

第一章 集类与测度

1.1 集合运算与集类

- Ω : 给定的非空集合(全空间)
- 集类: 以 Ω 的某些子集为元素的集合称为(Ω 上的)集类
- 单调列: 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为一集合序列, 若 $\forall n \geq 1$, 有 $A_n \subset A_{n+1}$ (相应地, $A_n \supset A_{n+1}$), 则称 (A_n) 单调增(相应地, 单调减). 令 $A = \cup_n A_n$ 或 $A = \cap_n A_n$, 称 A 为 (A_n) 的极限, 记为 $A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A$
- 集合的极限: 对一般的集列 (A_n) , 令

- 上极限: $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$
- 下极限: $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$

- 易证:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \{\omega \mid \forall n \geq 1, \exists k(n) \geq n, \text{ s.t. } \omega \in A_{k(n)}\}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \{\omega \mid \exists n \geq 1, \forall k \geq n, \text{ s.t. } \omega \in A_k\}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \subset \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

上述关于集合极限的等价定义比原始定义更易理解.

- 若 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$, 则称集列 (A_n) 的极限存在, 用 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 表示.
- 例子: $A_1 = \{0\}, A_2 = \{2\}, A_n = \{(-1)^n\} (n \geq 3)$, 则 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \{1, -1\}, \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \emptyset$
- 例子: $A_1 = \{1\}, A_2 = [2, 3], A_n = [-1, \frac{1}{n}] (n \geq 3)$, 则 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = [-1, 0], \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = [-1, 0]$

- 集合的划分

- 若 (A_n) 两两不相交(即 $A_m \cap A_n = \emptyset, \forall m \neq n$), 则常用 $\sum_n A_n$ 表示 $\cup_n A_n$
- 若 $\sum_n A_n = \Omega$, 则称 (A_n) 为 Ω 的一个划分
- 对任一集列 (A_n) , 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n A_{n-1}^c \cdots A_1^c (n \geq 2)$, 可以证明 (B_n) 两两不相交, 且 $\cup_n B_n = \cup_n A_n$ (此处暂省去证明)

- 令 $C_{\cap f} = \{A \mid A = \cap_{i=1}^n A_i, A_i \in C, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 1\}$, 则

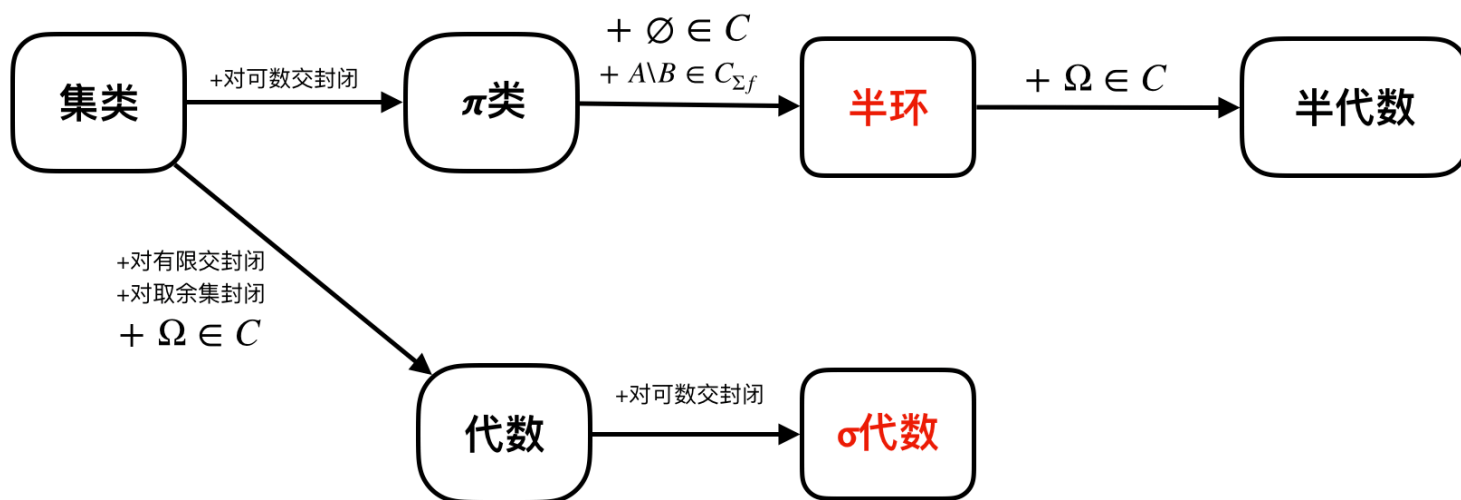
- $C_{\cap f}$ 对有限交封闭
- $C_{\cap f}$ 是包含 C 且对有限交封闭的最小集类

