

Gabarito Análise \mathbb{R}^n - Diferenciabilidade I

Kelvin (Pol)

Exercício 1.

Um caminho diferenciável em \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo.

- a) Mostre que se $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é outro caminho diferenciável, então

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0) \rangle + \langle f(t_0), g'(t_0) \rangle.$$

- b) Defina $\int_a^b f(t) dt$ pondo

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Supondo f de classe C^1 , mostre que:

- i. $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$;
- ii. Sabemos que se $I = [a, b]$ e $\|f'(t)\| \leq M$, então $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$, obtenha outra demonstração para este resultado usando o item (i);
- iii. Por qual motivo estamos supondo f de classe C^1 no item (i)?

Solução:

- a) Suponha que caminhos $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis, ou seja

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

Note que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear contínua. Como as funções f e g são diferenciáveis, em particular são contínuas. Assim, a composição $(t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle)$ é diferenciável, e podemos aplicar a definição de derivada utilizando as propriedades da bilinearidade e continuidade do produto interno.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f, g \rangle(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f, g \rangle(t+h) - \langle f, g \rangle(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t+h) \rangle + \langle f(t), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h) - f(t), g(t+h) \rangle + \langle f(t), g(t+h) - g(t) \rangle}{h} \\ &= \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} g(t+h) \right\rangle + \langle f(t), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \rangle \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle. \end{aligned}$$

- b) Definamos

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

e suponhamos que f é de classe C^1

- i. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como f é de classe C^1 , temos que:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

- ii. Seja $I = [a, b]$ e suponha que $\|f'(t)\| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$. Aplicando o resultado do item (i) e utilizando a desigualdade da norma da integral, obtemos:

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a).$$

- iii. A hipótese de que f é de classe C^1 é necessária para garantir que f' seja contínua em $[a, b]$, o que assegura que f' seja integrável no sentido de Riemann. Assim, a igualdade do Teorema Fundamental do Cálculo no item (i) é válida.

Exercício 2.

Considere $M(n)$ o conjunto das matrizes reais de ordem n e a função $f : M(n) \rightarrow M(n)$ dada por

$$f(A) = A^3 + A^2.$$

Determine $f'(A_0)H$, com $H \in M(n)$

Solução:

Note que $M(n)$ é aberto, pois $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Seja $A_0 \in M(n)$ e o vetor $H \in M(n)$ temos $A_0 + H \in M(n)$, logo $f(A_0 + H)$ fica bem definido. Assim,

$$\begin{aligned} f(A_0 + H) - f(A) &= (A_0 + H)^3 + (A_0 + H)^2 - A_0^3 - A_0^2 \\ &= (A_0 + H)(A_0^2 + A_0H + HA_0 + H^2) + A_0^2 + A_0H + HA_0 + H^2 - A_0^3 - A_0^2 \\ &= \cancel{A_0^2} + \cancel{A_0^2}H + A_0HA_0 + A_0H^2 + HA_0^2 + HA_0H + H^2A_0 + H^3 + \cancel{A_0^2} + \cancel{A_0H} + \cancel{HA_0} + H^2 - \cancel{A_0^3} - \cancel{A_0^2} \\ &= \underbrace{A_0^2H + A_0HA_0 + HA_0^2 + A_0H + HA_0}_{f'(A_0)H} + \underbrace{A_0H^2 + HA_0H + H^2A_0 + H^3 + H^2}_{r(H)}. \end{aligned}$$

Definamos as funções:

$$f'(A) : M(n) \rightarrow M(n)$$

$$H \mapsto f'(A)H := A^2H + AHA + HA^2 + AH + HA$$

$$r(H) := AH^2 + HAH + H^2A + H^3 + H^2$$

- $f'(A) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$.

De fato,

dados $H_1, H_2 \in M(n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(A)(\alpha H_1 + H_2) &= A^2(\alpha H_1 + H_2) + A(\alpha H_1 + H_2)A + (\alpha H_1 + H_2)A^2 + A(\alpha H_1 + H_2) + (\alpha H_1 + H_2)A \\ &= \alpha A^2 H_1 + A^2 H_2 + \alpha AH_1 A + AH_2 A + \alpha H_1 A^2 + H_2 A^2 + \alpha AH_1 + AH_2 + \alpha H_1 A + H_2 A \\ &= \alpha(A^2 H_1 + AH_1 A + H_1 A^2 + AH_1 + H_1 A) + A^2 H_2 + AH_2 A + H_2 A^2 + AH_2 + H_2 A \\ &= \alpha f'(A)H_1 + f'(A)H_2. \end{aligned}$$

Logo, $f'(A)$ é uma transformação linear.

