Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Московский
государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Задание №1, вариант №32 по курсу "Основы математического моделирования"

Михайлов Павел Олегович
студент 316 группы
Кафедра физики полупроводников и криоэлектроники

Преподаватель:
Буткарев Иван Андреевич

Физический факультет, 2021 г.

Содержание

Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, необходимо решить задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = 4\Delta U + cos\,(x)\,sin\,(t)\,, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 3,\ t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=3} = 0, \\ U|_{t=0} = cos\,(x) \end{cases} \tag{1}$$

Аналитическое решение

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 3 \\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=3} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Найдем собственные функции и собственные значения данной ЗШЛ. Будем искать функцию V в виде:

$$V = X(x) \cdot Y(y) \tag{3}$$

и разделим переменные:

$$X'' \cdot X + X \cdot Y'' + \lambda XY = 0 \ \Rightarrow\ \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda \equiv \mu = const \tag{4}$$

Тогда получим две отдельные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ \left.\dfrac{\partial X}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial X}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0, \quad 0 < y < 3 \\ \left.\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right|_{y=3} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Используя известные решения данных ЗШЛ, сразу запишем СФ и СЗ задачи 2:

$$\begin{cases} V_{nm} = cos\,(nx) \cdot cos\left(\dfrac{\pi m y}{3}\right), \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 3 \\ \|V_{nm}\|^2 = \|X_n(x) \cdot Y_m(y)\|^2 = \dfrac{3\pi}{4} \cdot (1 + \delta_{n0}) \cdot (1 + \delta_{m0}), \\ \lambda_{nm} = n^2 + \left(\dfrac{\pi m}{3}\right)^2, \\ n = 0, 1, 2, \dots;\, m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{6}$$

Будем искать решение задачи 1 в виде разложения в ряд:

$$U(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \tag{7}$$

Поскольку функции $F(x, y, t) = cos(x)sin(t)$ и $\Phi(x, y) = cos(x)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемой области, то они удовлетворяют теореме Стеклова. Поэтому справедливо разложение этих функций в ряд по СФ задачи Штурма-Лиувилля 2, сходящийся равномерно и абсолютно на рассматриваемой области:

$$\begin{gathered} F(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \\ \Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_{nm} V_{nm}(x, y) \end{gathered} \tag{8}$$

Подставим 7 и 8 в нашу поставленную задачу 1. Получаем:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \right\} = \\ = 4 \cdot \Delta_{xy} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \right\} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \end{gathered} \tag{9}$$

В силу равномерной сходимости рядов и в силу непрерывности членов этих рядов, можно записать (заменив $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt}$):

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{dW_{nm}(t)}{dt}V_{nm}(x,y)= \\ =4\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}W_{nm}(t)\cdot\underbrace{\Delta_{xy}V_{nm}(x,y)}_{=-\lambda_{nm}\cdot V_{nm}(x,y)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}f_{nm}(t)V_{nm}(x,y)\end{gathered} \tag{10}$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{dW_{nm}(t)}{dt}+4\cdot\lambda_{nm}W_{nm}(t)-f_{nm}(t)\right)V_{nm}(x,y)=0 \tag{11}$$

Поскольку $\{V_{nm}(x,y)\}_{m=0,1,\dots}^{n=0,1,\dots}$ - полная и замкнутая система на $0<x<\pi,\ 0<y<3$, то равенство 11 достигается только если:

$$\begin{cases}\dfrac{dW_{nm}(t)}{dt}+4\cdot\lambda_{nm}W_{nm}(t)=f_{nm}(t)\ ;t>0\\ W_{nm}(0)=\varphi_{nm}\end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, мы получили задачу Коши. Решение этой задачи может быть записано в виде:

$$W_{nm}(t)=\varphi_{nm}\cdot e^{-4\lambda_{nm}t}+\int_0^t f_{nm}(\tau)e^{-4\lambda_{nm}(t-\tau)}\,d\tau \tag{13}$$

Поэтому, окончательно, решение поставленной задачи можно записать в виде:

$$\begin{gathered}U(x,y,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}V_{nm}(x,y)\varphi_{nm}e^{-4\lambda_{nm}t}+ \\ +\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}V_{nm}(x,y)\int_0^t f_{nm}(\tau)e^{-4\lambda_{nm}(t-\tau)}\,d\tau\end{gathered} \tag{14}$$

Исходя из теоремы Стеклова, коэффициенты φ_{nm} и функции $f_{nm}(t)$ могут быть найдены как:

$$\begin{gathered}\varphi_{nm}=\frac{1}{\|V_{nm}\|^2}\cdot\int_0^\pi dx\int_0^3 dy\ \varphi(x,y)V_{nm}(x,y)\\ f_{nm}(t)=\frac{1}{\|V_{nm}\|^2}\cdot\int_0^\pi dx\int_0^3 dy\ F(x,y,t)V_{nm}(x,y)\end{gathered} \tag{15}$$

Проведем вычисление φ_{nm} и $f_{nm}(t)$, исходя из функций в постановке задачи:

$$\begin{aligned}
\varphi_{nm} =& \frac{4}{3\pi \cdot (1+\delta_{n0}) \cdot (1+\delta_{m0})} \times \\
& \times \int_0^{\pi} dx \int_0^3 dy \, cos(x) \cdot cos\,(nx)\, cos\left(\frac{\pi m y}{3}\right) \\
f_{nm}(t) =& \frac{4}{3\pi \cdot (1+\delta_{n0}) \cdot (1+\delta_{m0})} \times \\
& \times \int_0^{\pi} dx \int_0^3 dy \, sin(t) cos(x) \cdot cos\,(nx)\, cos\left(\frac{\pi m y}{3}\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

