

重审宇宙学中的光速变化：来自弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克度规的 启示

Seokcheon Lee*

*Department of Physics, Institute of Basic Science,
Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea*

(Received)

Abstract

在弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克度规中，光速可变（VSL）现象反映了超曲面上时钟速率的变化，这种变化由时移函数描述。该变化并非动力学场的演化，而是坐标选择的必然结果——由于外尔公设，宇宙时间与共动观测者的固有时保持一致。通过包含 \tilde{c} 的作用量原理，我们推导出 \tilde{c} 本身不具有动力学特性，而是对尺度因子 $a(t)$ 施加约束条件，表明其并非独立的自由度。这一认识将VSL概念重新阐释为广义相对论中规范自由度的表现形式，物理定律在光滑坐标变换下保持不变的特性在此得以体现。此处“规范”特指时间坐标的选择自由（例如设定时移函数 $N(t) \neq 1$ ），它决定了光速在宇宙学方程中的表现形式。将 \tilde{c} 理解为坐标依赖量，为解释宇宙学时间及观测矛盾（如哈勃张力）提供了新视角，而无需引入新的物理场。这种重新定义在相对论框架内开辟了一条诠释宇宙膨胀的新理论路径。

*Electronic address: skylee@skku.edu

Contents

I. 引言	1
II. 现有变光速理论概述	2
III. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 度规	4
IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量	7
V. 爱因斯坦场方程	8
A. 里奇张量与爱因斯坦张量	8
B. 能量动量张量	9
C. 弗里德曼方程	10
VI. 光速运动方程	11
VII. 结论与总结	13
Acknowledgments	14
References	14

I. 引言

最小扩展变光速 (meVSL) 模型是在遵循宇宙学原理 (CP) 的Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) 度规框架内建立的, 该原理要求宇宙在大尺度上保持空间均匀性和各向同性[1–3]。这一原理要求支配宇宙的物理定律不得引入优先方向或位置。维持这些对称性的关键要素是绝热性的守恒, 因为宇宙介质中的任何净能流都会建立一个优先参考系, 从而破坏各向同性[4]。

在meVSL模型中, 光速随宇宙时间的演化必须伴随其他基本物理常数的相应变化, 以确保理论框架的内在一致性。特别是普朗克常数必须与变化的光速协调演化, 以保持解释绝热膨胀所需的量子力学和热力学基本关系[4]。更广泛地说, 必须诱导包括电磁相互作用和相对论动力学在内的其他物理量的宇宙学演化, 以维持与所有局部验证物理定律 (如狭义相对论和麦克斯韦方程组) 的兼容性[1–4]。

与传统VSL理论不同（后者通常需要显式机制来驱动 \tilde{c} 作为宇宙尺度因子 $a(t)$ 的函数变化），meVSL模型不需要这种特设性规定。相反，它引入了宇宙时间膨胀（CTD）的广义条件，使得时间依赖的光速成为自然结果。在meVSL模型中，时移函数决定了超曲面间时钟速率的差异，反映了光速的时间依赖性变化[5]。meVSL框架并非修改FLRW度规本身，而是允许 \tilde{c} 的变化从宇宙时间的底层结构中动态涌现，而无需强加特定的函数形式 $\tilde{c}(a)$ 。

这一特征使meVSL区别于传统VSL模型——后者往往假设或需要驱动光速演化的显式机制[6–80]。通过将基本常数的变化嵌入宇宙膨胀和时间膨胀的更广泛背景中，meVSL模型为探索膨胀宇宙中非固定光速的影响提供了更普适且自洽的方法。

本文结构如下：第2节简要概述现有VSL模型；第3节介绍meVSL模型背景下的FLRW度规，作为我们分析的基础；第4节讨论Einstein-Hilbert（EH）作用量，提供推导场方程的理论框架；第5节推导Einstein场方程（EFEs），包括Ricci张量、Einstein张量、能量-动量张量和Friedmann方程；第6节专门研究光速的运动方程，探讨其在meVSL框架下的含义；最后在第6节总结我们的发现并讨论其更广泛的意义。

II. 现有变光速理论概述

过去数十年间，学界提出了多种实现变光速（VSL）的理论框架，主要可分为以下几类：

- **洛伦兹对称性的硬性破缺**：这类模型通过引入时空中的优先参考系或绝对结构，显式违反洛伦兹不变性[24–30]。虽然能直接实现光速 c 的变化，但常面临严重的理论困境，例如与相对性原理的冲突以及构建自洽量子场论的困难。
- **双度量变光速理论**：此类模型引入两个独立度规：一个描述引力现象，另一个描述光子传播[31–36]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为引力子度规， $\hat{g}_{\mu\nu}$ 为物质度规， ϕ 为标量场。尽管保留了部分引力结构，双度量理论通常会引入额外的自由度，导致动力学复杂化，并引发稳定性和因果性等问题。

- **色依赖光速理论**：该框架允许光速随光子频率变化，从而建立真空色散关系[37–47]。然而，此类色依赖变化受到天体物理观测（如伽马射线暴与引力波对应体）的严格限制，削弱了其理论可行性。

TABLE I: 代表性VSL理论与meVSL框架的对比。

Model	Variation Mechanism	Dyn	LI	New Fields	GR Co-variance	Obs. Target	References
Hard Lorentz breaking	Preferred frame with $c(t)$ imposed explicitly	✗/✓	✗	✗/✓	✗	Conceptual variation	[24–30]
Bimetric VSL	$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$	✓	Partial	✓	Partial	Propagation delay	[31–36]
Color-dependent VSL	$c(\nu)$ varies by frequency due to vacuum dispersion	✗	✗	✗	✗	High-energy astrophysics	[37–47]
Lorentz-invariant VSL	$c(x^\mu)$ as a scalar field in covariant framework	✓	✓	✓	✗	Model-dependent	[48–53]
String/M-theory	c varies via compactification or brane motion	✓	✓	✓	Partial	Early-universe physics	[54–65]
Field-theory VSL	$c = c(\phi)$ via scalar field ϕ	✓	Model-dep.	✓	✗	CMB, LSS, BBN	[66–78]
Hybrid models	Combine metric and scalar field frameworks	✓	Model-dep.	✓	Model-dep.	Mixed datasets	[79, 80]
meVSL	Lapse function $N(t)$ chosen via coordinate freedom $\Rightarrow \tilde{c}(t)$	✗	✓	✗	✓	CTD, H_0 tension	[1, 87, 89, 103–105]

• 洛伦兹不变的变光速理论:

可以构建保持洛伦兹不变性本质的可变光速（VSL）理论。一种由Moffat [48]提出的方法涉及局域洛伦兹对称性的自发破缺，其中洛伦兹标量场获得类时真空期望值，从而选定一个优先参考系并将 $O(3, 1)$ 对称性破缺至 $O(3)$ 。在此框架下，光速经历相变至当前较小值，而自发破缺方向为时间箭头与热力学第二定律提供了物理解释。另一种方法 [30]则定义了协变且局域洛伦兹不变的标量场理论，其中光速通过 $\psi = \log(c/c_0)$ 标量场实现变化。根据模型参数，这些理论既可能与标量-张量理论等效，也可能定义全新的理论框架。此类模型中，宇宙学常数 Λ 可随 c 变化并作为 ψ 的势函数，通常满足 $\Lambda \propto (c/c_0)^n$ 标度关系[49–53]。

