Gabarito Análise $\mathbb{R}^n$ - Topologia em $\mathbb{R}^n$ e Continuidade

Kelvin (Pol)

Exercício 1.

Diz-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma se $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, então dizemos que T preserva produto interno.

a) Mostre que T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.

b) Mostre que uma transformação linear T com essa propriedade é necessariamente bijetiva.

c) Mostre que T^{-1} preserva norma.

Solução:

a) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que preserva norma. Considere $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}\|T(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2\\ \langle Tx-Ty, Tx-Ty\rangle &= \langle x-y, x-y\rangle\\ \|Tx\|^2 - 2\langle Tx, Ty\rangle + \|Ty\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ \langle Tx, Ty\rangle &= \langle x, y\rangle \ ;\end{aligned}$$

logo T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.

b) Suponha que $T \in \mathscr{L} \in (\mathbb{R}^n)$ tal que ela preserva norma. Assim,

- T **é injetiva.** De fato, seja $\eta \in \operatorname{Ker} T \implies T\eta = 0 \implies \|T\eta\| = 0$, como T preserva norma ($\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$) então $\|\eta\| = 0 \implies \eta = 0$.
- T **é sobrejetiva.** De fato, pelo teorema do núcleo temos

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T \ ;$$

como $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ($\dim KerT = 0$) então $\dim \operatorname{Im} T = n$, e como $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ implica T é sobrejetiva.

c) Pelo item b) temos que T é um isomorfo. Seja $y \in \operatorname{Im} T$ então existe um $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Tx = y \implies \|Tx\| = \|y\| \ ;$$

como T preserva norma ($\|Tx\| = \|x\|$) então $\|x\| = \|y\|$. Por outro lado temos

$$T^{-1}y = x \implies \|T^{-1}y\| = \|x\| \ ;$$

logo $\|T^{-1}y\| = \|y\|$. ☺

Exercício 2.

Dado um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, prove que são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) $\angle\langle Tx, Ty\rangle = \angle\langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$;

(b) existe $\mu > 0$ tal que $\|Tx\| = \mu\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

(c) existe $\lambda > 0$, tal que $\langle Tx, Ty\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Solução:

a) (a $\implies$ b)
Suponha que $\angle\langle Tx, Ty\rangle = \angle\langle x, y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\frac{\langle Tx, Ty\rangle}{\|Tx\|\|Ty\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \implies \|Tx\| = \|x\| \cdot \underbrace{\frac{\|y\|\langle Tx, Ty\rangle}{\|Ty\|\langle x, y\rangle}}_{\mu>0} \implies \exists \mu > 0 : \|Tx\| = \mu\|x\|. <$$

b) (b $\Longrightarrow$ c)

Suponhamos que o isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz o item b), ou seja, existe um $\mu > 0$ tal que $\|Tx\| = \mu\|x\|$;$\forall x \in \mathbb{R}^n$, então $\|Tx\| = \mu^2\|x\|$. Dado $z \in \mathbb{R}^n$com $z = x - y$, temos

$$\begin{aligned}\|Tz\|^2 &= \mu^2\|x\|^2 \\ \|Tx - Ty\|^2 &= \mu^2\|x - y\|^2 \\ \|Tx\|^2 - 2\langle Tx, Ty\rangle + \|Ty\|^2 &= \mu^2\|x\|^2 - 2\mu^2\langle x, y\rangle + \mu^2\|y\|^2 \\ \langle Tx, Ty\rangle &= \mu^2\langle x, y\rangle;\end{aligned}$$

logo existe $\lambda := \mu^2 > 0$ tal que

$$\langle Tx, Ty\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

c) (c $\Longrightarrow$ a) Suponhamos que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\langle Tx, Ty\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

onde $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear.

Note que $\angle\langle Tx, Ty\rangle := \frac{\langle Tx,Ty\rangle}{\|Tx\|\|Ty\|}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|Tx\|\|Ty\| &= \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle\langle Ty, Ty\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda\langle x, x\rangle\lambda\langle y, y\rangle} \\ &= \lambda\|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\angle\langle Tx, Ty\rangle := \frac{\langle Tx, Ty\rangle}{\|Tx\|\|Ty\|} = \frac{\lambda\langle x, y\rangle}{\lambda\|x\|\|y\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} =: \angle\langle x, y\rangle.$$

Exercício 3.

Seja $\mathscr{L} \in (\mathbb{R}^n)$ e $\|T - I\| < 1$. Prove que T é invertível.

Solução:

Suponha por absurdo que T é invertível, então existe $\eta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\eta \in \operatorname{Ker} T$, ou seja, $T\eta = 0$, então $T\eta - I\eta = -\eta$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T\eta - I\eta\| &= \| - \eta\| \\ \|(T - I)\eta\| &= \|\eta\| \\ \left\|\frac{(T - I)\eta}{\eta}\right\| &= 1;\end{aligned}$$

tomando supremo quando $\|\eta\| = 1$ e como η é um vetor particular que fica no kernel de T, implica $\|T - I\| \geq 1$ o que contradiz a hipótese. Logo T é invertível. ☺

Exercício 4.

Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu > 0$ tais que $\|Tx\| \geq \mu\|x\|$. Mostre que T é invertível e $\|T^{-1}\| \leq 1/\mu$

Solução:

- **T é injetiva.** De fato, seja $\eta \in \operatorname{Ker} T$, então $T\eta = 0 \Longrightarrow \|T\eta\| = 0$. Note que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos $\|Tx\| \geq \mu\|x\|$ onde $\mu > 0$. Assim

$$0 = \|T\eta\| \geq \mu\|\eta\| \Longrightarrow 0 \geq \mu\|\eta\| \Longrightarrow \|\eta\| = 0 \Longrightarrow \eta = 0\ ;$$

  logo T é injetiva.

- **T é sobrejetiva.** De fato, pelo teorema do núcleo temos $\dim \operatorname{Im} T = n$ e como $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, o que implica que T é sobrejetiva.

Por outro lado, seja $y \in \operatorname{Im} T$, então existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = y$, como T é investível então $T^{-1}y = x$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\geq \mu\|x\| \\
\|x\| &\leq \frac{1}{\mu}\|Tx\| \\
\|T^{-1}y\| &\leq \frac{1}{\mu}\|y\| \\
\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|} &\leq \frac{1}{\mu} \quad ; y \neq 0 \\
\sup_{\|y\|=1} \|T^{-1}y\| &\leq \frac{1}{\mu};
\end{aligned}$$

logo $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$. ☺

Exercício 5.

Dado um conjunto $S \subset M(n)$, defina:

$$\operatorname{Eig}(S) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \textbf{ é um autovalor de alguma matriz } A \in S\}$$

(a) Prove que $\operatorname{Eig}(S)$ é limitado sempre que S é limitado.

(b) Prove que $\operatorname{Eig}(S)$ é compacto sempre que S é compacto.