В силу ортогональности тригонометрических функций на соответствующих промежутках, имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi_{nm} &= \begin{cases} 1\ ,\ n = 1 \wedge m = 0 \\ 0\ ,\ n \neq 1 \vee m \neq 0 \end{cases} \\
f_{nm}(t) &= \begin{cases} sin(t)\ ,\ n = 1 \wedge m = 0 \\ 0\ ,\ n \neq 1 \vee m \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

Сразу проинтегрируем функцию $f_{10}(t)$ по времени:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t f_{10}(\tau) e^{-4\lambda_{10}(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t sin(\tau) e^{-4(t-\tau)}\, d\tau = \\
& = Im\left\{ \int_0^t e^{i\tau} e^{-4(t-\tau)}\, d\tau \right\} = Im\left\{ \int_0^t e^{\tau(i+4)-4t}\, d\tau \right\} = \\
& = Im\left\{ \frac{1}{i+4} \cdot \left(e^{it} - e^{-4t}\right) \right\} = \frac{1}{17}\left(4 sin(t) - cos(t) + e^{-4t}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, аналитическое решение поставленной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
& U(x,y,t) = cos(x) \cdot \left(e^{-4t} + \frac{1}{17}\left(4 sin(t) - cos(t) + e^{-4t}\right) \right) = \\
& = \frac{1}{17}\, cos(x) \left(4\, sin(t) - cos(t) + 18\, e^{-4t}\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Численное решение

1. Построение разностной схемы

Введем сетку в области:

$$\omega = \{x_n = n \cdot h_x \,; y_m = m \cdot h_m \,; t_k = k \cdot \tau\} \tag{20}$$

где:

$$h_x = \frac{a_x}{N_x} = \frac{\pi}{N_x} \,; h_y = \frac{a_y}{N_y} = \frac{3}{N_y} \,; \tau = \frac{a_t}{N_t} \tag{21}$$

Запишем конечно-разностную аппроксимацию нашего уравнения:

$$\frac{\hat{U}_{nm} - U_{nm}}{\tau} = 4 \cdot (\Lambda_1 U + \Lambda_2 U) + f(x_n, y_m, t_k) \tag{22}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\hat{U}_{nm} \equiv U^{k+1}_{nm} \ \text{ -- на (k+1)-ом шаге по времени} \\
&U_{nm} \equiv U^{k}_{nm} \ \text{ -- на k-ом шаге по времени} \\
&\Lambda_1 U = \frac{U_{n+1,m} - 2U_{n,m} + U_{n-1,m}}{h_x^2} \\
&\Lambda_2 U = \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h_y^2}
\end{aligned} \tag{23}$$

где разностная аппроксимация операторов Λ_1 и Λ_2 имеет точность $O(h_x^2)$ и $O(h_y^2)$ соответственно, а аппроксимация производной по времени проводится с первым порядком точности. Для данной разностной схемы ГУ и НУ примут вид:

$$\begin{cases}
U^0_{nm} = cos\,(x_n) \\
\dfrac{U^k_{1,m} - U^k_{0,m}}{h_x} = 0 \,; \dfrac{U^k_{N_x,m} - U^k_{N_x-1,m}}{h_x} = 0 \,; \forall m, \forall k \\
\dfrac{U^k_{n,1} - U^k_{n,0}}{h_y} = 0 \,; \dfrac{U^k_{n,N_y} - U^k_{n,N_y-1}}{h_y} = 0 \,; \forall n, \forall k
\end{cases} \tag{24}$$

Или в более компактном виде:

$$\begin{cases}
U^0_{nm} = cos\,(x_n) \ \ ; \forall n \\
U^k_{1,m} = U^k_{0,m} \ \ ; U^k_{N_x,m} = U^k_{N_x-1,m} \ \ ; \forall m, \forall k \\
U^k_{n,1} = U^k_{n,0} \ \ ; U^k_{n,N_y} = U^k_{n,N_y-1} \ \ ; \forall n, \forall k
\end{cases} \tag{25}$$

2. Метод переменных направлений

В данной работе будет использован метод переменных направлений. Суть этого метода заключается в переходе на дополнительный промежуточный шаг по времени: шаг $k + \frac{1}{2}$. Разностная схема примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{U_{nm}^{k+\frac{1}{2}} - U_{nm}^{k}}{\frac{1}{2}\tau} = 4 \cdot \left(\Lambda_1 U^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 U^{k}\right) + cos\,(x_n)\,sin\left(t_k + \dfrac{\tau}{2}\right) \\ \dfrac{U_{nm}^{k+1} - U_{nm}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = 4 \cdot \left(\Lambda_1 U^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 U^{k+1}\right) + cos\,(x_n)\,sin\left(t_k + \dfrac{\tau}{2}\right) \end{cases} \tag{26}$$

