第一章 集类与测度

1.1 集合运算与集类

- Ω: 给定的非空集合(全空间)
- **集类**: 以Ω的某些子集为元素的集合称为(Ω上的)集类
- **单调列**: 设$\{A_n, n \geq 1\}$为一集合序列, 若$\forall n \geq 1$, 有$A_n \subset A_{n+1}$(相应地, $A_n \supset A_{n+1}$), 则称(A_n)**单调增**(相应地, **单调减**). 令$A = \cup_n A_n$或$A = \cap_n A_n$, 称A为(A_n)的极限, 记为$A_n \uparrow A$或$A_n \downarrow A$
- **集合的极限**: 对一般的集列(A_n), 令
    - **上极限**: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$
    - **下极限**: $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$
    - 易证:
      $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{\omega \mid \forall\, n \geq 1, \exists\, k(n) \geq n,\ s.t.\ \omega \in A_{k(n)}\}$
      $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{\omega \mid \exists\, n \geq 1, \forall\, k \geq n,\ s.t.\ \omega \in A_k\}$
      $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.
      上述关于集合极限的等价定义比原始定义更易理解.
    - 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 则称集列$(A_n)$的极限存在, 用$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$表示.
    - 例子: $A_1 = \{0\}, A_2 = \{2\}, A_n = \{(-1)^n\}\ (n \geq 3)$, 则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{1, -1\}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \emptyset$
    - 例子: $A_1 = \{1\}, A_2 = [2, 3], A_n = [-1, \frac{1}{n}]\ (n \geq 3)$, 则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [-1, 0]$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [-1, 0]$

- 集合的划分
    - 若(A_n)两两不相交(即$A_m \cap A_n = \emptyset, \forall m \neq n$), 则常用$\sum_n A_n$表示$\cup_n A_n$
    - 若$\sum_n A_n = \Omega$, 则称(A_n)为Ω的一个**划分**
    - 对任一集列(A_n), 令$B_1 = A_1, B_n = A_n A_{n-1}^c \cdots A_1^c\ (n \geq 2)$, 可以证明$(B_n)$两两不相交, 且$\cup_n B_n = \cup_n A_n$ (*此处暂省去证明*)

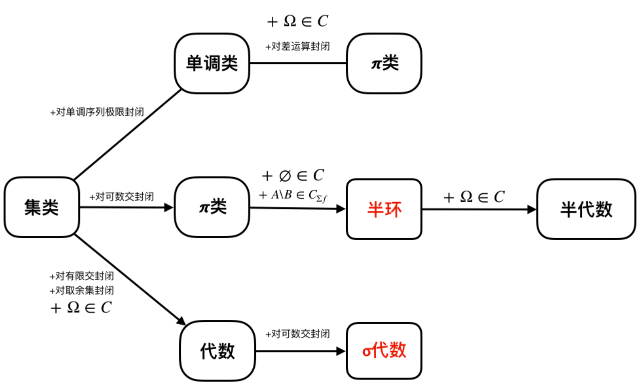
- 令 $C_{\cap f} = \{A | A = \cap_{i=1}^n A_i, A_i \in C,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 1\}$, 则
    - $C_{\cap f}$对有限交封闭
    - $C_{\cap f}$是包含C且对有限交封闭的最小集类

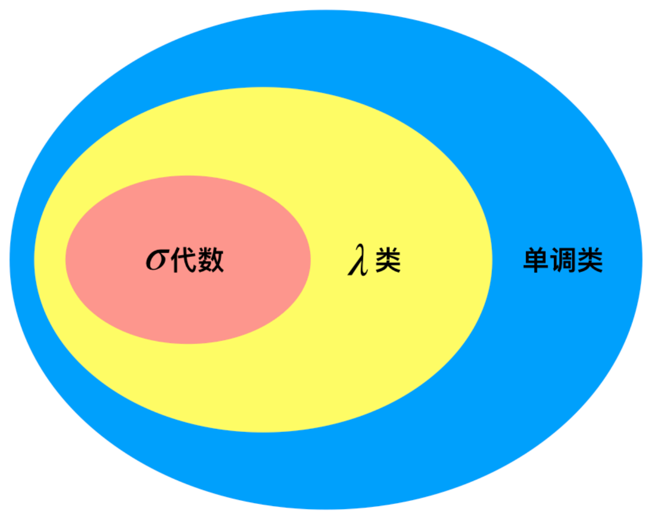
- 类似地, 可以定义:

  - $C_{\cup f}$: 用有限并封闭C所得的集类
  - $C_{\Sigma f}$: 用有限不交并封闭C所得的集类
  - C_{δ} : 用可列交封闭C所得的集类
  - C_{σ} : 用可列并封闭C所得的集类
  - $C_{\Sigma\sigma}$: 用可列不交并封闭C所得的集类

- **常用集类**

  - π**类**: 对有限交封闭
  - **半环**: $\emptyset \in C$, 对有限交封闭, $A, B \in C \Rightarrow A \setminus B \in C_{\Sigma f}$
  - **半代数**
  - **代数**(**或域**): $\Omega \in C, \emptyset \in C$, 对有限交封闭, 对取余集封闭 (由此推知,对有限并和差运算也封闭)
  - σ**代数**: $\Omega \in C, \emptyset \in C$, 对可列交封闭, 对取余集封闭 (由此推知,对可列并和差运算也封闭)
  - **单调类**: 对单调序列极限封闭
  - λ**类**: $\Omega \in C$, 对差运算封闭, 对单调增序列极限封闭(由此推知, 对取余集运算也封闭, 故$\emptyset \in C$)
  - 易证: σ代数为λ类, λ类为单调类

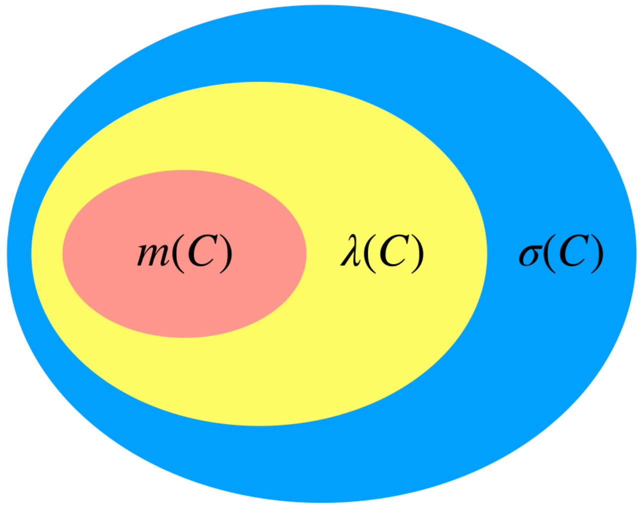




- 注记
  - 上这门课的目的, 是想对概率论有更深的认识. 第一节课下课问了下老师教学计划, 结果发现这门课可以改叫《测度论》了.
  - **集合**作为现代数学最基本的概念之一, 真是无处不在啊!
  - [这里](#)有一个关于集合极限很好的解释. 从直观上解释了我们为什么要引入集合的上下极限的概念?
  - **有限**的概念我们在日常生活中接触很多, 但**可数**的概念就需要引入极限, 从**有限**到**可数**是一个很大的跨度.

1.2 单调类定理

- 准备
  - 设$\{C_i|i \in I\}$为Ω上的**一族集类**, 若对每个集类C_i对某种运算封闭, 则$\cap_i C_i$也对这种运算封闭
  - 令$\sigma(C) = \cap_{g \supset C, g是\sigma代数} g$. 易证: $\sigma(C)$是包含C的最小σ代数
  - 同理, 可以定义$m(c)$(包含C的最小单调类)和$\lambda(C)$(包含C的最小λ类)
  - 易证: 恒有$m(C) \subset \lambda(C) \subset \sigma(C)$



- 引理
  - 若C同时为代数和单调类, 则C为σ代数
  - 若C同时为λ类和π类, 则C为σ代数

- **单调类定理**: 设C为一集类

  - 若C为代数, 则$m(C) = \sigma(C)$
  - 若C为π类, 则$\lambda(C) = \sigma(C)$

- **定理**1.2.3: 设C为一集类

  - $m(C) = \sigma(C) \iff A \in C \Rightarrow A^c \in m(C);\ A, B \in C \Rightarrow A \cap B \in m(C)$
  - $\lambda(C) = \sigma(C) \iff A, B \in C \Rightarrow A \cap B \in \lambda(C)$