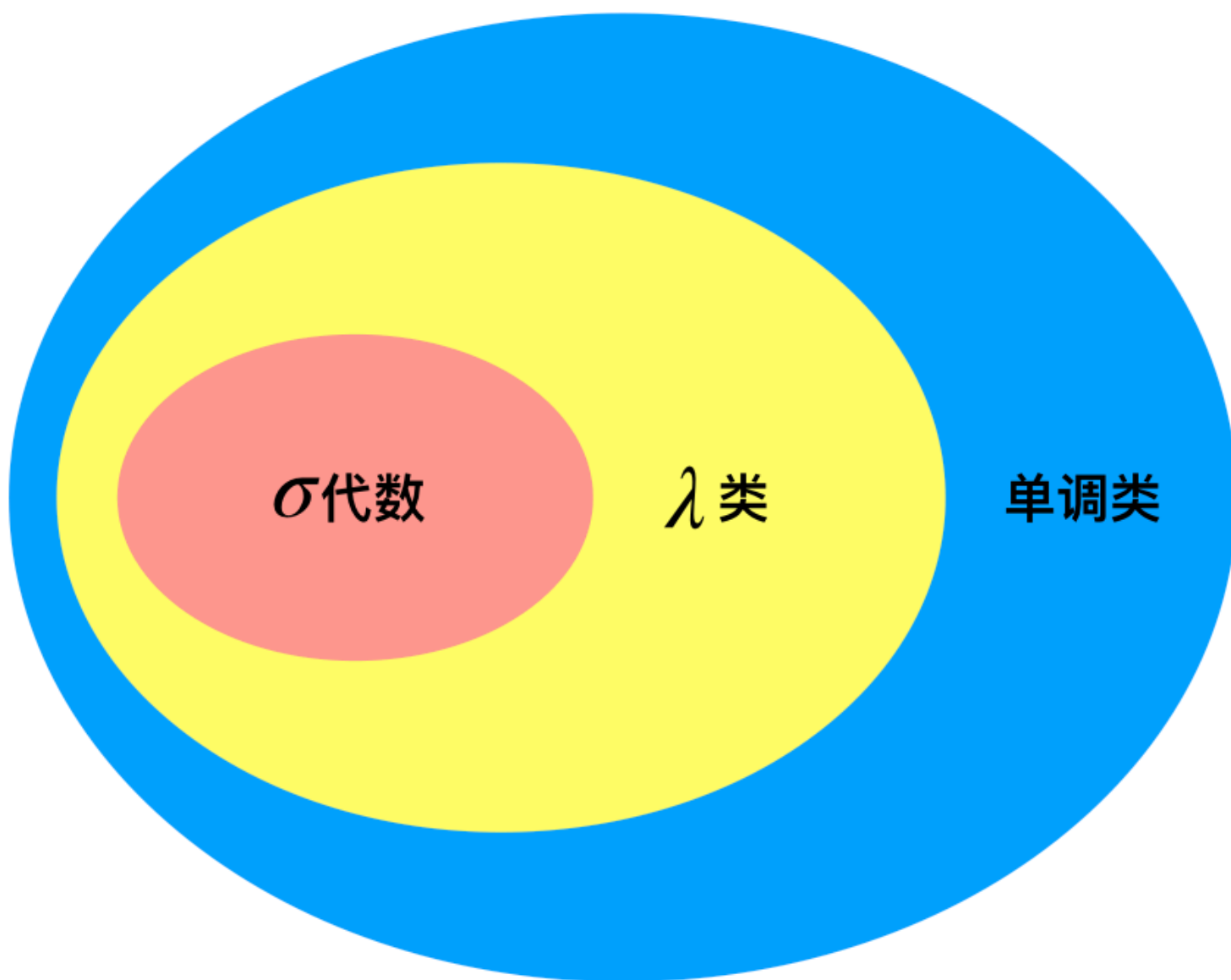
- 类似地, 可以定义:

- $C_{\cup f}$: 用有限并封闭 C 所得的集类
- $C_{\Sigma f}$: 用有限不交并封闭 C 所得的集类
- C_δ : 用可列交封闭 C 所得的集类
- C_σ : 用可列并封闭 C 所得的集类
- $C_{\Sigma\sigma}$: 用可列不交并封闭 C 所得的集类