- $\|r(H)\| \rightarrow 0$.

De fato, pelas propriedades das normas matriciais temos,

$$\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|AH^2 + HAH + H^2A + H^3 + H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A\|\|H\|^2 + \|H\|\|A\|\|H\| + \|H\|^2\|A\| + \|H\|^2 + \|H\|^2}{\|H\|}$$

Como A é uma matriz, e temos $M(n) \cong L(\mathbb{R}^n)$, então A pode ser visto como uma transformação linear de dimensão finita. Nesse caso, sabemos que toda aplicação linear em dimensão finita é limitada, logo $\|A\|$ é finita e pode ser tratada como constante ao tomar o limite. Além disso, pela continuidade da norma e fazendo $H \rightarrow 0$ temos

$$\lim_{H \rightarrow 0} [\|A\|\|H\| + \|A\|\|H\| + \|H\|\|A\| + \|H\|^2 + \|H\|] = 0.$$

Daí,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = 0.$$

Portanto a função f é diferenciável e $f'(A_0)H = A_0^2H + A_0HA_0 + HA_0^2 + A_0H + HA_0$. \odot

Observação

De fato, f é de classe C^1 , basta mostrar $\lim_{B \rightarrow 0} f'(A+B)H = f'(A)H$ para algum $B \in M(n)$.

Exercício 3.

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Prove que:

- a) A aplicação $T(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ está bem definida em \mathbb{R}^2 e é linear;
- b) f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução:

a) Note que \mathbb{R}^2 é um aberto. Dado $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ com $k \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th, tk)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{(th)^2}{tk}\right)\right] \sqrt{(th)^2 + (tk)^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{th}{k}\right)\right] \sqrt{h^2 + k^2}}{t} \\ &= [1 - \cos(0)] \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , a transformação nula

$$0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto 0,$$

pertence a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Portanto, a aplicação

$$T(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$$

está bem definida para todo $v \in \mathbb{R}^2$ e é linear.

- b) Para que f seja diferenciável em $(0, 0)$ com $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ deveria satisfazer

$$f((0, 0) + (h, k)) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) + r(h, k) \text{ onde, } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

Pois $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ e $f(0, 0) = 0$. Porém esse limite não existe, de fato, considere a norma euclideana $\|\cdot\|_2$ pois num espaço normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|_2} &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{h^2}{k}\right)\right] \sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \left[1 - \cos\left(\frac{h^2}{k}\right)\right]. \end{aligned}$$

Vamos estudar esse limite ao longo de duas sequências distintas:

- Primeiramente, considere a sequência $(h_i, k_i) = (0, 1/i)$. Temos que $(h_i, k_i) \rightarrow (0, 0)$ quando $i \rightarrow \infty$. Note que, nesse caso,

$$\frac{h_i^2}{k_i} = \frac{0}{1/i} = 0 \Rightarrow 1 - \cos\left(\frac{h_i^2}{k_i}\right) = 1 - \cos(0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[1 - \cos\left(\frac{h_i^2}{k_i}\right)\right] = 0.$$

- Agora, considere a sequência $(h_j, k_j) = \left(\sqrt{\pi/2j}, 1/j\right)$. Note que $h_j^2 = \pi/2j$ e $k_j = 1/j$, então:

$$\frac{h_j^2}{k_j} = \frac{\pi/2j}{1/j} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \cos\left(\frac{h_j^2}{k_j}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[1 - \cos\left(\frac{h_j^2}{k_j}\right) \right] = 1.$$

Como os dois limites ao longo dessas sequências são diferentes, concluímos que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \text{ não existe.}$$

Logo, a função f **não é diferenciável** em $(0,0)$, apesar de todas as derivadas direcionais existirem.

Observação

Apesar de a função f admitir todas as derivadas direcionais no ponto $(0,0)$, e que a aplicação

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$$

seja bem definida e linear, isso **não implica** que f seja diferenciável no sentido de Fréchet.

Essa distinção é fundamental em análise funcional e cálculo multivariado:

- A **derivabilidade de Gâteaux** exige somente que, para cada direção $v \in E$, exista o limite da derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ no ponto x .
- Por outro lado a **diferenciabilidade no sentido de Fréchet** requer a existência de uma transformação linear contínua

$$T \in \mathcal{L}(E, F)$$

que aproxime f uniformemente ao redor do ponto, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

No contexto de espaços de dimensão finita, como $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, toda transformação linear é automaticamente contínua, o que simplifica a verificação da diferenciabilidade.

Entretanto, em espaços normados de dimensão infinita, uma transformação linear pode **não ser contínua**. Portanto, para garantir que f seja diferenciável em sentido forte, é necessário verificar explicitamente a linearidade e a continuidade da aplicação derivada $f'(x)$.

