# Gabarito Análise $\mathbb{R}^n$ - Diferenciabilidade II

Kelvin (Pol)

**Exercício 1.**

**Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Admita que**

$$f(x_0, y_0) = c \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

**a) Verifique que o vetor gradiente de $f$, no ponto $(x_0, y_0)$, é perpendicular ao gráfico de $y = y(x)$.**

**b) Determine a reta tangente à curva $f(x, y) = c$ no ponto $(x_0, y_0)$.**

**Solução:**

Note que $f$ satisfaz as condições do Teorema da Função Implícita. Assim, existem abertos $V \subset A$ com $(x_0, y_0) \in V$ e $I \subset \mathbb{R}$ com $x_0 \in I$ tais que, para todo $x \in I$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ com $(x, y) \in V$ e $f(x, y) = 0$.

Denotamos essa função implícita por $\xi : I \to \mathbb{R}$, definida por $\xi(x) := y(x)$, de modo que $f(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Além disso, $\xi$ é de classe $C^1$.

a) Vamos mostrar que o vetor gradiente de $f$ em $(x_0, y_0)$ é ortogonal ao vetor tangente à curva de nível $f(x, y) = c$ no ponto $(x_0, y_0)$.

O vetor gradiente de $f$ é:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

A curva de nível $f(x, y) = c$ pode, localmente, ser escrita como o gráfico da função $\xi(x)$ fornecida pelo Teorema da Função Implícita, de modo que a curva parametrizada é $x \mapsto (x, \xi(x))$. Logo, o vetor tangente à curva nesse ponto é:

$$v = (1, \xi'(x_0)).$$

Derivando a identidade $f(x, \xi(x)) = c$ com respeito a $x$ e avaliando em $x = x_0$ obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \xi'(x_0) = 0,$$

de onde segue,

$$\xi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Assim, o vetor tangente à curva é:

$$v = \left( 1, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \right).$$

Calculando o produto interno com o gradiente:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle &= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \left( 1, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal ao vetor tangente à curva nível $f(x, y) = c$ no ponto $(x_0, y_0)$.

b) Como vimos, $\xi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$. A equação da reta tangente à curva $f(x, y) = c$ no ponto $(x_0, y_0)$ é, então:

$$y - y_0 = \xi'(x_0)(x - x_0),$$

isto é,

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

**Exercício 2.**

**Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$ e suponha que exista $M > 0$ tal que**

$$\|g(x) - x\| \leq M\|x\|^2$$

**para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $g$ é localmente invertível perto de da origem e calcule $g'(0)$.**

**Solução:**

Suponhamos que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$ e existe $M > 0$ tal que

$$\|g(x) - x\| \leq M\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ , em particular, tem-se

$$\|g(0) - 0\| \leq M\|0\|^2 \Longrightarrow \|g(0)\| \leq 0 \Longrightarrow g(0) = 0.$$

Além disso,

$$\|g(h) - h\| \leq M\|h\|^2 \underbrace{\Longrightarrow}_{h\neq 0} \frac{\|g(h) - h\|}{\|h\|} \leq M\|h\| \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\|g(h) - h\|}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} M\|h\| \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\|g(h) - h\|}{\|h\|} \leq 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|g(h) - Ih\|}{\|h\|} = 0, \tag{1}$$

onde $I$ é a aplicação identidade. Como $g$ é de classe $C^1$, $g(0) = 0$ e $I$ é uma transformação linear, então pela unicidade da diferenciabilidade temos $g'(0)h = Ih$, o que implica que $g'(0) = I$. Note que $I \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é isomorfo. Daí, pelo teorema da função inversa existe abertos $V, W \subset \mathbb{R}^n$ com $0 \in V$ e $g(0) \in W$ tais que $g|_V : V \to W$ é um difeomorfismo de classe $C^1$, ou seja, $g|_V, g|_V^{-1}$ são de classe $C^1$. Em particular $g$ é localmente invertível. ☺

**Observação**

Embora o enunciado suponha que $g$ é de classe $C^1$, essa hipótese não é essencial para resolver o exercício. A desigualdade fornecida já é suficiente para concluir que $g$ é diferenciável na origem, e permite identificar explicitamente sua derivada nesse ponto. Portanto, a local invertibilidade de $g$ segue do Teorema da Função Inversa, independentemente de $g$ ser de classe $C^1$ em todo o domínio.

