Demostraciones de problemas NP-Completos y NP-Hard

Paula Silva Lara

December 23, 2024

Contents

1 Introducción

Como un problema NP-Completo, por definición, es un problema que es NP y NP hard, la demostración de que un problema es NP-Completo consiste en dos partes:

- **Demostrar que es NP:** Dada una instancia del problema, es posible verificar si es una solución es correcta en tiempo polinomial.
- **Demostrar que es NP-Hard:** Dado un problema NP-Hard conocido B, si B es reducible a C, entonces C es NP-Hard.

Ninguno de los problemas planteados a continuación son NP, ya que son problemas de optimización, de minimizar y maximizar, y comprobar que un conjunto S de tamaño k que cumple con una propiedad P es mínimo o máximo, requiere buscar conjuntos de tamaño menor o mayor respectivamente que k, y esto es exponencial.

2 Retroalimentación de arcos

2.1 Definición del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de arcos es un subconjunto de arcos $F \subseteq E$ tal que al eliminar todos los arcos en F, el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido).

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo.

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es ver si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño k.

2.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir `Cobertura de vértices` a `Retroalimentación de Arcos`:

La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

- $V' = V \cup \{v' | v \in V\}$
- $E' = \{(v, v'), (u, u'), (v', u), (u', v) | < u, v > \in E\}$

Este es la entrada al problema de Retroalimentación de Arcos. A continuación se muestra un ejemplo de ambos grafos.

Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $k \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de arcos en G' de tamaño k.

- $\Leftarrow$ Sea S' un conjunto de retroalimentación de arcos de G' de tamaño k, si $\exists e \in S'$ tal que e no es una arista (v, v') entonces e es una arista de la forma (v', u). Si e es una arista (v', u), como $e \in S'$, abarca todos los ciclos $[v', u, ..., v']$. Todos los caminos $u \to v'$ pasan por v, ya que el único arco incidente en v' es v. Por tanto si sustituimos (v', u) por (v, v'), se abarcan los mismos ciclos de G'. Por tanto, es posible crear un nuevo conjunto S' de tamaño k formado solamente por arcos de la forma (v, v'). Dado el nuevo conjunto S', como S' abarca todos los ciclos, también abarca los ciclos c de la forma $c = [v, v', u, u', v]$ en G'. A cada ciclo c en G' se le asocia una arista $< u, v > \in E$ y viceversa. Como por cada ciclo c se cumple que $(v, v') \in S'$ o $(u, u') \in S'$, entonces es posible crear un conjunto S formado por los vértices de V correspondientes a las aristas de S', el cual abarca todas las aristas de G, por tanto, S' es una cobertura de vértices de G.

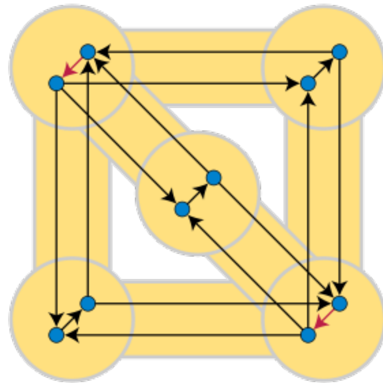


Figure 1: Las aristas amarillas pertenecen a G y los arcos negros a G'

- $\Rightarrow$ Sea S una cobertura de vértices de G, entonces $\forall < u, v >\in E$ se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Sea S' un conjunto de arcos formado por las arcos que (v', v) correspondientes a los vértices v que pertenecen a S, demostremos que $G' - S'$ no tiene ciclos. Dado un ciclo c de G'; si $v' \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que en v' solo incide v; si $v \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que v solo incide en v'. Por tanto, en cada ciclo de G' existe un arco de la forma (v, v'), por lo que S' es una retroalimentación de arcos de G'.

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de arcos en G de tamaño k, con $k \geq 0$.

- $\Leftarrow$ Se cumple por Principio del Buen Orden.
- $\Rightarrow$ Si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo l, al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que es un conjunto de retroalimentación de arcos.

3 Retroalimentación de vértices

3.1 Definición del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de vértices es un subconjunto de vértices $F \subseteq V$ tal que al eliminar todos los vértices en F (y sus aristas incidentes), el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido).

