



## Gabarito Análise $\mathbb{R}^n$ - Diferenciabilidade I

Kelvin (Pol)

### Exercício 1.

Um caminho diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $I$  um intervalo.

a) Mostre que se  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é outro caminho diferenciável, então

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0) \rangle + \langle f(t_0), g'(t_0) \rangle.$$

b) Defina  $\int_a^b f(t) dt$  pondo

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Supondo  $f$  de classe  $C^1$ , mostre que:

- i.  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ ;
- ii. Sabemos que se  $I = [a, b]$  e  $\|f'(t)\| \leq M$ , então  $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ , obtenha outra demonstração para este resultado usando o item (i);
- iii. Por qual motivo estamos supondo  $f$  de classe  $C^1$  no item (i.)?

### Solução:

a) Suponha que caminhos  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  são diferenciáveis, ou seja

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

Note que o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação bilinear contínua. Como as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis, em particular são contínuas. Assim, a composição  $(t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle)$  é diferenciável, e podemos aplicar a definição de derivada utilizando as propriedades da bilinearidade e continuidade do produto interno.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f, g \rangle(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f, g \rangle(t+h) - \langle f, g \rangle(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t+h) \rangle + \langle f(t), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h) - f(t), g(t+h) \rangle + \langle f(t), g(t+h) - g(t) \rangle}{h} \\ &= \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} g(t+h) \right\rangle + \left\langle f(t), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right\rangle \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle. \end{aligned}$$

b) Definamos

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

e suponhamos que  $f$  é de classe  $C^1$

i. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como  $f$  é de classe  $C^1$ , temos que:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

- ii. Seja  $I = [a, b]$  e suponha que  $\|f'(t)\| \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$ . Aplicando o resultado do item (i) e utilizando a desigualdade da norma da integral, obtemos:

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \int_a^b M dt = M(b - a).$$

- iii. A hipótese de que  $f$  é de classe  $C^1$  é necessária para garantir que  $f'$  seja contínua em  $[a, b]$ , o que assegura que  $f'$  seja integrável no sentido de Riemann. Assim, a igualdade do Teorema Fundamental do Cálculo no item (i) é válida.

## Exercício 2.

Considere  $M(n)$  o conjunto das matrizes reais de ordem  $n$  e a função  $f : M(n) \rightarrow M(n)$  dada por

$$f(A) = A^3 + A^2.$$

Determine  $f'(A_0)H$ , com  $H \in M(n)$

### Solução:

Note que  $M(n)$  é aberto, pois  $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . Seja  $A_0 \in M(n)$  e o vetor  $H \in M(n)$  temos  $A_0 + H \in M(n)$ , logo  $f(A_0 + H)$  fica bem definido. Assim,

$$\begin{aligned} f(A_0 + H) - f(A_0) &= (A_0 + H)^3 + (A_0 + H)^2 - A_0^3 - A_0^2 \\ &= (A_0 + H)(A_0^2 + A_0H + HA_0 + H^2) + A_0^2 + A_0H + HA_0 + H^2 - A_0^3 - A_0^2 \\ &= \cancel{A_0^3} + \cancel{A_0^2}H + A_0HA_0 + A_0H^2 + HA_0^2 + HA_0H + H^2A_0 + H^3 + \cancel{A_0^3} + \cancel{A_0^2}H + HA_0 + H^2 - \cancel{A_0^3} - \cancel{A_0^2} \\ &= \underbrace{A_0^2H + A_0HA_0 + HA_0^2 + A_0H + HA_0}_{f'(A_0)H} + \underbrace{A_0H^2 + HA_0H + H^2A_0 + H^3 + H^2}_{r(H)}. \end{aligned}$$

Definamos as funções:

$$f'(A) : M(n) \rightarrow M(n)$$

$$H \mapsto f'(A)H := A^2H + AHA + HA^2 + AH + HA$$

$$r(H) := AH^2 + HAH + H^2A + H^3 + H^2$$

- $f'(A) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$ .

De fato,

dados  $H_1, H_2 \in M(n)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} f'(A)(\alpha H_1 + H_2) &= A^2(\alpha H_1 + H_2) + A(\alpha H_1 + H_2)A + (\alpha H_1 + H_2)A^2 + A(\alpha H_1 + H_2) + (\alpha H_1 + H_2)A \\ &= \alpha A^2H_1 + A^2H_2 + \alpha AH_1A + AH_2A + \alpha H_1A^2 + H_2A^2 + \alpha AH_1 + AH_2 + \alpha H_1A + H_2A \\ &= \alpha(A^2H_1 + AH_1A + H_1A^2 + AH_1 + H_1A) + A^2H_2 + AH_2A + H_2A^2 + AH_2 + H_2A \\ &= \alpha f'(A)H_1 + f'(A)H_2. \end{aligned}$$

Logo,  $f'(A)$  é uma transformação linear.