После домножения на $\frac{1}{2}\tau$ и приведения слагаемых, относящихся к разным шагам по времени, можно прийти к следующей разностной схеме:

$$\begin{cases} \dfrac{2\tau}{h_x^2} U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} - \left(1 + \dfrac{4\tau}{h_x^2}\right) U_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} + \dfrac{2\tau}{h_x^2} U_{n-1,m}^{k+\frac{1}{2}} = -F(U, x_n, y_m, t_k) \\ F = \dfrac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m+1}^{k} + \left(1 - \dfrac{4\tau}{h_y^2}\right) U_{nm}^{k} + \dfrac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m-1}^{k} + \dfrac{\tau}{2} cos\,(x_n)\,sin\left(t_k + \dfrac{\tau}{2}\right) \\ U_{1,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{0,m}^{k+\frac{1}{2}} \;\; ; U_{N_x,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{N_x-1,m}^{k+\frac{1}{2}} \;\; ; \forall m, \forall k \\ ------------------------------ \\ \dfrac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m+1}^{k+1} - \left(1 + \dfrac{4\tau}{h_y^2}\right) U_{n,m}^{k+1} + \dfrac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m-1}^{k+1} = -F(U, x_n, y_m, t_k + \dfrac{\tau}{2}) \\ F = \dfrac{2\tau}{h_x^2} U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \left(1 - \dfrac{4\tau}{h_x^2}\right) U_{nm}^{k+\frac{1}{2}} + \dfrac{2\tau}{h_x^2} U_{n-1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \dfrac{\tau}{2} cos\,(x_n)\,sin\left(t_k + \dfrac{\tau}{2}\right) \\ U_{n,1}^{k+\frac{1}{2}} = U_{n,0}^{k+\frac{1}{2}} \;\; ; U_{n,N_y}^{k+\frac{1}{2}} = U_{n,N_y-1}^{k+\frac{1}{2}} \;\; ; \forall n, \forall k \end{cases} \tag{27}$$

3. Метод прогонки

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} A_n = B_n = \dfrac{2\tau}{h_x^2} \;\; ; C_n = \left(1 + \dfrac{4\tau}{h_x^2}\right) \\ A_m = B_m = \dfrac{2\tau}{h_y^2} \;\; ; C_m = \left(1 + \dfrac{4\tau}{h_y^2}\right) \end{cases} \tag{28}$$

Тогда уравнения в системе 27 преобразуется к виду:

$$\begin{cases} A_n U^{k+\frac{1}{2}}_{n+1,m} - C_n U^{k+\frac{1}{2}}_{n,m} + B_n U^{k+\frac{1}{2}}_{n-1,m} = -F^k_n \\ A_m U^{k+1}_{n,m+1} - C_m U^{k+1}_{n,m} + B_m U^{k+1}_{n,m-1} = -F^{k+\frac{1}{2}}_m \end{cases} \tag{29}$$

Для решения этот системы используется метод прогонки. Запишем условия применимости этого метода:

$$\begin{aligned} &|C_n| > |A_n| + |B_n| \ \ , 0 \le \alpha_{1,N_x} \le 1 \\ &\underline{\text{Или:}} \\ &|C_n| \ge |A_n| + |B_n| \ \ , 0 \le \alpha_{1,N_x} < 1 \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогичное условие записывается и для индексов m. При этом видно, что в нашем случае выполнено верхнее условие.
Перейдем к изложению сути метода прогонки. Будем искать решение в виде:

$$U^{k+\frac{1}{2}}_{nm} = \alpha_{n+1} \cdot U^{k+\frac{1}{2}}_{n+1,m} + \beta_{n+1} \ \ ; n = \overline{0, N_x - 1} \tag{31}$$

где коэффициенты α_{n+1} и β_{n+1} можно получить из следующих рекуррентных соотношений (прямой ход прогонки):

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n} \ \ ; \beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \ \ ; n = \overline{0, N_x - 1} \tag{32}$$

При этом можно заметить, что:

$$\begin{cases} U^{k+\frac{1}{2}}_{0,m} = \alpha_1 \cdot U^{k+\frac{1}{2}}_{1,m} + \beta_1 \\ U^{k+\frac{1}{2}}_{0,m} = U^{k+\frac{1}{2}}_{1,m} \quad (\text{из } 27) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Из этого условия, при помощи соотношений 32, получаем все коэффициенты α_n и β_n.
Обратный ход прогонки состоит в следующем. Можно заметить, что:

$$\begin{cases} U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x-1,m} = \alpha_{N_x} \cdot U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x,m} + \beta_{N_x} \\ U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x,m} = U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x-1,m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x,m} = \dfrac{\beta_{N_x}}{1 - \alpha_{N_x}} \\ U^{k+\frac{1}{2}}_{N_x-1,m} = \dfrac{\beta_{N_x}}{1 - \alpha_{N_x}} \end{cases} \tag{34}$$

При этом число арифметических операций метода прогонки составляет $O(N)$.

Отсюда путем применения соотношений 31 можно найти остальные $U^{k+\frac{1}{2}}_{n,m}$.

4. Порядки аппроксимации в схеме

Начальное условие $U|_{t=0} = cos\,(x)$ аппроксимируется точно.

Граничные условия Неймана $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=3} = 0$ аппроксимируются с точностью $O(h_x)$ и $O(h_y)$ соответственно, то есть имеют первый порядок точности.

