第二章 可测映射

2.1 定义及基本性质

- 在本节中, 我们将会
  - 定义可测映射, 可测函数
  - 给出判断一个数值函数是否可测的方法
  - 给出可测函数的性质
  - 定义示性函数和简单函数, 并用简单函数逼近任一可测函数
- 定义
  - 设(Ω, F)和$(E, \mathscr{E})$是两个可测空间. $f: \Omega \to E$, 如果对一切$A \in \mathscr{E}$有$f^{-1}(A) \in F$, 则称f为F可测映射. 记$f^{-1}(\mathscr{E}) = \{f^{-1}(A) | A \in \mathscr{E}\}$. 则$f$为F可测映射 $\iff f^{-1}(\mathscr{E}) \subset F$
  - 令$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. $B(\bar{\mathfrak{R}})$为$\bar{\mathfrak{R}}$上的Borel σ代数.
  - 令(Ω, F)为一可测空间. $f: \Omega \to \bar{\mathfrak{R}}$, 若$f^{-1}(\bar{\mathfrak{R}}) \subset F$, 则称f为**数值可测函数**, 或**Borel可测函数**, 简称**可测函数**. $f: \Omega \to \bar{\mathfrak{R}}$, 若$f^{-1}(\mathfrak{R}) \subset F$, 则称f为**实值可测函数**
- **命题**: 设$(\Omega, \mathscr{F})$和$(E, \mathscr{E})$是两个可测空间, $C \subset \mathscr{E}$, 满足$\sigma(C) = \mathscr{E}$. 若$f^{-1}(C) \subset F$, 则f可测.
- **定理**2.1.4 设f是$(\Omega, \mathscr{F})$上的一个数值函数, $[f < a] := \{\omega \in \Omega | f(\omega) < a\}$, 则下列条件等价:
  - f可测
  - $\forall a \in \mathfrak{R}, [f < a] \in \mathscr{F}$
  - $\forall a \in \mathfrak{R}, [f > a] \in \mathscr{F}$
  - $\forall a \in \mathfrak{R}, [f \leq a] \in \mathscr{F}$
  - $\forall a \in \mathfrak{R}, [f \geq a] \in \mathscr{F}$
- **命题**2.1.5 $(\Omega, \mathscr{F})$上实值可测全体构成实数域上的向量空间, 即$\forall a \in \mathfrak{R}$, 若$f, g$可测, 则有
  - $a \cdot f$可测
  - $f + g$可测
- **命题**2.1.6 设$f, g, \{f_n\}_{n \geq 1}$都是$(\Omega, \mathscr{F})$上的(数值)可测函数, 则
  - $f \cdot g$可测
  - $f + g$可测

- $\frac{f}{g}$可测
- $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$, $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\sup\limits_{n\geq 1}\inf\limits_{k\geq n} f_k$, $\inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n} f_k$可测
- $[f=g]$, $[f\leq g]$为可测集

- **定义** 2.1.7
  - **示性函数**: 给定$A\subset\Omega$, 令$1_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$, 称为$1_A$为示性函数. 若$A\in\mathscr{F}$, 则$1_A$可测.
  - **简单函数**: 若f只取有限多个值, 则称f为简单函数. 设f为一简单函数, 其值域为$\{a_1,\ldots,a_n\}$. 令$A_i=[f=a_i]=f^{-1}(\{a_i\}), i=1,\ldots,n$, 则$f=\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. f可测当且仅当$A_i\in\mathscr{F}, i=1,\ldots,n$

- **定理** 2.1.8 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间, f为一(数值)可测函数.
  - 存在可测简单函数序列$\{f_n\}_{n\geq 1}$, 使得$\forall n\geq 1, |f_n|\leq|f|$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f, \forall\omega\in\Omega$
  - 若f非负, 则存在可测简单函数序列$\{f_n\}_{n\geq 1}$, 使得$f_n\uparrow f$

- **定义** 2.1.10 设$(E,\mathscr{E})$为一可测空间, $\mathscr{H}$为一族Ω到E的映射构成的集合, 令$\mathscr{G}=\sigma\Big(\cup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(\mathscr{E})\Big)$, 则$\mathscr{G}$为使$\mathscr{H}$中所有元素可测的最小$\sigma$代数, 称$\mathscr{G}$为$\mathscr{H}$在$\Omega$上生成的$\sigma$代数. 特别的, 当$\mathscr{H}=\{f\}$, 则$\mathscr{G}=f^{-1}(\mathscr{E})$, 通常记作$\sigma(f)$.