Adicionalmente, é importante distinguir:

- A existência e linearidade da aplicação que associa a cada direção v a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$,
- Da continuidade da função derivada $f' : U \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$.

A continuidade da função derivada é uma condição mais forte que caracteriza funções de classe C^1 .

Em resumo, a existência das derivadas direcionais e sua linearidade não garantem, isoladamente, que f seja diferenciável no sentido de Fréchet.

Exercício 4.

Considere $A \in M(3)$ como um elemento de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, supondo cada coluna $a_i \in \mathbb{R}^3$. Mostre que a aplicação determinante $\det : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e obtenha $(\det)'(A_0)(I)$.

Solução:

É claro que $M(3)$ é aberto. Dado o ponto $A \in M(n)$ com $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ e o vetor $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$, onde $a_1, a_2, a_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^3$ são vetores coluna das matrizes correspondentes.

Note que $\det(A + H) = \det(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$ e como \det é uma função 3-linear, temos

$$\begin{aligned}\det(A + H) - \det(A) &= \det(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - \det(a_1, a_2, a_3) \\ &= \det(a_1, a_2, a_3) + \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3) + \det(a_1, h_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3) - \det(a_1, a_2, a_3) \\ &= \underbrace{\det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)}_{\det'(A)H} + \det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3)\end{aligned}$$

Definimos

$$\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3),$$

onde $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ e $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$.

A aplicação $\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)$ é linear em H . Isto se deve diretamente à propriedade de *multilinearidade* (ou *3-linearidade*) do determinante. Para cada termo $\det(\dots, h_i, \dots)$, o determinante é linear na coluna h_i quando as outras colunas são fixas. Como $\det'(A)(H)$ é uma soma de termos, onde cada termo é linear em uma coluna de H (sendo as outras colunas de A fixas), a soma resultante também será linear em H .

O de outra forma, cada termo é linear em H , pois a função determinante é multilinear. Logo, $\det'(A) : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear.

Definimos a função resto:

$$R(H) := \det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3).$$

A aplicação determinante $\det : M(3) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função 3-linear. Como o determinante é uma função multilinear em espaço de dimensão finita, é contínuo e limitada. Assim, para quaisquer vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| \leq \|\det\| \|v_1\| \|v_2\| \|v_3\|$$

Note que quando $H \rightarrow 0$ em $M(3)$, as suas colunas h_1, h_2, h_3 também tendem ao vetor nulo em \mathbb{R}^3 (i.e., $\|h_i\| \rightarrow 0$).

Consideremos a norma $\|H\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |h_i|$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{|R(H)|}{\|H\|_\infty} &= \frac{|\det(a_1, h_2, h_3) + \det(h_1, a_2, h_3) + \det(h_1, h_2, a_3) + \det(h_1, h_2, h_3)|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{|\det(a_1, h_2, h_3)| + |\det(h_1, a_2, h_3)| + |\det(h_1, h_2, a_3)| + |\det(h_1, h_2, h_3)|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{\|\det\| \|a_1\| \|h_2\| \|h_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|a_2\| \|h_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|h_2\| \|a_3\| + \|\det\| \|h_1\| \|h_2\| \|h_3\|}{\|H\|_\infty} \\ &\leq \frac{\|\det\| \|a_1\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|a_2\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|a_3\| \|H\|_\infty^2 + \|\det\| \|H\|_\infty^3}{\|H\|_\infty} \\ &= \|\det\| \|a_1\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|a_2\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|a_3\| \|H\|_\infty + \|\det\| \|H\|_\infty^2 \\ &= (\|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|) \underbrace{\|\det\|}_{\text{limitada}} \underbrace{\|H\|_\infty}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\det\|}_{\text{limitada}} \underbrace{\|H\|_\infty^2}_{\rightarrow 0}\end{aligned}$$

Portanto, tomando limite quando $H \rightarrow 0$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{|R(H)|}{\|H\|_\infty} = 0;$$

o que implica que a aplicação \det é diferenciável e sua derivada direcional é $\det'(A)(H) := \det(h_1, a_2, a_3) + \det(a_1, h_2, a_3) + \det(a_1, a_2, h_3)$, em particular, $\det'(A)(I) := \det(e_1, a_2, a_3) + \det(a_1, e_2, a_3) + \det(a_1, a_2, e_3)$. \odot

Exercício 5.