**Exercício 3.**

**Considere $f : U \subset \mathbb{R}^{p+n} \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições do teorema da função implícita no ponto $(a, b)$, com $f(a, b) = c$. Determine a equação do plano tangente ao conjunto**

$$S = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

**no ponto $(a, b)$.**

**Solução:**

Como $f$ satisfaz as condições do Teorema da função implícita, então, existem abertos $V \subset U$ e $A \subset \mathbb{R}^p$ com $(a, b) \in V$ é $a \in A$ tais que, para todo $x \in A$ existe um único $y = \xi(x) \in \mathbb{R}^n$ com $(x, \xi(x)) \in V$ e $f(x, \xi(x)) = c$. Além disso, $\xi : A \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1$.

Note que por hipóteses do teorema da função implícita, $f$ é de classe $C^1$, o que implica que para $x, y \in U$ existe $f'(x, y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{p+n}, \mathbb{R}^n)$ que é isomorfo ao espaço de matrizes $((n + p) \times n)$, ou seja, $f'(x, y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{p+n}, \mathbb{R}^n) \cong M((n+p)\times n)$. além disso, $f'(x, y)|_{0\times\mathbb{R}^n}$ é um isomorfo, ou seja sua matriz associada é invertível. Então se expressamos como matrizes, teríamos

$$[f'(x, y)]_{(n+p)\times n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right],$$

aqui a sub-matriz invertível é $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]_{n\times n}$.

Da equação $f(x, y) = c$ com $x, y \in A$, derivando pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \xi'(x) = 0,$$

interpretamos essas derivadas como matrizes $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (ter cuidado para o calculo). Então

$$\xi'(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^{-1}_{n\times n} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]_{n\times p} \in M(n \times p) \cong \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Por outro lado, $S = \{(x, y) : f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^{p+n}$, pelo Teorema da função implícita o conjunto $S$ localmente perto ao ponto $(a, b)$ pode ser parametrizado localmente como o gráfico de uma aplicação diferenciável.

Note que $S \cap V = \operatorname{graf} \xi = \{(x, \xi(x)) : x \in A; f(a, b) = c\}$. Assim, o plano tangente ao conjunto $S$ no ponto $(a, b)$ é $y - b = \xi'(a)(x - a)$ , pela equação (2), obtemos

$$y - b = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right](x - a).☺$$

**Exercício 4.**

**Considere o aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma função bijetiva de classe $C^1$, tal que $\det(f'(x)) \neq 0$, para todo $x \in A$. Mostre que $f(A)$ é aberto e que a inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ é de classe $C^1$.**

**Solução:**

Por hipótese, $f$ é bijetiva de classe $C^1$ e $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in A$, ou seja, $\det(f'(x)) \neq 0$ para todo $x \in A$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, para cada ponto $x \in A$, existem abertos $V_x \subset A$ contendo $x$ e $W_x \subset \mathbb{R}^n$ contendo $f(x)$ tais que

$$f|_{V_x} : V_x \to W_x$$

é um difeomorfismo de classe $C^1$.

Como $f|_{V_x}$ é um homeomorfismo, ele é uma aplicação aberta, ou seja, leva abertos em abertos. Assim, como $V_x$ é aberto, temos que $f(V_x) = W_x$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Os abertos $V_x$ cobrem $A$, pois para cada $x \in A$ existe tal vizinhança $V_x$ de $x$, ou seja,

$$A = \bigcup_{x \in A} V_x.$$

**Observação**

**Observação sobre a Imagem de Funções e Operações de Conjuntos**

Seja $f : X \to Y$ uma função arbitrária entre dois conjuntos $X$ e $Y$ (por exemplo, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, ou qualquer espaço topológico), e seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma coleção de quaisquer subconjuntos do domínio $X$.