• 弦论/M理论方案: 在弦论或M理论中， c 的变化可自然源自额外维动力学或演化标

量场（模场）[54–65]。尽管这些场景在理论上颇具吸引力，但其高度依赖于紧致化方案与稳定化机制的假设，其中许多仍属推测性质。

- **场论VSL预测**: 这类方法将 c 视为由动力学标量场调控的有效耦合常数[66–78]。虽然更贴近标准场论技术，但要确保规范不变性与标准模型的兼容性仍需复杂构造。
- **混合模型**: 部分模型融合上述要素，例如采用双度规结构与动力学标量场的组合[79, 80]。这些混合方案试图平衡各类优势，但往往同时继承多类别的理论挑战。

上述各类模型均面临非平凡的理论障碍，尤其在保持基本对称性与观测数据吻合方面。相较而言，meVSL模型通过时移函数引入 \tilde{c} 的变化，将 \tilde{c} 的改变诠释为坐标效应而非引入新的物理自由度。这使得meVSL能在每一时刻保持CP对称性与相对性原理，提供了比传统VSL模型更简洁且对称的理论框架。表 I总结了前述VSL模型与meVSL模型的差异。其中，**Dyn**表示光速是否作为场方程支配的动力学量，**LI**指洛伦兹不变性，**Obs. Target**则标识各模型主要针对的观测现象。

III. FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER 度规

FLRW度规建立在宇宙学原理(CP)之上，该原理假定宇宙在每一时刻都是均匀且各向同性的。数学上这意味着，生成空间各向同性与均匀性的基灵矢量(KVs)的李导数必须为零，从而确保度规在平移和旋转下保持不变[3, 81]。给定时刻 t'_l 下各向同性均匀空间的通用度规可表示为

$$g_{\mu\nu}^{(\text{CP})}(t'_l) = \text{diag} \left(g_{00}(t'_l), \frac{A(t'_l)}{1 - Kr^2}, A(t'_l)r^2, A(t'_l)r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2)$$

对应的四维线元为

$$ds^2(t'_l) = c_l^2 g_{00}(t'_l) dt'^2_l + A(t'_l) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3)$$

其中 $A(t'_l)(= a^2(t'_l))$ 表示尺度因子的平方，而 $g_{00}(t'_l)$ 显式地由 $-g_{00}(t'_l) \equiv N^2(t'_l)$ 给出，这里 $N(t'_l)$ 是时移函数[5, 81]。通过采用外尔假设将式 (3)描述的度规推广到宇宙时间 t ，可将线元表示为

$$ds^2 = -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \equiv -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dl_{3D}^2, \quad (4)$$

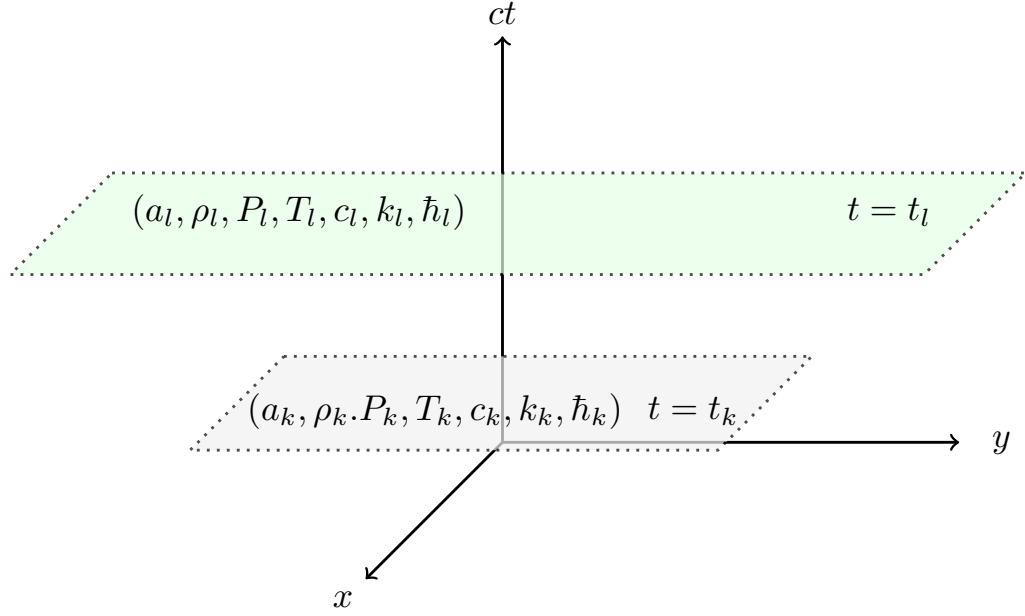


FIG. 1: 在 $t = t_k$ 时刻，物理量与常数的取值，如 a_k 、 ρ_k 、 P_k 、 T_k 、 \tilde{c}_k 、 k_k 和 \hbar_k ，在 $t = t_k$ 超曲面上是固定且与空间位置无关的。随着宇宙膨胀，这些量与常数会过渡为 a_l 、 ρ_l 、 P_l 、 T_l 、 \tilde{c}_l 、 k_l 和 \hbar_l 。宇宙学原理与外尔假设并不要求 c_k 必须等于 c_l ，其具体取值由CTD 关系决定。

其中光速被视为时间的函数，这与标准FLRW度规中的传统角色不同（即 $N = 1$ ）。初看之下，这种表述可能显得非常规甚至错误。然而如图 1 所示，标准FLRW度规暗示在 t_l 或 t_k 为常数的超曲面上，尺度因子 $a_l = a(t_l)$ 、质量密度 ρ_l 、压强 P_l 、温度 T_l 、光速 \tilde{c}_l 、玻尔兹曼常数 k_l 和普朗克常数 \hbar_l 等各种物理量在三维空间所有位置保持恒定。但根据外尔假设，这些量可作为宇宙时间 t 的函数演化，反映宇宙学红移效应，如图 1 所示。

传统宇宙学模型中，包括光速在内的物理常数通常被假定为不随时间变化。然而这种认为 \tilde{c}_l 在宇宙时间中恒等于 \tilde{c}_k 的假设，并非推导FLRW度规的两个基本条件（即CP和外尔假设）的内在要求。实际上，光速不变性与共形时间导数(CTD)相关。值得注意的是，广义相对论(GR)并未规定任何要求光速保持不变的基本定律。当宇宙从 t_k 演化至 t_l 时， $a(t)$ 、 $\rho(t)$ 、 $P(t)$ 和 $T(t)$ 等物理参数作为时间函数演化，其具体行为由求解爱因斯坦场方程(EFEs)和比安基恒等式(BI)决定，同时考虑宇宙流体的状态方程(e.o.s)。