Solução:

a) Seja $\lambda \in \operatorname{Eig}(S)$ associado ao autovetor v, então $Av = \lambda v$ onde $v \neq 0$. Assim,

$$\|Av\| = \|\lambda v\| \implies |\lambda|\|v\| \leq \|A\|\|v\| \implies |\lambda| \leq \|A\|.$$

Por hipótese temos que S é limitado, então existe um $c > 0$ tal que $\|A\| < c$; $\forall A \in S$. Logo, existe $c > 0$ tal que $|\lambda| < c \, \forall \lambda \in \operatorname{Eig}(S)$.

b) Pelo item anterior temos que se S é limitado então Eig(S) é limitado. Agora temos que S é compacto então é fechado e limitado (pois S fica num espaço completo). Assim só precisamos mostrar que $\operatorname{Eig}(S)$ **é fechado.**

De fato, seja $(\lambda_k) \subset \operatorname{Eig}(S)$ uma sequência tal que $\lambda_k \to \lambda \in \mathbb{R}$. Para cada k, existe $A_k \in S$ tal que λ_k é autovalor de A_k, ou seja,

$$\det(A_k - \lambda_k I) = 0.$$

Como S é compacto e $(A_k) \subset S$, existe uma subsucessão (A_{k_j}) que converge para alguma matriz $A \in S$. Considerando a subsucessão correspondente (λ_{k_j}), temos também $\lambda_{k_j} \to \lambda$.

Definimos a função

$$f(X, \mu) = \det(X - \mu I),$$

que é contínua em $M(n) \times \mathbb{R}$.

Então, como $(A_{k_j}, \lambda_{k_j}) \to (A, \lambda)$ e f é contínua, segue que

$$\lim_{j \to \infty} \det(A_{k_j} - \lambda_{k_j} I) = \det(A - \lambda I).$$

Mas sabemos que $\det(A_{k_j} - \lambda_{k_j} I) = 0$ para todo j, logo $\det(A - \lambda I) = 0$, e portanto λ é autovalor de A. Como $A \in S$, concluímos que $\lambda \in \operatorname{Eig}(S)$. ☺

Exercício 6.

Mostre que as matrizes ortogonais $n \times n$ formam um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Solução:

Definamos o conjunto $O(n) = \{A \in M(n) \mid A^T A = I\}$.

- $O(n)$**é limitado.** Seja $A \in O(n)$ note que

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^T Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

então

$$\|Ax\| = \|x\| \underbrace{\implies}_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \longrightarrow \|A\| \leq 1,$$

logo A é limitado.

- $O(n)$ **é fechado.**

  De fato, para provar que o conjunto das matrizes ortogonais $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ é fechado, consideremos a seguinte aplicação:
  $$f : \mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n), \quad f(X) = XX^*.$$
  Definimos f como a composição $f = \psi \circ \varphi$, onde:
  $$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{M}(n) &\longrightarrow \mathrm{M}(n) \times \mathrm{M}(n) \\ X &\longmapsto (X, X^*) \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} \psi : \mathrm{M}(n) \times \mathrm{M}(n) &\longrightarrow \mathrm{M}(n) \\ (X, Y) &\longmapsto XY. \end{aligned}$$
  A função φ é composta das aplicações:
  $$X \mapsto X \quad \text{(identidade)} \quad \text{e} \quad X \mapsto X^* \quad \text{(transposição)}.$$
  Ambas são funções lineares, logo contínuas. A transposição é linear pois, dados $X, Y \in \mathrm{M}(n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:
  $$(\lambda X + Y)^* = \lambda X^* + Y^*.$$
  Portanto, φ é contínua.

  A função $\psi(X, Y) = XY$ é bilinear: para todo $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathrm{M}(n)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$,
  $$\psi(X_1 + X_2, Y) = (X_1 + X_2)Y = X_1Y + X_2Y = \psi(X_1, Y) + \psi(X_2, Y),$$
  $$\psi(X, Y_1 + Y_2) = X(Y_1 + Y_2) = XY_1 + XY_2 = \psi(X, Y_1) + \psi(X, Y_2),$$
  $$\psi(\lambda X, Y) = (\lambda X)Y = \lambda(XY) = \lambda\psi(X, Y), \quad \psi(X, \lambda Y) = X(\lambda Y) = \lambda(XY) = \lambda\psi(X, Y).$$
  Logo, ψ é bilinear, e portanto contínua.

  Como φ e ψ são contínuas, segue que $f = \psi \circ \varphi$ é contínua. Note que:
  $$O(n) = \{X \in \mathrm{M}(n) \mid XX^* = I\} = f^{-1}(\{I\}).$$
  Como $\{I\} \subset \mathrm{M}(n)$ é fechado (conjunto unitário), e a pré-imagem de um conjunto fechado por uma função contínua é fechada, ou seja,
  $$(\underbrace{\psi \circ \phi}_{\text{contínua}})^{-1}(\underbrace{\{I\}}_{fechado}) = O(n),$$
  logo $O(n)$ é fechado. Finalmente como $M(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ é um espaço normado de dimensão finita (espaço completo) o que implica que $O(n)$ é compacto.☺

Exercício 7.

Analise a continuidade das funções a seguir:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \textbf{caso contrário} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \|x\|^2, & x \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n \\ 0, & \textbf{caso contrário} \end{cases}$

<u>Solução:</u>

a) Queremos analisar a continuidade da função
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua em $(0,0)$ se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$**:** a função é definida por um quociente de funções continuas (polinômios e raiz quadrada), com denominador não nulo, logo f é contínua $(x,y) \neq (0,0)$.

No ponto $(0,0)$**:** usamos mudança para coordenadas polares.

Seja $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta(r\sin\theta)^2}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^4}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}}.
\end{aligned}$$

Note que

- Como $|\sin^2\theta| \leq 1 \Longrightarrow |\cos\theta\sin^2\theta| \leq |\cos\theta|$;
- por outro lado temos $\sqrt{\cos^2\theta} \leq \sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta} \Longrightarrow |\cos\theta| \leq \sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$;

o que implica que $|\cos\theta\sin^2\theta| \leq |\cos\theta| \leq \sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$, ou seja,

$$\left| \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}} \right| \leq 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{r\to 0} \underbrace{r^2}_{\to 0} \underbrace{\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}}}_{\text{limitado}} = 0;$$

logo a função f é continua em todo $\mathbb{R}^2$.

b) Queremos analisar a continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua em $(0,0)$ se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$**:** a função é definida por um quociente de funções polinomiais com denominador não nulo, logo f é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$.

No ponto $(0,0)$**:** usamos mudança para coordenadas polares.

Seja $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3 \cdot r\sin\theta}{(r\cos\theta)^4 + (r\sin\theta)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

Note que

- O numerador $|\cos^3\theta\sin\theta| \leq 1$, pois é produto de senos e cossenos;
- O denominador $r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta \geq \sin^2\theta > 0$ para $\theta \neq k\pi$.

Assim, a parte angular

$$\left|\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}\right|$$

está limitada, já que o numerador é limitado por 1 e o denominador é maior ou igual que $\sin^2\theta$, que é positivo em quase todo intervalo.