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo.

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es ver si existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k.

3.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir `Cobertura de vértices` a `Retroalimentación de vértices`:

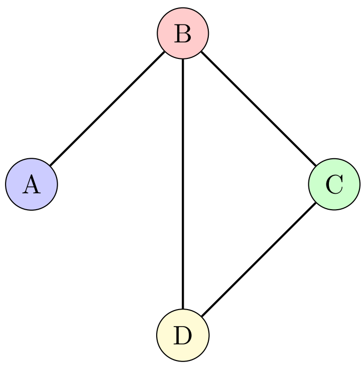
La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

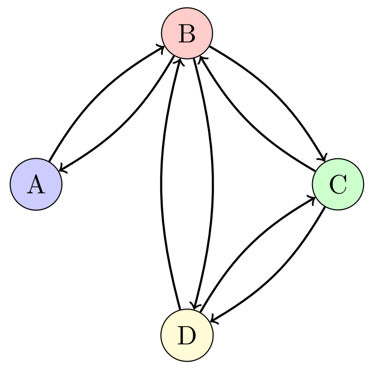
- $V' = V$

- $E' = \{(u,v),(v,u) \quad | \quad <u,v> \in E\}$

Este es la entrada de la Retroalimentación de vértices. A continuación se muestra un ejemplo de ambos grafos.

$G = (V,E)$ $\qquad$ $G' = (V', E')$





Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $k \iff$ existe una retroalimentación de vértices en G' de tamaño k.

- $\Leftarrow$ Sea S' una retroalimentación de vértices de tamaño k, entonces S' contiene al menos un vértice de cada ciclo, entonces $\forall$ ciclo $[u,v,u] \in G'$, se cumple que $u \in V'$ o $v \in V'$. Como existe un ciclo de este tipo por cada arista de G, entonces S' cubre todos los vértices de G.
- $\Rightarrow$ Sea S una cobertura de vértices de tamaño k, entonces $\forall <u,v> \in E$, se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Demostremos que S es una retroalimentación de vértices de G'. Sea c un ciclo de G' de tamaño q $c = [v1, v2, .., vq, v1]$, entonces entre todo par de vértices consecutivos de c existe un arco (vi, vj) en G' y su correspondiente arista $<vi, vj>$ o $<vj, vi>$ en G. Como $vi \in S$ o $vj \in S$, entonces al menos un vértice de c pertenece a S, por lo que todos los ciclos de G' están cubiertos en S.

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de vértices en G de tamaño k, con $k \geq 0$.

- $\Leftarrow$ Se cumple por Principio del Buen Orden.
- $\Rightarrow$ Si existe un conjunto de retroalimentación de tamaño mínimo l, al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que para todos los ciclos del grafo existe un vértice en el conjunto, por lo que va a ser un conjunto de retroalimentación de tamaño k.

4 Conjunto Dominante

4.1 Definición del problema

En un grafo $G = (V,E)$, un conjunto de vértices $D \subseteq V$ es un conjunto dominante si cada vértice de V que no está en D es adyacente a al menos un vértice en D.

Una partición de los vértices V en k conjuntos $D_1, D_2, \ldots, D_k$ es una partición domática si cada D_i (para $i = 1, 2, \ldots, k$) es un conjunto dominante. El numero dominante es la cardinalidad del menor conjunto dominante de G.

Problema de Optimización:

Hallar el número dominante de G.

Problema de Decisión:

Ver si existe un conjunto dominanate de tamaño k.

