

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
профессионального образования «Московский  
государственный университет имени М.В.Ломоносова»

## Задание №1, вариант №32 по курсу "Основы математического моделирования"

Михайлов Павел Олегович

студент 316 группы

Кафедра физики полупроводников и криоэлектроники

Преподаватель:

Буткарев Иван Андреевич

Физический факультет, 2021 г.

# Содержание

<b>Постановка задачи</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Аналитическое решение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Численное решение</b> . . . . .	<b>7</b>
1. Построение разностной схемы . . . . .	7
2. Метод переменных направлений . . . . .	8
3. Метод прогонки . . . . .	8
4. Порядки аппроксимации в схеме . . . . .	10
5. Устойчивость метода переменных направлений . . . . .	10
<b>Графики решений</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>Код программы</b> . . . . .	<b>17</b>

## Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, необходимо решить задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = 4\Delta U + \cos(x) \sin(t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 3, \quad t > 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=3} = 0, \\ U|_{t=0} = \cos(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

## Аналитическое решение

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V + \lambda V = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 3 \\ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=3} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Найдем собственные функции и собственные значения данной ЗШЛ. Будем искать функцию  $V$  в виде:

$$V = X(x) \cdot Y(y) \quad (3)$$

и разделим переменные:

$$X'' \cdot X + X \cdot Y'' + \lambda XY = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda \equiv \mu = const \quad (4)$$

Тогда получим две отдельные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \mu X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0, \quad 0 < y < 3 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=3} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Используя известные решения данных ЗШЛ, сразу запишем СФ и СЗ задачи 2:

$$\begin{cases} V_{nm} = \cos(nx) \cdot \cos\left(\frac{\pi m y}{3}\right), & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 3 \\ \|V_{nm}\|^2 = \|X_n(x) \cdot Y_m(y)\|^2 = \frac{3\pi}{4} \cdot (1 + \delta_{n0}) \cdot (1 + \delta_{m0}), \\ \lambda_{nm} = n^2 + \left(\frac{\pi m}{3}\right)^2, \\ n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Будем искать решение задачи 1 в виде разложения в ряд:

$$U(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \quad (7)$$

Поскольку функции  $F(x, y, t) = \cos(x)\sin(t)$  и  $\Phi(x, y) = \cos(x)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемой области, то они удовлетворяют теореме Стеклова. Поэтому справедливо разложение этих функций в ряд по СФ задачи Штурма-Лиувилля 2, сходящийся равномерно и абсолютно на рассматриваемой области:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \\ \Phi(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_{nm} V_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим 7 и 8 в нашу поставленную задачу 1. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \right\} &= \\ = 4 \cdot \Delta_{xy} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \right\} &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

В силу равномерной сходимости рядов и в силу непрерывности членов этих рядов, можно записать (заменяя  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt}$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{dW_{nm}(t)}{dt} V_{nm}(x, y) = \\ = 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} W_{nm}(t) \cdot \underbrace{\Delta_{xy} V_{nm}(x, y)}_{=-\lambda_{nm} \cdot V_{nm}(x, y)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f_{nm}(t) V_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \frac{dW_{nm}(t)}{dt} + 4 \cdot \lambda_{nm} W_{nm}(t) - f_{nm}(t) \right) V_{nm}(x, y) = 0 \quad (11)$$

Поскольку  $\{V_{nm}(x, y)\}_{m=0,1,\dots}^{n=0,1,\dots}$  - полная и замкнутая система на  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < 3$ , то равенство 11 достигается только если:

$$\begin{cases} \frac{dW_{nm}(t)}{dt} + 4 \cdot \lambda_{nm} W_{nm}(t) = f_{nm}(t) ; t > 0 \\ W_{nm}(0) = \varphi_{nm} \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, мы получили задачу Коши. Решение этой задачи может быть записано в виде:

$$W_{nm}(t) = \varphi_{nm} \cdot e^{-4\lambda_{nm}t} + \int_0^t f_{nm}(\tau) e^{-4\lambda_{nm}(t-\tau)} d\tau \quad (13)$$

Поэтому, окончательно, решение поставленной задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} V_{nm}(x, y) \varphi_{nm} e^{-4\lambda_{nm}t} + \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} V_{nm}(x, y) \int_0^t f_{nm}(\tau) e^{-4\lambda_{nm}(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

Исходя из теоремы Стеклова, коэффициенты  $\varphi_{nm}$  и функции  $f_{nm}(t)$  могут быть найдены как:

$$\begin{aligned} \varphi_{nm} &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \cdot \int_0^\pi dx \int_0^3 dy \varphi(x, y) V_{nm}(x, y) \\ f_{nm}(t) &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \cdot \int_0^\pi dx \int_0^3 dy F(x, y, t) V_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (15)$$

Проведем вычисление  $\varphi_{nm}$  и  $f_{nm}(t)$ , исходя из функций в постановке задачи:

$$\begin{aligned}\varphi_{nm} &= \frac{4}{3\pi \cdot (1 + \delta_{n0}) \cdot (1 + \delta_{m0})} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi dx \int_0^3 dy \cos(x) \cdot \cos(nx) \cos\left(\frac{\pi my}{3}\right) \\ f_{nm}(t) &= \frac{4}{3\pi \cdot (1 + \delta_{n0}) \cdot (1 + \delta_{m0})} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi dx \int_0^3 dy \sin(t) \cos(x) \cdot \cos(nx) \cos\left(\frac{\pi my}{3}\right)\end{aligned}\tag{16}$$