- $\|r(H)\| \rightarrow 0$ .

De fato, pelas propriedades das normas matriciais temos,

$$\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|AH^2 + HAH + H^2A + H^3 + H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A\|\|H\| + \|H\|\|A\| + \|H\|\|A\| + \|H\|^2 + \|H\|}{\|H\|}$$

Como  $A$  é uma matriz, e temos  $M(n) \cong L(\mathbb{R}^n)$ , então  $A$  pode ser visto como uma transformação linear de dimensão finita. Nesse caso, sabemos que toda aplicação linear em dimensão finita é limitada, logo  $\|A\|$  é finita e pode ser tratada como constante ao tomar o limite. Além disso, pela continuidade da norma e fazendo  $H \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{H \rightarrow 0} [\|A\|\|H\| + \|A\|\|H\| + \|H\|\|A\| + \|H\|^2 + \|H\|] = 0.$$

Daí,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = 0.$$

Portanto a função  $f$  é diferenciável e  $f'(A_0)H = A_0^2H + A_0HA_0 + HA_0^2 + A_0H + HA_0$ . ☺

### Observação

De fato,  $f$  é de classe  $C^1$ , basta mostrar  $\lim_{B \rightarrow 0} f'(A + B)H = f'(A)H$  para algum  $B \in M(n)$ .

**Exercício 3.**

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Prove que:

- a) A aplicação  $T(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  está bem definida em  $\mathbb{R}^2$  e é linear;  
 b)  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

**Solução:**

- a) Note que  $\mathbb{R}^2$  é um aberto. Dado  $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$  com  $k \neq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th, tk)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{(th)^2}{tk}\right)\right] \sqrt{(th)^2 + (tk)^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{th}{k}\right)\right] \cancel{t} \sqrt{h^2 + k^2}}{\cancel{t}} \\ &= [1 - \cos(0)] \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , a transformação nula

$$0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto 0,$$

pertence a  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Portanto, a aplicação

$$T(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$$

está bem definida para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  e é linear.

- b) Para que  $f$  seja diferenciável em  $(0, 0)$  com  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$  deveria satisfazer

$$f((0, 0) + (h, k)) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) \cdot (h, k) + r(h, k) \text{ onde, } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

Pois  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$  e  $f(0, 0) = 0$ . Porém esse limite não existe, de fato, considere a norma euclidiana  $\|\cdot\|_2$  pois num espaço normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|_2} &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{h^2}{k}\right)\right] \sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \left[1 - \cos\left(\frac{h^2}{k}\right)\right]. \end{aligned}$$

Vamos estudar esse limite ao longo de duas sequências distintas:

- Primeiramente, considere a sequência  $(h_i, k_i) = (0, 1/i)$ . Temos que  $(h_i, k_i) \rightarrow (0, 0)$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Note que, nesse caso,

$$\frac{h_i^2}{k_i} = \frac{0}{1/i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\left(\frac{h_i^2}{k_i}\right) = 1 - \cos(0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[1 - \cos\left(\frac{h_i^2}{k_i}\right)\right] = 0.$$

- Agora, considere a sequência  $(h_j, k_j) = (\sqrt{\pi/2j}, 1/j)$ . Note que  $h_j^2 = \pi/2j$  e  $k_j = 1/j$ , então:

$$\frac{h_j^2}{k_j} = \frac{\pi/2j}{1/j} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \cos\left(\frac{h_j^2}{k_j}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ 1 - \cos\left(\frac{h_j^2}{k_j}\right) \right] = 1.$$

Como os dois limites ao longo dessas sequências são diferentes, concluímos que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \text{ não existe.}$$

Logo, a função  $f$  **não é diferenciável** em  $(0,0)$ , apesar de todas as derivadas direcionais existirem.

### Observação

Apesar de a função  $f$  admitir todas as derivadas direcionais no ponto  $(0,0)$ , e que a aplicação

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$$

seja bem definida e linear, isso **não implica** que  $f$  seja diferenciável no sentido de Fréchet.

Essa distinção é fundamental em análise funcional e cálculo multivariado:

- A **derivabilidade de Gâteaux** exige somente que, para cada direção  $v \in E$ , exista o limite da derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$  no ponto  $x$ .
- Por outro lado a **diferenciabilidade no sentido de Fréchet** requer a existência de uma transformação linear contínua

$$T \in \mathcal{L}(E, F)$$

que aproxime  $f$  uniformemente ao redor do ponto, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

No contexto de espaços de dimensão finita, como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , toda transformação linear é automaticamente contínua, o que simplifica a verificação da diferenciabilidade.

Entretanto, em espaços normados de dimensão infinita, uma transformação linear pode **não ser contínua**. Portanto, para garantir que  $f$  seja diferenciável em sentido forte, é necessário verificar explicitamente a linearidade e a continuidade da aplicação derivada  $f'(x)$ .