4.2 Demostrar que es NP-Hard

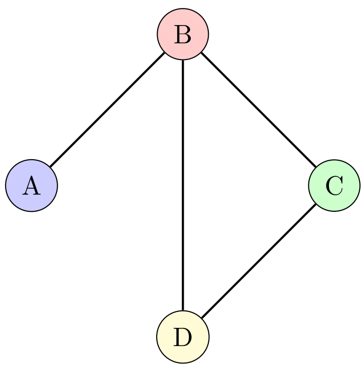
Reducir `Cobertura de vértices` a `Conjunto Dominante`:

La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo no dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

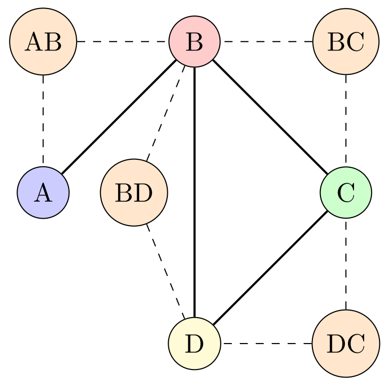
- $V' = V \cup \{uv| < u, v >\in E\}$
- $E' = E \cup \{< uv, u >, < uv, v > \mid < u, v >\in E\}$

Este es la entrada al problema de Conjunto Dominante. A continuación se muestra un ejemplo de ambos grafos.

$G = (V, E)$



$G' = (V', E')$



Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $\iff$ existe un conjunto dominante en G' de tamaño .

- $\Leftarrow$ Sea S' un conjunto dominante de G' de tamaño k, si $\exists x \in S'$ tal que $x \notin V$, entonces es de la forma uv. Como x solo es adyacente a u y a v, significa que x solo abarcaba a los vértices u, v y x. Por tanto, al sustituir en S', x por u o v, como los tres vértices forman un triángulo, se siguen abarcando los mismos vértices que se abarcaban inicialmente. Esto significa que es posible obtener un conjunto dominante S' de tamaño k formado solamente por vértices v tal que $v \in V$. Dado el nuevo conjunto dominante S', como los vértices de la forma $uv \notin S'$ y $\forall x$ tal que $x \notin S'$ se cumple que x es adyacente a al menos un vértice de S', entonces por cada vértice de la forma uv, se cumple que $u \in S'$ o $v \in S'$, ya que de no pertenecer ninguno de los dos a S', no existiría forma de abarcar el vértice uv, ya que este solo es adyacente a esos dos vértices. Por tanto S es una cobertura de vértices de G de tamaño k.
- $\Rightarrow$ Sea S una cobertura de vértices de tamaño k de G, entonces $\forall < u, v >\in E$ se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Por tanto, todos los vértices que pertenecen a V y a V' estarán abarcados en G'. Como los vértices $x \in V'$ de la forma uv son adyacentes a u y a v, y se cumple que $u \in S$ o $v \in S$, estos vértices x también están siendo abarcados en G', por lo que S es un conjunto dominante de G' de tamaño k.

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto dominante de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto dominante en G de tamaño k, con $k \geq 0$.

- $\Leftarrow$ Se cumple por Principio del Buen Orden.
- $\Rightarrow$ Si existe un conjunto dominante de tamaño mínimo l, al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que es un conjunto dominante.

5 Clique de tamaño máximo

5.1 Definición del problema

Un clique es un subgrafo completo dentro de un grafo. Formalmente, un clique en un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto de vértices $C \subseteq V$, tal que todos los pares de vértices en C están conectados directamente por una arista. En otras palabras, todos los vértices del clique están mutuamente conectados.

Problema de Optimización:

Hallar el clique de mayor tamaño en un grafo.

5.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir `Clique de tamaño` k a `Máximo clique`:

La entrada del problema Clique de tamaño k es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo no dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

- $V' = V$
- $E' = E$

Este es la entrada al problema de Máximo clique.

Correctitud

Existe un clique de tamaño en G de tamaño $k \iff$ existe clique máximo en G'.

- $\Leftarrow$ Sea S el conjunto de vértices que forman el clique máximo de longitud q en G'. Si $q \geq k$, entonces al quitar $q - k$ vértices cualesquieras de S, como entre todos los vértices restantes existían aristas, los vértices restantes forman un clique de tamaño k en G. Si $q < k$, entonces no existe un clique de tamaño k en G.
- $\Rightarrow$

6 Número Domatic

6.1 Definición del problema

El número de domatic de un grafo G, denotado como $domatic(G)$, es el número máximo k tal que los vértices de G pueden dividirse en k conjuntos disjuntos $D_1, D_2, \ldots, D_k$ donde cada D_i es dominante.

Hallar el número de Domatic de un grafo..

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es demostrar que el número domático de G es k.