宇宙学中，可观测量通常不表示为宇宙时间 t 的函数，而是表示为宇宙学红移 z 或等效尺度因子 $a(t) = 1/(1+z)$ 的函数。例如波长和温度等量会因宇宙膨胀而发生红移，这反映了时空的几何特性。从这个角度看，若具有量纲的观测量自然随红移演化，那么考虑某些物理常数（特别是光速 c ）也可能表示为红移函数就变得合理。

FLRW度规中时间坐标为 $x^0 = ct$ ，这表明如果时移函数未被固定，组合量 $\tilde{c}(t)$ 可被解释为如式 (35)所示的函数而非常数。这为理论提供了将标准宇宙学模型扩展至包含可变光速的可能性，且无需引入新的动力学场，而是通过GR固有的规范自由度实现[5]。这种解释构建了一个框架，其中传统归因于常数 c 的效应可能源于坐标选择，并为宇宙学现象提供新见解。

红移的推导源自光波传播的测地线方程，其中 $ds^2 = 0$ 条件成立，如式 (4)所示。在共动坐标系中，空间间隔 dl_{3D} 随时间保持一致性[3, 5]。基于此框架，径向光传播表达式为

$$dl_{3D} = \frac{c(t_i)dt_i}{a(t_i)} \quad : \quad \frac{\tilde{c}_1 dt_1}{a_1} = \frac{\tilde{c}_2 dt_2}{a_2} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = c & \text{if } \frac{dt_1}{a_1} = \frac{dt_2}{a_2} & \text{SMC} \\ \tilde{c}_1 = \frac{f(a_2)}{f(a_1)} \frac{a_1}{a_2} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{f(a_1)} = \frac{dt_2}{f(a_2)} & \text{VSL} \\ \tilde{c}_1 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{b}{4}} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{a_1^{1-\frac{b}{4}}} = \frac{dt_2}{a_2^{1-\frac{b}{4}}} & \text{meVSL} \end{cases}, \quad (5)$$

其中 $dt_i = 1/\nu(t_i)$ 表示 t_i 时刻连续波峰间的时间间隔，对应于该时刻频率 ν_i 的倒数，而 $f(a_i)$ 是尺度因子 $a(t_i)$ 的任意函数。在标准宇宙学模型（SMC）中，额外引入了一个假设：光速保持恒定值 c 。这一假设源于广义相对论（GR）框架，其中 c 传统上被视为基本常数。因此，宇宙时间膨胀（CTD）与不同时间切片 t_1 和 t_2 处尺度因子倒数 $a(t)$ 之间的关系可直接得出。然而，这种关系并非源自基本物理定律。相反，若如meVSL模型所提出的光速随时间变化，则传统的红移关系需进行修正。

在膨胀宇宙中，从一个超曲面过渡到另一个超曲面会导致尺度因子增大，这自然会引起质量密度、温度等多种物理量的宇宙学红移。但仅凭宇宙学原理（CP）和韦尔假设，在FLRW度规框架内无法确证CTD关系。此类关系的验证必须依赖实验数据。旨在测量距离衰减时间的超新星（SNe）光变曲线和光谱的直接观测，为CTD测量研究作出了贡献[82–89]。另一研究路径通过分析伽马射线暴（GRBs）峰间时标的延长来探索CTD[90–98]。此外，遥远类星体（QSOs）的光变曲线也被用于检验潜在的CTD效应[99–101]。尽管已有这些努力，当前观测数据尚未证实CTD与SMC预测之间存在明确关联。同时，FLRW模型缺乏确证CTD的明确机制。因此，只要结果与SMC预测相符，在这些观测中探索可变光速（VSL）的可能性仍具价值。

鉴于FLRW模型理论上不存在CTD，若将该关系视为尺度因子的函数 $f(a)$ ，则光速可表示为

$$\tilde{c}(t_1) = \frac{f(a_2) a(t_1)}{f(a_1) a(t_2)} \tilde{c}(t_2). \quad (6)$$

这强调指出：虽然VSL模型在GR中的普适性应用尚无法确证，但它作为FLRW度规描述的膨胀宇宙的自然结果而出现。meVSL模型是VSL的一个特例，由 $f(a) = a^{1-b/4}$ 定义[1, 2]。

IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量

我们通过最小作用量原理，利用EH作用量推导爱因斯坦场方程。在VSL模型中，光速是宇宙时间的函数。然而，若仅有光速为变量，帕拉蒂尼恒等式项会导致无法正确恢复爱因斯坦场方程。为解决此问题，必须同时允许引力常数(\tilde{G})随宇宙时间变化，从而确保能从EH作用量获得正确的场方程形式[1]。这一条件保证了EH作用量中引力常数与光速的组合——即所谓的爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa} \equiv 8\pi\tilde{G}/\tilde{c}^4$ ——保持与宇宙时间无关。VSL模型中的EH作用量可表述为

$$S \equiv \int \left[\frac{1}{2\tilde{\kappa}} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_i \right] \sqrt{-g} dt d^3x, \quad (7)$$

其中 $\mathcal{L}_i = \rho_i(1 + \omega_i)\tilde{c}^2$ 表示理想流体（即物质与辐射）的拉格朗日密度。如我们将证明的，在meVSL框架下，要使广义相对论的爱因斯坦场方程能从EH作用量恢复，光速与引力常数都必须随宇宙演化。作用量对逆变度规的变分必须为零，由此可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\left[\frac{(R - 2\Lambda)}{2\tilde{\kappa}} \right] \delta(\sqrt{-g}) + \frac{1}{2\tilde{\kappa}} \sqrt{-g} \delta R \right) dt d^3x + \int \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) dt d^3x \\ &= \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - \tilde{\kappa} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x \\ &\quad + \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x. \end{aligned} \quad (8)$$

为保持爱因斯坦场方程，式(8)中的第二项（帕拉蒂尼恒等式项）必须消失。这意味着尽管 \tilde{c} 和 \tilde{G} 都随宇宙时间演化， $\tilde{\kappa}$ 必须保持恒定

$$\tilde{\kappa} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{G}_0}{\tilde{c}_0^4} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{c}^4} \quad \text{if} \quad \tilde{c} = \tilde{c}_0 f(a) \quad , \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0 f(a)^4, \quad (9)$$

此处设 $a_0 = 1$, \tilde{c}_0 和 \tilde{G}_0 分别表示光速和引力常数的当前值。利用这些关系, 我们得到包含宇宙学常数的爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\tilde{G}}{\tilde{c}^4}T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

该方程保持了广义相对论中场方程的标准协变形式。这表明可变光速理论可以被纳入广义相对论的协变框架, 而不违反其在广义坐标变换下的基本对称性。

V. 爱因斯坦场方程

我们需要在变光速 (VSL) 理论框架下, 利用FLRW度规和理想流体推导爱因斯坦场方程。通过这些方程, 可以得到修正后的弗里德曼方程, 进而与标准模型的相应方程进行对比分析差异。

A. 里奇张量与爱因斯坦张量

我们现在利用FLRW度规推导VSL模型的爱因斯坦场方程[1, 102]。方程 (4)中FLRW度规的克里斯托费尔符号 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 由下式给出:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}), \quad (11)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a\dot{a}}{\tilde{c}}\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{\tilde{c}}\frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = {}^s\Gamma_{jk}^i, \quad (12)$$