В силу ортогональности тригонометрических функций на соответствующих промежутках, имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{nm} &= \begin{cases} 1, & n = 1 \wedge m = 0 \\ 0, & n \neq 1 \vee m \neq 0 \end{cases} \\ f_{nm}(t) &= \begin{cases} \sin(t), & n = 1 \wedge m = 0 \\ 0, & n \neq 1 \vee m \neq 0 \end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

Сразу проинтегрируем функцию  $f_{10}(t)$  по времени:

$$\begin{aligned}\int_0^t f_{10}(\tau) e^{-4\lambda_{10}(t-\tau)} d\tau &= \int_0^t \sin(\tau) e^{-4(t-\tau)} d\tau = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \int_0^t e^{i\tau} e^{-4(t-\tau)} d\tau \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int_0^t e^{\tau(i+4)-4t} d\tau \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{i+4} \cdot (e^{it} - e^{-4t}) \right\} = \frac{1}{17} (4\sin(t) - \cos(t) + e^{-4t})\end{aligned}\tag{18}$$

Таким образом, аналитическое решение поставленной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}U(x, y, t) &= \cos(x) \cdot \left( e^{-4t} + \frac{1}{17} (4\sin(t) - \cos(t) + e^{-4t}) \right) = \\ &= \frac{1}{17} \cos(x) (4 \sin(t) - \cos(t) + 18 e^{-4t})\end{aligned}\tag{19}$$

# Численное решение

## 1. Построение разностной схемы

Введем сетку в области:

$$\omega = \{x_n = n \cdot h_x ; y_m = m \cdot h_y ; t_k = k \cdot \tau\} \quad (20)$$

где:

$$h_x = \frac{a_x}{N_x} = \frac{\pi}{N_x} ; h_y = \frac{a_y}{N_y} = \frac{3}{N_y} ; \tau = \frac{a_t}{N_t} \quad (21)$$

Запишем конечно-разностную аппроксимацию нашего уравнения:

$$\frac{\hat{U}_{nm} - U_{nm}}{\tau} = 4 \cdot (\Lambda_1 U + \Lambda_2 U) + f(x_n, y_m, t_k) \quad (22)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{nm} &\equiv U_{nm}^{k+1} \quad - \text{ на } (k+1)\text{-ом шаге по времени} \\ U_{nm} &\equiv U_{nm}^k \quad - \text{ на } k\text{-ом шаге по времени} \\ \Lambda_1 U &= \frac{U_{n+1,m} - 2U_{n,m} + U_{n-1,m}}{h_x^2} \\ \Lambda_2 U &= \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h_y^2} \end{aligned} \quad (23)$$

где разностная аппроксимация операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеет точность  $O(h_x^2)$  и  $O(h_y^2)$  соответственно, а аппроксимация производной по времени проводится с первым порядком точности. Для данной разностной схемы ГУ и НУ примут вид:

$$\begin{cases} U_{nm}^0 = \cos(x_n) \\ \frac{U_{1,m}^k - U_{0,m}^k}{h_x} = 0 ; \frac{U_{N_x,m}^k - U_{N_x-1,m}^k}{h_x} = 0 ; \forall m, \forall k \\ \frac{U_{n,1}^k - U_{n,0}^k}{h_y} = 0 ; \frac{U_{n,N_y}^k - U_{n,N_y-1}^k}{h_y} = 0 ; \forall n, \forall k \end{cases} \quad (24)$$

Или в более компактном виде:

$$\begin{cases} U_{nm}^0 = \cos(x_n) ; \forall n \\ U_{1,m}^k = U_{0,m}^k ; U_{N_x,m}^k = U_{N_x-1,m}^k ; \forall m, \forall k \\ U_{n,1}^k = U_{n,0}^k ; U_{n,N_y}^k = U_{n,N_y-1}^k ; \forall n, \forall k \end{cases} \quad (25)$$

## 2. Метод переменных направлений

В данной работе будет использован метод переменных направлений. Суть этого метода заключается в переходе на дополнительный промежуточный шаг по времени: шаг  $k + \frac{1}{2}$ . Разностная схема примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{U_{nm}^{k+\frac{1}{2}} - U_{nm}^k}{\frac{1}{2}\tau} = 4 \cdot \left( \Lambda_1 U^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 U^k \right) + \cos(x_n) \sin\left(t_k + \frac{\tau}{2}\right) \\ \frac{U_{nm}^{k+1} - U_{nm}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = 4 \cdot \left( \Lambda_1 U^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 U^{k+1} \right) + \cos(x_n) \sin\left(t_k + \frac{\tau}{2}\right) \end{cases} \quad (26)$$

После домножения на  $\frac{1}{2}\tau$  и приведения слагаемых, относящихся к разным шагам по времени, можно прийти к следующей разностной схеме:

$$\begin{cases} \frac{2\tau}{h_x^2} U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{4\tau}{h_x^2}\right) U_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} U_{n-1,m}^{k+\frac{1}{2}} = -F(U, x_n, y_m, t_k) \\ F = \frac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m+1}^k + \left(1 - \frac{4\tau}{h_y^2}\right) U_{nm}^k + \frac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m-1}^k + \frac{\tau}{2} \cos(x_n) \sin\left(t_k + \frac{\tau}{2}\right) \\ U_{1,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{0,m}^{k+\frac{1}{2}} ; U_{N_x,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{N_x-1,m}^{k+\frac{1}{2}} ; \forall m, \forall k \\ \text{-----} \\ \frac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m+1}^{k+1} - \left(1 + \frac{4\tau}{h_y^2}\right) U_{n,m}^{k+1} + \frac{2\tau}{h_y^2} U_{n,m-1}^{k+1} = -F(U, x_n, y_m, t_k + \frac{\tau}{2}) \\ F = \frac{2\tau}{h_x^2} U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{4\tau}{h_x^2}\right) U_{nm}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} U_{n-1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \cos(x_n) \sin\left(t_k + \frac{\tau}{2}\right) \\ U_{n,1}^{k+\frac{1}{2}} = U_{n,0}^{k+\frac{1}{2}} ; U_{n,N_y}^{k+\frac{1}{2}} = U_{n,N_y-1}^{k+\frac{1}{2}} ; \forall n, \forall k \end{cases} \quad (27)$$

