TP2. Interpolation

Exercice 1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au calcul de $\mathcal{I}_n f \in \mathbb{P}_n$ le polynôme (algébrique) de degré inférieur ou égal à n qui interpole la fonction f en n points équidistants $(x_k)_{k=0}^n$ de l'intervalle $I = [0,1]$. On cherche ce polynôme sous la forme $I_n f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. On définit les vecteurs $a = (a_0, \cdots, a_n)^T$ et $y = (f(x_0), \cdots, f(x_n))^T$.*

1. *Écrire une fonction calculant la matrice M telle que $Ma = y$.*
2. *Pour résoudre ce système linéaire, utiliser la fonction `inv` de la bibliothèque `linalg` de `numpy` qui calcule l'inverse d'une matrice.*
   Application : $f(x) = e^{3x}\sin(6x)$ et $n = 10, 15, 20, 25, \cdots$
   Représenter sur un même graphique la fonction f et le polynôme $\mathcal{I}_n f$. Utiliser un grand nombre de points pour représenter assez finement les fonctions car si on ne les représente qu'aux points d'interpolation, elles coincident, bien sûr !
3. *Mêmes questions en utilisant la fonction `solve` de la même bibliothèque qui résout les systèmes linéaires.*

Exercice 2 *Interpolation trigonométrique (via la résolution d'un système linéaire). Soit la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = e^x \sin(2x)$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k = 0, \cdots, N-1$, on définit les points $x_k = kh$ avec $h = 2\pi/N$ et $z_k = e^{ix_k}$. On cherche le polynôme trigonométrique interpolant la fonction f aux points x_k sous la forme $I_N f(x) = \sum_{k=-N+1}^N a_k e^{ikx}$. Écrire le problème sous forme matricielle, comme à l'exercice précédent. Le résoudre et représenter sur un même graphique la fonction et le polynôme trigonométrique.*

Exercice 3 *Interpolation trigonométrique (via la série de Fourier discrète).*

1. *Écrire une fonction `Points(N)` qui renvoie un tableau contenant les points d'interpolation $x_k = k\pi/N$ pour $k = 0, \cdots 2N-1$.*
2. *Écrire une fonction `CoeffFD(x,y)` qui, à partir d'un tableau x contenant les points d'interpolation et un tableau y contenant des valeurs y_k, calcule les coefficients de Fourier discrets $(\hat{f}_j)_{j=-N+1}^N$*

$$\hat{f}_j = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} y_k e^{-ijx_k}.$$

Note : chaque y_k est sensé être la valeur au point x_k d'une fonction 2π-périodique f : $y_k = f(x_k)$.

3. *Écrire une fonction `Interpol` calculant les valeurs du polynôme d'interpolation trigonométrique sur une grille de points X. Paramètres d'entrée de cette fonction : les coefficients discrets calculés par `CoeffFD` et le tableau X. Application : $f(x) = e^{x/2}\sin(2x)$. Représenter la fonction et son interpolé sur $[0, 2\pi]$, puis sur $[0, 7]$. Commenter les résultats.*

Exercice 4 *Le noyau de Dirichlet est le polynôme trigonométrique D_n défini pour tout entier non nul n par*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 2\pi, \\ \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Pour diverses valeurs de n, tracer D_n sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.*
2. *Même question mais sur l'intervalle $[-5, 8]$.*
3. *On pose $\|D_n\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx$.*
   (a) *Calculer $\|D_n(x)\|_1$ en fonction de n. On pourra calculer l'intégrale par une formule des rectangles très précise ou utiliser la fonction `quad` de la bibliothèque `integrate` de `scipy`.*
   (b) *Représenter graphiquement $\|D_n\|_1$ en fonction de n.*
   (c) *Tracer la courbe $\ln n \longmapsto \|D_n\|_1$ en fonction de n. Vous devez observer une droite (plus exactement, une courbe qui ressemble à une droite). Déterminer la pente de cette droite. (Comparer avec la valeur exacte qui est $4/\pi^2$.)*
4. *Le noyau de Fejér F_n est défini pour tout entier $n \geq 1$ par*

$$F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n.$$

   (a) *Tracer le noyau de Fejér sur $[-\pi, \pi]$ pour diverses valeurs de n.*
   (b) *Représenter graphiquement $\|F_n\|_1$.*
   (c) *Comparer les noyaux de Dirichlet et de Fejér.*