Adicionalmente, é importante distinguir:

- A existência e linearidade da aplicação que associa a cada direção  $v$  a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ,
- Da continuidade da função derivada  $f' : U \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ .

A continuidade da função derivada é uma condição mais forte que caracteriza funções de classe  $C^1$ .

Em resumo, a existência das derivadas direcionais e sua linearidade não garantem, isoladamente, que  $f$  seja diferenciável no sentido de Fréchet.

### Exercício 4.

Considere  $A \in M(3)$  como um elemento de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , supondo cada coluna  $a_i \in \mathbb{R}^3$ . Mostre que a aplicação determinante  $\det : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e obtenha  $(\det)'(A_0)(I)$ .

### Solução:

É claro que  $M(3)$  é aberto. Dado o ponto  $A \in M(n)$  com  $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$  e o vetor  $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$ , onde  $a_1, a_2, a_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^3$  são vetores coluna das matrizes correspondentes.

Note que  $\det(A + H) = \det(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$  e como  $\det$  é uma função 3-linear, temos

$$\begin{aligned}\det(A + H) - \det(A) &= \det(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - \det(a_1, a_2, a_3) \\ &= \det(a_1, a_2, a_3) + \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3) + \det(a_1, h_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3) - \det(a_1, a_2, a_3) \\ &= \underbrace{\det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)}_{\det'(A)H} + \det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3)\end{aligned}$$

Definamos

$$\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3),$$

onde  $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$  e  $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$ .

A aplicação  $\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)$  é linear em  $H$ . Isto se deve diretamente à propriedade de *multilinearidade* (ou *3-linearidade*) do determinante. Para cada termo  $\det(\dots, h_i, \dots)$ , o determinante é linear na coluna  $h_i$  quando as outras colunas são fixas. Como  $\det'(A)(H)$  é uma soma de termos, onde cada termo é linear em uma coluna de  $H$  (sendo as outras colunas de  $A$  fixas), a soma resultante também será linear em  $H$ .

O de outra forma, cada termo é linear em  $H$ , pois a função determinante é multilinear. Logo,  $\det'(A) : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma transformação linear.

Definimos a função resto:

$$R(H) := \det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3).$$

A aplicação determinante  $\det : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função 3-linear. Como o determinante é uma função multilinear em espaço de dimensão finita, é contínuo e limitada. Assim, para quaisquer vetores  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| \leq \|\det\| \|v_1\| \|v_2\| \|v_3\|$$

Note que quando  $H \rightarrow 0$  em  $M(3)$ , as suas colunas  $h_1, h_2, h_3$  também tendem ao vetor nulo em  $\mathbb{R}^3$  (i.e.,  $\|h_i\| \rightarrow 0$ ).

Consideremos a norma  $\|H\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |h_i|$ . Daí,

$$\begin{aligned}\frac{|R(H)|}{\|H\|_\infty} &= \frac{|\det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3)|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{|\det(a_1, h_2, h_3)| + |\det(h_1, a_2, h_3)| + |\det(h_1, h_2, a_3)| + |\det(h_1, h_2, h_3)|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{\|\det\| \|a_1\| \|h_2\| \|h_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|a_2\| \|h_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|h_2\| \|a_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|h_2\| \|h_3\|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{\|\det\| \|a_1\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|a_2\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|a_3\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|H\|_\infty^3}{\|H\|_\infty} \\ &= \|\det\| \|a_1\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|a_2\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|a_3\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|H\|_\infty^2 \\ &= (\|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|) \underbrace{\|\det\|}_{\text{limitada}} \underbrace{\|H\|_\infty}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\det\|}_{\text{limitada}} \underbrace{\|H\|_\infty^2}_{\rightarrow 0}\end{aligned}$$

Portanto, tomando limite quando  $H \rightarrow 0$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{|R(H)|}{\|H\|_\infty} = 0;$$

o que implica que a aplicação  $\det$  é diferenciável e sua derivada direcional é

$\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)$ , em particular,

$\det'(A)(I) := \det(e_1, a_2, a_3) + \det(a_1, e_2, a_3) + \det(a_1, a_2, e_3)$ . ☺

### Exercício 5.

Seja  $\mathbb{R}^{n^2}$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  com entradas reais e seja  $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  dada por  $f(A) = AA^t$ , onde  $A^t$  é a transposta de  $A$ .

a) Descreva  $f'(X)$  e mostre que  $f'(X)H$  é simétrica para toda matriz  $H \in \mathbb{R}^{n^2}$ ;

b) Mostre que se  $X^{-1} = X^t$ , então para toda matriz simétrica  $S$  (ou seja,  $S = S^t$ ), existe pelo menos uma matriz  $H$  tal que  $f'(X)H = S$ .