Найдем порядкок аппроксимации по τ. Рассмотрим действие оператора производной по t на непрерывную функцию $U(x)$:

$$L_\tau U(x,y,t) = \frac{U(x,y,t+\tau) - U(x,y,t)}{\tau} = \\ = \frac{1}{\tau}\left(U(x,y,t) + \tau\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} + ... - U(x,y,t)\right) = \\ = \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} + \underline{O}(\tau) \tag{35}$$

Теперь найдем порядок аппроксимации по x. Рассмотрим:

$$L_{h_x} U(x,y,t) = \frac{1}{h_x}\left(\frac{U(x+h_x,y,t) - U(x,y,t)}{h_x} - \frac{U(x,y,t) - U(x-h_x,y,t)}{h_x}\right) = \\ = \frac{1}{h_x^2}\left(U(x+h_x,y,t) - 2U(x,y,t) + U(x-h_x,y,t)\right) = \\ = \frac{1}{h_x^2}\Bigg(U(x,y,t) + h_x\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2}\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + ... - \\ -2U(x,y,t) + U(x,y,t) - h_x\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2}\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} - ...\Bigg) = \\ = \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \underline{O}\left(h_x^2\right) \tag{36}$$

Аналогично 36 проводятся вычисления для оператора производной по y. Таким образом, схема 26 имеет первый порядок аппроксимации по t и второй порядок аппроксимации по x и y.

5. Устойчивость метода переменных направлений

Устойчивость системы 26 может быть исследована при помощи спектрального метода Неймана. Будем рассматривать однородные уравнения из системы 26. Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}
&V_{n,m}^{k} = e^{i\alpha n + i\beta m} \\
&V_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} = \lambda_1 V_{n,m}^{k} \text{ -на слое } \left(k+\frac{1}{2}\right) \\
&V_{n,m}^{k+1} = \lambda_2 V_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} = \lambda_1\lambda_2 V_{n,m}^{k} \text{ -на слое } (k+1)
\end{aligned} \tag{37}$$

Подставим решения в таком виде в систему 26 и сразу сократим получившиеся уравнения на функции V:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1 - 1}{\frac{1}{2}\tau} &= 4\lambda_1 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 4\frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2} \\
\frac{\lambda_2 - 1}{\frac{1}{2}\tau} &= 4\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 4\lambda_2 \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Выразим λ_1 и λ_2:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1 - \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{1 + \dfrac{8\tau}{h_x^2} sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\
\lambda_2 &= \frac{1 - \dfrac{8\tau}{h_x^2} sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим:

$$|\lambda_1\lambda_2| = \left| \frac{1 - \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{1 + \dfrac{8\tau}{h_x^2} sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1 - \dfrac{8\tau}{h_x^2} sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)} \right| \tag{40}$$

Здесь можно отметить одно важное свойство относительно накрест лежащих слагаемых под модулем:

$$0 \le \left| \frac{1 - \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{1 + \dfrac{8\tau}{h_y^2} sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)} \right| \le 1 \tag{41}$$

(аналогично для частоты α), для любых вещественных значений коэффициентов перед тригонометрическими функциями в данном выражении. Таким образом, мы получили, что:

$$0 \le |\lambda_1 \lambda_2| \le 1 \tag{42}$$

То есть рассмотренная схема безусловно устойчива при любом выборе h_x, h_y, τ.

