El meu treball a $\LaTeX$

Pol Piñol Castuera

Índex

1 Introducció

L'objectiu d'aquest treball és avaluar el coneixement de l'editor de text $\LaTeX$. A la Secció 2 hi utilitzem un tema d'Algebra Lineal i a la Secció 3 un de Càlcul Diferencial.

2 Àlgebra lineal

En aquesta secció recordem algunes propietats de la matriu associada a una aplicació lineal. En cap moment pretenem ser exhaustius. Per a aprofundir en el tema referim el lector a l'assignatura *Àlgebra lineal* del primer curs de Grau de Matemàtiques i a la bibliografia d'aquesta assignatura com ara per exemple [1], [2]. La pàgina web interactiva [3] és un recurs més bàsic on s'expliquen pas a pas les nocions d'Àlgebra Lineal amb molts exemples i il·lustracions.

2.1 Aplicacions lineals

En tota la secció suposem que

- V, W són espais vectorials sobre $\mathbb{R}$
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base ordenada de V.

- $\overline{\mathcal{B}} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ és una base ordenada de W.
- $T : V \to W$ és una aplicació lineal entre els espais vectorials V i W.

Coordenades d'un vector. Per cada vector $v \in V$ existeixen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ únics de manera que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. El vector $(x_1, \ldots, x_n)$ s'anomena vector de les coordenades de v respecte de la base $\mathcal{B}$, i el denotem per

$$[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Matriu associada a una aplicació lineal. La matriu associada a T respecte de les bases $\mathcal{B}$ en $\overline{\mathcal{B}}$ està donada per

$$m(T)_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ [T(v_1)]_{\overline{\mathcal{B}}} & [T(v_2)]_{\overline{\mathcal{B}}} & \ldots\ldots & [T(v_n)]_{\overline{\mathcal{B}}} \\ & & & \\ \hline \end{array} \right), \tag{2}$$

on la i-èsima columna està formada per les coordenades de $T(v_i)$ respecte de la base $\overline{\mathcal{B}}$. Notem que, per cada $v \in V$, les coordenades de $T(v)$ respecte de $\overline{\mathcal{B}}$ estan donades per

$$[T(v)]_{\overline{\mathcal{B}}} = m(T)_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}, \tag{3}$$

on els vectors de coordenades $[v]_{\mathcal{B}}$ i $[T(v)]_{\overline{\mathcal{B}}}$ estan considerats com matrius de dimensió $n \times 1$ i $m \times 1$ respectivament. Aleshores, si $[T(v)]_{\overline{\mathcal{B}}} = (y_1, \ldots, y_m)$, llavors $T(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$.

Matriu de l'aplicació lineal inversa. Si $T : V \to W$ és un isomorfisme, aleshores $\dim V$=$\dim W$, $m(T)_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}}$ és invertible i la seva matriu és:

$$(m(T)_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}})^{-1} = m(T^{-1})_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}.$$

Esquemàticament,

$$\begin{tikzcd} {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rr, bend left, "m(T)_{\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}}"] & & {[T(v)]_{\overline{\mathcal{B}}}} \arrow[ll, bend left, "m(T^{-1})_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}"] \end{tikzcd} \tag{4}$$

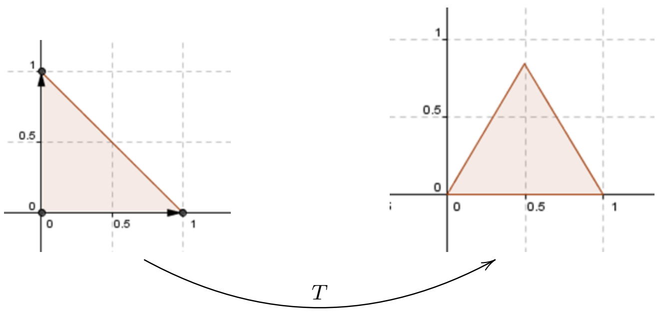
on tenim a l'esquerra les coordenades del vector v respecte de la base $\mathcal{B}$ i a la dreta les coordenades del vector $T(v)$ respecte de la base $\overline{\mathcal{B}}$.

Teorema fonamental de les transformacions lineals El teorema següent dóna condicions suficients i necessàries perquè existeixi una aplicació lineal única que transforma una figura geomètrica donada en una altra. Després, com a il·lustració, treballarem un exemple en l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1. *Siguin V, W espais vectorials, sigui $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V i siguin $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vectors arbitraris (iguals o no) de W. Aleshores existeix una única aplicació lineal $T : V \to W$ que compleix $T(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n$.*

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1]. Tot seguit expliquem com trobar l'aplicació lineal T en un cas concret.

Anem a veure si podem transformar el triangle que hi ha a l'esquerra en el triangle que hi ha a la dreta (5):



(5)

Pel Teorema 1, una aplicació lineal únicament per les imatges d'una base de $\mathbb{R}^2$. Observem que la base canònica, $\mathcal{B} = (1,0), (0,1)$, determina el primer triangle. D'acord amb això, li assignem les següents imatges transformades per T:

$$\begin{cases} T((1,0)) = (1,0), \\ T((0,1)) = (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Per trobar la fórmula analítica de l'aplicació lineal T podem utilitzar (3) tot observant que les coordenades són els vectors mateixos si triem com a bases ordenades $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$ la base canònica de $V = W = \mathbb{R}^2$. Sigui $v = (x, y)$ un vector genèric de $\mathbb{R}^2$, aleshores la seva imatge transformada per T és:

$$T\big((x,y)\big) = m(T)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix} = (x + \frac{1}{2}y, y).$$

3 Càlcul Diferencial

Recordem aquí una propietat de la derivada de funcions d'una variable.

Proposició 1. *Suposem $r > 1$ és una constant i $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció que compleix la desigualtat $f(x) \leq |x|^r$ per cada x en I, on I és un interval obert que conté 0. Aleshores f és diferenciable en $x = 0$.*

Demostració. La desigualtat $f(x) \leq |x|^r$ amb $r > 1$ implica que $f(0) = 0$. Per tant tenim que

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{r-1}.$$

Com que $r - 1 > 0$, tenim $\lim_{x \to 0} |x|^{r-1} = 0$, per la qual cosa obtenim que

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0 \\ \Leftrightarrow &\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Llavors, d'acord amb la definició de diferenciabilitat, (6) diu que f és diferenciable en $x = 0$ amb derivada $f'(0) = 0$. □

Referències

[1] F. Cedo, A. Reventós. *Geometria plana i Algebra lineal.* Manuals de la UAB, Servei de Publicacions, UAB, Bellaterra, 2004.

[2] L. Merino i E. Santos. *Àlgebra lineal con métodos elementales.* Ed. Thomson, Madrid, 2006.

[3] F. Gómez, I. Pustilnik. *Álgebra y Geometría Analítica Online!* `https://aga.frba.utn.edu.ar`, 2017.