Logo, temos

$$|f(x,y)| \leq r^2 \cdot (\text{constante}) \to 0 \quad \text{quando } r \to 0.$$

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

o que mostra que f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

c) Queremos analisar a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua em $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Vamos analisar o comportamento do limite em $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Sabemos que tanto $\mathbb{Q}$ quanto seu complementar $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Assim, para qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$, podemos considerar:

- Uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to a$;
- Uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $y_n \to a$.

Nessas condições, temos:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sin(x_n) \to \sin(a), \\ f(y_n) &= 0 \to 0. \end{aligned}$$

Para que o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ exista, é necessário que os limites das duas sequências sejam iguais. Ou seja, devemos ter $\sin(a) = 0$.

Isso implica que os únicos pontos onde f pode ser contínua são os pontos da forma $a = k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Análise nos pontos $a = k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$:

Nesses pontos, temos $\sin(a) = 0$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$ (o que ocorre apenas para $a = 0$, já que π é irracional), então $f(a) = \sin(0) = 0$.
- Se $a \notin \mathbb{Q}$, então $f(a) = 0$ por definição.

Em ambos os casos, $f(a) = 0$.

Para qualquer sequência $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ com $x_n, y_n \to a = k\pi$, temos:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \sin(k\pi) = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a)$, e a função é contínua em $a = k\pi$.

Análise nos pontos $a \neq k\pi$:

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\sin(a) \neq 0$.

- Para uma sequência racional $(x_n) \to a$, temos $f(x_n) = \sin(x_n) \to \sin(a)$;
- Para uma sequência irracional $(y_n) \to a$, temos $f(y_n) = 0 \to 0$.

Como $\sin(a) \neq 0$, os limites são diferentes, logo $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe, e a função f não é contínua nesses pontos.

Finalmente f é contínua somente nos pontos $a = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

d) Queremos analisar a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2, & x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua em $a \in \mathbb{R}^n$ se e somente se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Como $\mathbb{Q}^n$ e $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ são densos em $\mathbb{R}^n$, existem sequências $(x_k) \subset \mathbb{Q}^n$ e $(y_k) \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ tais que $x_k \to a$ e $y_k \to a$. Temos:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|^2 = \|a\|^2,$$

pela continuidade da norma e do quadrado, e

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Para existir $\lim_{x\to a} f(x)$, deve-se ter $\|a\|^2 = 0$, ou seja, $a = 0$.

No ponto $a = 0$, como $0 \in \mathbb{Q}^n$,

$$f(0) = 0,$$

e para quaisquer sequências $(x_k) \to 0$ em $\mathbb{Q}^n$ e $(y_k) \to 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, os limites coincidem e são iguais a 0. Logo, f é contínua em 0.

Para $a \neq \mathbf{0}$, os limites das sequências diferem, e f é descontínua. ☹

Exercício 8.

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que se $f(a) \neq g(a)$, então existe uma bola aberta $B = B(a, r)$ na qual $f(x) \neq g(x)\ \forall x \in X \cap B$.

Solução:

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funções contínuas no ponto $a \in X$. Assuma que $f(a) \neq g(a)$. Então, a distância entre $f(a)$ e $g(a)$ é $\epsilon = \|f(a) - g(a)\| > 0$.

Pela continuidade de f em a temos, para todo $x \in X$ com $\|x - a\| < \delta_f$ (isto é, $x \in B(a, \delta_f) \cap X$), tem-se $\|f(x) - f(a)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

$$\|f(x) - f(a)\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

Pela continuidade de f em a temos, para todo $x \in X$ com $\|x - a\| < \delta_g$ (isto é, $x \in B(a, \delta_g) \cap X$), tem-se $\|g(x) - g(a)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

$$\|g(x) - g(a)\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Por hipótese temos que $f(a) \neq g(a)$, ou seja, $0 < \|f(a) - g(a)\| := \epsilon$

Agora, queremos provar que $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in B \cap X$. Isso é equivalente a provar que $\|f(x) - g(x)\| > 0$.

Seja $r = \min(\delta_f, \delta_g)$. Assim, existe $r > 0$ e considere a bola aberta $B = B(a, r)$. Logo para qualquer $x \in B \cap X$, temos

$$\begin{aligned} \|f(a) - g(a)\| &= \|f(a) - f(x) + f(x) - g(x) + g(x) - g(a)\| \\ &\leq \|f(a) - f(x)\| + \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - g(a)\|; \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &\geq \|f(a) - g(a)\| - \|f(a) - f(x)\| - \|g(x) - g(a)\| \\ &\underbrace{\overset{\text{hipótese}}{>}}_{(1)(2)} \epsilon - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in B \cap X$.☺

Exercício 9.

Seja Ω o conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ invertíveis, mostre que Ω é um conjunto aberto de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e a aplicação

$$\Psi : \Omega \to \Omega$$
$$A \mapsto A^{-1}$$

é contínua sobre Ω.

<u>**Solução:**</u>

Definamos $\Omega := \{A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : A \text{ é invertível}\}$

- **Ω é aberto.**

  De fato, pelo isomorfismo natural que existe entre os espaços $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e $M(n)$, é possível estudar os operadores lineares como matrizes (sempre que fiquem definidos em espaços normados de dimensão finita), então denotemos o isomorfismo por $\simeq$. Seja a função $\det : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \simeq M(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ e considere $A \in \Omega \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, então $\det A \neq 0$. Note que a aplicação det é continua por ser um polinômio e tome-se o aberto $< -\infty; 0 > \cup < 0; \infty >$. Assim,

$$\det^{-1}(< -\infty; 0 > \cup < 0; \infty >) = \Omega;$$

  ou seja, a imagem inversa da aplicação continua det de um aberto, é Ω, logo Ω é aberto.

- **Ψ é contínua em Ω.**

  Seja $\Omega \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares invertíveis (ou matrizes invertíveis, por isomorfismo). Seja $\Psi : \Omega \to \Omega$ a aplicação definida por $\Psi(A) = A^{-1}$. Nosso objetivo é provar que Ψ é contínua.

  Vamos demonstrar a continuidade de Ψ utilizando a definição sequencial. Seja $A \in \Omega$ um ponto arbitrário fixado. Queremos mostrar que, se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ é uma sequência de matrizes tal que $A_k \to A$ (na norma matricial, ou seja, $\|A_k - A\| \to 0$ quando $k \to \infty$), então $A_k^{-1} \to A^{-1}$.

  Como $A \in \Omega$, sabemos que A é invertível. Dado que $A_k \to A$ e Ω é um conjunto aberto (demonstrado na primeira parte do exercício 9), existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $A_k \in \Omega$, o que garante que A_k é invertível.

  Para $k \geq k_0$, podemos reescrever A_k da seguinte forma:

$$A_k = A + (A_k - A) = A(I + A^{-1}(A_k - A))$$

  onde I é a matriz identidade.