a) **Imagem da União:** A imagem da união de uma coleção de conjuntos é **sempre igual** à união das imagens desses conjuntos:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

Esta propriedade é válida sem a necessidade de qualquer condição adicional sobre a função $f$ (como continuidade ou injetividade).

b) **Imagem da Interseção (Inclusão):** A imagem da interseção de uma coleção de conjuntos é **sempre um subconjunto** da interseção das imagens:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

A igualdade não é válida em geral.

c) **Condição de Igualdade para a Interseção:** Para que a igualdade na interseção se cumpra, é necessário e suficiente impor a condição de **injetividade** sobre a função $f$:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ é injetiva}$$

Estas relações são propriedades fundamentais da teoria dos conjuntos e são válidas para coleções de conjuntos arbitrários $\{A_i\}$, incluindo vizinhanças ou não.

Daí,

$$f(A) = f\left(\bigcup_{x \in A} V_x\right) = \bigcup_{x \in A} f(V_x),$$

como cada $f(V_x)$ é aberto, e uma união (arbitrária) de abertos é aberta, concluímos que $f(A)$ é aberto.

Por outro lado, para mostrar que $f^{-1} : f(A) \to A$ é de classe $C^1$, seja $y \in f(A)$ um ponto arbitrário. Como $f$ é bijetiva, existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Pelo Teorema da Função Inversa, como $f$ é de classe $C^1$ e $f'(x)$ é invertível, existem abertos $V_x \subset A$ e $W_y \subset \mathbb{R}^n$, com $x \in V_x$, $y \in W_y$ e $f(V_x) = W_y$, tais que

$$f|_{V_x} : V_x \to W_y$$

é um difeomorfismo de classe $C^1$. Em particular, a inversa local

$$(f|_{V_x})^{-1} : W_y \to V_x$$

é de classe $C^1$.

Como $f^{-1}$ coincide com $(f|_{V_x})^{-1}$ em $W_y$, segue que $f^{-1}$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança de $y$. Como $y \in f(A)$ foi arbitrário, concluímos que $f^{-1} : f(A) \to A$ é de classe $C^1$.

**Exercício 5.**

**Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $C^1$, tal que**

$$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Prove que $f$ é um difeomorfismo de classe $C^1$.**

**Solução:**

Para que $f$ seja um difeomorfismo (global) precisamos que $f$ seja bijetiva e $f'(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seja isomorfo para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

i. **Afirmação: $f$ é injetiva.** De fato,
   seja $f(x) = f(y)$, pela desigualdade da hipótese tem-se $\|x - y\| \leq \|f(x) - f(x)\| = \|0\|$, então $\|x - y\| = 0$, o que implica $x = y$.

ii. **Afirmação: $f'(x)$ é isomorfo em $\mathbb{R}^n$.** De fato, Seja $x \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Assim,

   - Mostremos que $f'(x)$ é injetiva:
     Suponha, por absurdo, que $f'(x)$ não é injetiva, então existe um $\eta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $f'(x)\eta = 0$. Note que $f$ é de classe $C^1$, ou seja,
     $$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} = 0,$$
     fazendo para $h = \eta \in \ker f'(x)$ temos
     $$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+\eta) - f(x) - f'(x)\eta\|}{\|\eta\|} = 0,$$
     como estamos assumindo que $f'(x)\eta = 0$, então
     $$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+\eta) - f(x)\|}{\|\eta\|} = 0. \tag{3}$$
     Por outro lado, pela desigualdade da hipótese do exercício, com $y = x + \eta$, obtemos
     $$\|\eta\| \leq \|f(x+\eta) - f(x)\| \Longrightarrow 1 \leq \lim_{\eta \to 0} \frac{\|f(x+\eta) - f(x)\|}{\|\eta\|}$$
     Daí $\lim_{\eta \to 0} \frac{\|f(x+\eta)-f(x)\|}{\|\eta\|} \neq 0$ o que uma contradição à equação (3). Portanto $f'(x)$ é injetiva.
   - Mostremos que $f'(x)$ é sobrejetiva.
     Pelo teorema do núcleo temos $\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker f'(x) + \dim \operatorname{im} f'(x)$, pelo item anterior, $\ker f'(x) = 0$, então $n = \dim \operatorname{im} f'(x)$. Logo, $f'(x)$ é sobrejetiva.