Seja \mathbb{R}^{n^2} o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais e seja $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dada por $f(A) = AA^t$, onde A^t é a transposta de A .

a) Descreva $f'(X)$ e mostre que $f'(X)H$ é simétrica para toda matriz $H \in \mathbb{R}^{n^2}$;

b) Mostre que se $X^{-1} = X^t$, então para toda matriz simétrica S (ou seja, $S = S^t$), existe pelo menos uma matriz H tal que $f'(X)H = S$.

Solução:

a) Mostremos que f é diferenciável. Sejam $X, H \in M(n)$, pelas propriedades da transposta, obtemos

$$\begin{aligned} f(X + H) - f(X) &:= (X + H)(X + H)^t - XX^t \\ &= (X + H)(X^t + H^t) - XX^t \\ &= XX^t + XH^t + HX^t + HH^t - XX^t \\ &= \underbrace{XH^t + HX^t}_{f'(X)H} + \underbrace{HH^t}_{R(H)}. \end{aligned}$$

Defina-se a função

$$\begin{aligned} f'(X) : M(n) &\longrightarrow M(n) \\ H &\longmapsto f'(X)H := XH^t + HX^t. \end{aligned}$$

Note que $f'(X) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$. De fato, dados $H_1, H_2 \in M(n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} f'(X)(\alpha H_1 + H_2) &= X(\alpha H_1 + H_2)^t + (\alpha H_1 + H_2)X^t \\ &= \alpha XH_1^t + XH_2^t + \alpha H_1 X^t + H_2 X^t \\ &= \alpha(XH_1^t + H_1 X^t) + XH_2^t + H_2 X^t \\ &= \alpha f'(X)H_1 + f'(X)H_2; \end{aligned}$$

logo $f'(X)$ é uma transformação linear.

Por outro lado, definamos a função resto por $R(H) := HH^t$, pelas propriedades da norma de matrizes, temos

$$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|HH^t\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|\|H^t\|}{\|H\|} = \|H\|.$$

Pela continuidade da norma e fazendo $H \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{R(H)}{\|H\|} = 0.$$

Portanto f é diferenciável. Além disso, como $f'(X) \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$, existe a transformação linear identidade $I \in \mathcal{L}(M(n), M(n))$ (pois $\mathcal{L}(M(n), M(n))$ é um espaço vetorial). Daí, $f'(X)I = XI^t + IX^t = X + X^t \implies f'(X) = X + X^t$.

Finalmente perdas propriedades da transposta (novamente) segue-se que

$$\begin{aligned} [f'(X)H]^t &= [XH^t + HX^t]^t \\ &= (XH^t)^t + (HX^t)^t \\ &= (H^t)^t X^t + (X^t)^t H^t \\ &= HX^t + XH^t \\ &= f'(X)H, \end{aligned}$$

o que implica que $f'(X)H$ é simétrica.

b) Suponhamos que $X^{-1} = X^t$ e dado a matriz simétrica S existe a matriz $H = \frac{1}{2}SX$ tal que

$$\begin{aligned} f'(X)H &= XH^t + HX^t \\ &= \frac{1}{2}X(SX)^t + \frac{1}{2}(SX)X^t \\ &= \frac{1}{2}XX^tS^t + \frac{1}{2}S \\ &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S \\ &= S \odot \end{aligned}$$

Exercício 6.

Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$ mas as derivadas parciais de f não são contínuas em $(0, 0)$.

Solução:

- f é diferenciável em $(0, 0)$. De fato,

para que f seja diferenciável em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, precisamos que exista em $f'(0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que se $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ satisfaça

$$f((0, 0) + (h, k)) = f(0, 0) + f'(0, 0)(h, k) + r(h, k) \text{ onde, } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Equivalentemente,

$$f(h, k) = f'(0, 0)(h, k) + r(h, k), \text{ onde, } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h)}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (1)$$

Note que a derivada direcional é

$$\begin{aligned} f'(0, 0)(h, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th, tk)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(th)^2 + (tk)^2] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{(th)^2 + (tk)^2}}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t(h^2 + k^2)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}_{\text{limitado}}; \end{aligned}$$

como $\left|\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{h^2 + k^2}}\right)\right| \leq 1$ e $t(h^2 + k^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Daí, $f'(0, 0)(h, k) = 0$. Além disso, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial e existe a transformação linear nula $O \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Portanto o candidato a ser a derivada é $f'(0, 0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Nesse caso, da equação (1), temos $r(h, k) = f(h, k)$. Considerando a norma euclidiana temos,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|_2} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}\right)}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}; \text{ (troca de variável)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{r}\right)}_{\text{limitada}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto f é diferenciável em $(0, 0)$ com $f'(0, 0) = 0$.