  Defina $E_k := A^{-1}(A_k - A)$. Como a multiplicação de matrizes é uma operação contínua (em particular, a multiplicação por uma matriz fixa A^{-1} é uma transformação linear, e toda transformação linear em espaços de dimensão finita é contínua), e $A_k - A \to 0$ (pelo fato de $A_k \to A$), segue que $E_k \to 0$. Ou seja, $\|E_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

  Uma vez que $\|E_k\| \to 0$, existe um $k_1 \in \mathbb{N}$ (onde $k_1 \geq k_0$) tal que para todo $k \geq k_1$, $\|E_k\| < 1$. Para matrizes X com $\|X\| < 1$, a matriz $(I - X)$ é invertível e sua inversa pode ser expressa pela série de Neumann: $(I - X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} X^j$. No nosso caso, temos $(I + E_k)$, que pode ser escrito como $(I - (-E_k))$. Como $\|E_k\| < 1$, então $\|-E_k\| = \|E_k\| < 1$. Assim, para todo $k \geq k_1$, $(I + E_k)$ é invertível e sua inversa é dada por:

$$(I + E_k)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j E_k^j$$

  Esta série converge na norma matricial.

  Agora, podemos expressar A_k^{-1}:

$$A_k^{-1} = (A(I + E_k))^{-1} = (I + E_k)^{-1} A^{-1}$$

  Consideremos a diferença $A_k^{-1} - A^{-1}$:

$$A_k^{-1} - A^{-1} = (I + E_k)^{-1} A^{-1} - I A^{-1} = [(I + E_k)^{-1} - I] A^{-1}$$

  Tomando a norma em ambos os lados e utilizando a submultiplicatividade da norma matricial:

$$\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \leq \|(I + E_k)^{-1} - I\| \cdot \|A^{-1}\|$$

  Sabemos que $\|E_k\| \to 0$. Da expansão da série de Neumann,

$$(I + E_k)^{-1} - I = (I - E_k + E_k^2 - E_k^3 + \dots) - I = -E_k + E_k^2 - E_k^3 + \dots$$

Tomando a norma:

$$\|(I+E_k)^{-1}-I\| = \|-E_k+E_k^2-E_k^3+\dots\|$$

$$\|(I+E_k)^{-1}-I\| \leq \|E_k\|+\|E_k^2\|+\|E_k^3\|+\dots$$

$$\|(I+E_k)^{-1}-I\| \leq \|E_k\|+\|E_k\|^2+\|E_k\|^3+\dots = \frac{\|E_k\|}{1-\|E_k\|}$$

Como $\|E_k\| \to 0$, o termo $\frac{\|E_k\|}{1-\|E_k\|}$ também tende a 0. Portanto, $\|(I+E_k)^{-1}-I\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Substituindo de volta na desigualdade principal:

$$\|A_k^{-1}-A^{-1}\| \leq \big(\|(I+E_k)^{-1}-I\|\big)\cdot\|A^{-1}\|$$

Como o primeiro termo no produto tende a 0 e $\|A^{-1}\|$ é uma constante finita, segue que:

$$\|A_k^{-1}-A^{-1}\| \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty\ ;$$

logo, $A_k^{-1} \to A^{-1}$ e concluímos que a aplicação $\Psi(A) = A^{-1}$ é contínua em todo Ω.☹

Exercício 10.

Mostre que uma aplicação $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$ tem-se que $\partial f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\partial Y)$.

Solução:

($\Longrightarrow$) Suponha que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua. Vamos provar que para todo conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$, temos $\partial f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\partial Y)$.

Seja $Y \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto arbitrário. Se $\partial f^{-1}(Y) = \emptyset$, a inclusão $\emptyset \subseteq f^{-1}(\partial Y)$ é trivialmente satisfeita. Vamos, portanto, considerar o caso em que $\partial f^{-1}(Y) \neq \emptyset$.

Seja $a \in \partial f^{-1}(Y)$ um ponto arbitrário na fronteira da imagem inversa de Y. Então, para todo $\delta > 0$, temos

(i) $B(a,\delta) \cap f^{-1}(Y) \neq \emptyset$. Isso significa que existe um $x_0 \in B(a,\delta)$ tal que $f(x_0) \in Y$.

(ii) $B(a,\delta) \cap f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus Y) \neq \emptyset$. Isso significa que existe um $x_1 \in B(a,\delta)$ tal que $f(x_1) \in \mathbb{R}^m \setminus Y$.

Por outro lado temos que f é contínua em a tem-se

$$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$$

Assim,

(i) Como $x_0 \in B(a,\delta)$ e $f(x_0) \in Y \Longrightarrow f(x_0) \in f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$, o que implica que $f(x_0) \in B(f(a),\epsilon) \cap Y$, ou seja, $B(f(a),\epsilon) \cap Y \neq \emptyset$.

(ii) Analogamente, como $x_1 \in B(a,\delta)$ e $f(x_1) \in \mathbb{R}^m \setminus Y \Longrightarrow f(x_1) \in f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$ o que implica que $f(x_1) \in B(f(a),\epsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus Y)$. Isso implica que $B(f(a),\epsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus Y) \neq \emptyset$.

Portanto para qualquer bola aberta $B(f(a),\epsilon)$ centrada em $f(a)$, essa bola intersecta tanto Y quanto seu complemento $\mathbb{R}^m \setminus Y$, logo $f(a) \in \partial Y$.

Finalmente, se $f(a) \in \partial Y \Longrightarrow a \in f^{-1}(\partial Y)$. Como a foi um ponto arbitrário em $\partial f^{-1}(Y)$, concluímos que $\partial f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\partial Y)$.

Parte 2: ($\Longleftarrow$) Suponha que para todo conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$, $\partial f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\partial Y)$. Vamos provar que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

Para provar que f é contínua, é suficiente demonstrar que a imagem inversa de todo conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto arbitrário. Queremos provar que $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Uma propriedade fundamental dos conjuntos abertos é que um conjunto A é aberto se e somente se $A \cap \partial A = \emptyset$ (isto é, a fronteira do conjunto não contém nenhum de seus próprios pontos).

Como V é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$, por definição, temos $V \cap \partial V = \emptyset$.

Tomando $Y = V$, por hipótese temos

$$\partial f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(\partial V)$$

Para provar que $f^{-1}(V)$ é aberto, precisamos mostrar que $f^{-1}(V) \cap \partial f^{-1}(V) = \emptyset$.

Vamos analisar a intersecção:

$$f^{-1}(V) \cap \partial f^{-1}(V)$$

Como $\partial f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(\partial V)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(V) \cap \partial f^{-1}(V) &\subseteq f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\partial V) \\
&\underbrace{=}_{\text{prop.}} f^{-1}(V \cap \partial V) \\
&\underbrace{=}_{V \text{ é aberto}} f^{-1}(\emptyset) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Assim, temos $f^{-1}(V) \cap \partial f^{-1}(V) \subseteq \emptyset$, o que implica que $f^{-1}(V) \cap \partial f^{-1}(V) = \emptyset$. Portanto $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$logo f é contínua. ☺

Exercício 11.

A distância entre dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (sempre existe?), é definida por

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Mostre que se A e B são limitados, disjuntos, não vazios e $\operatorname{dist}(A, B) = 0$, então $\partial A \cap \partial B \neq \emptyset$.