## 3. Метод прогонки

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} A_n = B_n = \frac{2\tau}{h_x^2} ; C_n = \left(1 + \frac{4\tau}{h_x^2}\right) \\ A_m = B_m = \frac{2\tau}{h_y^2} ; C_m = \left(1 + \frac{4\tau}{h_y^2}\right) \end{cases} \quad (28)$$



Тогда уравнения в системе 27 преобразуются к виду:

$$\begin{cases} A_n U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} - C_n U_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} + B_n U_{n-1,m}^{k+\frac{1}{2}} = -F_n^k \\ A_m U_{n,m+1}^{k+1} - C_m U_{n,m}^{k+1} + B_m U_{n,m-1}^{k+1} = -F_m^{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (29)$$

Для решения этой системы используется метод прогонки. Запишем условия применимости этого метода:

$$\begin{aligned} |C_n| &> |A_n| + |B_n|, \quad 0 \leq \alpha_{1,N_x} \leq 1 \\ \text{Или:} \\ |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad 0 \leq \alpha_{1,N_x} < 1 \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогичное условие записывается и для индексов  $m$ . При этом видно, что в нашем случае выполнено верхнее условие.

Перейдем к изложению сути метода прогонки. Будем искать решение в виде:

$$U_{nm}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{n+1} \cdot U_{n+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{n+1} \quad ; n = \overline{0, N_x - 1} \quad (31)$$

где коэффициенты  $\alpha_{n+1}$  и  $\beta_{n+1}$  можно получить из следующих рекуррентных соотношений (прямой ход прогонки):

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad ; \beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad ; n = \overline{0, N_x - 1} \quad (32)$$

При этом можно заметить, что:

$$\begin{cases} U_{0,m}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_1 \cdot U_{1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 \\ U_{0,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{1,m}^{k+\frac{1}{2}} \quad (\text{из 27}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Из этого условия, при помощи соотношений 32, получаем все коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ .

Обратный ход прогонки состоит в следующем. Можно заметить, что:

$$\begin{cases} U_{N_x-1,m}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{N_x} \cdot U_{N_x,m}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{N_x} \\ U_{N_x,m}^{k+\frac{1}{2}} = U_{N_x-1,m}^{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{N_x,m}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{N_x}}{1 - \alpha_{N_x}} \\ U_{N_x-1,m}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{N_x}}{1 - \alpha_{N_x}} \end{cases} \quad (34)$$

При этом число арифметических операций метода прогонки составляет  $O(N)$ .

Отсюда путем применения соотношений 31 можно найти остальные  $U_{n,m}^{k+\frac{1}{2}}$ .

#### 4. Порядки аппроксимации в схеме

Начальное условие  $U|_{t=0} = \cos(x)$  аппроксимируется точно.

Граничные условия Неймана  $\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=\pi} = 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=3} = 0$  аппроксимируются с точностью  $O(h_x)$  и  $O(h_y)$  соответственно, то есть имеют первый порядок точности.

Найдем порядок аппроксимации по  $\tau$ . Рассмотрим действие оператора производной по  $t$  на непрерывную функцию  $U(x)$ :

$$\begin{aligned} L_\tau U(x, y, t) &= \frac{U(x, y, t + \tau) - U(x, y, t)}{\tau} = \\ &= \frac{1}{\tau} \left( U(x, y, t) + \tau \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} + \dots - U(x, y, t) \right) = \\ &= \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} + \underline{O}(\tau) \end{aligned} \tag{35}$$

Теперь найдем порядок аппроксимации по  $x$ . Рассмотрим:

$$\begin{aligned} L_{h_x} U(x, y, t) &= \frac{1}{h_x} \left( \frac{U(x + h_x, y, t) - U(x, y, t)}{h_x} - \frac{U(x, y, t) - U(x - h_x, y, t)}{h_x} \right) = \\ &= \frac{1}{h_x^2} (U(x + h_x, y, t) - 2U(x, y, t) + U(x - h_x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{h_x^2} \left( U(x, y, t) + h_x \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \dots - \right. \\ &\quad \left. - 2U(x, y, t) + U(x, y, t) - h_x \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} - \dots \right) = \\ &= \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \underline{O}(h_x^2) \end{aligned} \tag{36}$$

Аналогично 36 проводятся вычисления для оператора производной по  $y$ . Таким образом, схема 26 имеет первый порядок аппроксимации по  $t$  и второй порядок аппроксимации по  $x$  и  $y$ .