Solução:

a) Mostremos que  $f$  é diferenciável. Sejam  $X, H \in M(n)$ , pelas propriedades da transposta, obtemos

$$\begin{aligned} f(X+H) - f(X) &:= (X+H)(X+H)^t - XX^t \\ &= (X+H)(X^t + H^t) - XX^t \\ &= XX^t + XH^t + HX^t + HH^t - XX^t \\ &= \underbrace{XH^t + HX^t}_{f'(X)H} + \underbrace{HH^t}_{R(H)}. \end{aligned}$$

Defina-se a função

$$\begin{aligned} f'(X) : M(n) &\longrightarrow M(n) \\ H &\longmapsto f'(X)H := XH^t + HX^t. \end{aligned}$$

Note que  $f'(X) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$ . De fato, dados  $H_1, H_2 \in M(n)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$\begin{aligned} f'(X)(\alpha H_1 + H_2) &= X(\alpha H_1 + H_2)^t + (\alpha H_1 + H_2)X^t \\ &= \alpha XH_1^t + XH_2^t + \alpha H_1X^t + H_2X^t \\ &= \alpha(XH_1^t + H_1X^t) + XH_2^t + H_2X^t \\ &= \alpha f'(X)H_1 + f'(X)H_2; \end{aligned}$$

logo  $f'(X)$  é uma transformação linear.

Por outro lado, definamos a função resto por  $R(H) := HH^t$ , pelas propriedades da norma de matrizes, temos

$$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|HH^t\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|\|H^t\|}{\|H\|} = \|H\|.$$

Pela continuidade da norma e fazendo  $H \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{R(H)}{\|H\|} = 0.$$

Portanto  $f$  é diferenciável. Além disso, como  $f'(X) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$ , existe a transformação linear identidade  $I \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$  (pois  $\mathcal{L}(M(n), M(n))$  é um espaço vetorial). Daí,  $f'(X)I = XI^t + IX^t = X + X^t \implies f'(X) = X + X^t$ .

Finalmente pelas propriedades da transposta (novamente) segue-se que

$$\begin{aligned} [f'(X)H]^t &= [XH^t + HX^t]^t \\ &= (XH^t)^t + (HX^t)^t \\ &= (H^t)^t X^t + (X^t)^t H^t \\ &= HX^t + XH^t \\ &= f'(X)H, \end{aligned}$$

o que implica que  $f'(X)H$  é simétrica.

b) Suponhamos que  $X^{-1} = X^t$  e dado a matriz simétrica  $S$  existe a matriz  $H = \frac{1}{2}SX$  tal que

$$\begin{aligned} f'(X)H &= XH^t + HX^t \\ &= \frac{1}{2}X(SX)^t + \frac{1}{2}(SX)X^t \\ &= \frac{1}{2}XX^t S^t + \frac{1}{2}S \\ &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S \\ &= S \odot \end{aligned}$$

## Exercício 6.

Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$  mas as derivadas parciais de  $f$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .

Solução:

- **$f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .** De fato,

para que  $f$  seja diferenciável em  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , precisamos que exista em  $f'(0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  tal que se  $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  satisfaça

$$f((0, 0) + (h, k)) = f(0, 0) + f'(0, 0)(h, k) + r(h, k) \text{ onde, } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Equivalentemente,

$$f(h, k) = f'(0, 0)(h, k) + r(h, k), \text{ onde, } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (1)$$

Note que a derivada direcional é

$$\begin{aligned} f'(0, 0)(h, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th, tk)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(th)^2 + (tk)^2] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{(th)^2 + (tk)^2}}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t(h^2 + k^2)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}_{\text{limitado}}; \end{aligned}$$

como  $\left|\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)\right| \leq 1$  e  $t(h^2 + k^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . Daí,  $f'(0, 0)(h, k) = 0$ . Além disso,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial e existe a transformação linear nula  $O \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Portanto o candidato a ser a derivada é  $f'(0, 0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Nesse caso, da equação (1), temos  $r(h, k) = f(h, k)$ . Considerando a norma euclideana temos,

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|_2} &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}\right)}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}; \text{ (troca de variável)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{r}\right)}_{\text{limitada}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$  com  $f'(0, 0) = 0$ .

- **As derivadas parciais de  $f$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .** De fato,

– Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{d}{dx}[(x^2 + y^2)] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \frac{d}{dx} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right] \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy}[(x^2 + y^2)] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \frac{d}{dy} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right] \\
&= 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \\
&= 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

– Para  $(x, y) = (0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{limitado}} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{limitado}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo é possível definir as funções

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{cases} 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

#### Observação

As funções são contínuas se  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  ;  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

- i) Para mostrar que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  não é contínua em  $(0, 0)$ , é suficiente mostrar que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  não existe. Consideremos o caminho  $\alpha(t) = (t, 0)$ , com  $t > 0$ , de modo que  $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow 0^+$ . Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim,

$$\frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial x}(t) = \frac{\partial(f(\alpha(t)))}{\partial x} = \frac{\partial(f(t, 0))}{\partial x} = 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{no existe}}$$

O primeiro termo,  $2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ , tende a 0, pois  $t \rightarrow 0$  e  $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$  é limitada. No entanto, o segundo termo,  $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ , oscila entre  $-1$  e  $1$  e não admite limite quando  $t \rightarrow 0^+$ . Portanto, o limite acima **não existe**.