Графики решений

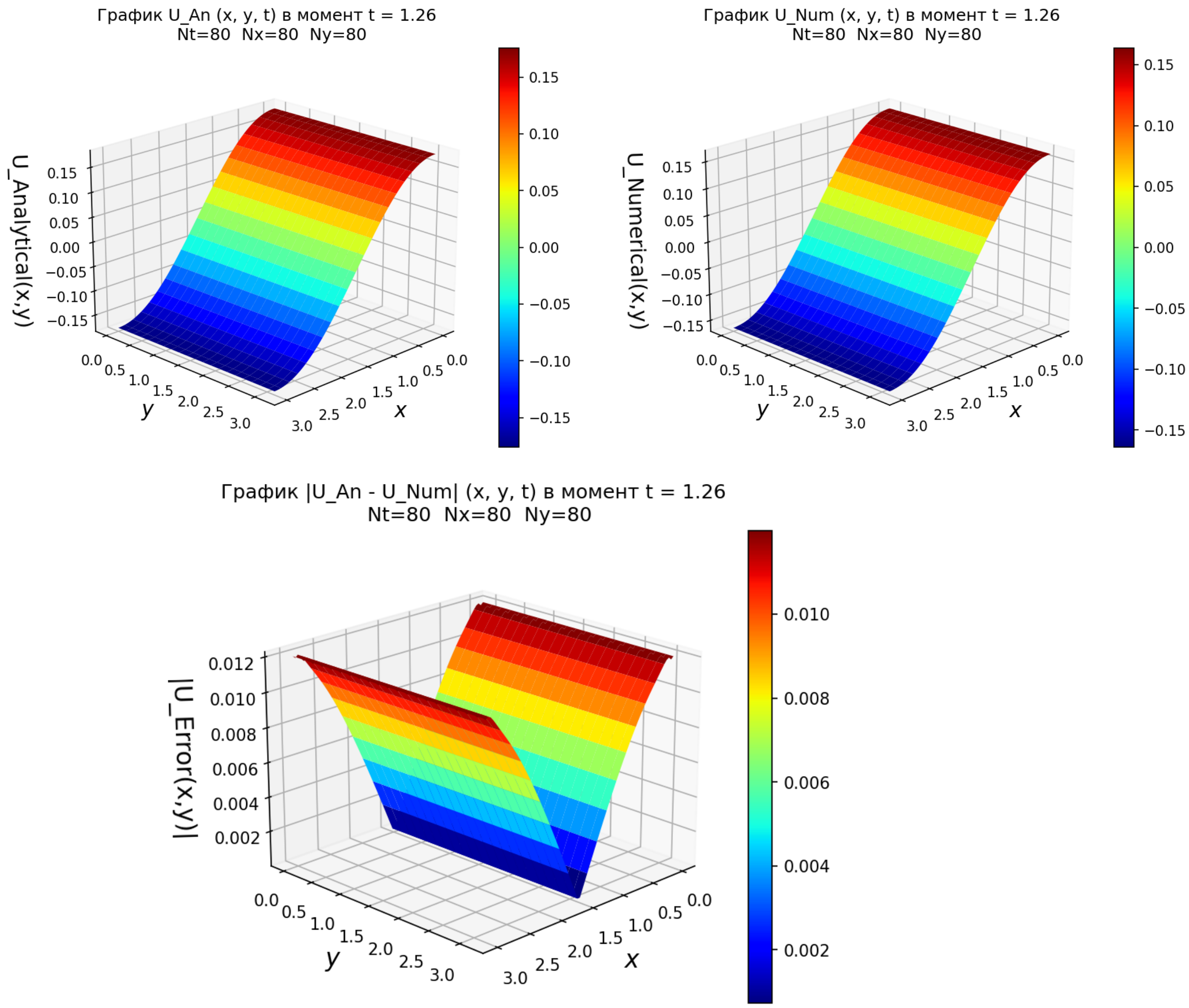

Рис. 1: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных (x, y) в момент времени $t = \frac{2}{5}\pi$.

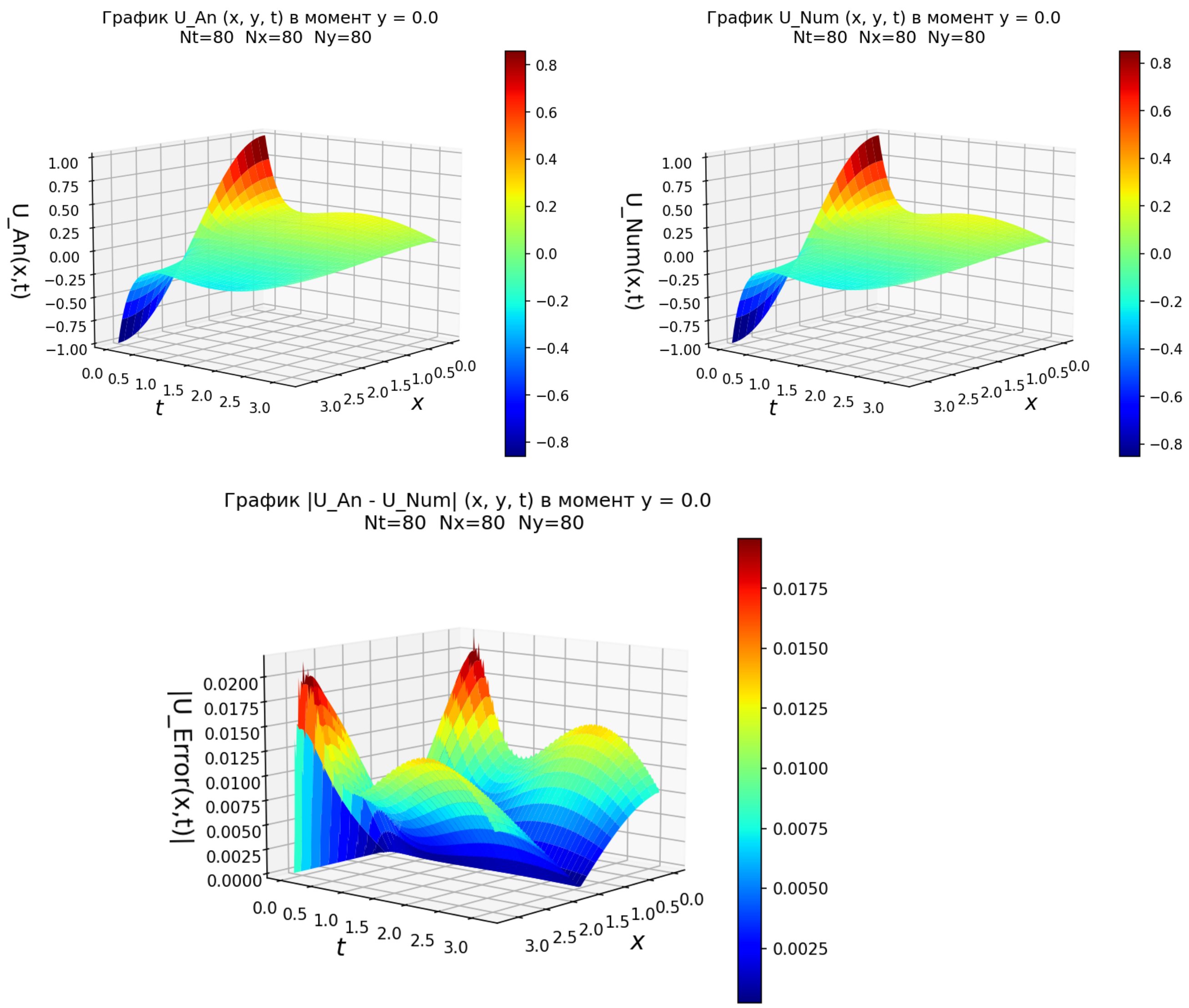

Рис. 2: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных $(x,\, t)$.