- As derivadas parciais de f não são contínuas em $(0, 0)$. De fato,

– Para $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{d}{dx}[(x^2 + y^2)] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \frac{d}{dx} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right] \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy}[(x^2 + y^2)] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \frac{d}{dy}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right] \\
&= 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \\
&= 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

– Para $(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{limitado}}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\substack{\text{limitado}}} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{limitado}}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\substack{\text{limitado}}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo é possível definir as funções

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{cases} 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Observação

As funções são contínuas se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$; $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

- i) Para mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$, é suficiente mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ não existe. Consideremos o caminho $\alpha(t) = (t, 0)$, com $t > 0$, de modo que $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow 0^+$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim,

$$\frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial x}(t) = \frac{\partial(f(\alpha(t)))}{\partial x} = \frac{\partial(f(t, 0))}{\partial x} = 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\substack{\rightarrow 0}} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\substack{\text{no existe}}}$$

O primeiro termo, $2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, tende a 0, pois $t \rightarrow 0$ e $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ é limitada. No entanto, o segundo termo, $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$, oscila entre -1 e 1 e não admite limite quando $t \rightarrow 0^+$. Portanto, o limite acima **não existe**.

Como o limite da função derivada parcial não existe quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ **não é contínua** em $(0, 0)$.

- ii) Para mostrar que $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em $(0,0)$, é suficiente mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não existe.
 Consideremos o caminho $\alpha(t) = (0,t)$, com $t > 0$, de modo que $\alpha(t) \rightarrow (0,0)$ quando $t \rightarrow 0^+$. Para $(x,y) \neq (0,0)$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim,

$$\frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial y}(t) = \frac{\partial(f(\alpha(t)))}{\partial y} = \frac{\partial(f(0,t))}{\partial y} = 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{não existe}}$$

O primeiro termo, $2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, tende a 0, pois $t \rightarrow 0$ e $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ é limitada. No entanto, o segundo termo, $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$, oscila entre -1 e 1 e não admite limite quando $t \rightarrow 0^+$. Portanto, o limite acima **não existe**.

Como o limite da função derivada parcial não existe quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial y}$ **não é contínua** em $(0,0)$. \odot

Exercício 7.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $0 \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

- a) Se $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, então f é linear;
 b) Conclua que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$.

Solução:

- a) Mostremos que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ e $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, então f é linear. De fato,

note que f é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$, em particular ela é continua. Como $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$, então para $x \neq 0$ obtemos

$$f(0) = f\left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot k \cdot x\right) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \frac{1}{k} > 0}} \frac{1}{k} f(k \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0,$$

ou seja, $f(0) = 0$.

Por outro lado, considere o vector tv onde $t > 0$ e $v \in \mathbb{R}^n$, como f é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$, implica que existe $f'(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que

$$f(0 + tv) = f(0) + f'(0)tv + r(tv) \quad \text{onde } \lim_{tv \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0,$$

escrito de outra forma,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{t} = 0$$

Como $f(0) = 0$ e $t > 0$, temos então

$$f(tv) = f'(0)tv + r(tv) \implies tf(v) = f'(0)tv + r(tv) \implies f(v) = f'(0)v + \frac{r(tv)}{t}$$

fazendo $t \rightarrow 0$, segue-se

$$f(v) = f'(0)v$$

como $f'(0)$ é uma transformação linear então $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

b) Pelo item a), é possível fazer a seguinte afirmação:

Afirmção 1:

Dada a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Se f é diferenciável em 0 e $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, então f é linear.

A contrapositiva é: dada a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se f não é linear, então f não é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$ ou

$$\exists t > 0, \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(tx) \neq tf(x).$$

Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

É claro que f não é linear. Além disso $t > 0$ e para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^3}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^3 x^3}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{tx^3}{x^2 + y^2} = tf(x, y),$$

e para $(x, y) = (0, 0)$ o cálculo é trivial. Logo, $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo $t > 0$. Assim, como f não é linear e satisfaz a equação funcional, segue que f não é diferenciável em $(0, 0)$. \odot

Exercício 8.

Suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que se f é Lipschitz, com constante M , então $\|f'(x)\| \leq M$, para todo $x \in A$.