<u>**Solução:**</u>

Note que, se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são não vazios, então o conjunto

$$\{\|x - y\| \mid x \in A, \ y \in B\} \subset [0, +\infty)$$

é não vazio e limitado inferiormente. Assim, pelo fato de $\mathbb{R}$ ser completo, o ínfimo desse conjunto sempre existe. Portanto, a distância $\operatorname{dist}(A, B)$ está bem definida sempre que A e B forem não vazios.

Mostremos que $\partial A \cap \partial B \neq \emptyset$.

De fato, sejam $x_k \in A$ e $y_k \in B$ sequências tais que

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| = \operatorname{dist}(A, B) \underbrace{=}_{\text{hipótese}} 0.$$

Como A e B são conjuntos limitados, as sequências (x_k) e (y_k) também são limitadas. Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass, existem subsequências convergentes $x_{k_j} \to a$ e $y_{k_j} \to b$.

Além disso, como $x_{k_j} \in A$ e $y_{k_j} \in B$, temos $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$. Pela continuidade da norma, segue que

$$0 = \lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| = \lim_{j \to \infty} \|x_{k_j} - y_{k_j}\| = \|\lim_{j \to \infty} (x_{k_j} - y_{k_j})\| = \|a - b\|,$$

logo, $a = b$.

Portanto, existe um ponto $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Como $A \cap B = \emptyset$, esse ponto a não pode pertencer ao interior de A nem ao interior de B. De fato, se $a \in \operatorname{int}(A)$, então existiria uma bola centrada em a contida em A, o que forçaria pontos de B (próximos a a) a pertencerem a A, contradizendo $A \cap B = \emptyset$. O mesmo vale para o interior de B.

Assim, $a \in \partial A \cap \partial B$, e portanto,

$$\partial A \cap \partial B \neq \emptyset. \quad ☺$$

Exercício 12.

Considere $F, K \subset \mathbb{R}^n$ dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$ tal que F é fechado e K é compacto. Mostre que se $F \cap K = \emptyset$ então $\operatorname{dist}(F, K) > 0$. Dê um exemplo que dois conjuntos fechados $E, F \subset \mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ tal que $\operatorname{dist}(E, F) = 0$ mas $E \cap F = \emptyset$.

<u>**Solução:**</u>

Seja a distância entre os conjuntos definida por

$$d(F, K) := \inf\{\|x - y\| \mid x \in F, \ y \in K\}.$$

Como F e K são subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$, esse ínfimo está bem definido como número real não-negativo.

Sejam sequências $(x_k) \subset F$ e $(y_k) \subset K$ tais que

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| = d(F, K).$$

Note que K é compacto, a sequência (y_k) admite uma subsequência convergente: existe $y_{k_j} \xrightarrow{j \to \infty} y \in K$. Além disso, como a sequência de distâncias $\|x_k - y_k\|$ é convergente, em particular é limitada. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|x_k - y_k\| \leq M \quad \text{para todo } k.$$

Como $y_k \in K$ e K é compacto, em particular limitado, existe $R > 0$ tal que $\|y_k\| \leq R$ para todo k. Daí,

$$\|x_k\| \leq \|x_k - y_k\| + \|y_k\| \leq M + R.$$

Portanto, a sequência (x_k) também é limitada. Assim, pelo teorema de Bolzano–Weierstrass, existe uma subsequência $x_{k_j} \to x \in \mathbb{R}^n$. Como F é fechado e $x_{k_j} \in F$, temos $x \in F$.

Pela continuidade da norma, temos:

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - y_{k_j}\| = \|x - y\|.$$

Mas como $\|x_k - y_k\| \to d(F, K)$, também temos que $\|x - y\| = d(F, K)$. Portanto, concluímos que o ínfimo que define $d(F, K)$ é atingido: existem $x \in F$ e $y \in K$ tais que

$$d(F, K) = \|x - y\|.$$

Mostremos que se $F \cap K = \emptyset$ então $d(F, K) \neq 0$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $d(F, K) = 0$. Então dados $x \in F$; $y \in K$, tem-se

$$\|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Logo, $x \in F \cap K$, o que contradiz a hipótese de que $F \cap K = \emptyset$.

Portanto, a suposição leva a uma contradição, e concluímos que

$$d(F, K) > 0. \quad ☺$$

Exercício 13.

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ fechados e disjuntos. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

é contínua, com $f(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$. Além disso, $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$.

Solução:

Seja a distância entre um ponto a um conjunto definida por

$$d(x, A) := \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

Seja $(x_k) \in A$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = d(x, A).$$

Note que $\|x - x_k\|$ é convergente a $d(x, A)$, em particular é limitada, então existe $M > 0$ tal que $\|x - x_k\| \leq M$, então

$$\|x_k\| \leq \|x - x_k\| + \|x\| \leq M + \|x\|;$$

o que implica que (x_k) é limitada, pelo teorema de Bolzano- Weierstrass, existe a sub-sequência $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} a \in \mathbb{R}^n$, como $(x_k) \in A$ e A é fechado , então $a \in A$, daí $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} a \in A$. Pela continuidade da norma temos

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = \|x - \lim_{k\to\infty} x_k\| = \|x - \lim_{j\to\infty} x_{k_j}\| = \|x - a\|.$$

Assim, existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = \|x - a\|$.

- $d(x, A)$ **é 1-lipschitziana.**

  De fato, suponhamos que existem $a, b \in A$ tais que $d(x, A) = \|x - a\|$ e $d(y, A) = \|y - b\|$ onde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\|x - a\| \leq \|x - b\|$; $\|y - b\| \leq \|y - a\|$. Daí,

  $$\|x - a\| \leq \|x - b\| \leq \|x - y\| + \|y - b\| \Longrightarrow -\|x - y\| \leq \|y - b\| - \|x - a\|$$

  $$\|y - b\| \leq \|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| \Longrightarrow \|y - b\| - \|x - a\| \leq \|x - y\|;$$

  então $\|x - a\| - \|y - b\|| \leq \|x - y\| \Longrightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$, ou seja, $d(x, A)$ é 1-Lipschitziana. Por tanto $d(x, A)$ é uniformemente contínua.

- f **é contínua.**

  De fato, seja a função $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Mostremos que se A, B são fechados e disjuntos, então o denominador da função é não nula, suponhamos por absurdo

  $$d(x, A) + d(x, B) = 0 \Longrightarrow d(x, A) = 0 \ ; \ d(x, B) = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{a\in A\ ,b\in B} \|x - a\| = 0 \ ; \ \|x - b\| = 0,$$

  o que implica que $x = a = b$ o que contradiz que A, B são disjuntos. Assim a funca f fica bem definida.

Por outro lado, notamos que:

- Como $d(x,A), d(x,B) \geq 0$, é claro que,

$$d(x,A) \leq d(x,A) + d(x,B) \Longrightarrow \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1\ ; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

  ou seja, $f(\mathbb{R}^n) = [0,1]$.

- Se $f(x) = 0 \Longleftrightarrow d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A \Longleftrightarrow f^{-1}(0) = A$
- Se $f(x) = 1 \Longleftrightarrow d(x,B) = 0 \Longleftrightarrow x \in B \Longleftrightarrow f^{-1}(1) = B$. ☺

Exercício 14.