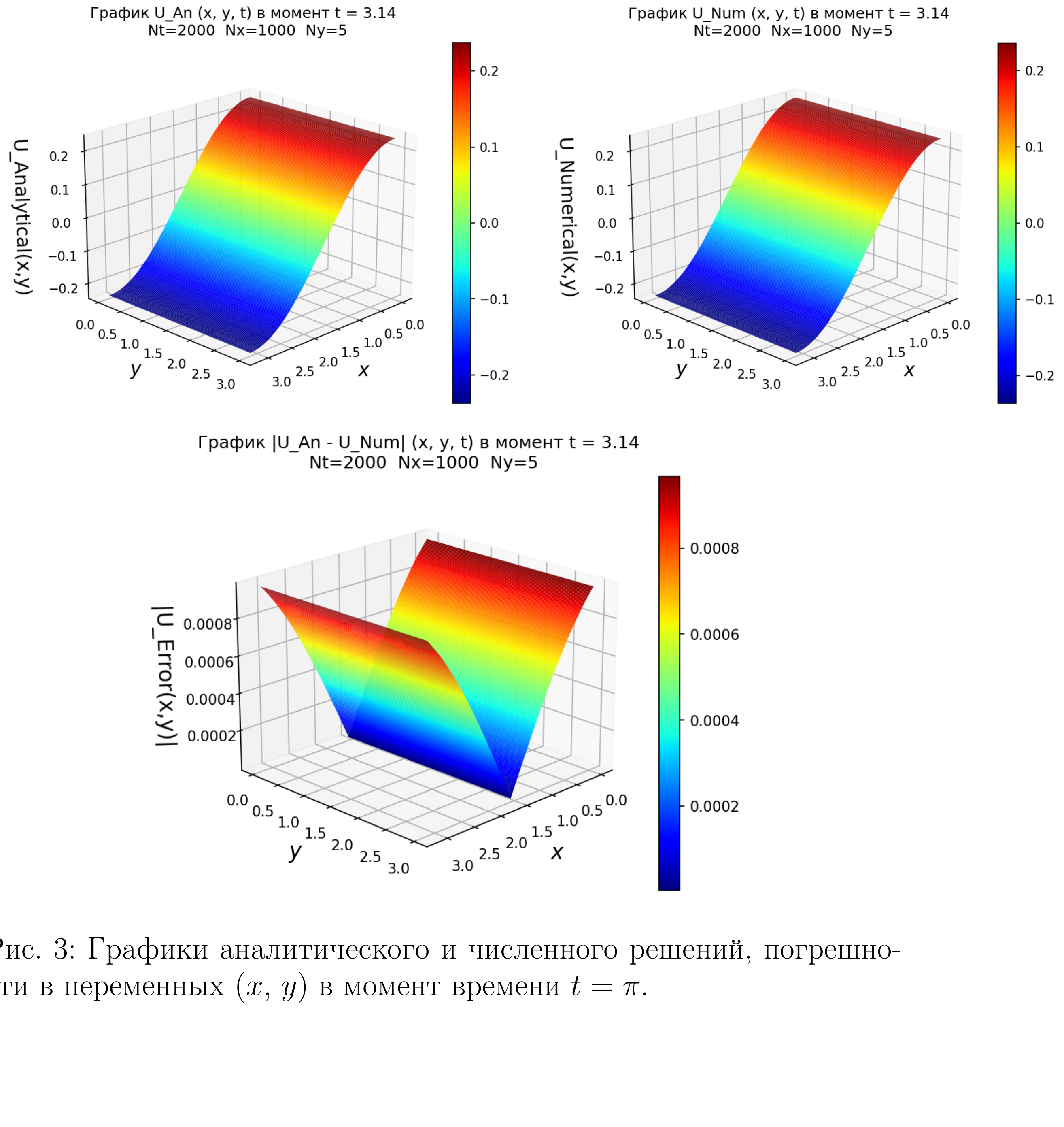

Рис. 3: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных $(x,\, y)$ в момент времени $t = \pi$.