其中 ${}^s\Gamma_{jk}^i$ 表示空间度规 γ_{ij} 对应的克里斯托费尔符号。如方程 (12)所示, VSL模型中的克里斯托费尔符号形式与广义相对论中相同, 唯一区别在于 \tilde{c} 是尺度因子的函数。

描述流形曲率的黎曼曲率张量由下式给出:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}, \quad (13)$$

$$R^0{}_{i0j} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2}\left(a\ddot{a} - \dot{a}^2\frac{d\ln\tilde{c}}{d\ln a}\right), \quad R^i{}_{00j} = \frac{\delta^ij}{\tilde{c}^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{d\ln\tilde{c}}{d\ln a}\right), \quad (14)$$

$$R^i{}_{jkm} = \frac{\dot{a}^2}{\tilde{c}^2}(\delta^ik\gamma_{jm} - \delta_m^i\gamma_{jk}) + {}^sR^i{}_{jkm}, \quad {}^sR^i{}_{jkm} = k(\delta_k^i\gamma_{jm} - \delta_m^i\gamma_{jk}). \quad (15)$$

虽然VSL模型中的克里斯托费尔符号形式与广义相对论相同, 但黎曼曲率张量存在差异。这种差异源于黎曼曲率张量是通过克里斯托费尔符号求导得到的, 而后者包含时变的光速。这导致修正项的出现, 例如 $H^2\frac{d\ln\tilde{c}}{d\ln a}$ 因子同时出现在 $R^0{}_{i0j}$ 和 $R^i{}_{00j}$ 中。

衡量沿测地线运动时空间形变的里奇曲率张量，可通过收缩方程 (14) 和 (15) 中的黎曼曲率张量获得：

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}, \quad (16)$$

$$R_{00} = -\frac{3}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right), \quad R_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2} a^2 \left(2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right). \quad (17)$$

\tilde{c} 的时变特性在 R_{00} 和 R_{ij} 中都引入了修正项。

最后，通过取里奇张量的迹可获得里奇标量：

$$R = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right), \quad (18)$$

其中最后一项明显体现了光速的时变效应。

爱因斯坦张量定义如下：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (19)$$

利用先前推导的里奇张量 (17) 和里奇标量 (18)，我们现在可以得到爱因斯坦张量的分量：

$$G_{00} = \frac{3}{\tilde{c}^2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} \right], \quad G_{ij} = -\frac{g_{ij}}{\tilde{c}^2} \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right]. \quad (20)$$

这两个分量的BI关系可以通过方程 (20) 简单证明：

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (21)$$

B. 能量动量张量

为了求解方程(10)给出的爱因斯坦场方程，必须将应力-能量张量 (SET) 与方程(17)和(18)中的几何量相结合。对于作为时空曲率源的热力学平衡态理想流体，其SET具有对称形式：

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{\tilde{c}^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (22)$$

其中 ρ 表示质量密度， P 代表流体静压， $U^\mu = (\tilde{c}, \vec{0})$ 为四维速度。爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 满足关键的几何恒等式——比安基恒等式(21)及度规相容条件（即 $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ ）。

鉴于爱因斯坦引力常数 κ 的恒定性，比安基恒等式直接导出能量-动量局域守恒律：

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3H \left(\rho_i + \frac{P_i}{\tilde{c}^2} \right) + 2\rho_i H \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = 0 \\ &\Rightarrow d \ln (\rho_i \tilde{c}^2) + 3(1 + \omega_i) d \ln a = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 ω_i 为状态方程参数，定义为 $\omega_i = (P_i/\tilde{c}^2)/\rho_i$ 。

求解方程(23)可得能量密度的表达式：

$$\rho_i \tilde{c}^2 = \rho_{i0} \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}, \quad (24)$$

此处 i 代表对应于辐射或物质的理想流体组分。

C. 弗里德曼方程

将式 (17)、(18)、(22) 和 (24) 代入式 (10)后，VSL模型的爱因斯坦场方程可表示为

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} = \frac{8\pi \tilde{G}}{3} \sum_i \rho_i, \quad (25)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \Lambda \tilde{c}^2 - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = - \frac{8\pi \tilde{G}}{\tilde{c}^2} \sum_i P_i. \quad (26)$$

这些是VSL效应修正后的弗里德曼方程。由式 (25)和(26)可得宇宙膨胀加速度的控制方程为

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi \tilde{G}}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_i + \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a}. \quad (27)$$

通过式 (9)和(24)重写哈勃参数 H 和加速度 \ddot{a}/a ，可得

$$H^2 = \left[\frac{8\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} - k \frac{\tilde{c}_0^2}{a^2} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} \equiv H^{(\text{GR})2} \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \left[- \frac{4\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} + H^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \\ &= \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^{(\text{GR})} + H^{(\text{GR})2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

这些方程描述了VSL框架下FLRW宇宙的背景演化。VSL模型中的哈勃膨胀率 H 相比广义相对论中的对应量 $H^{(\text{GR})}$ 多出了一个 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 因子。值得注意的是，虽然当前时刻的哈勃参数在广义相对论与VSL模型中保持一致，但其历史演化过程存在差异。若过去的光速更高（或更低），则会导致相应时期 H 值成比例增大（或减小）。这种独特的标度行为可能为解决哈勃张力提供新思路。

在meVSL模型中，宇宙膨胀加速度相对于广义相对论存在两处关键修正：第一项源自 \tilde{c} 的变化率 $d \ln \tilde{c}/d \ln a$ ；第二项则体现为整体标度因子 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 对膨胀速率的修正。这些偏差凸显了meVSL框架引入的宇宙演化本质差异。

尽管如式 (28)所示，meVSL模型给出的哈勃参数 $H(a)$ 与标准宇宙学模型 $H^{(\text{GR})}(a)$ 不同，但其哈勃半径

$$\frac{\tilde{c}(a)}{H(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H^{(\text{GR})}(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_{0i} a^{-3(1+w_i)} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}}}, \quad (30)$$

仍与标准模型保持一致。这是因为 $\tilde{c}(a)$ 的构建保持了时空因果结构不变。因此，诸如光度距离和角直径距离等可观测量——作为红移函数对哈勃半径的积分——在红移定义相同的前提下，meVSL框架与标准模型将给出相同结果 [1]。这意味着局部测量的 H_0 值（如SH0ES结果）与距离指标推算值之间的差异可能在meVSL方案中得到调和 [105]。然而，若 \tilde{c} 的变化影响其他物理常数（如精细结构常数、普朗克常数或钱德拉塞卡质量），则可能引发额外的观测效应 [1, 106]，例如超新星距离模数或最后散射面位置的改变。关于此类影响的详细分析，读者可参阅文献 [1]。

VI. 光速运动方程

式 (7)给出的作用量显式包含了式 (18)中的里奇标量及理想流体项，其形式可表示为

$$S \equiv \int \left[\frac{1}{2\tilde{\kappa}} \left(\frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) + \sum_{i=r,m} \rho_i (1 + \omega_i) \tilde{c}^2 \right] \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (31)$$