   Finalmente como $x$ foi arbitrário em $\mathbb{R}^n$ então $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii. **Afirmação: $f$ é sobrejetiva ($f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$).**

   - Mostremos que $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto:
     Como $f \in C^1$ e $\det(f'(x)) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então, pelo teorema da função inversa, para cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ existe um aberto $V_x \ni x$ tal que
     $$f|_{V_x} : V_x \to f(V_x)$$
     é um difeomorfismo entre abertos. Em particular, $f(V_x)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.
     Como os $V_x$ cobrem $\mathbb{R}^n$, ou seja,
     $$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} V_x,$$

pela observação anterior tem-se:

$$f(\mathbb{R}^n) = f\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} V_x\right) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} f(V_x).$$

Cada conjunto $f(V_x)$ é aberto, e uma união arbitrária de conjuntos abertos continua sendo um conjunto aberto.

Portanto, $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

- Mostremos que $f(\mathbb{R}^n)$ é um fechado:

  Seja a sequência $(y_k) \subset f(\mathbb{R}^n)$ tal que $(y_k)$ converge para algum $y \in \mathbb{R}^n$, como $(y_k) \subset f(\mathbb{R}^n)$ então existe $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_k) = y_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Note que $(y_k)$ é convergente, então ela é de Cauchy, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ $\|y_m - y_n\| < \epsilon$.

  Pela desigualdade do exercício, temos

$$\|x_m - x_n\| \leq \|f(x_m) - f(x_n)\| \leq \|y_m - y_n\| < \epsilon \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon$$

  logo $(x_k)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ (espaço completo), o que implica que é convergente. Assim, $x_k \to x$ , pela continuidade de $f$ e unicidade do limite, temos $f(x_k) = y_k \to y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$. Logo $f(\mathbb{R}^n)$ é fechada.

Finalmente o único sub-conjunto $f(\mathbb{R}^n)$ distinto do vazio, que é aberto e fechado $\mathbb{R}^n$. Logo $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, portanto $f$ é sobrejetiva.

Pelas afirmaçõese i. , ii. , iii. temos que $f$ é bijetiva em todo $\mathbb{R}^n$ e $f'(x)$ é isomorfo em todo $\mathbb{R}^n$, pelo teorema da função inversa global , $f$ é um difeomorfo de classe $C^1$.

**Exercício 6.**

**Prove que existe $\delta > 0$, tal que, se $A \in M(n)$ satisfaz $\|A\| < \delta$, então existe uma matriz $X \in M(n)$, tal que $X^2 + X^* = A$.**

**Solução:**

Definamos a função $F : M(n) \to M(n)$ por $F(X) = X^2 + X^*$. Mostremos que $F$ é de classe $C^1$. Seja $H \in M(n)$, temos

$$\begin{aligned} F(X+H) - F(X) &= (X+H)^2 + (X+H)^* - X^2 - X^* \\ &= X^2 + XH + HX + H^2 + X^* + H^* - X^2 - X^* \\ &= \underbrace{XH + HX + H^*}_{F'(X)H} + H^2. \end{aligned}$$

Definamos a aplicação $F'(X)H := XH + HX + H^*$; note que $F'(X)$ é uma aplicação linear. A função resto é $R(H) := H^2$, e é claro que

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|R(H)\|}{\|H\|} = 0.$$

Logo, $F$ é diferenciável. Inclusive, $F$ é de classe $C^1$, pois considerando $B \in M(n)$, tem-se

$$\lim_{Q\to 0} F'(X+Q)H = \lim_{Q\to 0} \left[(X+Q)H + H(X+Q) + H^*\right] = \lim_{Q\to 0} \left[XH + QH + HX + HQ + H^*\right] = XH + HX + H^* = F'(X)H.$$

Então $F'$ é contínua. Assim, $F$ é de classe $C^1$.