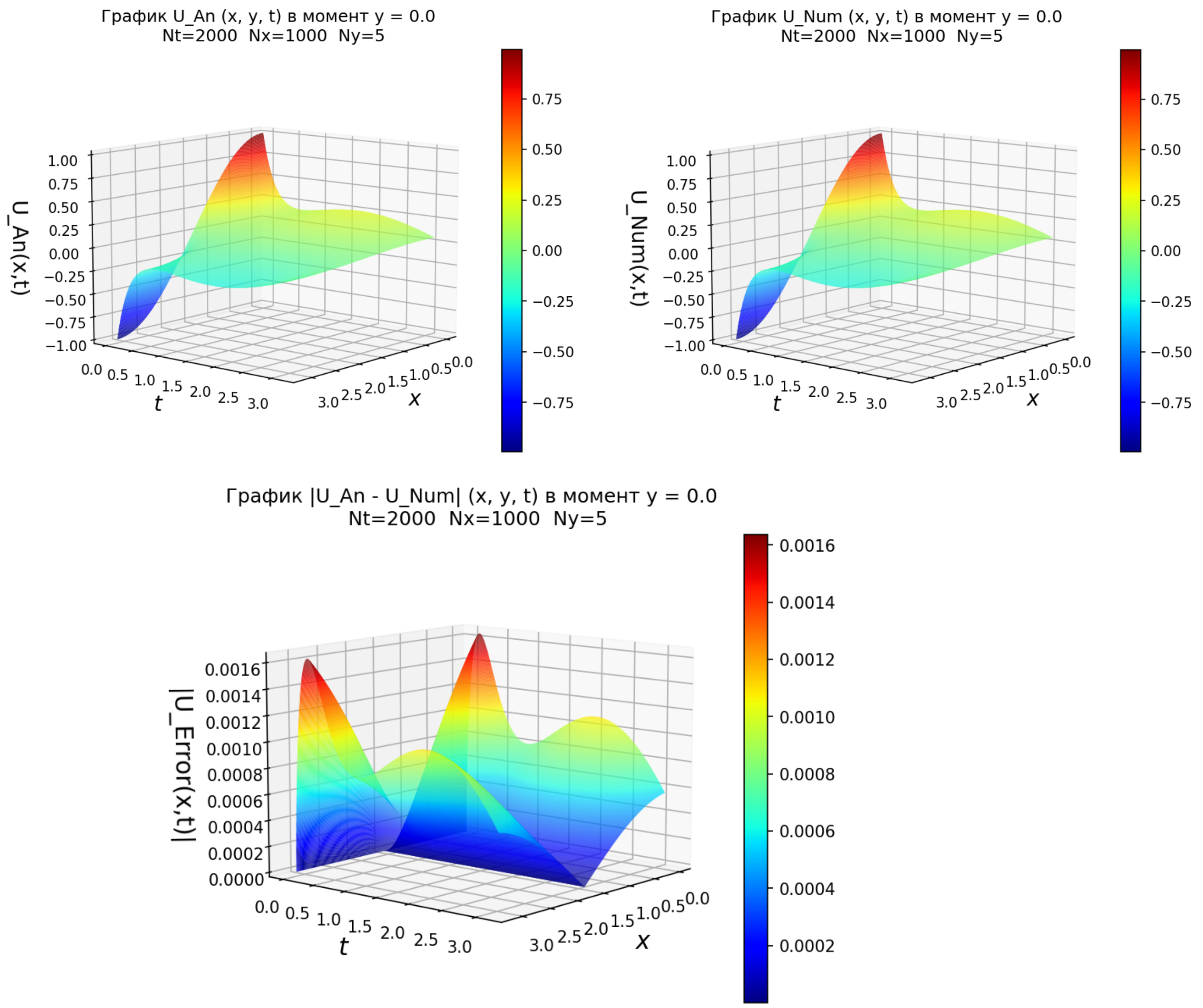

Рис. 4: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных (x, t).

Код программы

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Mar 31 09:24:27 2021

@author: Pol Михайлов( Павел, 316 группа, задача 1, вариант 32)
"""

import numpy as np
import pylab
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm



"1. Зададим пределы области исследования по X, Y, T"
x1, x2 = 0, np.pi
y1, y2 = 0, 3
t1, t2 = 0, np.pi



"2. Зададим количество шагов сетки N и величину шага сетки h"
Nx = 100
Ny = 5
Nt = 200
hx = (x2-x1)/Nx
hy = (y2-y1)/Ny
tau = (t2-t1)/Nt



"3. Создадим массивы переменных"
x = np.linspace(x1,x2,Nx)
y = np.linspace(y1,y2,Ny)
t = np.linspace(t1,t2,Nt)
U_An = np.zeros((Nx,Ny,Nt*2+1))
U_Num = np.zeros((Nx,Ny,Nt*2+1))



"АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ"
"4. Вычислим значения аналитического решения в узлах сетки"
for n in range(0,Nx):
    for m in range(0,Ny):
        for k in range(0,Nt*2+1):
            U_An[n,m,k] = 1/17*np.cos(x[n])*(4*np.sin(tau*k/2)-np.
    cos(tau*k/2)+18*np.exp(-4*tau*k/2))





"ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ"
```

```
"5. Зададим необходимые коэффициенты для численного решения"
Ax = 2 * tau/hx/hx
Cx = 1 + 2 * Ax
Ay = 2 * tau/hy/hy
Cy = 1 + 2 * Ay



"6. Зададим функцию F из разностной схемы для x и y"
def Fx(a,b,c):
    return Ay*(U_Num[a,b-1,c-1] + U_Num[a,b+1,c-1]) + (1-2*Ay)*U_Num[a,b,c-1] + 0.5*tau*np.cos(x[a])*np.sin(tau*(c + 1)/2)


def Fy(a,b,c):
    return Ax*(U_Num[a-1,b,c-1] + U_Num[a+1,b,c-1]) + (1-2*Ax)*U_Num[a,b,c-1] + 0.5*tau*np.cos(x[a])*np.sin(tau*(c - 1)/2)



"7. Зададим функции, реализующие метод прогонки по x и y"
"Прогонка по x"
def SweepX(b,c):
    alpha = np.zeros(Nx)
    beta = np.zeros(Nx)
    alpha[1] = 1 #У нас ГУ Неймана при x = 0
    beta[1] = 0
    A = Ax
    B = Ax
    C = 1+2*Ax

    for n in range(1,Nx-1): #Прямая прогонка
        alpha[n+1] = B / (C - A*alpha[n])
        beta[n+1] = (A*beta[n] + Fx(n,b,c)) / (C - A*alpha[n])
    U_Num[Nx-1,b,c] = beta[Nx-1] / (1 - alpha[Nx-1])  # Из ГУ Неймана при x = \pi
    for n in range(Nx-1,0,-1): #Обратная прогонка
        U_Num[n-1,b,c] = alpha[n]*U_Num[n,b,c] + beta[n]
    for n in range(0,Nx): #Установка граничных значений
        U_Num[n,0,c] = U_Num[n,1,c]
        U_Num[n,Ny-1,c] = U_Num[n,Ny-2,c]