Como o limite da função derivada parcial não existe quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}$  **não é contínua** em  $(0, 0)$ .

- ii) Para mostrar que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não é contínua em  $(0,0)$ , é suficiente mostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  não existe. Consideremos o caminho  $\alpha(t) = (0,t)$ , com  $t > 0$ , de modo que  $\alpha(t) \rightarrow (0,0)$  quando  $t \rightarrow 0^+$ . Para  $(x,y) \neq (0,0)$ , tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim,

$$\frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial y}(t) = \frac{\partial(f(\alpha(t)))}{\partial y} = \frac{\partial(f(0,t))}{\partial y} = 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{não existe}}$$

O primeiro termo,  $2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ , tende a 0, pois  $t \rightarrow 0$  e  $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$  é limitada. No entanto, o segundo termo,  $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ , oscila entre  $-1$  e  $1$  e não admite limite quando  $t \rightarrow 0^+$ . Portanto, o limite acima **não existe**.

Como o limite da função derivada parcial não existe quando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , então  $\frac{\partial f}{\partial y}$  **não é contínua** em  $(0,0)$ .  $\odot$

### Exercício 7.

Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que:

- a) Se  $f(tx) = tf(x)$ , para todo  $t > 0$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é linear;  
b) Conclua que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em  $(0,0)$ .

### Solução:

- a) Mostremos que se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $0 \in \mathbb{R}^n$  e  $f(tx) = tf(x)$ , para todo  $t > 0$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é linear. De fato,

note que  $f$  é diferenciável em  $0 \in \mathbb{R}^n$ , em particular ela é contínua. Como  $f(tx) = tf(x)$ , para todo  $t > 0$ , então para  $x \neq 0$  obtemos

$$f(0) = f\left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot x\right) \underbrace{=}_{\frac{1}{k} > 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} f(x) = 0 \cdot f(x) = 0,$$

ou seja,  $f(0) = 0$ .

Por outro lado, considere o vector  $tv$  onde  $t > 0$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ , como  $f$  é diferenciável em  $0 \in \mathbb{R}^n$ , implica que existe  $f'(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tal que

$$f(0 + tv) = f(0) + f'(0)tv + r(tv) \quad \text{onde} \quad \lim_{tv \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0,$$

escrito de outra forma,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{t} = 0$$

Como  $f(0) = 0$  e  $t > 0$ , temos então

$$f(tv) = f'(0)tv + r(tv) \implies tf(v) = f'(0)tv + r(tv) \implies f(v) = f'(0)v + \frac{r(tv)}{t}$$

fazendo  $t \rightarrow 0$ , segue-se

$$f(v) = f'(0)v$$

como  $f'(0)$  é uma transformação linear então  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

b) Pelo item a), é possível fazer a seguinte afirmação:

**Afirmação 1:**

Dada a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $f$  é diferenciável em 0 e  $f(tx) = tf(x)$ , para todo  $t > 0$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é linear.

A contrapositiva é: dada a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $f$  não é linear, então  $f$  não é diferenciável em  $0 \in \mathbb{R}^n$  ou

$$\exists t > 0, \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(tx) \neq tf(x).$$

Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

É claro que  $f$  não é linear. Além disso  $t > 0$  e para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , temos:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^3}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^3 x^3}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{tx^3}{x^2 + y^2} = tf(x, y),$$

e para  $(x, y) = (0, 0)$  o cálculo é trivial. Logo,  $f(tx, ty) = tf(x, y)$  para todo  $t > 0$ . Assim, como  $f$  não é linear e satisfaz a equação funcional, segue que  $f$  **não é diferenciável** em  $(0, 0)$ .  $\odot$

**Exercício 8.**

Suponha  $A \subset \mathbb{R}^n$  um aberto  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável. Mostre que se  $f$  é Lipschitz, com constante  $M$ , então  $\|f'(x)\| \leq M$ , para todo  $x \in A$ .

**Solução:**

Suponhamos que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável e Lipschitz (com constante  $M$ ) num aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Assim, existe  $M > 0$  tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \forall x, y \in A$ . Consideremos  $y = h + x$  onde  $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , então  $\|f(x+h) - f(x)\| \leq M\|h\|$ . Daí

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M.$$

Por outro lado temos que  $f$  é diferenciável, o que implica que existe  $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \quad ; \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + r(h) \\ f(x+h) - f(x) &= f'(x)h + r(h) \\ \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} &= \frac{f'(x)h}{\|h\|} + \frac{r(h)}{\|h\|} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)h}{\|h\|} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|}}_0; \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)h}{\|h\|}, \end{aligned}$$

tomando norma e pela continuidade dela, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f'(x)h}{\|h\|} \right\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| f'(x) \underbrace{\left( \frac{h}{\|h\|} \right)}_{\text{unitário}} \right\|.$$