Note que $F'(0)H = H^*$, e $F'(0)$ é um isomorfismo. De fato, seja $N \in \ker F'(0)$, então $F'(0)N = 0$, e da definição temos $N^* = 0 \Rightarrow N = 0$, logo $F'(0)$ é injetiva. Pelo teorema do núcleo (dimensão finita), é imediato que $F'(0)$ é sobre. Daí, $F'(0)$ é um isomorfismo.

Assim, pelo teorema da função inversa, existem abertos $V, W \subset M(n)$ com $0 \in V$ e $F(0) \in W$, tais que $F|_V : V \to W$ é um difeomorfismo de classe $C^1$ (pois $F$ é de classe $C^1$). Como $W$ é um aberto, existe um $\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset W$.

Pelo teorema da função inversa temos $F(0) \in W$, e por definição temos $F(0) = 0$, então $B(F(0),\delta) = B(0,\delta) \subset W$. Além disso, $F$ é um difeomorfismo local de classe $C^1$, em particular é bijetiva, ou seja, se $A \in W$ com $\|A\| < \delta$, então existe um único $X \in V$ tal que $F(X) = A$, isto é, $X^2 + X^* = A$.

**Exercício 7.**

**Prove que existe um aberto de $\mathbb{R}^2$, $A \ni (1,-1)$, e um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, tais que, para todo ponto $(x,y) \in A$, a equação de variável real $t$,**

$$xt^2 + e^{2t} + y = 0$$

**admite uma única solução $t = t(x,y)$ em $(-\varepsilon,\varepsilon)$ e a função $t \mapsto t(x,y)$, assim definida, é de classe $C^\infty$.**

**Solução:**

Definamos a função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x,y,t) = xt^2 + e^{2t} + y$. Como queremos estudar as soluções da equação $xt^2 + e^{2t} + y = 0$ para $(x,y)$ próximos de $(1,-1)$, tomamos esse ponto e verificamos:

$$f(1,-1,0) = 1 \cdot 0^2 + e^0 + (-1) = 1 - 1 = 0,$$

ou seja, $t = 0$ é uma solução quando $(x,y) = (1,-1)$, então o ponto a ser considerado é $(1,-1,0)$.

Note que $f$ é de classe $C^\infty$, pois é soma de funções de classe $C^\infty$ (polinômio, exponencial). Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t) = 2xt + 2e^{2t}, \quad \text{e em } (1,-1,0): \quad \frac{\partial f}{\partial t}(1,-1,0) = 2 \neq 0.$$

Daí, pelo teorema da função implícita, existe um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ com $(1,-1) \in A$ e um intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbb{R}$, tais que para todo $(x,y) \in A$ existe um único $t = t(x,y) \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ satisfazendo $f(x,y,t(x,y)) = 0$.

Assim, para todo $(x,y) \in A$, a equação $xt^2 + e^{2t} + y = 0$ admite uma única solução real $t = t(x,y)$ em $(-\varepsilon,\varepsilon)$, e a função $\xi(x,y) = t(x,y)$ é de classe $C^\infty$.

**Exercício 8.**

**Dada uma matriz $B \in M(n)$, prove que existe uma curva de classe $C^\infty$ $A : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M(n)$, tal que $A(0) = I$, $A'(0) = -\frac{1}{2}B$ e, para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, tem-se $A(t)^2 + tBA(t) = I$.**

**Solução:**

Definimos a função $f : \mathbb{R} \times M(n) \to M(n)$ por

$$f(t,A) = A^2 + tBA - I,$$

onde $B \in M(n)$ é fixada. A função $f$ é de classe $C^\infty$, pois envolve apenas operações polinomiais em $A$ e $t$.