- 常用集类

- π 类: 对有限交封闭
- 半环: $\emptyset \in C$, 对有限交封闭, $A, B \in C \Rightarrow A \setminus B \in C_{\Sigma f}$
- 半代数
- 代数(或域): $\Omega \in C, \emptyset \in C$, 对有限交封闭, 对取余集封闭 (由此推知, 对有限并和差运算也封闭)
- σ 代数: $\Omega \in C, \emptyset \in C$, 对可列交封闭, 对取余集封闭 (由此推知, 对可列并和差运算也封闭)
- 单调类: 对单调序列极限封闭
- λ 类: $\Omega \in C$, 对差运算封闭, 对单调增序列极限封闭 (由此推知, 对取余集运算也封闭, 故 $\emptyset \in C$)
- 易证: σ 代数为 λ 类, λ 类为单调类



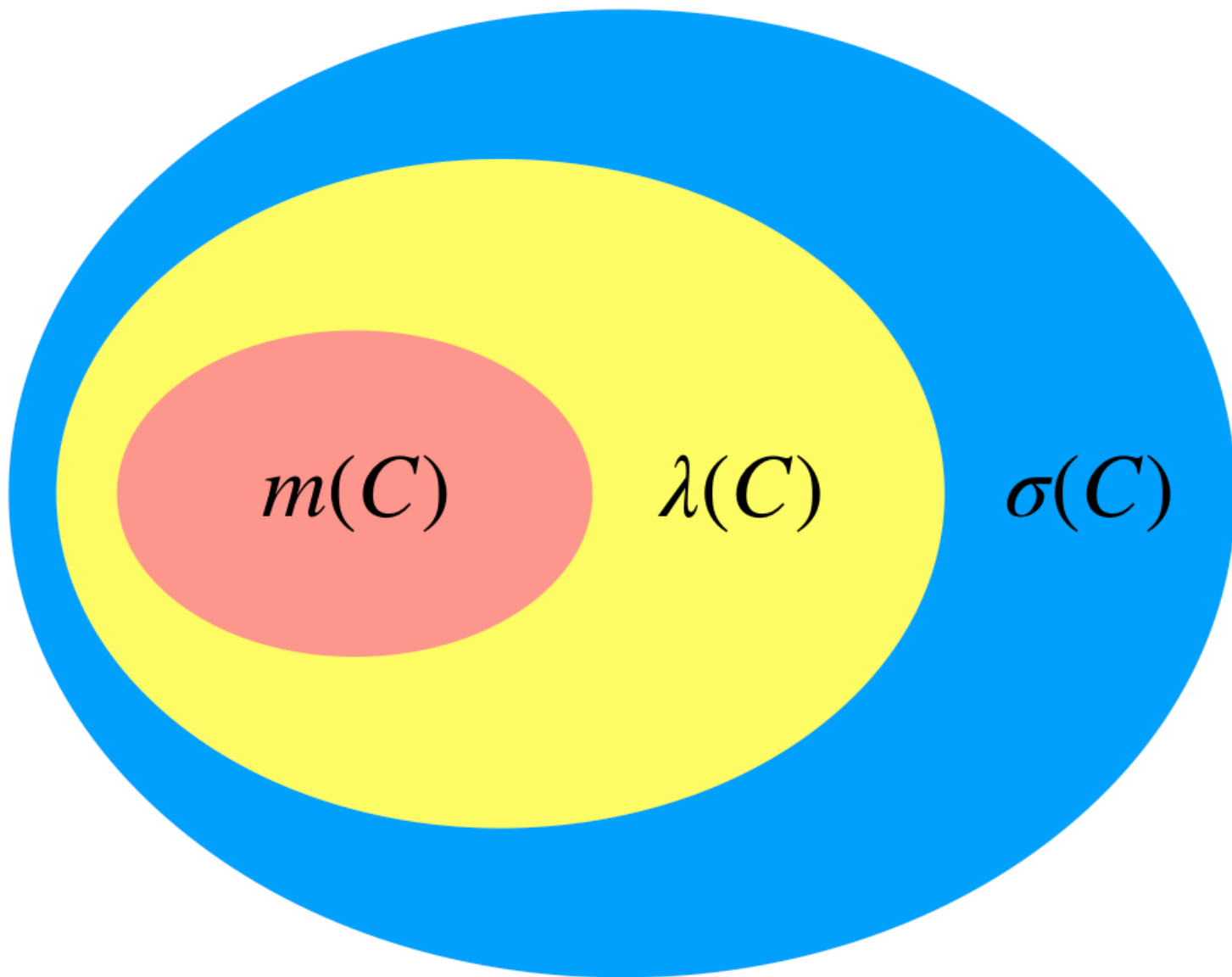


- 评论
 - 上这门课的目的, 是想对概率论有更深入的认识. 第一节课下课问了下老师教学计划, 结果发现这门课可以改叫《测度论》了.
 - 集合作为现代数学最基本的概念之一, 真是无处不在啊!
 - [这里](#)有一个关于集合极限很好的解释. 从直观上解释了我们为什么要引入集合的上下极限的概念?
 - 有限的概念我们在日常生活中接触很多, 但可数的概念就需要引入极限, 从有限到可数是一个很大的跨度.