在方程 (31)中，理想流体的拉格朗日量看似显式依赖于 \tilde{c} 。然而根据理想流体的BI方程 (24)，可以证明该项与 \tilde{c} 无关

$$\rho_i (1 + \omega_i) \tilde{c}^2 = \rho_{i0} (1 + \omega_i) \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (32)$$

此外，由于爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa}$ 与时间无关（如方程 (9)所示），方程 (31)可改写为仅含 \tilde{c} 和 $\dot{\tilde{c}}$ 项的形式

$$S = \int \left[\frac{\tilde{c}_0^4}{16\pi\tilde{G}_0} \left(\frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) \right] \sqrt{-g} dt d^3x \equiv \int \frac{1}{2\tilde{\kappa}_0} R \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (33)$$

由式 (33)可导出关于 c 的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\tilde{c}}} - \frac{\partial R}{\partial \tilde{c}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = (c_1 + c_2 t)^{1/4}. \quad (34)$$

通常欧拉-拉格朗日方程应决定给定变量的动力学行为。但在求解 \tilde{c} 的方程时，我们发现它并未给出 \tilde{c} 本身的动力学方程，而是导致对 $a(t)$ 的约束条件。这意味着 \tilde{c} 并非独立的动力学自由度，而是作为强制 $a(t)$ 满足特定约束条件的参数存在。

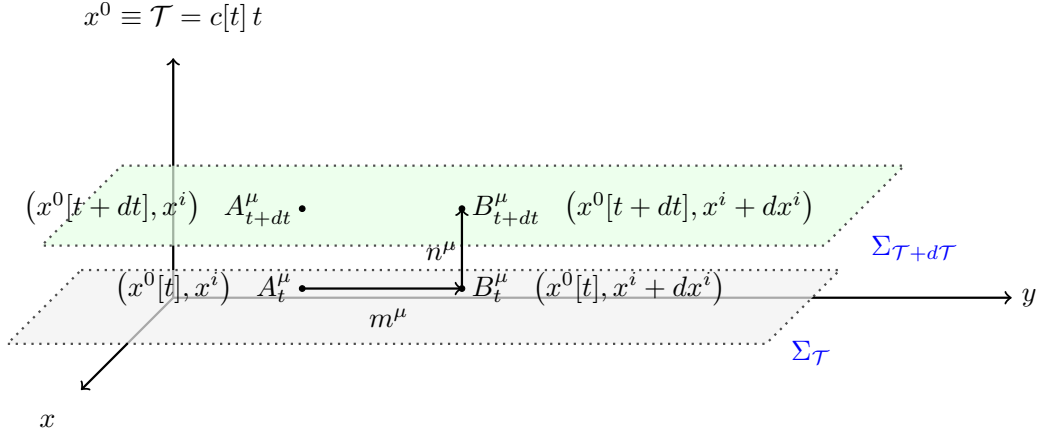


FIG. 2: 该图展示了RW度规框架下时空的叶状结构。超曲面 Σ 表示时间坐标 \mathcal{T} 的恒定值，对应不同的时间时刻。流逝函数控制这些超曲面之间的间隔，确保法向量 $\bar{n} = n^\mu e_\mu$ 始终与它们正交。

这表明 $a(t)$ 和 \tilde{c} 仅在特定条件下可被重新解释为独立变量。这种关系揭示了 \tilde{c} 与 a 之间的强关联性，暗示 \tilde{c} 可能并非完全独立的物理量。 \tilde{c} 的变化与我们如何定义时间密切相关。如果 \tilde{c} 总是仅作为 $a(t)$ 的函数被确定，很可能是因为我们所采用的时间定义已被固定为特定形式。因此，若能重新定义时间，或许可将 \tilde{c} 视为独立变量。反之，若无论时间变量如何选择， \tilde{c} 始终依赖于 $a(t)$ ，则 \tilde{c} 本质上更可能是个因变量。

在meVSL模型中，时移函数描述了 \tilde{c} 的变异性。我们可将时移函数定义为 $N \equiv \tilde{c}/c$

$$\begin{aligned} x^0(t+dt) - x^0(t) &= (c[t+dt])(t+dt) - c(t)t \stackrel{\mathcal{O}(1)}{\approx} c[t]dt + dc[t]t \\ &= \left(1 + \frac{d \ln c}{d \ln t}\right) c[t]dt \equiv \tilde{c}[t]dt \equiv N[t]c[t]dt. \end{aligned} \quad (35)$$

通过时移函数表征 \tilde{c} 变化的能力意味着， \tilde{c} 的改变并非纯粹的物理动力学过程，而是依赖于所选时间变量的定义。因此， \tilde{c} 更可能是由坐标选择（时移函数）决定的量，而非独立变量。换言之，有必要重新考量：究竟应将 \tilde{c} 视为独立的动力学自由度，还是应通过时移函数将其解释为坐标效应。

在meVSL模型中，时移函数表征了各超曲面上的时间流逝。若不存在确定时移函数的机制，则关于 \tilde{c} 的欧拉-拉格朗日方程并不描述动力学演化，仅给出约束方程。 \tilde{c} 可通过时移函数表达的事实表明，它并非独立的动力学自由度，而是由坐标选择决定的量。因此，在没有额外机制固定时移函数的情况下， \tilde{c} 不能被视作真正独立的变量。

时移函数 $N(t)$ 决定了给定时空叶层中固有时间相对于坐标时间的流逝速率。在ADM分解中，它反映了时间切片的任意性，编码了空间超曲面间的时间推进方式。物理上，它设定了共动观测者体验的时钟速率，即时移的变化对应非平庸的时间规范。在meVSL框架下，这使我们能将有效光速 $\tilde{c}(t)$ 的时间依赖性解释为源于时移函数的选择，而非独立场动力学。这种解释保持了广义相对论的广义协变性，并将 \tilde{c} 的变异重新定义为坐标效应而非新物理学的征兆。

VII. 结论与总结

本工作中，我们研究了Robertson-Walker度规下光速可变性的物理含义。研究表明，在此语境下 \tilde{c} 的变化并不必然意味着光速发生了根本性的物理改变，而是反映了与宇宙时间选择相关的坐标效应。

关键发现在于：RW度规中的宇宙时间与共动观测者的固有时相同——这一性质由Weyl公设保证。在此设定下，可变的光速 c 对应的是超曲面间钟率的变化，而非内在的物理演化。通过从包含 \tilde{c} 的作用量推导Euler-Lagrange方程，这一解释得到进一步验证。所得方程并不描述 c 自身的动力学，而是对尺度因子 $a(t)$ 的演化施加约束。这表明 \tilde{c} 并非独立自由度，而是依赖于宇宙时间流逝函数。

这种对VSL（可变光速）的重新诠释挑战了宇宙学中的传统假设。许多VSL模型认为 \tilde{c} 的变化代表着时空物理的根本性修改，常引入额外假设或机制来证明这种变化。然而我们的分析表明，这些变化可被理解为坐标选择的结果，而非需要新物理的引入。从这个角度看， \tilde{c} 的表观演化反映的是宇宙时间结构的参数化方式，而非光传播的实际改变。