Queremos aplicar o teorema da função implícita no ponto $(0,I)$. Observamos que

$$f(0,I) = I^2 + 0 \cdot BI - I = 0.$$

Estudemos a aplicação $A \mapsto f(t,A)$ com $t$ fixado. Seja $H \in M(n)$; então a derivada direcional de $f(t,A)$ na direção $H$ é dada por

$$\begin{aligned}
f'(t,A)H &= \lim_{s\to 0} \frac{f(t,A+sH) - f(t,A)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(A+sH)^2 + tB(A+sH) - A^2 - tBA}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{A^2 + s(AH+HA) + s^2H^2 + tBA + stBH - A^2 - tBA}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \left(AH + HA + sH^2 + tBH\right) \\
&= AH + HA + tBH.
\end{aligned}$$

Avaliando em $(0,I)$, obtemos

$$f'(0,I)H = 2H,$$

ou seja, $f'(0,I)$ é a multiplicação por 2.

Seja $N \in \ker(f'(0,I))$, então $2N = 0 \Rightarrow N = 0$, ou seja, $f'(0,I)$ é injetora. Como estamos em dimensão finita, segue do teorema do núcleo que a aplicação é também sobrejetiva. Logo, $f'(0,I) : M(n) \to M(n)$ é um isomorfismo.

Pelo teorema da função implícita, existem abertos $U \subset \mathbb{R} \times M(n)$ e um intervalo $J = (-\varepsilon,\varepsilon)$ com $(0,I) \in U$ e $0 \in J$, tais que existe uma única função

$$A : J \to M(n), \quad t \mapsto A(t),$$

de classe $C^\infty$, satisfazendo

$$f(t,A(t)) = 0 \quad \text{para todo } t \in J,$$

isto é,

$$A(t)^2 + tBA(t) = I.$$

Derivando ambos os lados em relação a $t$, usando a regra da cadeia e o produto matricial, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(A(t)^2 + tBA(t)\right) &= 0, \\
A'(t)A(t) + A(t)A'(t) + BA(t) + tBA'(t) &= 0, \\
2A'(t)A(t) + BA(t) + tBA'(t) &= 0,
\end{aligned}$$

e, avaliando em $t = 0$, como $A(0) = I$, temos

$$2A'(0)I + BI + 0 \cdot BA'(0) = 0, \quad \text{isto é,} \quad 2A'(0) + B = 0,$$

portanto,

$$A'(0) = -\frac{1}{2}B.$$

**Exercício 9.**

**Considere a equação**

$$x^3 + xy^2 + y^3 = 1.$$

**É possível obter localmente uma função $x = x(y)$ ou $y = y(x)$ nas proximidades do ponto $(1, 0)$?**

**Solução:**

Definimos a função

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^3.$$

Desejamos resolver a equação $f(x, y) = 1$, ou seja, estudar a existência local de funções implícitas próximas ao ponto $(1, 0)$.

Calculamos o vetor gradiente (ou Jacobiano de $f$):

$$J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(3x^2 + y^2,\ 2xy + 3y^2\right).$$

Avaliando em $(1, 0)$:

$$J_f(1, 0) = (3,\ 0).$$

Como a derivada parcial com respeito a $x$ é não nula no ponto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 3 \neq 0,$$

o teorema da função implícita garante que existe um aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo 0 e uma função diferenciável $x = x(y)$ definida em $I$ tal que $f(x(y), y) = 1$ e $x(0) = 1$.

Por outro lado, como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

não podemos aplicar diretamente o Teorema da Função Implícita para obter uma função do tipo $y = y(x)$.

**Conclusão:** Existe localmente $x = x(y)$ próximo de $(1, 0)$, mas o mesmo não se pode garantir para $y = y(x)$.

**Exercício 10.**

**Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ com $f(2, -1) = -1$. Defina**

$$G(x, y, u) = f(x, y) + u^2$$
$$H(x, y, u) = ux + 3y^3 + u^3$$

**a) Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema de equações**

$$\begin{cases} G(x, y, u) = 0 \\ H(x, y, u) = 0 \end{cases}$$

**tem solução $(x, y, u) = (2, -1, \alpha)$.**

**b) Sob quais condições existem funções $x = g(y)$ e $u = h(y)$, de classe $C^1$ e definidas em abertos de $\mathbb{R}$ tais que $G(g(y), y, h(y)) = 0$ e $H(g(y), y, h(y)) = 0$ com $g(-1) = 2$ e $h(-1) = \alpha$?**