Solução:

Suponhamos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e Lipschitz (com constante M) num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Assim, existe $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \forall x, y \in A$. Consideremos $y = h + x$ onde $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, então $\|f(x + h) - f(x)\| \leq M\|h\|$. Daí

$$\frac{\|f(x + h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M.$$

Por outro lado temos que f é diferenciável, o que implica que existe $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \quad ; \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + f'(x)h + r(h) \\ f(x + h) - f(x) &= f'(x)h + r(h) \\ \frac{f(x + h) - f(x)}{\|h\|} &= \frac{f'(x)h}{\|h\|} + \frac{r(h)}{\|h\|} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)h}{\|h\|} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|}}_0; \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)h}{\|h\|}, \end{aligned}$$

tomando norma e pela continuidade dela, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f'(x)h}{\|h\|} \right\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| f'(x) \underbrace{\left(\frac{h}{\|h\|} \right)}_{\text{unitário}} \right\|.$$

Considerando a norma espectral para o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definida por $\|f'(x)\| := \sup_{\|v\|=1} \|f'(x)v\|$, tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x)\|}{\|h\|} = \|f'(x)\|,$$

e por Lipschitz nos tenhamos $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq M$. Daí, $\|f'(x)\| \leq M$. \odot

Exercício 9.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $L : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ diferenciáveis. Definindo

$$\varphi(x) = \langle L(x) \cdot f(x), g(x) \rangle,$$

para $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, determine $\varphi'(x) \cdot h$.

Solução:

Seja $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$. Definamos $F(x) := L(x) \cdot f(x)$, então $\varphi(x) = \langle F(x), g(x) \rangle$. Note que f, g, L são diferenciáveis em U , em particular, existem suas derivadas direcionais e além disso são f, g, L continuas em U . Por outro lado, perceba que $L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ e toda transformação linear é diferenciável, logo $F(x) = L(x) \cdot f(x)$ é diferenciável, em particular, existe sua derivada direcional. Ora, o produto interno é uma função contínua. Nessas condições e pela bi-linearidade do produto interno, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi'(x)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} \\ &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x + th), g(x + th) \rangle - \langle F(x), g(x) \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x + th), g(x + th) \rangle - \langle F(x), g(x + th) \rangle + \langle F(x), g(x + th) \rangle - \langle F(x), g(x) \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x + th) - F(x), g(x + th) \rangle + \langle F(x), g(x + th) - g(x) \rangle}{t} \\ &= \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x + th) - F(x), g(x) \rangle}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} g(x + th) \right\rangle + \left\langle F(x), \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + th) - g(x)}{t} \right\rangle \\ &= \langle F'(x)h, g(x) \rangle + \langle F(x), g'(x)h \rangle.\end{aligned}$$

Agora só precisamos encontrar a expressão da derivada direcional da função $F(x) = L(x) \cdot f(x)$ onde $x \in U$. Nas condições indicadas anteriormente e considerando ainda que $L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, ela é contínua. Daí

$$\begin{aligned}F'(x)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x + th) \cdot f(x + th) - L(x) \cdot f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x + th) \cdot f(x + th) - L(x + th) \cdot f(x) + L(x + th) \cdot f(x) - L(x) \cdot f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x + th) \cdot [f(x + th) - f(x)] + [L(x + th) - L(x)] \cdot f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} L(x + th) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x + th) - L(x)}{t} \right] \cdot f(x) \\ &= L(x) \cdot f'(x)h + L(x)'h \cdot f(x)\end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$F'(x)h = L(x) \cdot f'(x)h + L(x)'h \cdot f(x).$$

Logo,

$$\varphi'(x)h = \langle L(x) \cdot f'(x)h + L(x)'h \cdot f(x), g(x) \rangle + \langle L(x) \cdot f(x), g'(x)h \rangle$$

ou

$$\varphi'(x)h = \langle L(x) \cdot f'(x)h, g(x) \rangle + \langle L(x)'h \cdot f(x), g(x) \rangle + \langle L(x) \cdot f(x), g'(x)h \rangle. \odot$$

Exercício 10.

Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça $|f(x)| \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é diferenciável na origem.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, temos

$$|f(0)| \leq \|0\|^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Vamos mostrar que f é diferenciável na origem e que a derivada é nula.

Considere $v \in \mathbb{R}^n$ fixo e $t > 0$. Temos

$$|f(tv)| \leq \|tv\|^2 = t^2\|v\|^2 \Rightarrow \frac{|f(tv)|}{t} \leq t\|v\|^2.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(tv)|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0} t\|v\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} = 0,$$

isto é, a derivada direcional de f na origem na direção v existe e é nula:

$$f'(0)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} = 0.$$

Assim, o candidato à diferencial de f na origem é a aplicação linear nula: $f'(v) = 0$.

Vamos verificar que f é diferenciável em 0 com derivada nula. Para isso, definimos a função resto

$$r(v) := f(v) - f(0) - f'(0)v = f(v),$$

pois $f(0) = 0$ e $f'(0)v = 0$.

Queremos mostrar que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Como $|f(v)| \leq \|v\|^2$, temos

$$\left| \frac{r(v)}{\|v\|} \right| = \left| \frac{f(v)}{\|v\|} \right| \leq \|v\| \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Portanto, f é diferenciável na origem com derivada nula: $f'(0) = 0$.