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es demostrar que el número domático de G es $\geq k$.

6.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir `3-SAT` a `Número Domatic`:

Sea $\phi : C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots C_m$ una instancia de 3-SAT con n variables $x_1, \ldots, x_n$. Creemos un grafo $G = (V, E)$ tal que por cada cláusula $C_i \in \{C_1, \ldots, C_m\}$ exista un vértice vc_i, y por cada variable $x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ existan tres vértices $a_j, b_j,$ y c_j. Estos tres vértices $a_j, b_j,$ y c_j forman un triángulo.

El vértice a_j corresponde al literal positivo x_j y el vértice b_j al literal negativo $\bar{x}_j$. Hay una arista entre los vértices vc_i y a_j si y solo si x_j aparece en la cláusula C_i. De igual forma, hay una arista entre vc_i y b_j si y solo si $\bar{x}_j$ aparece en la cláusula C_i. Además, hay un vértice r que tiene un camino $[r, s_i, vc_i]$ por cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. También creamos una arista de r a a_j y b_j por cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

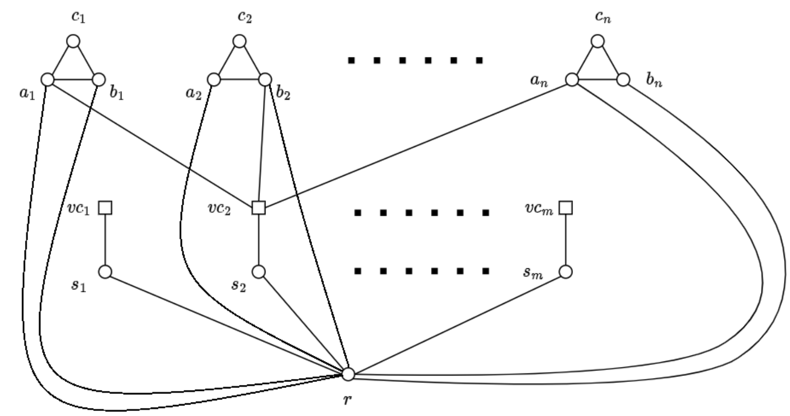


Figure 2: Ejemplo de G

Este es la entrada de Número Domatic..
Correctitud
ϕ es satisfacible $\iff$ G tiene número domático de al menos 3.

- $\Leftarrow$ Si el grafo G tiene número domático al menos 3, este número no puedo ser mayor que 3, ya que el grado de c_i es 2, por lo que los c_i solo puede ser dominado por tres conjuntos como máximo. Sean $V_1, V_2, V3 \subseteq V$ una partición de los vértices de V tal que cada conjunto de vértices es un conjunto dominante. Sin pérdida de generalidad, asumamos que que $r \in V_1$. Entonces hay dos posibilidades:

  (1) $vc_i \in V_2$ and $s_i \in V_3$

  (2) $vc_i \in V_3$ and $s_i \in V_2$

  En caso contrario, s_i no puede ser dominado por uno de los conjuntos V_2 o V_3, ya que s_i solo es adyacente a r y a vc_i. Sin pérdida de generalidad, analicemos la posibilidad 1. vc_i debe ser dominado por algún vértice en V_1. Por lo tanto, al menos uno de los a_j/b_j que son adyacentes a vc_i debe estar en V_1. Notemos que para cualquier j, a_j y b_j no pueden estar en V_1 a la vez, pues ser así uno de los dos no podría ser dominado por V_2 o V_1. Por tanto, $V_1 \cap \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ es una asignación válida de variables que satisface ϕ.

- $\Rightarrow$ Si ϕ es satisfacible, sin pérdida de generalidad, digamos que las variables que toman valor True son $x_1, \ldots, x_k$ y las restantes $x_{k+1}, \ldots, x_n$ son False. Demostremos que G tiene número domático 3. El conjunto de vértices V puede ser particionado en tres conjuntos $V_1 = \{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\} \cup \{r\}$, $V_2 = \{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, vc_1, \ldots, vc_m\}$, y $V_3 = \{c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_m\}$. Cada uno de estos conjuntos de vértices es un conjunto dominante del grafo G.