- **定理**1.2.5: 设C为一集类, 若它满足下列条件之一, 则有$m(C) = \sigma(C)$:

  - $A, B, \in C \Rightarrow A \cap B \in C;\ A \in C \Rightarrow A^c \in C_\delta$
  - $A, B, \in C \Rightarrow A \cup B \in C;\ A \in C \Rightarrow A^c \in C_\sigma$

- 例: 用F表示$\mathfrak{R}$中闭集全体, 用G表示$\mathfrak{R}$中开集全体, 有

  - $\sigma(F) = \sigma(G)$ (通常记作$B(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R}$中的Borel σ代数)
  - $m(G) = \sigma(G)$

1.3 测度与非负集函数

- 在本节中我们会
  - 定义**非负集函数**及其性质
  - 定义**可测空间**, **测度**, **测度空间**
  - 了解到测度本质上是一个定义在σ代数上的非负函数, 且具有单调性, 可减性, 从上连续, 从下连续的性质
- 定义
  - 设C为任一包含$\emptyset$集类, 称$\mu : C \to \overline{\mathfrak{R}}_+$为$C$上的**非负集函数**.
  - 在下述定义中约定: (1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) μ满足单调性: $A, B \in C,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$
  - **有限可加性**: $A_i \in C\ (i \in [n]),\ \Sigma_{i=1}^n A_i \in C \Rightarrow \mu(\Sigma_{i=1}^n A_i) = \Sigma_{i=1}^n \mu(A_i)$
  - **σ可加性**: $A_i \in C\ (i \ge 1),\ \Sigma_{i=1}^\infty A_i \in C \Rightarrow \mu(\Sigma_{i=1}^\infty A_i) = \Sigma_{i=1}^\infty \mu(A_i)$
  - **半σ可加性**: $A \in C, A_i \in C\ (i \ge 1), A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i \Rightarrow \mu(A) \le \Sigma_{i=1}^\infty \mu(A_i)$
  - **从下连续**: $A_n \in C, A_n \uparrow A, A \in C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
  - **从上连续**: $A_n \in C, A_n \downarrow A, A \in C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
  - **在空集中连续**: $A_n \in C, A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\emptyset) = 0$
  - 显然: 从上连续 $\Rightarrow$ 在空集中连续
- 定义
  - 我们称(Ω, F)为**可测空间**如果F是Ω上的σ代数
  - 我们称$\mu : F \to \overline{\mathfrak{R}}_+ = [0, +\infty]$为$(\Omega, F)$上的**测度**, 如果(1)$\mu(\emptyset) = 0$ (2)μ满足**可列可加性**或**σ可加性**
  - 设μ为可测空间(Ω, F)上的测度, 则称(Ω, F, μ)为**测度空间**
  - 若$\mu(\Omega) < \infty$, 则称μ为**有限测度**; 若$\mu(\Omega) = 1$, 则称μ为**概率测度**; 若存在$A_n \in F, n \ge 1$, 使得$\cup_n A_n = \Omega$, 且$\mu(A_n) < \infty, \forall n$, 则称$\mu$为**$\sigma$有限测度**
  - 例子: $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}), \lambda)$, 其中$B(\mathfrak{R})$为Borel σ代数, λ为*Lebsgue*测度,
  - 有限测度($\mu(\Omega) < \infty$), 概率测度($\mu(\Omega) = 1$), σ有限测度
  - 若$A \in F, \mu(A) = 0$, 则称A是**μ零测集**
  - 如果任何μ零测集的子集都属于F, 则称F关于μ是完备的, 称是(Ω, F, μ)**完备测度空间**
- 定理: 设(Ω, F, μ)为一测度空间, 则μ满足
  - 单调可减性: $A, B \in F, A \subset B, \mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$
  - 从下连续, 从上连续
- 注记

- 非负集函数的定义非常重要, 在后面的章节会反复遇到, 需牢记且理解.