Mostre que a aplicação contínua $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f(x) := \frac{x}{1-\|x\|}$, não é uniformemente contínua.

<u>**Solução:**</u>

Note que $\|x\| \neq 1\ \forall x \in B(0,1)$, então a aplicação f fica bem definida. Sejam a sequências $(x_k), (y_k) \in B(0,1)$ tais que

$$x_k := (1 - \frac{1}{k}, 0, \ldots, 0) \Longrightarrow x_k := \left(1 - \frac{1}{k}\right) e_1 \quad ; \text{ onde } \|e_1\| = 1$$

$$y_k := (1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, 0, \ldots, 0) \Longrightarrow y_k := \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e_1 \quad ; \text{ onde } \|e_1\| = 1$$

Note que $x_k - y_k = \frac{1}{k^2} e_1 \Longrightarrow \|x_k - y_k\| \longrightarrow 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \frac{x_k}{1 - \|x_k\|} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right) e_1}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right) e_1}{\frac{1}{k}} \\ &= (k-1) e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_k) &= \frac{y_k}{1 - \|y_k\|} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e_1}{1 - \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e_1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e_1}{\frac{k+1}{k^2}} \\ &= \left(\frac{k^2 - k - 1}{k+1}\right) e_1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(y_k) &= \left((k-1) - \left(\frac{k^2 - k - 1}{k+1}\right)\right) e_1 \\ &= \left(\frac{(k^2 - 1) - (k^2 - k - 1)}{k+1}\right) e_1 \\ &= \left(\frac{k}{k+1}\right) e_1; \end{aligned}$$

logo,

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| = \left\|\frac{k}{k+1} e_1\right\| = \frac{k}{k+1} \|e_1\| = \frac{k}{k+1} \cdot 1 = \frac{k}{k+1}$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \|f(x_k) - f(y_k)\| = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Como $\lim_{k\to\infty} \|f(x_k) - f(y_k)\| = 1 \neq 0$, encontramos duas sequências $(x_k), (y_k) \in B(0,1)$ tais que $\|x_k - y_k\| \to 0$, mas $\|f(x_k) - f(y_k)\| \not\to 0$. Portanto, a função f definida por $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$ não é uniformemente contínua. ☺

Exercício 15.

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Prove que $\varphi|_X : X \to \varphi(X)$ é um homeomorfismo. Conclua, então, que são homeomorfos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

(a) A esfera $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

(b) o elipsoide $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, a,b,c > 0\}$

Solução:

Demostremos que φ é um homeomorfismo por meio de abertos relativos.

Seja $A \subset X$ um aberto relativo de X, então existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $A = U \cap X$. Por hipótese temos que φ é um homeomorfismo, ou seja, φ, φ^{-1} são abertos. Além disso φ em particular é bijetiva. Assim,

$$\varphi(A) = \varphi(U \cap X) \underbrace{=}_{\text{bijeção}} \varphi(U) \cap \varphi(X) \Longrightarrow \varphi(A) = \underbrace{\varphi(U)}_{\text{aberto}} \cap \varphi(X);$$

perceba que $\varphi(U)$ é um aberto, pois φ é um aberto. Logo $\varphi(A) = \varphi|_X(A)$ é um aberto relativo de $\varphi(X)$. Portanto $\varphi|_X$ é uma aplicação aberta.

Por outro lodo, seja $B \subset \varphi(X)$ o aberto relativo de $\varphi(X)$, então existe o aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B = V \cap \varphi(X)$, analogamente φ^{-1} é aberto (em particular bijetiva). Daí,

$$\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(V \cap \varphi(X)) = \varphi^{-1}(B) \cap X;$$

$\varphi^{-1}(V)$ é um aberto. Logo $\varphi^{-1}(B)$ é um aberto relativo de X. Portanto φ^{-1} é aberto. Finalmente φ é um homeomorfismo.

Para concluir que S e E são homeomorfos, definimos a aplicação

$$\varphi(x,y,z) := \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}\right),$$

com $a,b,c > 0$. Esta é uma aplicação linear bijetiva e contínua, com inversa também contínua:

$$\varphi^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y, \sqrt{c}z\right).$$

Assim, φ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Note que para todo $(x,y,z) \in S$, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + b\left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2 + c\left(\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1,$$

ou seja, $\varphi(S) = E$. Pelo item anterior, a restrição $\varphi|_S : S \to E$ é um homeomorfismo. Portanto, S e E são homeomorfos. ☹

Exercício 16.

Mostre que o cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Afirmação 1: $\mathrm{Graf}(f) \cong \mathrm{dom}\, f$

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua em $X \subset \mathbb{R}^n$. Então $\mathrm{Graf}\, f$ é homeomorfa a X ($\mathrm{Graf}\, f \cong X$).

De fato, definamos

$$\mathrm{Graf}\, f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

Consideremos a função $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Graf}\, f$ definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Note que as funções componentes $\varphi_1(x) = x$; $\varphi_2(x) = f(x)$ são contínuas pois φ_1 é a identidade e por hipótese φ_2 é contínua. Logo φ é contínua.

Além disso é claro que φ é bijetiva, o que garante que existe a inversa de φ que é $\varphi^{-1} : \mathrm{Graf}\, f \to X$ definida por $\varphi^{-1}(x, f(x)) = x$, note que φ^{-1} é simplesmente a restrição da projeção linear contínua $P : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$, ou seja, $\varphi^{-1} = P|_{\mathrm{Graf}\, f}$. Como P é contínua, sua restrição também é contínua. Logo φ^{-1} é contínua. Portanto φ é uma função homeomorfa, ou seja, $\mathrm{Graf}\, f \cong X$. ☺

Solução:

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Note que

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\} = \mathrm{Graf}\, f;$$

A função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$ por ser a composição de funções contínuas.

Podemos expressar $f(x,y)$ como $h(g(x,y))$, onde:

- A função interna $g(x, y) = x^2 + y^2$ é um polinômio em duas variáveis, e portanto, é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.
- A função externa $h(t) = \sqrt{t}$ é contínua em seu domínio $[0, \infty)$.

Dado que a imagem de $g(x, y)$ (i.e., $x^2 + y^2$) é sempre não negativa (pertence a $[0, \infty)$), ela está contida no domínio de $h(t)$. então g é contínua em $\mathbb{R}^2$ e h é contínua nos valores que g assume, a função composta $f(x, y) = h(g(x, y))$ é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

Pela **Afirmação 1** temos que $\operatorname{Graf} f$ é homeomorfa ao seu domínio da função f. Portanto $C \cong \mathbb{R}^2$. ☺

Exercício 17.

O Gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\operatorname{Graf} f = \{(x, y) : x \in A \textbf{ e } y = f(x)\}$$

Suponha que f é contínua.

a) Se A é fechado. Mostre que $\operatorname{Graf} f$ é fechado;

b) Mostre que A e $\operatorname{Graf} f$ são homeomorfos.