1.2 单调类定理

- 准备
 - 设 $\{C_i | i \in I\}$ 为 Ω 上的一族集类, 若对每个集类 C_i 对某种运算封闭, 则 $\cap_i C_i$ 也对这种运算封闭
 - 令 $\sigma(C) = \cap_{g \supset C, g \text{ 是 } \sigma \text{ 代数}} g$. 易证: $\sigma(C)$ 是包含 C 的最小 σ 代数

- 同理, 可以定义 $\bar{m}(C)$ (包含 C 的最小单调类)和 $\lambda(C)$ (包含 C 的最小 λ 类)
- 易证: 恒有 $m(C) \subset \lambda(C) \subset \sigma(C)$



- 引理
 - 若 C 同时为代数和单调类, 则 C 为 σ 代数
 - 若 C 同时为 λ 类和 π 类, 则 C 为 σ 代数
- 单调类定理: 设 C 为一集类
 - 若 C 为代数, 则 $m(C) = \sigma(C)$
 - 若 C 为 π 类, 则 $\lambda(C) = \sigma(C)$
- 定理1.2.3: 设 C 为一集类

- $m(C) = \sigma(C) \iff A \in C \Rightarrow A^c \in m(C); A, B \in C \Rightarrow A \cap B \in m(C)$
- $\lambda(C) = \sigma(C) \iff A, B \in C \Rightarrow A \cap B \in \lambda(C)$
- 定理1.2.5: 设 C 为一集类, 若它满足下列条件之一, 则有 $m(C) = \sigma(C)$:
 - $A, B \in C \Rightarrow A \cap B \in C; A \in C \Rightarrow A^c \in C_\delta$
 - $A, B \in C \Rightarrow A \cup B \in C; A \in C \Rightarrow A^c \in C_\sigma$
- 例: 用 F 表示 \mathfrak{R} 中闭集全体, 用 G 表示 \mathfrak{R} 中开集全体, 有
 - $\sigma(F) = \sigma(G)$ (通常记作 $B(\mathfrak{R})$, \mathfrak{R} 中的Borel σ 代数)
 - $m(G) = \sigma(G)$

1.3 测度与非负集函数

- 在本节中我们会
 - 定义非负集函数及其性质
 - 定义可测空间, 测度, 测度空间
 - 了解到测度本质上是一个定义在 σ 代数上的非负函数, 且具有单调性, 可减性, 从上连续, 从下连续的性质
- 定义
 - 设 C 为任一包含 \emptyset 集类, 称 $\mu : C \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_+$ 为 C 上的非负集函数.
 - 在下述定义中约定: (1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) μ 满足单调性: $A, B \in C, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
 - 有限可加性: $A_i \in C (i \in [n]), \sum_{i=1}^n A_i \in C \Rightarrow \mu(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
 - σ 可加性: $A_i \in C (i \geq 1), \sum_{i=1}^\infty A_i \in C \Rightarrow \mu(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$
 - 半 σ 可加性: $A \in C, A_i \in C (i \geq 1), A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$
 - 从下连续: $A_n \in C, A_n \uparrow A, A \in C \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
 - 从上连续: $A_n \in C, A_n \downarrow A, A \in C \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
 - 在空集中连续: $A_n \in C, A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\emptyset) = 0$
 - 显然: 从上连续 \Rightarrow 在空集中连续
- 定义
 - 我们称 (Ω, F) 为可测空间如果 F 是 Ω 上的 σ 代数
 - 我们称 $\mu : F \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_+ = [0, +\infty]$ 为 (Ω, F) 上的测度, 如果(1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) μ 满足可列可加性或 σ 可加性
 - 设 μ 为可测空间 (Ω, F) 上的测度, 则称 (Ω, F, μ) 为测度空间
 - 若 $\mu(\Omega) < \infty$, 则称 μ 为有限测度; 若 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 μ 为概率测度; 若存在 $A_n \in F, n \geq 1$, 使得

$\cup_n A_n = \Omega$, 且 $\mu(A_n) < \infty, \forall n$, 则称 μ 为 σ 有限测度

- 例子: $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}), \lambda)$, 其中 $B(\mathfrak{R})$ 为 Borel σ 代数, λ 为 Lebesgue 测度,
- 有限测度 ($\mu(\Omega) < \infty$), 概率测度 ($\mu(\Omega) = 1$), σ 有限测度
- 若 $A \in F, \mu(A) = 0$, 则称 A 是 μ 零测集
- 如果任何 μ 零测集的子集都属于 F , 则称 F 关于 μ 是完备的, 称是 (Ω, F, μ) 完备测度空间

• 定理: 设 (Ω, F, μ) 为一测度空间, 则 μ 满足

- 单调可减性: $A, B \in F, A \subset B, \mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- 从下连续, 从上连续

• 评论

- 非负集函数的定义非常重要, 在后面的章节会反复遇到, 需牢记且理解.