#### 5. Устойчивость метода переменных направлений

Устойчивость системы 26 может быть исследована при помощи спектрального метода Неймана. Будем рассматривать однородные урав-

нения из системы 26. Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}
V_{n,m}^k &= e^{i\alpha n + i\beta m} \\
V_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} &= \lambda_1 V_{n,m}^k \text{ -на слое } \left(k + \frac{1}{2}\right) \\
V_{n,m}^{k+1} &= \lambda_2 V_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} = \lambda_1 \lambda_2 V_{n,m}^k \text{ -на слое } (k+1)
\end{aligned} \tag{37}$$

Подставим решения в таком виде в систему 26 и сразу сократим получившиеся уравнения на функции  $V$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1 - 1}{\frac{1}{2}\tau} &= 4\lambda_1 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 4 \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2} \\
\frac{\lambda_2 - 1}{\frac{1}{2}\tau} &= 4 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 4\lambda_2 \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Выразим  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1 - \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \frac{8\tau}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
\lambda_2 &= \frac{1 - \frac{8\tau}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим:

$$|\lambda_1 \lambda_2| = \left| \frac{1 - \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \frac{8\tau}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{8\tau}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right| \tag{40}$$

Здесь можно отметить одно важное свойство относительно накрест лежащих слагаемых под модулем:

$$0 \leq \left| \frac{1 - \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \frac{8\tau}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right| \leq 1 \tag{41}$$

(аналогично для частоты  $\alpha$ ), для любых вещественных значений коэффициентов перед тригонометрическими функциями в данном выражении. Таким образом, мы получили, что:

$$0 \leq |\lambda_1 \lambda_2| \leq 1 \quad (42)$$

То есть рассмотренная схема безусловно устойчива при любом выборе  $h_x, h_y, \tau$ .

## Графики решений

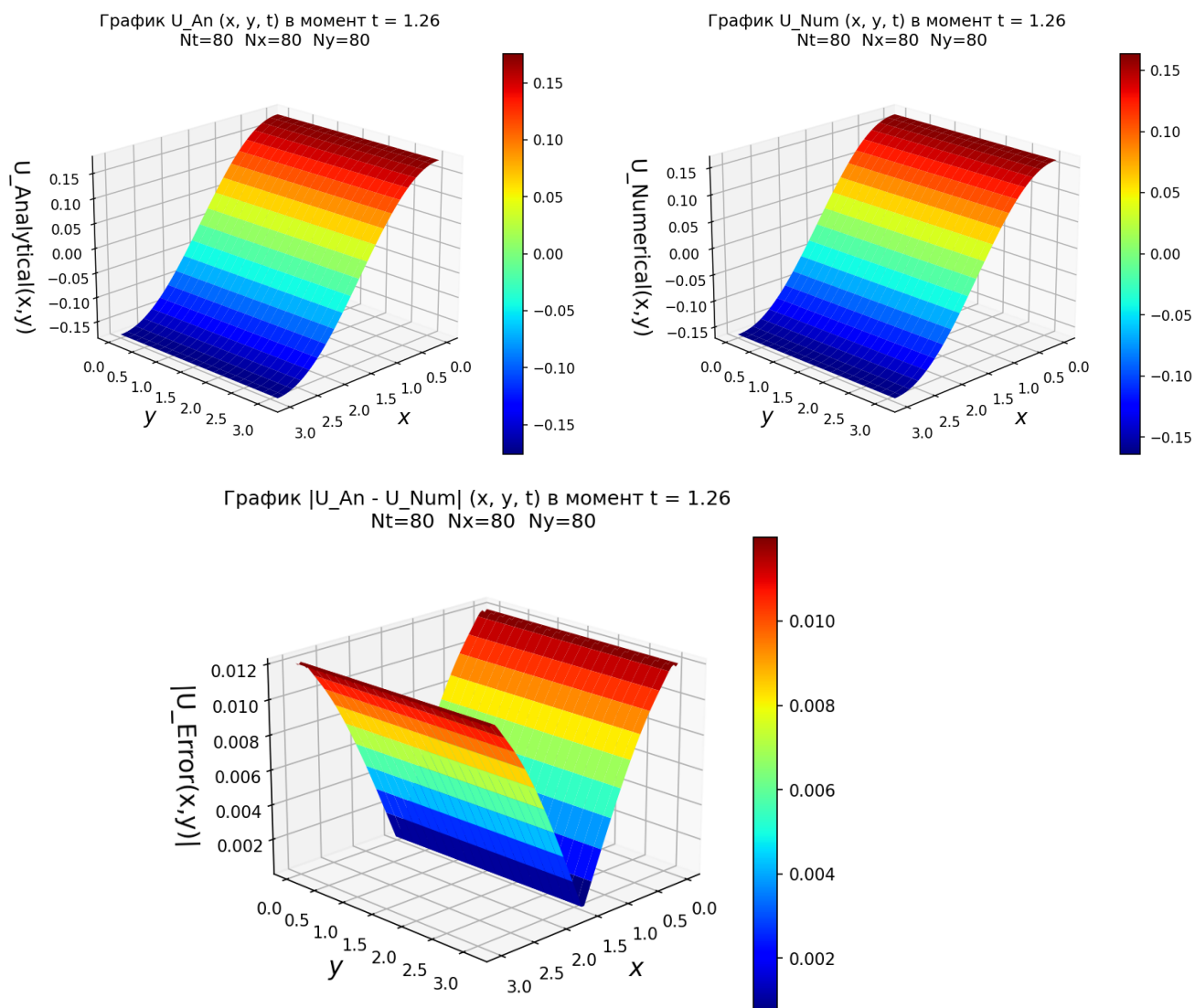


Рис. 1: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных  $(x, y)$  в момент времени  $t = \frac{2}{5}\pi$ .