"Прогонка по y"
def SweepY(a,c):
    alpha = np.zeros(Ny)
    beta = np.zeros(Ny)
    alpha[1] = 1  #У нас ГУ Неймана при y = 0
    beta[1] = 0
    A = Ay
    B = Ay
    C = 1+2*Ay

    for m in range(1,Ny-1): #Прямая прогонка
        alpha[m+1] = B / (C - A*alpha[m])
        beta[m+1] = (A*beta[m] + Fy(a,m,c)) / (C - A*alpha[m])
```

```
    U_Num[a,Ny-1,c] = beta[Ny-1] / (1 - alpha[Ny-1]) # Из ГУ Неймана при y = 3
    for m in range(Ny-1,0,-1): #Обратная прогонка
        U_Num[a,m-1,c] = alpha[m]*U_Num[a,m,c] + beta[m]
    for m in range(0, Ny): #Установка граничных значений
        U_Num[0,m,c] = U_Num[1,m,c]
        U_Num[Nx-1,m,c] = U_Num[Nx-2,m,c]



"7. Применим метод прогонки"
for n in range(0,Nx): #Задание ГУ
    for m in range(0,Ny):
        U_Num[n, m, 0] = np.cos(x[n])

for k in range(1,2*Nt,2):
    for m in range(1,Ny-1):
        SweepX(m,k)
    for n in range(1,Nx-1):
        SweepY(n,k+1)

U_AnNum = np.zeros(((Nx,Ny,Nt*2+1)))
for n in range(0,Nx):
    for m in range(0,Ny):
        for k in range(0,Nt*2+1):
            U_AnNum[n,m,k] = np.abs(U_An[n][m][k] - U_Num[n][m][k])



"ГРАФИКИ"
dpi0 = 150
sk0 = int(Nt/5)
for k0 in range(0,Nt+1,sk0):
    "8. Построение аналитического решения"
    fig = pylab.figure(dpi=dpi0)
    axes = Axes3D(fig)

    Y,X = np.meshgrid(y,x)

    surf = axes.plot_surface(X,Y, U_An[:,:,k0], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
    axes.view_init(20, 45) #поворот графика

    pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
    pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
    axes.set_zlabel('U_Analytical(x,y)', size = 15, labelpad = 10)

    pylab.title('График U_An (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0*tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+str(Ny))
    cbar = fig.colorbar(surf, ax=axes) #boundaries = [-1.00, -0.75, -0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00]
    pylab.show()



```

```
    "9. Построение численного решения"
    fig_num = pylab.figure(dpi=dpi0)
    axes_num = Axes3D(fig_num)

    surf_num = axes_num.plot_surface(X,Y, U_Num[:,:,k0], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
    axes_num.view_init(20, 45) #поворот графика

    pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
    pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
    axes_num.set_zlabel('U_Numerical(x,y)', size = 15, labelpad = 10)

    pylab.title('График U_Num (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+str(Ny))
    cbar = fig_num.colorbar(surf_num, ax=axes_num)
    pylab.show()




    "10. Построение разности численного и аналитического решений, погрешности"
    fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
    axes_annum = Axes3D(fig_annum)

    surf_annum = axes_annum.plot_surface(X,Y, U_An[:,:,k0] - U_Num[:,:,k0], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
    axes_annum.view_init(20, 45) #поворот графика

    pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
    pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
    axes_annum.set_zlabel('U_Error(x,y)', size = 15, labelpad = 10)

    pylab.title('График (U_An - U_Num) (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+str(Ny))
    cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
    pylab.show()




    "11. Построение модуля разности численного и аналитического решений, погрешности"
    fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
    axes_annum = Axes3D(fig_annum)

    surf_annum = axes_annum.plot_surface(X,Y, np.abs(U_An[:,:,k0] - U_Num[:,:,k0]), rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
    axes_annum.view_init(20, 45) #поворот графика

```

```python
    pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
    pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
    axes_annum.set_zlabel('|U_Error(x,y)|', size = 15, labelpad = 10)

    pylab.title('График |U_An - U_Num| (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+str(Ny))
    cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
    pylab.show()



"12. График аналитического решения от X и T"
spt = np.linspace(t1,t2,2*Nt+1)
m0 = 0
fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
axes_annum = Axes3D(fig_annum)

SPT, X = np.meshgrid(spt, x)

surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, U_An[:,m0,:], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика

pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
axes_annum.set_zlabel('U_An(x,t)', size = 15, labelpad = 10)

pylab.title('График U_An (x, y, t) в момент y = ' +str(round(m0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+str(Ny))
cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
pylab.show()



"13. График численного решения от X и T"
fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
axes_annum = Axes3D(fig_annum)

surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, U_Num[:,m0,:], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика

pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси для подписей
pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
axes_annum.set_zlabel('U_Num(x,t)', size = 15, labelpad = 10)

pylab.title('График U_Num (x, y, t) в момент y = ' +str(round(m0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+str(Ny))
cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
pylab.show()

```

```
"14. График модуля ошибки решения от X и T"
fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
axes_annum = Axes3D(fig_annum)

surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, np.abs(U_An[:,m0,:] -
    U_Num[:,m0,:]), rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика

pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси
    для подписей
pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
axes_annum.set_zlabel('|U_Error(x,t)|', size = 15, labelpad = 10)

pylab.title('График |U_An - U_Num| (x, y, t) в момент y = ' +str(
    round(m0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+'  Nx='+str(Nx)+'  Ny='+
    str(Ny))
cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
pylab.show()
```

Список литературы

[1] Численные методы, Калиткин Н.Н., М.: Издательский центр «Академия», 2013 г.

[2] Курс лекций «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ», Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., Москва, 2012