- **定理** 2.1.11 设$f:\Omega\to(E,\mathscr{E})$为一映射, $\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{E})$, 则数值函数$\phi:(\Omega,\sigma(f))\to(\bar{\mathfrak{R}},B(\bar{\mathfrak{R}}))$可测 $\iff$ 存在$(E,\mathscr{E})$上的可测函数h, 使得$\phi=h\circ f$

$$\begin{tikzcd}
\Big(\Omega,\sigma(f)\Big) \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "\phi"'] & & (E,\epsilon) \arrow[dl, bend left, "h"] \\
& \Big(\bar{\mathfrak{R}},B(\bar{\mathfrak{R}})\Big) &
\end{tikzcd}$$

- 注记
  - 可测映射是对两个任意抽象可测空间, 而(数值/Borel)可测函数则必须是映射到数值可测空间$\Big(\bar{\mathfrak{R}},B(\bar{\mathfrak{R}})\Big)$上.

2.2 单调类定理(函数形式)

- **定理** 2.2.1 设C为Ω上一π类, $\mathscr{H}$为Ω上的一些实值函数构成的线形空间. 如果他们满足下列条件:
  - $1 \in \mathscr{H}$
  - $f_n \in \mathscr{H}(n \geq 1), 0 \leq f_n \uparrow f$且$f$有限, 则$f \in \mathscr{H}$
  - $\forall A \in C, 1_A \in \mathscr{H}$

  则$\mathscr{H}$包含Ω上的所有$\sigma(C)$可测实值函数.

2.3 可测函数序列的几种收敛形式

- 在本节中, 我们将会
  - 定义可测函数序列的几种收敛形式
  - 给出这几种收敛形式的等价表达
  - 给出这几种收敛形式之间的关系
- **定义** 2.3.1 设$\{f_n\}_{n\geq 1}, f$均为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的实值可测函数
  - 如果存在一零测集$N \in \mathscr{F}, \mu(F) = 0$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \forall \omega \in N^c$, 则称$\{f_n\}_{n\geq 1}$**几乎处处收敛于**$f$, 记作$f \xrightarrow{a.e.} f$或$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \ \ a.e.$
  - 若对$\forall \epsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(\Big[|f_n - f| > \epsilon\Big]\Big) = 0$, 则称$\{f_n\}_{n\geq 1}$**依测度收敛到**$f$, 记作$f \xrightarrow{\mu} f$
  - 如果对$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathscr{F} \ s.t. \ \mu(A) < \epsilon$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\omega\in A^c} |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0$, 则称$f_n$**几乎一致收敛**到$f$, 记作$f_n \xrightarrow{a.un.} f$或$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \ \ a.un.$
- **定理** 2.3.4 设$\{f_n\}$和f均为实值可测函数
  - $f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff \forall \epsilon > 0$, 有$\mu\Big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=n}^{\infty} \Big[|f_i - f| \geq \epsilon\Big]\Big) = 0$
  - $f_n \xrightarrow{a.un.} f \iff \forall \epsilon > 0$, 有$\lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(\cup_{i=n}^{\infty} \Big[|f_i - f| \geq \epsilon\Big]\Big) = 0$
  - $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff$ 对$\{f_n\}$的任意子列$\{f_{n'}\}$, 存在其子列$\{f_{n'_k}\}$, 使得$f_{n'_k} \xrightarrow{a.un.} f, (k \to \infty)$.
- **定理** 2.3.5
  - $f_n \xrightarrow{a.un.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.e.} f; f_n \xrightarrow{a.un.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
  - 若μ为有限测度, 则有$f_n \xrightarrow{a.un.} f \iff f_n \xrightarrow{a.e.} f$
  - 若$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列$\{f_{n_k}\}$, 使得$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$

- 注记
    - 三种收敛形式都是定义在测度空间上
    - 定理2.3.4用集合语言将三种收敛重新描述了一遍
    - 回忆数学分析中函数序列$\{f_n\}_{n\geq 1}$的**点点收敛**和**一致收敛**的定义, 一致收敛是比点点收敛更强的收敛形式
    - 定理2.3.5(2)中$\Leftarrow$部分称为**Egorov定理**
    - 由于概率测度空间为一有限测度空间, 所以几乎处处收敛于和几乎一致收敛等价.