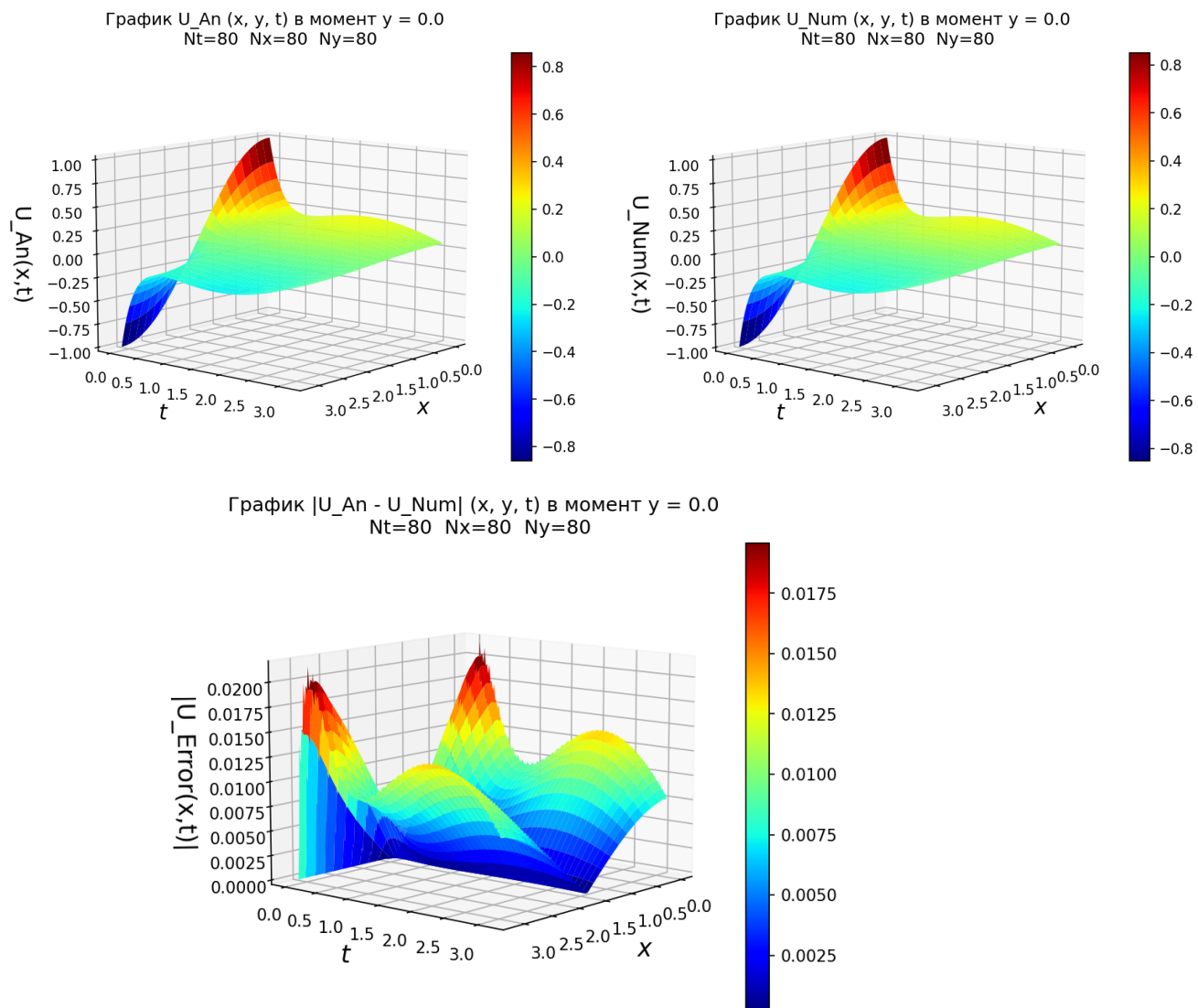


Рис. 2: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных  $(x, t)$ .