Considerando a norma espectral para o espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  definida por  $\|f'(x)\| := \sup_{\|v\|=1} \|f'(x)v\|$ , tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \|f'(x)\|,$$

e por Lipschitz nos tenhamos  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M$ . Daí,  $\|f'(x)\| \leq M$ .  $\odot$

**Exercício 9.**

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $L : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$  diferenciáveis. Definindo

$$\varphi(x) = \langle L(x) \cdot f(x), g(x) \rangle,$$

para  $x \in U$  e  $h \in \mathbb{R}^n$  quaisquer, determine  $\varphi'(x) \cdot h$ .

**Solução:**

Seja  $x \in U$  e  $h \in \mathbb{R}^n$ . Definamos  $F(x) := L(x) \cdot f(x)$ , então  $\varphi(x) = \langle F(x), g(x) \rangle$ . Note que  $f, g, L$  são diferenciáveis em  $U$ , em particular, existem suas derivadas direcionais e além disso são  $f, g, L$  contínuas em  $U$ . Por outro lado, perceba que  $L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$  e toda transformação linear é diferenciável, logo  $F(x) = L(x) \cdot f(x)$  é diferenciável, em particular, existe sua derivada direcional. Ora, o produto interno é uma função contínua. Nessas condições e pela bi-linearidade do produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi'(x)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} \\ &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x+th), g(x+th) \rangle - \langle F(x), g(x) \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x+th), g(x+th) \rangle - \langle F(x), g(x+th) \rangle + \langle F(x), g(x+th) \rangle - \langle F(x), g(x) \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x+th) - F(x), g(x+th) \rangle + \langle F(x), g(x+th) - g(x) \rangle}{t} \\ &= \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x+th) - F(x), g(x) \rangle}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} g(x+th) \right\rangle + \left\langle F(x), \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+th) - g(x)}{t} \right\rangle \\ &= \langle F'(x)h, g(x) \rangle + \langle F(x), g'(x)h \rangle. \end{aligned}$$

Agora só precisamos encontrar a expressão da derivada direcional da função  $F(x) = L(x) \cdot f(x)$  onde  $x \in U$ . Nas condições indicadas anteriormente e considerando ainda que  $L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ , ela é contínua. Daí

$$\begin{aligned} F'(x)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x+th) \cdot f(x+th) - L(x) \cdot f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x+th) \cdot f(x+th) - L(x+th) \cdot f(x) + L(x+th) \cdot f(x) - L(x)f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x+th) \cdot [f(x+th) - f(x)] + [L(x+th) - L(x)] \cdot f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} L(x+th) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x+th) - L(x)}{t} \right] \cdot f(x) \\ &= L(x) \cdot f'(x)h + L'(x)h \cdot f(x) \end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$F'(x)h = L(x) \cdot f'(x)h + L'(x)h \cdot f(x).$$

Logo,

$$\varphi'(x)h = \langle L(x) \cdot f'(x)h + L'(x)h \cdot f(x), g(x) \rangle + \langle L(x) \cdot f(x), g'(x)h \rangle$$

ou

$$\varphi'(x)h = \langle L(x) \cdot f'(x)h, g(x) \rangle + \langle L'(x)h \cdot f(x), g(x) \rangle + \langle L(x) \cdot f(x), g'(x)h \rangle. \odot$$

**Exercício 10.**

Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça  $|f(x)| \leq \|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que  $f$  é diferenciável na origem.

**Solução:**

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq \|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Em particular, temos

$$|f(0)| \leq \|0\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Vamos mostrar que  $f$  é diferenciável na origem e que a derivada é nula.

Considere  $v \in \mathbb{R}^n$  fixo e  $t > 0$ . Temos

$$|f(tv)| \leq \|tv\|^2 = t^2\|v\|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(tv)|}{t} \leq t\|v\|^2.$$

Tomando o limite quando  $t \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(tv)|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0} t\|v\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} = 0,$$

isto é, a derivada direcional de  $f$  na origem na direção  $v$  existe e é nula:

$$f'(0)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} = 0.$$

Assim, o candidato à diferencial de  $f$  na origem é a aplicação linear nula:  $f'(v) = 0$ .

Vamos verificar que  $f$  é diferenciável em 0 com derivada nula. Para isso, definimos a função resto

$$r(v) := f(v) - f(0) - f'(0)v = f(v),$$

pois  $f(0) = 0$  e  $f'(0)v = 0$ .

Queremos mostrar que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Como  $|f(v)| \leq \|v\|^2$ , temos

$$\left| \frac{r(v)}{\|v\|} \right| = \left| \frac{f(v)}{\|v\|} \right| \leq \|v\| \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Portanto,  $f$  é diferenciável na origem com derivada nula:  $f'(0) = 0$ .

