto, $T(C)$ é convexo. ☺

Exercício 7.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo fechado. Mostre que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\|\mathbf{proj}_S(x) - \mathbf{proj}_S(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Solução:

Denotemos

$$p := \operatorname{proj}_S(x) \quad \text{e} \quad q := \operatorname{proj}_S(y).$$

Pela caracterização variacional da projeção sobre conjunto convexo e fechado, temos

$$(x-p)^T(z-p) \leq 0, \quad \forall z \in S,$$

e

$$(y-q)^T(z-q) \leq 0, \quad \forall z \in S.$$

Em particular, tomando $z = q$ na primeira desigualdade e $z = p$ na segunda, obtemos

$$(x-p)^T(q-p) \leq 0$$

e

$$(y-q)^T(p-q) \leq 0.$$

Somando ambas as desigualdades,

$$(x-p)^T(q-p) + (y-q)^T(p-q) \leq 0.$$

Observemos que $p - q = -(q-p)$. Assim,

$$(y-q)^T(p-q) = -(y-q)^T(q-p).$$

Substituindo acima,

$$(x-p)^T(q-p) - (y-q)^T(q-p) \leq 0,$$

ou ainda,

$$\big[(x-p) - (y-q)\big]^T(q-p) \leq 0.$$

Reorganizando o termo entre colchetes,

$$(x - y - (p-q))^T(q-p) \leq 0.$$

Logo,

$$(x-y)^T(q-p) - \|p-q\|^2 \leq 0.$$

Portanto,

$$\|p-q\|^2 \leq (x-y)^T(p-q).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$(x-y)^T(p-q) \leq \|x-y\|\,\|p-q\|.$$

Concluímos então que

$$\|p-q\|^2 \leq \|x-y\|\,\|p-q\|.$$

Se $p = q$, nada há a provar. Caso contrário, dividindo por $\|p-q\|$, obtemos

$$\|p-q\| \leq \|x-y\|.$$

Isto mostra que

$$\|\operatorname{proj}_S(x) - \operatorname{proj}_S(y)\| \leq \|x-y\|. ☺$$

Exercício 8.

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Mostre que C é um conjunto convexo.

Solução:

Sejam $x_1, x_2 \in C$. Pela definição do conjunto C, temos

$$Ax_1 \leq 0 \quad \text{e} \quad Ax_2 \leq 0.$$

Seja $t \in [0,1]$ e considere

$$x_t := (1-t)x_1 + tx_2.$$

Como A é linear,

$$Ax_t = A\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)Ax_1 + tAx_2.$$

Pelas desigualdades acima,

$$(1-t)Ax_1 + tAx_2 \leq 0.$$

Logo,

$$Ax_t \leq 0,$$

o que implica $x_t \in C$. Portanto, C é convexo. ☺

Exercício 9.

Considere C um conjunto convexo e $f, g : C \to \mathbb{R}$ funções convexas.

(a) Mostre que $f+g$ é convexa;

(b) A diferença $f-g$ é uma função convexa? Justifique;

(c) Que condição sobre $a \in \mathbb{R}$, garante que a função af é convexa?

Solução:

(a) Sejam $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$. Como f e g são convexas, temos

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

e

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y).$$

Somando as duas desigualdades,

$$(f+g)((1-t)x + ty) \leq (1-t)(f(x) + g(x)) + t(f(y) + g(y)).$$

Logo, $f+g$ é convexa.

(b) Em geral, a diferença $f-g$ não é convexa.
De fato, tome $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$. Ambas são convexas. Então

$$(f-g)(x) = -x^2,$$

que é uma função côncava, logo não é convexa.
Portanto, a diferença de funções convexas não é necessariamente convexa.

(c) Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere af.
Para $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$, pela convexidade de f,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Multiplicando por a, obtemos

$$af((1-t)x + ty) \leq a(1-t)f(x) + atf(y),$$

desde que $a \geq 0$.
Logo, af é convexa se, e somente se, $a \geq 0$.
Se $a < 0$, a desigualdade inverte o sentido e af torna-se côncava. ☹

Exercício 10.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + e^{x_1+x_2}$. Mostre que f é convexa.

Solução:

Observemos primero que f é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, pois é soma de um polinômio com a função exponencial, ambas suaves. Além disso, $\mathbb{R}^2$ é convexo. Assim, pelo Teorema da Condição Suficiente de 2ª Ordem para Convexidade, basta mostrar que o Hessiano $\nabla^2 f(x)$ é positivo semi-definido em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

Calculemos então as derivadas de segunda ordem.

Temos

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + e^{x_1+x_2}.$$

Derivando, obtemos o Hessiano:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + e^{x_1+x_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\nabla^2 f(x) = A + e^{x_1+x_2} B.$$

Analisemos agora a natureza de A e B usando o critério dos autovalores.
Primeiramente, A é simétrica. Calculando seus autovalores:
O traço é

$$\mathrm{tr}(A) = 2 + 4 = 6,$$

e o determinante é

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - (-1)^2 = 8 - 1 = 7 > 0.$$

Como $\det(A) > 0$ e $\mathrm{tr}(A) > 0$, segue que ambos os autovalores são positivos. Logo,

$$A \succ 0.$$

Agora consideremos B. Também é simétrica. Seu determinante é

$$\det(B) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0,$$

e seu traço é

$$\mathrm{tr}(B) = 2.$$

Disso concluímos que os autovalores são 0 e 2. Portanto,

$$B \succeq 0.$$

Além disso, como $e^{x_1+x_2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, pela observação sobre multiplicação por escalar, temos

$$e^{x_1+x_2} B \succeq 0.$$

Finalmente, sendo $A \succ 0$ e $e^{x_1+x_2} B \succeq 0$, segue que

$$\nabla^2 f(x) = A + e^{x_1+x_2} B \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Concluímos então que o Hessiano é positivo definido em todo ponto. Logo, f é estritamente convexa em $\mathbb{R}^2$.☺