**c) Nas condições encontradas em (b), supondo $Df(2, -1) = (1, -3)$, encontre $g'(-1)$ e $h'(-1)$.**

**Solução:**

a) Do sistema temos

$$\begin{cases} f(x, y) + u^2 = 0 \\ ux + 3y^3 + u^3 = 0 \end{cases}$$

avaliando no ponto $(2, -1, \alpha)$ e como $f(2, -1) = -1$, obtemos uma raiz $\alpha = 1$. Além disso, satisfaz.

$$\begin{cases} G(2, -1, 1) = 0 \\ H(2, -1, 1) = 0 \end{cases}$$

.

b) Definamos a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x,y,u) = (G(x,y,u), H(x,y,u))$, pelo item anterior temos $F(2,-1,1) = (0,0)$.

Note que como $f$ é de classe $C^1$ e as funções $G, H$ são polinomiais de classe $C^1$, então $F$ é de classe $C^1$.

Calculemos o jacobiano da função $F$

$$J_F(x,y,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y,u) & \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,u) & \frac{\partial G}{\partial u}(x,y,u) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y,u) & \frac{\partial H}{\partial y}(x,y,u) & \frac{\partial H}{\partial u}(x,y,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$J_F(2,-1,1) = \begin{bmatrix} f_x(2,-1) & f_y(2,-1) & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

perceba que a sub-matriz $\begin{bmatrix} f_x(2,-1) & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} f_x(2,-1) & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \neq 0$ , ou seja, $f_x(2,-1) \neq \frac{2}{5}$.

Sob essa condição é possível usar o teorema da função implícita. Daí existem abertos $U \subset \mathbb{R}^3$ e $J \subset \mathbb{R}$ com $(2,-1,1) \in U$ ; $-1 \in J$ tais que para todo $y \in J$ existe um único $(x(y), u(y)) = (g(y), h(y)) \in \mathbb{R}^2$ e tem-se $(g(y), y, h(y)) \in U$ e $F(g(y), y, h(y)) = 0$. Isto é localmente para $y \in J$ se cumpre:

$$(G(g(y), y, h(y)), H(g(y), y, h(y))) = (0,0)$$

.

Além disso, a aplicação $\xi : J \to \mathbb{R}^2$ definida por $\xi(y) = (g(y), h(y))$ é de classe $C^1$, ou seja, as funções $g, h$ são de classe $C^1$.

Note que $(2,-1,1) = (g(-1), -1, h(-1))$, então $g(-1) = 2$ e $h(-1) = 1$.

c) Do sistema

$$\begin{cases} G((g(y), y, h(y))) = 0 \\ H((g(y), y, h(y))) = 0 \end{cases} ;$$

pela regra da cadeia e avaliando em $(2,-1,1)$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(2,-1,1) \cdot g'(-1) + \frac{\partial G}{\partial y}(2,-1,1) + \frac{\partial G}{\partial u}(2,-1,1) \cdot h'(-1) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(2,-1,1) \cdot g'(-1) + \frac{\partial H}{\partial y}(2,-1,1) + \frac{\partial H}{\partial u}(2,-1,1) \cdot h'(-1) = 0 \end{cases} .$$

Daí

$$\begin{cases} f_x(2,-1) \cdot g'(-1) + f_y(2,-1) + 2h'(-1) = 0 \\ g'(-1) + 9 + 5h'(-1) = 0 \end{cases}$$

Como $f_x(2,-1) = 1$ e $f_x(2,-1) = -3$, tem-se

$$\begin{cases} g'(-1) - 3 + 2h'(-1) = 0 \\ g'(-1) + 9 + 5h'(-1) = 0 \end{cases}$$

Finalmente $h'(-1) = -4$ e $g'(-1) = 11$.