Solução:

a) Pela **Afirmação 1** temos que $A \cong \operatorname{Graf} f$, então existe uma função homeomorfa φ, ou seja, $\varphi, \varphi^{-1} = P|_{\operatorname{Graf} f}$ são contínuas. Suponha que A é fechado. Note que

$$\underbrace{\varphi^{-1}}_{\text{contínua}} (\underbrace{A}_{\text{fechado}}) = \operatorname{Graf} f.$$

Logo $\operatorname{Graf} f$ é fechado.

b) **Afirmação 1**. ☺

Exercício 18.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua. Mostre que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$ se, e somente se, $f^{-1}(K)$ é compacto para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que uma função satisfazendo esta condição é uma aplicação fechada.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua e considere K um compacto em $\mathbb{R}^m$

- **Mostremos que se $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty \Longrightarrow f^{-1}(K)$ é compacto.**

  (i) $f^{-1}(K)$ **é fechado.** De fato, como K é um compacto em $\mathbb{R}^m$, em particular, K é um fechado, e como f é contínua, logo $f^{-1}(K)$ é fechado, pois la imagem inversa de um fechado por uma função continua é um fechado.

  (ii) $f^{-1}(K)$ **é limitado.** De fato, suponha por absurdo que $f^{-1}(K)$ não é limitado. Então existe a sequência $(x_k) \subset f^{-1}(K)$ tal que $\|x_k\| \to \infty$. Como $(x_k) \subset f^{-1}(K) \Longrightarrow (f(x_k)) \subset K$. Note que K é compacto, em particular é limitado. Assim, existe algum $c > 0$ tal que $\|f(x_k)\| \leq c$ onde $\|x_k\| \to \infty$; mas esto contradiz a hipótese $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$. Portanto $f^{-1}(K)$ necessariamente é limitada.

  De (i) e (ii) temos que $f^{-1}(K)$ é fechada e limitada e como $\mathbb{R}^n$ é um espaço completo, então $f^{-1}(K)$ é um compacto.

- **Mostremos que, se $f^{-1}(K)$ é compacto para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, então $\|f(x)\| \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$.**

  Suponha, por absurdo, que a afirmação não seja verdadeira. Ou seja, existe uma sequência $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_k\| \to \infty$, mas a sequência $(f(x_k))$ é limitada.

  Como $(f(x_k))$ é limitada, existe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ tal que $f(x_k) \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

  Logo, $(x_k) \subset f^{-1}(K)$. Pela hipótese, $f^{-1}(K)$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$. Em particular, $f^{-1}(K)$ é limitado, o que implica que a sequência (x_k) também é limitada.

  Isso contradiz o fato de que $\|x_k\| \to \infty$, ou seja, de que (x_k) não é limitada. Obtemos, assim, uma contradição.

  Portanto, a suposição era falsa, e concluímos que

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quando} \quad \|x\| \to \infty.$$

- **Mostremos que a função com essa condição, é uma aplicação fechada**

  Seja F um fechado de $\mathbb{R}^n$. Quer mostrar que $f(F)$ é um fechado em $\mathbb{R}^m$.

  Consideremos a sequência $(f(x_k)) \subset f(F)$ tal que $f(x_k) \to y \in \mathbb{R}^m$, para que $f(F)$ seja fechado basta mostrar que $y \in f(F)$.

  Como $(f(x_k)) \subset f(F) \Longrightarrow (x_k) \subset F$. Além disso, $(f(x_k))$ é convergente, então ela e limitada, assim é possível considerar um compacto K de $\mathbb{R}^m$ tal que $(f(x_k)) \subset K \Longrightarrow (x_k) \subset f^{-1}(K)$, daí $x_k \in F \cap f^{-1}(K)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Por hipótese del problema temos que $f^{-1}(K)$ é um compacto e como F é fechado , a interseção deles é um compacto. Logo, $(x_k) \subset F \cap f^{-1}(K)$ (compacto), então existe a sub-sequência $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} x \in F \cap f^{-1}(K)$.

  Como f é contínua e pela unicidade de limite temos $f(x_{k_j}) \longrightarrow f(x) = y \in f(F \cap f^{-1}(K)) \subset f(F) \cap K$. Portanto $y \in f(F)$, ou seja, a sequência $(f(x_k)) \subset f(F)$ (onde F é um fechado) é convergente a $y \in f(F)$. Finalmente f é uma aplicação fechada.

Exercício 19.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua. Mostre que para todo $\epsilon > 0$, existe $\mu > 0$, tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \mu\|x - y\| + \epsilon\ \forall x, y \in K$.

Solução:

Suponha, por **absurdo**, que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k, y_k \in K$ satisfazendo

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| > k\|x_k - y_k\| + \epsilon,$$

ou seja,

$$\|x_k - y_k\| < \frac{\|f(x_k) - f(y_k)\|}{k} - \frac{\epsilon}{k} \tag{3}$$

Como f é contínua e K é compacto, o conjunto $f(K)$ também é compacto. Em particular, a sequência $f(x_k) - f(y_k)$ é limitada. Da desigualdade (3), fazendo $k \to \infty$ temos $\|x_k - y_k\| \to 0$. Daí,

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| > k\underbrace{\|x_k - y_k\|}_{\to 0} + \epsilon \Longrightarrow 0 < \epsilon < \|f(x_k) - f(y_k)\| \nrightarrow 0$$

O que contradiz o fato que f é uniformemente contínua em K.

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $\mu > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \mu\|x - y\| + \epsilon, \quad \text{para todos } x, y \in K.$$

Exercício 20.

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita própria se é contínua e, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ é compacto. Prove que:
i) Toda aplicação própria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é fechada;
ii) toda aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, contínua, injetiva e fechada, é própria.

Solução:

i) Prova terceiro item do exercício 18.

ii) **Mostremos que $f^{-1}(K)$ é limitado.**

  Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação contínua, injetiva e fechada. Queremos mostrar que f é própria, isto é, que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, o conjunto $f^{-1}(K)$ é compacto.

  Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e defina $X := f^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $X \neq \emptyset$, pois caso contrário não há nada a demonstrar.

  Note que X é fechada (pois f é contínua e K em particular é fechado). Além disso $f(X)$ é fechado, pois f é fechado (mapeá fechados em fechados). Como $f(X)$ é fechado e $f(X) \subset K$, e K é compacto, então $f(X)$ é um subconjunto fechado de um compacto, logo $f(X)$ também é compacto.

  Definamos a aplicação auxiliar $\varphi = f|_X : X \longrightarrow f(X)$. Perceba que φ é a restrição da aplicação f em X, e como f é contínua, injetiva, fechada. Então φ é também contínua, injetiva, fechada; e pela definição de φ é sobrejetiva, o que implica que φ é bijetiva. Logo

$$\varphi^{-1} : f(X) \longrightarrow X$$

  está bem definida. Note que a imagem inversa do conjunto fechado X por a função φ^{-1} é outro conjunto fechado $f(X)$, ou seja, $(\varphi^{-1})^{-1}(X) = f(X)$. Logo φ^{-1} é contínua em $f(X)$. Como $f(X)$ é um compacto e φ^{-1} é contínua, então $\varphi^{-1}(f(X))$ é compacto, ou seja, $f|_X^{-1} = X$ é um compacto.