Exercício 11.

Estude a diferenciabilidade explicitando $F'(p)$;

- (a) $F(x) = (x, f(x))$, sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável;
- (b) $F(x) = (x, f(y))$, sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável e $x \in \mathbb{R}^m$.

Solução:

(a) Note que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto F(x) := (x, f(x)) \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável. Como a função identidade $x \mapsto x$ é diferenciável e f também, a função F é diferenciável como combinação de funções diferenciáveis.

A derivada de F no ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$F'(p) = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ f'(p)_{k \times n} \end{bmatrix} \in M(n+k, n).$$

(b) A função agora é

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto F(x) := (x, f(y)) \end{aligned}$$

onde $y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo. Logo, $f(y)$ é uma constante em \mathbb{R}^k , e a aplicação $x \mapsto f(y)$ é constante.

Assim, F é diferenciável, sendo a concatenação da identidade e de uma função constante, e sua derivada em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^m$ é:

$$F'(p) = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ 0_{k \times m} \end{bmatrix} \in M(m+k, m).$$

Exercício 12.

Prove que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, então f é constante.

Solução:

• f é diferenciável em \mathbb{R}^n . De fato,

sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e consideremos $y = x + h$ com $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Pela desigualdade, tem-se

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\|^2 \implies \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \|h\| \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = 0$$

Note que, não conhecemos a derivada de f em x , mas a igualdade

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = 0,$$

nos da um candidato á derivada como a transformação nula:

$$Th := 0 \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, suponhamos que f é diferenciável em todo \mathbb{R}^n com $Th := 0$ e satisfaz $f(a+h) = f(a) + Th + r(h)$, onde é necessário que cumpra $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

Mas como $Th = 0$, isso é simplesmente

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0,$$

o que mostra que f é diferenciável em x com derivada $Th = f'(x)h = 0$ para todo h , ou seja $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Como $x \in \mathbb{R}^n$ era arbitrário, f é diferenciável em todo \mathbb{R}^n .

- **f é constante.**

De fato, note que \mathbb{R}^n é aberto e conexo, além disso, f é diferenciável em \mathbb{R}^n com $f'(x) = 0$. Logo pelo teorema do valor constante f é constante. \odot

Exercício 13.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que:

- $F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$ é diferenciável, explicitando $F'(x_0)h$;
- Se $\|f(x)\| \equiv 1$, então $\det(f'(x)) \equiv 0$.

Solução:

- a) Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável. Definimos

$$F(x) := \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixo. Para $h \in \mathbb{R}^n$, como f é diferenciável em x , temos:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Usando a bilinearidade e continuidade do produto interno, temos:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \langle f(x+h), f(x+h) \rangle - \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle f(x) + f'(x)h + r(h), f(x) + f'(x)h + r(h) \rangle - \|f(x)\|^2 \\ &= 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle + \|f'(x)h\|^2 + 2\langle r(h), f(x) + f'(x)h \rangle + \|r(h)\|^2. \end{aligned}$$

Assim, identificamos a parte linear da expansão:

$$F'(x)h := 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle,$$

e a função resto

$$R(h) := \|f'(x)h\|^2 + 2\langle r(h), f(x) + f'(x)h \rangle + \|r(h)\|^2.$$

Como $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ é limitada, e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e das transformações lineares, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|R(h)|}{\|h\|} &\leq \frac{\|f'(x)h\|^2}{\|h\|} + \frac{2\|r(h)\| \cdot \|f(x) + f'(x)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r(h)\|^2}{\|h\|} \\ &\leq \|f'(x)\|^2 \|h\| + 2\|r(h)\| \cdot \frac{\|f(x)\| + \|f'(x)\| \|h\|}{\|h\|} + \frac{\|r(h)\|^2}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Como $\|r(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$, segue que $R(h)/\|h\| \rightarrow 0$. Logo, F é diferenciável em x , com derivada dada por

$$F'(x)h = 2\langle f'(x)h, f(x) \rangle.$$

b) \odot

Exercício 14.

Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, chama-se harmônica quando $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ para todo $x \in U$. Prove que a matriz hessiana de uma função harmônica não pode ser definida (nem positiva e nem negativa).

Solução:

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 harmônica no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0 \quad , \forall x \in U.$$

A matriz Hessiana está definida por

$$\text{hess } f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \quad ; \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

e, pelo teorema de Schwarz, tem-se

$$\text{hess } f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad ; \text{ com } i \neq j; \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

portanto, a matriz $\text{hess } f(x)$ é simétrica.