1.4 外测度与测度的扩张

• 在本节中我们会

- 研究如何把一半环 C 上的一个 σ 可加非负集函数扩张称为 σ 代数 $\sigma(C)$ 上的测度
- 定义外测度

• 定义

- 令 $A(\Omega)$ 表示 Ω 中所有子集 (包含 \emptyset) 构成的集类
- 设 $\mu^* : A(\Omega) \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_+$ 为 $A(\Omega)$ 上的一非负集函数, 我们称 μ^* 为 Ω 上的外测度, 如果 (1) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (单调性) (2) $A_n \subset \Omega (n \geq 1) \Rightarrow \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (次 σ 可加性)
- 注意次 σ 可加性和半 σ 可加性区别. 半 σ 可加性是针对一般的集类, 而次 σ 可加性是定义在 $A(\Omega)$ 上的.

• 定理: 设 μ^* 为 Ω 上的一外测度. 令

$$U = \{A \subset \Omega | \forall D \subset \Omega, \mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)\}$$

则 μ^* 为 Ω 上的一 σ 代数, 且 μ^* 限于 U 为一测度. 我们称 U 中的元素为 μ^* 可测集.

• 命题: 设 C 为 Ω 上一集类, 且 $\emptyset \in C$. 又设 μ 为 C 上的一半 σ 可加非负集函数, 且 $\mu(\emptyset) = 0$. 令

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) | A_n \in C, A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, A \subset \Omega$$

则 μ^* 为 Ω 上的外测度, 且 μ^* 限于 C 与 μ 一致, 我们称 μ^* 为由 μ 引出的外测度.

- **命题(1.4.4):** 设 μ 为半环 C 上的一非负集函数(约定 $\mu(\emptyset) = 0$). 则 μ 是 σ 可加的 $\iff \mu$ 为有限可加且半 σ 可加的
- **引理(1.4.5):** 设 C 为 Ω 上的一集类, 且 $\emptyset \in C$. 又设 μ 为 C 上的一半 σ 可加非负集函数, 且 $\mu(\emptyset) = 0$, μ^* 为 μ 引出的外测度. 则 A 为 μ^* 可测集 $\iff \forall B \in C$, 有 $\mu(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$
- **引理(1.4.6):**
- **Caratheodory测度扩张定理:** 设 C 为 Ω 上的一半环, μ 为 C 上的一 σ 可加非负集函数, 则 μ 可扩张成 $\sigma(C)$ 上的一测度. 若进一步 μ 在 C 上为 σ 有限, 且 $\Omega \in C_\sigma$, 则这一扩张是唯一的, 并且扩张所得的测度在 $\sigma(C)$ 上也是 σ 有限的.

1.5 \mathfrak{R}^n 中的Lebesgue-Stieltjes测度

- 在本节中, 我们将
 - 先在 \mathfrak{R}^n 中, 建立Lebesgue测度
 - 然后在 \mathfrak{R}^n 中, 在Lebesgue测度的基础上, 建立更一般的Lebesgue-Stieltjes测度
- 设 $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{R}^n$. 先做以下约定:
 - 记 $a \leq b$, 如果 $a_i \leq b_i, \forall i \in [n]$. ($a < b$ 类似)
 - 令 $C = \{(a, b] | a \leq b, a, b \in \mathfrak{R}^n\}$
 - 令 $\mu((a, b]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$
- **引理(1.5.1):** C 是 \mathfrak{R}^n 上的半环, μ 是 C 上的 σ 可加非负集函数.
- **定理(1.5.2):** 易证 $\sigma(C) = B(\mathfrak{R}^n)$. 根据测度扩张定理, 可以将 μ 唯一地扩张成为 $B(\mathfrak{R})$ 上的 σ 有限测度, 称之为**Lebesgue测度**
- **定义(1.5.3)**
 - 增函数
 - 设 μ 为 $B(\mathfrak{R}^n)$ 上一 σ 有限测度, 则称 μ 为**Lebesgue-Stieltjes测度**
- **定理(1.5.4):**