  Concluímos que $f^{-1}(K) = X$ é compacto. Como K foi arbitrário, f é própria. ☺

Exercício 21.

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mu > 0$ tal que para todo $x, y \in K$ temos que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \mu\|x - y\| + \varepsilon.$$

Solução:

Suponha por absurdo que existe $\varepsilon > 0$ e para todo $k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$) tal que existe as sequências $(x_k), (y_k) \in K$ temos

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| > k\|x_k - y_k\| + \varepsilon$$

Exercício 22.

Mostre que as componentes conexas de um subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ são também conjuntos abertos.

Solução:

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e seja C uma de suas componentes conexas. Queremos provar que C também é um conjunto aberto.

Lembre que a componente conexa de um ponto $x \in A$ é a maior parte conexa de A que contém x. Assim, C é um subconjunto conexo de A, maximal com essa propriedade.

Seja $x \in C$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(x, \varepsilon) \subset A$. Além disso, $B(x, \varepsilon)$ é convexo em $\mathbb{R}^n$ e todo convexo é conexo, logo $B(x, \varepsilon)$ um conjunto conexo.

Como $B(x, \varepsilon)$ é conexo, está contido em A e contém x, e como C é a maior parte conexa de A que contém x, segue que $B(x, \varepsilon) \subset C$ o que implica que C é um aberto.

Concluímos que toda componente conexa de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é também um conjunto aberto. ☺

Exercício 23.

Prove que o conjunto formado pelas matrizes invertíveis de ordem $n \times n$ é desconexo.

Solução:

Seja o conjunto das matrizes invertíveis $I(n) := \{A \in M(n) : \det A \neq 0\}$. Consideremos a aplicação determinante $\det : M(n) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Note que $\det I(n) =< -\infty; 0 > \cup < 0; +\infty >$ e $< -\infty; 0 > \cup < 0; +\infty >$ é um desconexo.

Por outro lado lembre o teorema: A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo. Em contra-positiva temos que se a imagem por uma aplicação continua é desconexa, então a pre-imagem é desconexa.

Assim, a aplicação det é contínua (pois é um polinômio) e a imagem por essa aplicação continua ao domínio $I(n)$ é um desconexo, então $I(n)$ é desconexo.

Exercício 24.

Prove que o conjunto formado pelas matrizes invertíveis de ordem $n \times n$ é desconexo.

Solução:

Seja $I(n) := \{A \in M(n) : \det A \neq 0\}$ o conjunto das matrizes invertíveis de ordem $n \times n$.

Considere a aplicação determinante:

$$\det : M(n) \to \mathbb{R},$$

que é contínua (pois é um polinômio nas entradas da matriz).

A imagem do conjunto $I(n)$ por essa aplicação é o conjunto dos reais não-nulos:

$$\det(I(n)) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

que é um conjunto desconexo em $\mathbb{R}$, pois é a união de dois abertos disjuntos e não adjacentes.

Pelo teorema que afirma que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é conexa, segue que, se a imagem não é conexa, então o conjunto de partida também não é conexo.

Portanto, $I(n)$ é desconexo.

Exercício 25.

Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e $E \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos, então $f(E)$ também é conexo por caminhos.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo por caminhos.

Sejam $y_1, y_2 \in f(E)$. Então existem $x_1, x_2 \in E$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.
Como E é conexo por caminhos, existe o caminho (função contínua) $\alpha : [0,1] \to E$ tal que $\alpha(0) = x_1$ e $\alpha(1) = x_2$.
Definimos então $\beta = f \circ \alpha : [0,1] \to f(E)$. A função β é contínua como composição de funções contínuas, e temos:

$$\beta(0) = f(\alpha(0)) = f(x_1) = y_1, \quad \beta(1) = f(\alpha(1)) = f(x_2) = y_2.$$

Assim, β é um caminho em $f(E)$ que liga y_1 a y_2. Como $y_1, y_2 \in f(E)$ foram arbitrários, concluímos que $f(E)$ é conexo por caminhos.

Exercício 26.

Mostre que:

(a) O conjunto das matrizes ortogonais possui exatamente duas componentes conexas;

(b) O conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 ***(denotado por*** $O^+(n)$***)*** **eé conexo por caminhos.**

<u>**Solução:**</u>

a) Vamos considerar o conjunto $O(n)$ das matrizes ortogonais $n \times n$, ou seja:

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}.$$

É conhecido que $\det A = \pm 1$ para qualquer $A \in O(n)$, e define-se a função determinante restrita a $O(n)$:

$$\det|_{O(n)} : O(n) \longrightarrow \{-1, 1\}.$$

Essa função é contínua porque o determinante é uma função polinomial nas entradas da matriz, logo contínua em $\mathbb{R}^{n^2}$, e sua restrição a $O(n)$ continua sendo contínua com a topologia subespaço.

Definimos:

- $O^+(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$,
- $O^-(n) = \{A \in O(n) : \det A = -1\}$.

Como o contradomínio de $\det|_{O(n)}$ é o conjunto $\{-1, 1\}$ com a topologia subespaço de $\mathbb{R}$, notamos que $\{-1\}$ e $\{1\}$ são abertos e fechados neste conjunto. De fato:

- $\{1\} = (-\infty, 2) \cap \{-1, 1\}$,
- $\{-1\} = (-2, 0) \cap \{-1, 1\}$.

Como a função $\det|_{O(n)}$ é contínua, as imagens inversas de conjuntos abertos são abertas em $O(n)$. Assim:

$$O^+(n) = (\det|_{O(n)})^{-1}(\{1\}) \subset O(n) \quad \text{e} \quad O^-(n) = (\det|_{O(n)})^{-1}(\{-1\}) \subset O(n)$$

são ambos abertos em $O(n)$. Ademais, como $\{1\}$ e $\{-1\}$ também são fechados em $\{-1, 1\}$, então $O^+(n)$ e $O^-(n)$ também são fechados em $O(n)$. Portanto:

$$O(n) = O^+(n) \cup O^-(n), \quad O^+(n) \cap O^-(n) = \emptyset,$$

com $O^+(n)$ e $O^-(n)$ abertos, fechados, disjuntos e não vazios. Logo, $O(n)$ possui exatamente duas componentes conexas, dadas por $O^+(n)$ e $O^-(n)$.

b) Vamos mostrar que $O^+(n)$ é conexo por caminhos. Dado $A \in O^+(n)$, temos que A é ortogonal com determinante 1, ou seja, $A \in SO(n)$ (o grupo especial ortogonal).

É um fato conhecido da topologia matricial (com demonstrações algébricas possíveis usando rotações e parametrizações) que $SO(n)$ é conexo por caminhos. De fato, qualquer matriz em $SO(n)$ pode ser conectada à identidade por um caminho contínuo dentro de $SO(n)$, e isso pode ser mostrado utilizando rotações elementares (como matrizes de Givens) ou decomposições apropriadas.

Assim, dado $A, B \in O^+(n)$, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to O^+(n)$ tal que $\gamma(0) = A$ e $\gamma(1) = B$, portanto $O^+(n)$ é conexo por caminhos.