### Exercício 11.

**Estude a diferenciabilidade explicitando  $F'(p)$ ;**

- (a)  $F(x) = (x, f(x))$ , sendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciável;
- (b)  $F(x) = (x, f(y))$ , sendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciável e  $x \in \mathbb{R}^m$ .

### Solução:

(a) Note que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto F(x) := (x, f(x)) \end{aligned}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  é diferenciável. Como a função identidade  $x \mapsto x$  é diferenciável e  $f$  também, a função  $F$  é diferenciável como combinação de funções diferenciáveis.

A derivada de  $F$  no ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é dada por:

$$F'(p) = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ f'(p)_{k \times n} \end{bmatrix} \in M(n+k, n).$$

(b) A função agora é

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto F(x) := (x, f(y)) \end{aligned}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^n$  é um ponto fixo. Logo,  $f(y)$  é uma constante em  $\mathbb{R}^k$ , e a aplicação  $x \mapsto f(y)$  é constante.

Assim,  $F$  é diferenciável, sendo a concatenação da identidade e de uma função constante, e sua derivada em qualquer ponto  $p \in \mathbb{R}^m$  é:

$$F'(p) = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ 0_{k \times m} \end{bmatrix} \in M(m+k, m).$$

### Exercício 12.

**Prove que se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é constante.**

### Solução:

•  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ . De fato,

sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e consideremos  $y = x + h$  com  $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Pela desigualdade, tem-se

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\|^2 \Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \|h\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = 0$$

Note que, não conhecemos a derivada de  $f$  em  $x$ , mas a igualdade

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = 0,$$

nos dá um candidato à derivada como a transformação nula:

$$Th := 0 \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, suponhamos que  $f$  é diferenciável em todo  $\mathbb{R}^n$  com  $Th := 0$  e satisfaz  $f(a+h) = f(a) + Th + r(h)$ , onde é necessário que cumpra  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$ .

Vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

Mas como  $Th = 0$ , isso é simplesmente

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0,$$

o que mostra que  $f$  é diferenciável em  $x$  com derivada  $Th = f'(x)h = 0$  para todo  $h$ , ou seja  $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Como  $x \in \mathbb{R}^n$  era arbitrário,  $f$  é diferenciável em todo  $\mathbb{R}^n$ .

•  **$f$  é constante.**

De fato, note que  $\mathbb{R}^n$  é aberto e conexo, além disso,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  com  $f'(x) = 0$ . Logo pelo teorema do valor constante  $f$  é constante. ☺

**Exercício 13.**

**Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável. Mostre que:**

- a)  $F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$  é diferenciável, explicitando  $F'(x_0)h$ ;  
b) Se  $\|f(x)\| \equiv 1$ , então  $\det(f'(x)) \equiv 0$ .

**Solução:**

- a) Suponhamos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável. Definimos

$$F(x) := \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$$

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  fixo. Para  $h \in \mathbb{R}^n$ , como  $f$  é diferenciável em  $x$ , temos:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Usando a bilinearidade e continuidade do produto interno, temos:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \langle f(x+h), f(x+h) \rangle - \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle f(x) + f'(x)h + r(h), f(x) + f'(x)h + r(h) \rangle - \|f(x)\|^2 \\ &= 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle + \|f'(x)h\|^2 + 2\langle r(h), f(x) + f'(x)h \rangle + \|r(h)\|^2. \end{aligned}$$

Assim, identificamos a parte linear da expansão:

$$F'(x)h := 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle,$$

e a função resto

$$R(h) := \|f'(x)h\|^2 + 2\langle r(h), f(x) + f'(x)h \rangle + \|r(h)\|^2.$$

Como  $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $f'(x)$  é limitada, e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e das transformações lineares, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|R(h)|}{\|h\|} &\leq \frac{\|f'(x)h\|^2}{\|h\|} + \frac{2\|r(h)\| \cdot \|f(x) + f'(x)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r(h)\|^2}{\|h\|} \\ &\leq \|f'(x)\|^2 \|h\| + 2\|r(h)\| \cdot \frac{\|f(x)\| + \|f'(x)\|\|h\|}{\|h\|} + \frac{\|r(h)\|^2}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Como  $\|r(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$ , segue que  $R(h)/\|h\| \rightarrow 0$ . Logo,  $F$  é diferenciável em  $x$ , com derivada dada por

$$F'(x)h = 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle.$$

b) ☹

#### Exercício 14.

Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , chama-se harmônica quando  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Prove que a matriz hessiana de uma função harmônica não pode ser definida (nem positiva e nem negativa).

#### Solução:

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  harmônica no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

A matriz Hessiana está definida por

$$\text{hess } f(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) ; \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

e, pelo teorema de Schwarz, tem-se

$$\text{hess } f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad ; \text{ com } i \neq j; \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

portanto, a matriz  $\text{hess } f(x)$  é simétrica.