综上所述，我们的研究结果表明VSL是宇宙时间的坐标依赖特征，而非物理定律的根本性修改。这一见解为VSL模型及其宇宙学意义——特别是宇宙膨胀和观测张力方面——提供了新视角。需要进一步研究来探索该框架能否为现代宇宙学关键问题提供更一致、更自然的解决方案。

该方法也可能为当前观测张力（如哈勃张力或Ia型超新星时间膨胀异常）提供新的解释思路，在不引入新动力学自由度的前提下实现重新诠释。需进一步研究以确定该框架能否一致地重现宇宙学可观测测量（如光度距离-红移关系），以及能否为标准宇宙学模型提供可行替代方案。作为规范选择，我们可以任意设定可变光速的形式为 $\tilde{c} = \tilde{c}_0 a^{b/4}$ 。通过将该参数化与Ia型超新星时间膨胀测量等宇宙学观测进行比较，可以检验 b 值是否偏离零。若观测数据倾向于 $b \neq 0$ ，则表明通常采用的 $b = 0$ 规范选择（对应标准宇宙学模型）可能未能准确描述我们宇宙的时间结构；反之若 $b = 0$ 仍被支持，则强化了标准规范与观

测的一致性。

Acknowledgments

本研究由韩国国家研究基金会(NRF)资助，教育部拨款(项目编号NRF-RS202300243411)。

-
- [1] S. Lee, JCAP **08**, 054 (2021) doi:10.1088/1475-7516/2021/08/054 [arXiv:2011.09274 [astro-ph.CO]].
 - [2] S. Lee, Found. Phys. **53**, 40 (2023) doi:10.1007/s10701-023-00682-1 [arXiv:2303.13772 [physics.gen-ph]].
 - [3] S. Lee, Particles **7**, no.2, 309-326 (2024) doi:10.3390/particles7020019 [arXiv:2406.02556 [physics.gen-ph]].
 - [4] S. Lee, Phys. Dark Univ. **42**, 101286 (2023) doi:10.1016/j.dark.2023.101286 [arXiv:2212.03728 [astro-ph.CO]].
 - [5] S. Lee, Class. Quant. Grav. **42**, no.2, 025026 (2025) doi:10.1088/1361-6382/ada2d5 [arXiv:2412.19049 [gr-qc]].
 - [6] P. P. Avelino and C. J. A. P. Martins, Phys. Lett. B **459** (1999), 468-472 doi:10.1016/S0370-2693(99)00694-2 [arXiv:astro-ph/9906117 [astro-ph]].
 - [7] J. A. Belinchon, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1669-1686 (2000) doi:10.1023/A:1003644614145 [arXiv:gr-qc/9907003 [gr-qc]].
 - [8] P. P. Avelino, C. J. A. P. Martins and G. Rocha, Phys. Lett. B **483** (2000), 210 doi:10.1016/S0370-2693(00)00567-0 [arXiv:astro-ph/0001292 [astro-ph]].
 - [9] M. Szydlowski and A. Krawiec, Phys. Rev. D **68**, 063511 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.063511 [arXiv:gr-qc/0212068 [gr-qc]].
 - [10] J. Magueijo, Rept. Prog. Phys. **66**, 2025 (2003) doi:10.1088/0034-4885/66/11/R04 [arXiv:astro-ph/0305457 [astro-ph]].
 - [11] H. Shojaie and M. Farhoudi, Can. J. Phys. **85**, 1395-1408 (2007) doi:10.1139/P07-132 [arXiv:gr-qc/0406027 [gr-qc]].

- [12] H. Shojaie and M. Farhoudi, *Can. J. Phys.* **84**, 933-944 (2006) doi:10.1139/P06-070 [arXiv:gr-qc/0407096 [gr-qc]].
- [13] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, *Phys. Lett. B* **728**, 15-18 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2013.11.029 [arXiv:1310.7231 [astro-ph.CO]].
- [14] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, *JCAP* **06**, 035 (2014) doi:10.1088/1475-7516/2014/06/035 [arXiv:1406.0150 [astro-ph.CO]].
- [15] G. Franzmann, [arXiv:1704.07368 [gr-qc]].
- [16] E. T. Hanimeli, B. Lamine, A. Blanchard and I. Tutusaus, *Phys. Rev. D* **101**, no.6, 063513 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063513 [arXiv:1910.08325 [astro-ph.CO]].
- [17] F. Skara and L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **101**, no.6, 063521 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063521 [arXiv:1911.10609 [astro-ph.CO]].
- [18] S. Bhattacharjee 与 P. K. Sahoo, 《欧洲物理杂志Plus》**135**, 第1期, 86页 (2020年) doi:10.1140/epjp/s13360-020-00116-1 [arXiv:2001.06569 [gr-qc]]。
- [19] R. P. Gupta, doi:10.1093/mnras/staa2472 [arXiv:2009.08878 [astro-ph.CO]]。
- [20] R. R. Cuzinatto、R. P. Gupta、R. F. L. Holanda、J. F. Jesus 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**515**, 第4期, 5981-5992页 (2022年) doi:10.1093/mnras/stac2039 [arXiv:2204.10764 [gr-qc]]。
- [21] R. R. Cuzinatto、R. F. L. Holanda 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**519**, 633-640页 (2023年) doi:10.1093/mnras/stac3267 [arXiv:2202.01371 [gr-qc]]。
- [22] R. R. Cuzinatto、R. P. Gupta 和 P. J. Pompeia, 《对称性》**15**, 第3期, 709页 (2023年) doi:10.3390/sym15030709 [arXiv:2204.00119 [gr-qc]]。
- [23] M. Bileska, 《经典与量子引力》**41**, 第18期, 183001 (2024年) doi:10.1088/1361-6382/ad68f0
- [24] S. R. Coleman 和 S. L. Glashow, 《物理快报B》**405**, 249-252页 (1997年) doi:10.1016/S0370-2693(97)00638-2 [arXiv:hep-ph/9703240 [hep-ph]]。
- [25] A. Albrecht 和 J. Magueijo, 《物理评论D》**59**, 043516 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043516 [arXiv:astro-ph/9811018 [astro-ph]]。
- [26] J. D. Barrow 和 J. Magueijo, 《物理快报B》**443**, 104-110页 (1998年) doi:10.1016/S0370-2693(98)01294-5 [arXiv:astro-ph/9811072 [astro-ph]]。
- [27] J. D. Barrow, 《物理评论D》**59**, 043515 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043515
- [28] B. A. Bassett、S. Liberati、C. Molina-Paris 和 M. Visser, 《物理评