1.4 外测度与测度的扩张

- 在本节中我们会
    - 研究如何把一半环C上的一个σ可加非负集函数扩张称为σ代数$\sigma(C)$上的测度
    - 定义**外测度**
- **定义**
    - 令$A(\Omega)$表示Ω中所有子集(包含$\emptyset$)构成的集类
    - 设$\mu^* : A(\Omega) \to \overline{\mathfrak{R}}_+$为$A(\Omega)$上的一非负集函数, 我们称$\mu^*$为$\Omega$上的**外测度**, 如果(1) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (单调性) (2) $A_n \subset \Omega(n \geq 1) \Rightarrow \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (次σ可加性)
    - 注意次σ可加性和半σ可加性区别. 半σ可加性是针对一般的集类, 而次σ可加性是定义在$A(\Omega)$上的.
- **定理**: 设μ^*为Ω上的一外测度. 令

$$U = \{A \subset \Omega | \forall D \subset \Omega, \mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)\}$$

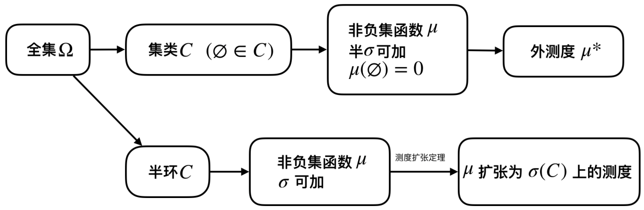
  则μ^*为Ω上的一σ代数, 且μ^*限于U为一测度. 我们称U中的元素为μ^***可测集**.

- **命题**: 设C为Ω上一集类, 且$\emptyset \in C$. 又设μ为C上的一半σ可加非负集函数, 且$\mu(\emptyset) = 0$. 令

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) | A_n \in C, A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, A \subset \Omega$$

  则μ^*为Ω上的外测度, 且μ^*限于C与μ一致, 我们称μ^*为由μ**引出的外测度**.

- **命题**(1.4.4): 设μ为半环C上的一非负集函数(约定$\mu(\emptyset) = 0$). 则μ是σ可加的 $\iff$ μ为有限可加且半σ可加的
- **引理**(1.4.5): 设C为Ω上的一集类, 且$\emptyset \in C$. 又设μ为C上的一半σ可加非负集函数, 且$\mu(\emptyset = 0)$, μ^*为μ引出的外测度. 则 A为μ^*可测集 $\iff$ $\forall B \in C$, 有 $\mu(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$
- **引理**(1.4.6):
- **Caratheodory测度扩张定理**: 设C为Ω上的一半环, μ为C上的一σ可加非负集函数, 则μ可扩张成$\sigma(C)$上的一测度. 若进一步μ在C上为σ有限, 且$\Omega \in C_\sigma$, 则这一扩张是唯一的, 并且扩张所得的测度在$\sigma(C)$上也是σ有限的.



1.5 $\mathfrak{R}^n$中的Lebesgue-Stieltjes测度

- 在本节中, 我们将
  - 先在$\mathfrak{R}^n$中, 建立Lebesgue测度
  - 然后在$\mathfrak{R}^n$中, 在Lebesgue测度的基础上, 建立更一般的Lebesgue-Stieltjes测度
- 设$a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{R}^n$. 先做以下约定:
  - 记$a \le b$, 如果$a_i \le b_i, \forall i \in [n]$. ($a < b$类似)
  - 令$C = \{(a, b] | a \le b, a, b \in \mathfrak{R}^n\}$
  - 令$\mu\Big((a, b]\Big) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$
- **引理**(1.5.1): C是$\mathfrak{R}^n$上的半环, μ是C上的σ可加非负集函数.
- **定理**(1.5.2): 易证$\sigma(C) = B(\mathfrak{R}^n)$. 根据测度扩张定理, 可以将$\mu$唯一地扩张成为$B(\mathfrak{R})$上的$\sigma$有限测度, 称之为**Lebesgue测度**
- **定义**(1.5.3)
  - 增函数
  - 设μ为$B(\mathfrak{R}^n)$上一σ有限测度, 则称μ为**Lebesgue-Stieltjes测度**
- **定理**(1.5.4):