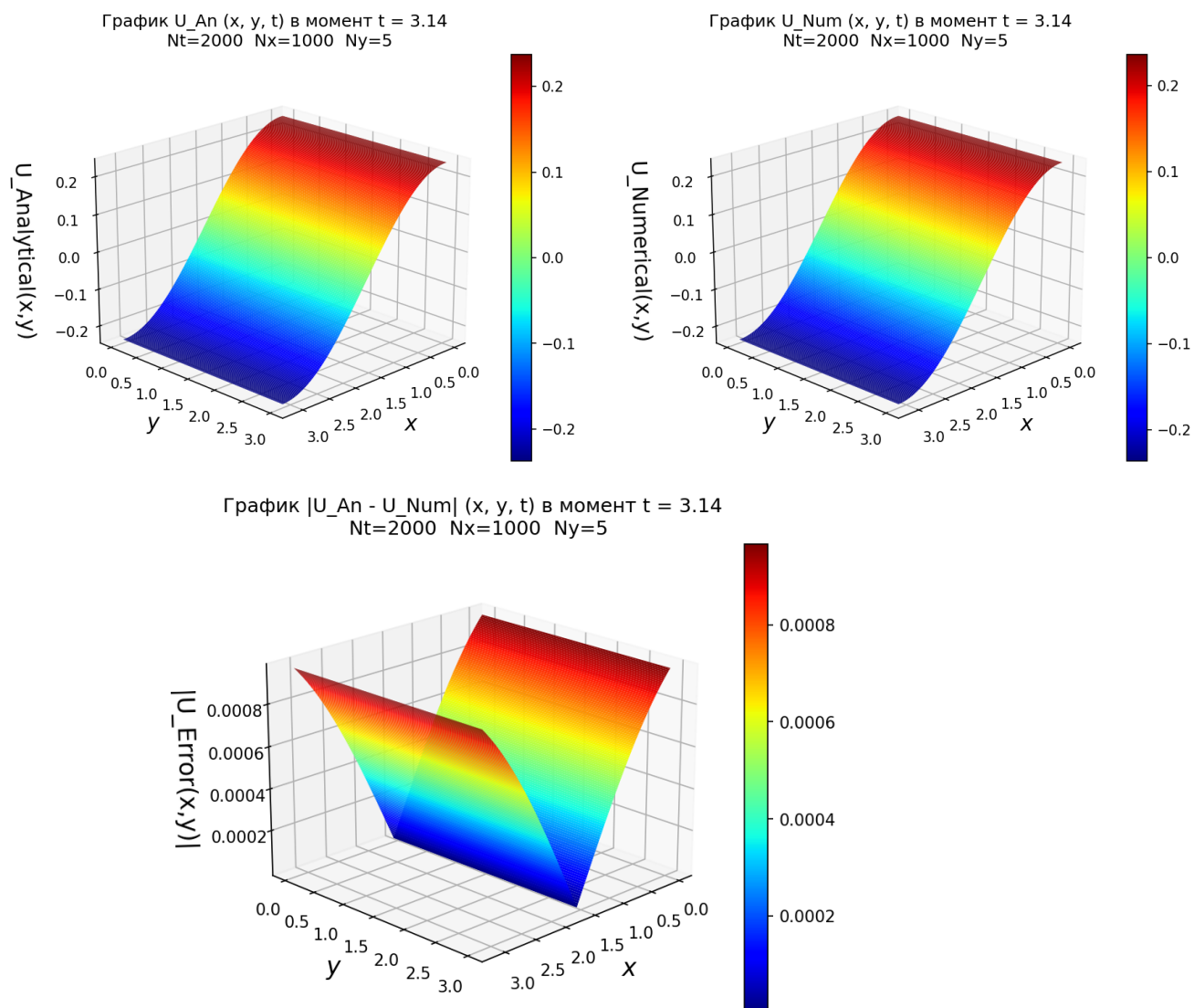


Рис. 3: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных  $(x, y)$  в момент времени  $t = \pi$ .

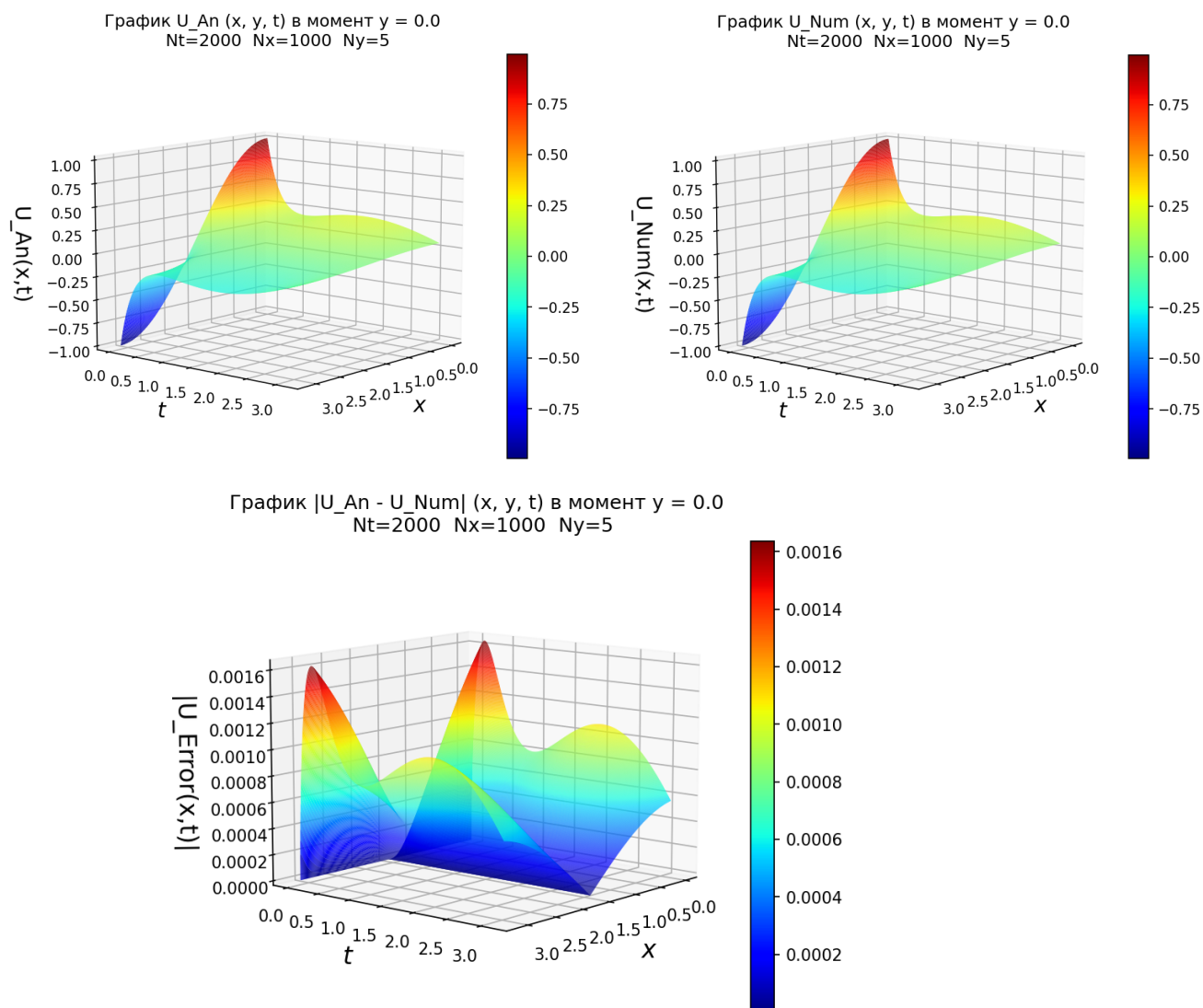


Рис. 4: Графики аналитического и численного решений, погрешности в переменных  $(x, t)$ .