- 论D》**62**, 103518 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103518 [arXiv:astro-ph/0001441 [astro-ph]]。
- [29] T. Jacobson 和D. Mattingly, 《物理评论D》**64**, 024028 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.024028 [arXiv:gr-qc/0007031 [gr-qc]]。
- [30] J. Magueijo, 《物理评论D》**62**, 103521 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103521 [arXiv:gr-qc/0007036 [gr-qc]]。
- [31] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《物理快报B》**460**, 263-270页 (1999年) doi:10.1016/S0370-2693(99)00774-1 [arXiv:astro-ph/9812481 [astro-ph]]。
- [32] I. T. Drummond, [arXiv:gr-qc/9908058 [gr-qc]]。
- [33] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《物理快报B》**477**, 269-275页 (2000年) doi:10.1016/S0370-2693(00)00192-1 [arXiv:gr-qc/9910112 [gr-qc]]。
- [34] S. Liberati、B. A. Bassett、C. Molina-Paris 和M. Visser, 《核物理B辑会议录增刊》**88**, 259-262页 (2000年) doi:10.1016/S0920-5632(00)00780-5 [arXiv:astro-ph/0001481 [astro-ph]]。
- [35] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《现代物理国际期刊D》**11**, 187-206页 (2002年) doi:10.1142/S0218271802001457 [arXiv:gr-qc/0003070 [gr-qc]]。
- [36] I. T. Drummond, 《物理评论D》**63**, 043503 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.63.043503 [arXiv:astro-ph/0008234 [astro-ph]]。
- [37] G. Amelino-Camelia、J. R. Ellis、N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《现代物理国际期刊A》**12**, 607-624页 (1997年) doi:10.1142/S0217751X97000566 [arXiv:hep-th/9605211 [hep-th]]。
- [38] G. Amelino-Camelia、J. R. Ellis、N. E. Mavromatos、D. V. Nanopoulos 和S. Sarkar, 《自然》**393**, 763-765页 (1998年) doi:10.1038/31647 [arXiv:astro-ph/9712103 [astro-ph]]。
- [39] J. R. Ellis、K. Farakos、N. E. Mavromatos、V. A. Mitsou 和D. V. Nanopoulos, 《天体物理学杂志》**535**, 139-151页 (2000年) doi:10.1086/308825 [arXiv:astro-ph/9907340 [astro-ph]]。
- [40] G. Amelino-Camelia 和T. Piran, 《物理评论D》**64**, 036005 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.036005 [arXiv:astro-ph/0008107 [astro-ph]]。
- [41] G. Amelino-Camelia, 《物理快报B》**510**, 255-263页 (2001年) doi:10.1016/S0370-2693(01)00506-8 [arXiv:hep-th/0012238 [hep-th]]。
- [42] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《物理评论D》**63**, 124025 (2001)

- doi:10.1103/PhysRevD.63.124025 [arXiv:hep-th/0012216 [hep-th]].
- [43] J. Kowalski-Glikman, 《物理快报A》 **286**, 391-394 (2001) doi:10.1016/S0375-9601(01)00465-0 [arXiv:hep-th/0102098 [hep-th]].
- [44] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia 和 J. Kowalski-Glikman, 《物理快报B》 **522**, 133-138 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)01264-3 [arXiv:hep-th/0107039 [hep-th]].
- [45] J. Magueijo 和 L. Smolin, 《物理评论快报》 **88**, 190403 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.190403 [arXiv:hep-th/0112090 [hep-th]].
- [46] G. Amelino-Camelia, 《现代物理国际期刊D》 **11**, 1643 (2002) doi:10.1142/S021827180200302X [arXiv:gr-qc/0210063 [gr-qc]].
- [47] J. Magueijo 和 L. Pogosian, 《物理评论D》 **67**, 043518 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.67.043518 [arXiv:astro-ph/0211337 [astro-ph]].
- [48] J. W. Moffat, 《现代物理国际期刊D》 **2**, 351-366 (1993) doi:10.1142/S0218271893000246 [arXiv:gr-qc/9211020 [gr-qc]].
- [49] S. N. Manida, [arXiv:gr-qc/9905046 [gr-qc]].
- [50] J. D. Barrow 和 J. Magueijo, 《天体物理学杂志快报》 **532**, L87 (2000) doi:10.1086/312572 [arXiv:astro-ph/9907354 [astro-ph]].
- [51] S. S. Stepanov, 《物理评论D》 **62**, 023507 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.023507 [arXiv:astro-ph/9909311 [astro-ph]].
- [52] J. Magueijo, 《物理评论D》 **63**, 043502 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.043502 [arXiv:astro-ph/0010591 [astro-ph]].
- [53] J. W. Moffat, [arXiv:hep-th/0208122 [hep-th]].
- [54] G. Kaelbermann 和 H. Halevi, [arXiv:gr-qc/9810083 [gr-qc]].
- [55] L. Randall 和 R. Sundrum, 《物理评论快报》 **83**, 3370-3373 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370 [arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph]].
- [56] L. Randall 和 R. Sundrum, 《物理评论快报》 **83**, 4690-4693 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [arXiv:hep-th/9906064 [hep-th]].
- [57] E. Kiritsis, 《高能物理杂志》 **10**, 010 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/10/010 [arXiv:hep-th/9906206 [hep-th]].
- [58] D. J. H. Chung 和 K. Freese, 《物理评论D》 **62**, 063513 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.063513 [arXiv:hep-ph/9910235 [hep-ph]].
- [59] S. H. S. Alexander, 《高能物理杂志》 **11**, 017 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/11/017

- [arXiv:hep-th/9912037 [hep-th]].
- [60] H. Ishihara, 《物理评论快报》 **86**, 381-384 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.86.381 [arXiv:gr-qc/0007070 [gr-qc]].
- [61] C. Csaki, J. Erlich 和 C. Grojean, 《核物理B》 **604**, 312-342 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00175-4 [arXiv:hep-th/0012143 [hep-th]].
- [62] D. Youm, 《物理评论D》 **63**, 125011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.125011 [arXiv:hep-th/0101228 [hep-th]].
- [63] D. Youm, 《物理评论D》 **64**, 085011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.64.085011 [arXiv:hep-th/0102194 [hep-th]].
- [64] C. Grojean, F. Quevedo, G. Tasinato 和 I. Zavala, 《高能物理杂志》 **08**, 005 (2001) doi:10.1088/1126-6708/2001/08/005 [arXiv:hep-th/0106120 [hep-th]].
- [65] D. Youm, [arXiv:hep-th/0108237 [hep-th]].
- [66] I. T. Drummond 和 S. J. Hathrell, 《物理评论D》 **22**, 343 (1980) doi:10.1103/PhysRevD.22.343
- [67] M. Novello 和 S. D. Jorda, 《现代物理快报A》 **4**, 1809 (1989) doi:10.1142/S0217732389002045
- [68] G. Barton, 《物理快报B》 **237**, 559-562 (1990) doi:10.1016/0370-2693(90)91224-Y
- [69] K. Scharnhorst, 物理快报B **236**, 第3期, 354-359页(1990年) [勘误: 物理快报B **787**, 204-204页(2018年)] doi:10.1016/0370-2693(90)90997-K
- [70] G. M. 肖尔, 核物理B **460**, 379-396页(1996年) doi:10.1016/0550-3213(95)00646-X [arXiv:gr-qc/9504041 [gr-qc]].
- [71] D. 科拉戴 与 V. A. 科斯特莱茨基, 物理评论D **52**, 6224-6230页(1995年) doi:10.1103/PhysRevD.52.6224 [arXiv:hep-ph/9510365 [hep-ph]].
- [72] S. R. 科尔曼 与 S. L. 格拉肖, 物理评论D **59**, 116008 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.116008 [arXiv:hep-ph/9812418 [hep-ph]].
- [73] O. 贝尔托拉米 与 C. S. 卡瓦略, 物理评论D **61**, 103002 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.61.103002 [arXiv:gr-qc/9912117 [gr-qc]].
- [74] G. M. 肖尔, 核物理B **605**, 455-466页(2001年) doi:10.1016/S0550-3213(01)00137-7 [arXiv:gr-qc/0012063 [gr-qc]].
- [75] O. W. 格林伯格, 物理评论快报 **89**, 231602 (2002年) doi:10.1103/PhysRevLett.89.231602 [arXiv:hep-ph/0201258 [hep-ph]].