Lembre que $\text{hess } f(x)$ é positiva definida, denotado por $\text{hess } f(x) > 0$, se ela é simétrica e $x^t \text{hess } f(x)x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Analogamente, $\text{hess } f(x)$ é negativa definida, se $x^t \text{hess } f(x)x < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Demostremos que se $x^t \text{hess } f(x)x > 0 \implies \text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0$.

Suponhamos $x^t \text{hess } f(x)x > 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, em particular, tome-se o vetor da base canônica e_i (fixo), note que $e_1 \neq 0$. Daí,

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & \text{i-ésima} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0,$$

fazendo para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0 \quad ; \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) > 0.$$

Agora, observe que a soma dos elementos da diagonal da matriz Hessiana é chamada de traça da matriz, e denotamos por

$$\text{tr}(\text{hess } f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Portanto, concluímos que

$$\text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0.$$

Da mesma forma se mostra para a negativa definida, onde teríamos $\text{tr}(\text{hess } f(x)) < 0$. Consequentemente, é possível fazer a seguinte afirmação:

Afirmiação 2:

- Se $x^t \text{hess } f(x)x > 0$, então $\text{tr}(\text{hess } f(x)) > 0$;
- Se $x^t \text{hess } f(x)x < 0$, então $\text{tr}(\text{hess } f(x)) < 0$.

Para nosso problema, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0,$$

ou seja, $\text{tr}(\text{hess } f(x)) = 0$. Pela contra-positiva da afirmação acima, concluímos que $\text{hess } f(x)$ não é positiva definida nem negativa definida. \odot

Exercício 15.

Dados $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, determine o ponto em que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sum_{i=1}^k \|x - a_i\|^2$ assume o valor de mínimo.

Solução:

Observação

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então existe $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \quad \text{com} \quad \frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

Como $h \in \mathbb{R}^n$, podemos escrevê-lo como $h = \sum_{i=1}^n e_i h_i$, onde e_i é o vetor da base canônica de \mathbb{R}^n . Daí,

$$f'(x)h = f'(x) \left(\sum_{i=1}^n e_i h_i \right) = \sum_{i=1}^n f'(x)(e_i) h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i.$$

Note que $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ é um funcional linear. Como \mathbb{R}^n é um espaço de Hilbert com o produto interno usual, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único vetor $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, temos:

$$f'(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Logo, f é diferenciável se, e somente se, existe $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + r(h), \quad \text{com} \quad \frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

Lembremos que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, atinge o valor mínimo (o máximo) em x quando $\nabla f(x) = 0$.

Como $f(x) = \sum_{i=1}^k \|x - a_i\|^2$, definamos uma função auxiliar $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\varphi_i(x) = \|x - a_i\|^2$, perceba que $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = f(x)$. Mostremos então que φ_i é diferenciável. De fato, sejam $x, h \in \mathbb{R}^n$, segue-se

$$\begin{aligned} \varphi_i(x+h) - \varphi_i(x) &= \|x+h-a_i\|^2 - \|x-a_i\|^2 \\ &= \langle x+h-a_i, x+h-a_i \rangle - \langle x-a_i, x-a_i \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle - 2\langle x, a_i \rangle + \|h\|^2 - 2\langle h, a_i \rangle + \|a_i\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, a_i \rangle - \|a_i\|^2 \\ &= 2\langle x, h \rangle - 2\langle h, a_i \rangle + \|h\|^2 \\ &= \underbrace{2\langle x-a_i, h \rangle}_{\varphi'(x)h} + \underbrace{\|h\|^2}_{r(h)}. \end{aligned}$$

Definamos a função $\varphi'_i(x)h := 2\langle x-a_i, h \rangle$, note que $\varphi'_i(x) \in \mathbb{R}^{n^*}$ (consequência da bilinearidade do produto interno). Por outro lado, a função erro $r(h) = \|h\|^2$; é claro que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Daí, φ_i é diferenciável. Como $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = f(x)$, logo f é diferenciável.

Perceba que $\varphi'_i(x)h = \langle \nabla \varphi_i(x), h \rangle = \langle 2(x-a_i), h \rangle$ e $\sum_{i=1}^k \varphi'_i(x)h = f'(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$. Então

$$\langle \nabla f(x), h \rangle = \sum_{i=1}^k \varphi'_i(x)h = \sum_{i=1}^k \langle 2(x-a_i), h \rangle = \langle \sum_{i=1}^k 2(x-a_i), h \rangle$$

O ponto x é o ponto onde f assume o valor de mínimo se satisfaz a equação: $\nabla f(x) = 0$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^k 2(x-a_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^k x - \sum_{i=1}^k a_i = 0 \implies kx = \sum_{i=1}^k a_i \implies x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i. \odot$$