# Код программы

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Wed Mar 31 09:24:27 2021
4
5 @author: Pol Михайлов( Павел, 316 группа, задача 1, вариант 32)
6 """
7
8 import numpy as np
9 import pylab
10 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
11 from matplotlib import cm
12
13
14
15 "1. Зададим пределы области исследования по X, Y, T"
16 x1, x2 = 0, np.pi
17 y1, y2 = 0, 3
18 t1, t2 = 0, np.pi
19
20
21
22 "2. Зададим количество шагов сетки N и величину шага сетки h"
23 Nx = 100
24 Ny = 5
25 Nt = 200
26 hx = (x2-x1)/Nx
27 hy = (y2-y1)/Ny
28 tau = (t2-t1)/Nt
29
30
31
32 "3. Создадим массивы переменных"
33 x = np.linspace(x1,x2,Nx)
34 y = np.linspace(y1,y2,Ny)
35 t = np.linspace(t1,t2,Nt)
36 U_An = np.zeros((Nx,Ny,Nt*2+1))
37 U_Num = np.zeros((Nx,Ny,Nt*2+1))
38
39
40
41 "АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ"
42 "4. Вычислим значения аналитического решения в узлах сетки"
43 for n in range(0,Nx):
44     for m in range(0,Ny):
45         for k in range(0,Nt*2+1):
46             U_An[n,m,k] = 1/17*np.cos(x[n])*(4*np.sin(tau*k/2)-np.
47                 cos(tau*k/2)+18*np.exp(-4*tau*k/2))
48
49
50
51
52 "ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ"
```

```

53 "5. Зададим необходимые коэффициенты для численного решения"
54 Ax = 2 * tau/hx/hx
55 Cx = 1 + 2 * Ax
56 Ay = 2 * tau/hy/hy
57 Cy = 1 + 2 * Ay
58
59
60
61 "6. Зададим функцию F из разностной схемы для x и y"
62 def Fx(a,b,c):
63     return Ay*(U_Num[a,b-1,c-1] + U_Num[a,b+1,c-1]) + (1-2*Ay)*
        U_Num[a,b,c-1] + 0.5*tau*np.cos(x[a])*np.sin(tau*(c + 1)/2)
64
65
66 def Fy(a,b,c):
67     return Ax*(U_Num[a-1,b,c-1] + U_Num[a+1,b,c-1]) + (1-2*Ax)*
        U_Num[a,b,c-1] + 0.5*tau*np.cos(x[a])*np.sin(tau*(c - 1)/2)
68
69
70
71 "7. Зададим функции, реализующие метод прогонки по x и y"
72 "Прогонка по x"
73 def SweepX(b,c):
74     alpha = np.zeros(Nx)
75     beta = np.zeros(Nx)
76     alpha[1] = 1 #У нас ГУ Неймана при x = 0
77     beta[1] = 0
78     A = Ax
79     B = Ax
80     C = 1+2*Ax
81
82     for n in range(1,Nx-1): #Прямая прогонка
83         alpha[n+1] = B / (C - A*alpha[n])
84         beta[n+1] = (A*beta[n] + Fx(n,b,c)) / (C - A*alpha[n])
85     U_Num[Nx-1,b,c] = beta[Nx-1] / (1 - alpha[Nx-1]) # Из ГУ
        Неймана при x = \pi
86     for n in range(Nx-1,0,-1): #Обратная прогонка
87         U_Num[n-1,b,c] = alpha[n]*U_Num[n,b,c] + beta[n]
88     for n in range(0,Nx): #Установка граничных значений
89         U_Num[n,0,c] = U_Num[n,1,c]
90         U_Num[n,Ny-1,c] = U_Num[n,Ny-2,c]
91
92
93 "Прогонка по y"
94 def SweepY(a,c):
95     alpha = np.zeros(Ny)
96     beta = np.zeros(Ny)
97     alpha[1] = 1 #У нас ГУ Неймана при y = 0
98     beta[1] = 0
99     A = Ay
100    B = Ay
101    C = 1+2*Ay
102
103    for m in range(1,Ny-1): #Прямая прогонка
104        alpha[m+1] = B / (C - A*alpha[m])
105        beta[m+1] = (A*beta[m] + Fy(a,m,c)) / (C - A*alpha[m])

```

```

106     U_Num[a,Ny-1,c] = beta[Ny-1] / (1 - alpha[Ny-1]) # Из ГУ Неймана
при y = 3
107     for m in range(Ny-1,0,-1): #Обратная прогонка
108         U_Num[a,m-1,c] = alpha[m]*U_Num[a,m,c] + beta[m]
109     for m in range(0, Ny): #Установка граничных значений
110         U_Num[0,m,c] = U_Num[1,m,c]
111         U_Num[Nx-1,m,c] = U_Num[Nx-2,m,c]
112
113
114
115 "7. Применим метод прогонки"
116 for n in range(0,Nx): #Задание ГУ
117     for m in range(0,Ny):
118         U_Num[n, m, 0] = np.cos(x[n])
119
120 for k in range(1,2*Nt,2):
121     for m in range(1,Ny-1):
122         SweepX(m,k)
123     for n in range(1,Nx-1):
124         SweepY(n,k+1)
125
126 U_AnNum = np.zeros(((Nx,Ny,Nt*2+1)))
127 for n in range(0,Nx):
128     for m in range(0,Ny):
129         for k in range(0,Nt*2+1):
130             U_AnNum[n,m,k] = np.abs(U_An[n][m][k] - U_Num[n][m][k])
131
132
133
134 "ГРАФИКИ"
135 dpi0 = 150
136 sk0 = int(Nt/5)
137 for k0 in range(0,Nt+1,sk0):
138     "8. Построение аналитического решения"
139     fig = pylab.figure(dpi=dpi0)
140     axes = Axes3D(fig)
141
142     Y,X = np.meshgrid(y,x)
143
144     surf = axes.plot_surface(X,Y, U_An[:, :, k0], rstride=4, cstride
=4, cmap = cm.jet)
145     axes.view_init(20, 45) #поворот графика
146
147     pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от
оси для подписей
148     pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
149     axes.set_zlabel('$U_{Analytical}(x,y)$', size = 15, labelpad = 10)
150
151     pylab.title('График U_An (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0*
tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+str(Ny))
152     cbar = fig.colorbar(surf, ax=axes) #boundaries = [-1.00, -0.75,
-0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00]
153     pylab.show()
154
155
156

```