- [76] P. 泰桑迪耶, 布罗格利基金会年鉴**29**, 173页(2004年) [arXiv:gr-qc/0303081 [gr-qc]].
- [77] G. M. 肖尔, 当代物理**44**, 503-521页(2003年) doi:10.1080/00107510310001617106 [arXiv:gr-qc/0304059 [gr-qc]].
- [78] M. 布拉索内, J. 马圭霍与P. 皮雷斯-帕切科, 欧洲物理快报**70**, 600 (2005年) doi:10.1209/epl/i2005-10027-1 [arXiv:hep-ph/0307205 [hep-ph]].
- [79] S. 亚历山大, R. 布兰登伯格与J. 马圭霍, 物理评论D **67**, 081301 (2003年) doi:10.1103/PhysRevD.67.081301 [arXiv:hep-th/0108190 [hep-th]].
- [80] C. P. 伯吉斯, J. M. 克莱因, E. 菲洛塔斯, J. 马蒂亚斯与G. D. 摩尔, 高能物理杂志**03**, 043 (2002年) doi:10.1088/1126-6708/2002/03/043 [arXiv:hep-ph/0201082 [hep-ph]].
- [81] L. 莱德, 广义相对论导论 (剑桥大学出版社, 2009年).
- [82] B. 莱本古特, 天体物理学报快报**466**, L21 (1996年) doi:10.1086/310164 [arXiv:astro-ph/9605134 [astro-ph]].
- [83] A. G. 里斯等[超新星搜索团队], 天文杂志**114**, 722 (1997年) doi:10.1086/118506 [arXiv:astro-ph/9707260 [astro-ph]].
- [84] R. J. 弗利, A. V. 菲利普科, D. C. 伦纳德, A. G. 里斯, P. 纽金特与S. 珀尔马特, 天体物理学报快报**626**, L11-L14 (2005年) doi:10.1086/431241 [arXiv:astro-ph/0504481 [astro-ph]].
- [85] S. 布隆丹与J. L. 通里, 天体物理学报**666**, 1024-1047 (2007年) doi:10.1086/520494 [arXiv:0709.4488 [astro-ph]].
- [86] S. 布隆丹等, 天体物理学报**682**, 724-736 (2008年) doi:10.1086/589568 [arXiv:0804.3595 [astro-ph]].
- [87] S. 李, 皇家天文学会月报**524**, 第3期, 4019-4023页(2023年) doi:10.1093/mnras/stad2084 [arXiv:2302.09735 [astro-ph.CO]].
- [88] R. M. T. 怀特等[DES], 皇家天文学会月报**533**, 第3期, 3365-3378页(2024年) doi:10.1093/mnras/stae2008 [arXiv:2406.05050 [astro-ph.CO]].
- [89] S. 李, 暗物质物理**46**, 101703 (2024年) doi:10.1016/j.dark.2024.101703 [arXiv:2407.09532 [physics.gen-ph]].
- [90] J. P. 诺里斯等, 天体物理学报**424**, 540页(1994年) doi:10.1086/173912 [arXiv:astro-ph/9312049 [astro-ph]].
- [91] R. A. M. J. 维杰斯与B. 帕钦斯基, 天体物理学报快报**437**, L107 (1994年) doi:10.1086/187694 [arXiv:astro-ph/9406007 [astro-ph]].
- [92] D. 班德, 天体物理学报快报**432**, L23 (1994年) doi:10.1086/187502 [arXiv:astro-ph/9407007]

- [astro-ph]].
- [93] A. Meszaros 和P. Meszaros, 《天体物理学报》 **466**, 29 (1996) doi:10.1086/177491 [arXiv:astro-ph/9512164 [astro-ph]]。
- [94] T. T. Lee 和V. Petrosian, 《天体物理学报》 **474**, 37 (1997) doi:10.1086/303458 [arXiv:astro-ph/9607127 [astro-ph]]。
- [95] H. Y. Chang, 《天体物理学报快报》 **557**, L85 (2001) doi:10.1086/323331 [arXiv:astro-ph/0106220 [astro-ph]]。
- [96] D. F. Crawford, [arXiv:0901.4169 [astro-ph.CO]]。
- [97] F. W. Zhang、Y. Z. Fan、L. Shao 和D. M. Wei, 《天体物理学报快报》 **778**, L11 (2013) doi:10.1088/2041-8205/778/1/L11 [arXiv:1309.5612 [astro-ph.HE]]。
- [98] A. Singh 和S. Desai, 《宇宙学与天体粒子物理学报》 **02**, no.02, 010 (2022) doi:10.1088/1475-7516/2022/02/010 [arXiv:2108.00395 [astro-ph.HE]]。
- [99] M. R. S. Hawkins, 《天体物理学报快报》 **553**, L97 (2001) doi:10.1086/320683 [arXiv:astro-ph/0105073 [astro-ph]]。
- [100] D. C. Dai、G. D. Starkman、B. Stojkovic、D. Stojkovic 和A. Weltman, 《物理评论快报》 **108**, 231302 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.231302 [arXiv:1204.5191 [astro-ph.CO]]。
- [101] G. F. Lewis 和B. J. Brewer, 《自然·天文学》 **7**, no.10, 1265-1269 (2023) doi:10.1038/s41550-023-02029-2 [arXiv:2306.04053 [astro-ph.CO]]。
- [102] S. Lee, [arXiv:2504.07975 [astro-ph.CO]]。
- [103] S. Lee, 《宇宙》 **10**, no.6, 268 (2024) doi:10.3390/universe10060268 [arXiv:2101.09862 [astro-ph.CO]]。
- [104] S. Lee, 《皇家天文学会月报》 **522**, no.3, 3248-3255 (2023) doi:10.1093/mnras/stad1190 [arXiv:2301.06947 [astro-ph.CO]]。
- [105] S. Lee, 《天文学》 **3**, 100-113 (2024) doi:10.3390/astronomy3020007 [arXiv:2406.05990 [physics.gen-ph]]。
- [106] S. Lee, [arXiv:2108.06043 [astro-ph.CO]]。