Lembre que  $\text{hess } f(x)$  é positiva definida, denotado por  $\text{hess } f(x) > 0$ , se ela é simétrica e  $x^t \text{hess } f(x)x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Analogamente,  $\text{hess } f(x)$  é negativa definida, se  $x^t \text{hess } f(x)x < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**Demostremos que se  $x^t \text{hess } f(x)x > 0 \implies \text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0$ .**

Suponhamos  $x^t \text{hess } f(x)x > 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , em particular, tome-se o vetor da base canônica  $e_i$  (fixo), note que  $e_1 \neq 0$ . Daí,

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \text{i-ésima} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} > 0$$
$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0,$$

fazendo para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0 ; \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0.$$

Agora, observe que a soma dos elementos da diagonal da matriz Hessiana é chamada de traça da matriz, e denotamos por

$$\text{tr}(\text{hess } f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Portanto, concluímos que

$$\text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0.$$

Da mesma forma se mostra para a negativa definida, onde teríamos  $\text{tr}(\text{hess } f(x)) < 0$ . Consequentemente, é possível fazer a seguinte afirmação:

#### Afirmação 2:

- Se  $x^t \text{hess } f(x)x > 0$ , então  $\text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0$ ;
- Se  $x^t \text{hess } f(x)x < 0$ , então  $\text{tr}(\text{hess } f(x)) < 0$ .

Para nosso problema, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0,$$

ou seja,  $\text{tr}(\text{hess } f(x)) = 0$ . Pela contra-positiva da afirmação acima, concluímos que  $\text{hess } f(x)$  não é positiva definida nem negativa definida. ☹

### Exercício 15.

Dados  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ , determine o ponto em que a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{i=1}^k \|x - a_i\|^2$  assume o valor de mínimo.

### Solução:

#### Observação

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Então existe  $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \quad \text{com} \quad \frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

Como  $h \in \mathbb{R}^n$ , podemos escrevê-lo como  $h = \sum_{i=1}^n e_i h_i$ , onde  $e_i$  é o vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Daí,

$$f'(x)h = f'(x) \left( \sum_{i=1}^n e_i h_i \right) = \sum_{i=1}^n f'(x)(e_i) h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i.$$

Note que  $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$  é um funcional linear. Como  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Hilbert com o produto interno usual, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único vetor  $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, temos:

$$f'(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Logo,  $f$  é diferenciável se, e somente se, existe  $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$  tal que

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + r(h), \quad \text{com} \quad \frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

Lembremos que a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, atinge o valor mínimo (o máximo) em  $x$  quando  $\nabla f(x) = 0$ .

Como  $f(x) = \sum_{i=1}^k \|x - a_i\|^2$ , definamos uma função auxiliar  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\varphi_i(x) = \|x - a_i\|^2$ , perceba que  $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = f(x)$ . Mostremos então que  $\varphi_i$  é diferenciável. De fato, sejam  $x, h \in \mathbb{R}^n$ , segue-se

$$\begin{aligned} \varphi_i(x+h) - \varphi_i(x) &= \|x+h - a_i\|^2 - \|x - a_i\|^2 \\ &= \langle x+h - a_i, x+h - a_i \rangle - \langle x - a_i, x - a_i \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle - 2\langle x, a_i \rangle + \|h\|^2 - 2\langle h, a_i \rangle + \|a_i\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, a_i \rangle - \|a_i\|^2 \\ &= 2\langle x, h \rangle - 2\langle h, a_i \rangle + \|h\|^2 \\ &= \underbrace{2\langle x - a_i, h \rangle}_{\varphi'_i(x)h} + \underbrace{\|h\|^2}_{r(h)}. \end{aligned}$$

Definamos a função  $\varphi'_i(x)h := 2\langle x - a_i, h \rangle$ , note que  $\varphi'_i(x) \in \mathbb{R}^{n*}$  (consequência da bilinearidade do produto interno). Por outro lado, a função erro  $r(h) = \|h\|^2$ ; é claro que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ . Daí,  $\varphi_i$  é diferenciável. Como  $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = f(x)$ , logo  $f$  é diferenciável.

Perceba que  $\varphi'_i(x)h = \langle \nabla \varphi_i(x), h \rangle = \langle 2(x - a_i), h \rangle$  e  $\sum_{i=1}^k \varphi'_i(x)h = f'(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ . Então

$$\langle \nabla f(x), h \rangle = \sum_{i=1}^k \varphi'_i(x)h = \sum_{i=1}^k \langle 2(x - a_i), h \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k 2(x - a_i), h \right\rangle$$

O ponto  $x$  é o ponto onde  $f$  assume o valor de mínimo se satisfaz a equação:  $\nabla f(x) = 0$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^k 2(x - a_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^k x - \sum_{i=1}^k a_i = 0 \implies kx = \sum_{i=1}^k a_i \implies x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i. \quad \odot$$