```

157
158 "9. Построение численного решения"
159 fig_num = pylab.figure(dpi=dpi0)
160 axes_num = Axes3D(fig_num)
161
162 surf_num = axes_num.plot_surface(X,Y, U_Num[:, :, k0], rstride=4,
163 cstride=4, cmap = cm.jet)
164 axes_num.view_init(20, 45) #поворот графика
165
166 pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от
167 оси для подписей
168 pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
169 axes_num.set_zlabel('U_Numerical(x,y)', size = 15, labelpad =
170 10)
171
172 pylab.title('График U_Num (x, y, t) в момент t = ' +str(round(k0
173 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+str(Ny))
174
175 cbar = fig_num.colorbar(surf_num, ax=axes_num)
176 pylab.show()
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194 "10. Построение разности численного и аналитического решений,
195 погрешности"
196 fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
197 axes_annum = Axes3D(fig_annum)
198
199 surf_annum = axes_annum.plot_surface(X,Y, U_An[:, :, k0] - U_Num
200[:, :, k0], rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
201 axes_annum.view_init(20, 45) #поворот графика
202
203 pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от
204 оси для подписей
205 pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
206 axes_annum.set_zlabel('U_Error(x,y)', size = 15, labelpad = 10)
207
208 pylab.title('График (U_An - U_Num) (x, y, t) в момент t = ' +str(
209 round(k0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+
210 str(Ny))
211
212 cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
213 pylab.show()
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999

```

```

201     pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от
    оси для подписей
202     pylab.ylabel('$y$', size=15, labelpad = 5)
203     axes_annum.set_zlabel('$U\_Error(x,y)$', size = 15, labelpad =
    10)
204
205     pylab.title('График $U\_An - U\_Num$ (x, y, t) в момент t = ' +str(
    round(k0 * tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+
    str(Ny))
206     cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
207     pylab.show()
208
209
210
211 "12. График аналитического решения от X и T"
212 spt = np.linspace(t1,t2,2*Nt+1)
213 m0 = 0
214 fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
215 axes_annum = Axes3D(fig_annum)
216
217 SPT, X = np.meshgrid(spt, x)
218
219 surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, U_An[:,m0,:], rstride
    =4, cstride=4, cmap = cm.jet)
220 axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика
221
222 pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси
    для подписей
223 pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
224 axes_annum.set_zlabel('$U\_An(x,t)$', size = 15, labelpad = 10)
225
226 pylab.title('График $U\_An$ (x, y, t) в момент y = ' +str(round(m0 * tau
    ,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+str(Ny))
227 cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
228 pylab.show()
229
230
231
232 "13. График численного решения от X и T"
233 fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
234 axes_annum = Axes3D(fig_annum)
235
236 surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, U_Num[:,m0,:], rstride
    =4, cstride=4, cmap = cm.jet)
237 axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика
238
239 pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси
    для подписей
240 pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
241 axes_annum.set_zlabel('$U\_Num(x,t)$', size = 15, labelpad = 10)
242
243 pylab.title('График $U\_Num$ (x, y, t) в момент y = ' +str(round(m0 *
    tau,2)) + ' \n Nt=' +str(Nt)+' Nx='+str(Nx)+' Ny='+str(Ny))
244 cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
245 pylab.show()
246

```

```

247
248
249 "14. График модуля ошибки решения от X и T"
250 fig_annum = pylab.figure(dpi=dpi0)
251 axes_annum = Axes3D(fig_annum)
252
253 surf_annum = axes_annum.plot_surface(X, SPT, np.abs(U_An[:,m0,:] -
254     U_Num[:,m0,:]), rstride=4, cstride=4, cmap = cm.jet)
255 axes_annum.view_init(10, 40) #поворот графика
256
257 pylab.xlabel('$x$', size=15, labelpad = 5) #labelpad: отступы от оси
258     для подписей
259 pylab.ylabel('$t$', size=15, labelpad = 5)
260 axes_annum.set_zlabel('$|U\_An - U\_Num|(x, y, t)|$', size = 15, labelpad = 10)
261
262 pylab.title('График $|U\_An - U\_Num|(x, y, t)$ в момент $y = ' + str(
263     round(m0 * tau,2)) + ' \n Nt=' + str(Nt) + ' Nx=' + str(Nx) + ' Ny=' +
264     str(Ny))
265 cbar = fig_annum.colorbar(surf_annum, ax=axes_annum)
266 pylab.show()

```

## Список литературы

- [1] Численные методы, Калиткин Н.Н., М.: Издательский центр «Академия», 2013 г.
- [2] Курс лекций «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ», Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., Москва, 2012