

重审宇宙学中的光速变化:基于弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克度规的新见解

Seokcheon Lee*

*Department of Physics, Institute of Basic Science,
Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea*

(Received)

Abstract

在弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克度规中,光速可变 (VSL) 现象反映了超曲面上钟速的变化,这种变化由时移函数描述。该变化并非动力学场的演化,而是坐标选择的结果——由于外尔公设,宇宙时间与共动观测者的固有时保持一致。从包含 c 的作用量原理出发,我们推导出 c 本身不具有动力学特性,而是对尺度因子 $a(t)$ 施加约束条件,表明其并非独立的自由度。这一认识将VSL概念重新阐释为广义相对论中规范自由度的体现,在此框架下物理定律在光滑坐标变换下保持协变。此处“规范”特指时间坐标的选择自由度(例如设定时移函数 $N(t) \neq 1$),它决定了光速在宇宙学方程中的表现形式。将 c 理解为坐标依赖量,为解释宇宙学时间及观测矛盾(如哈勃张力)提供了新视角,而无需引入新的物理场。这种重新定义开辟了在自洽的相对论框架内诠释宇宙膨胀的新理论路径。

*Electronic address: skylee@skku.edu

Contents

I. 引言	1
II. 现有变光速理论概述	2
III. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 度规	4
IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量	7
V. 爱因斯坦场方程	8
A. 里奇张量与爱因斯坦张量	8
B. 能量动量张量	9
C. Friedmann 方程	10
VI. 光速的运动方程	11
VII. 结论与总结	13
Acknowledgments	13
References	14

I. 引言

最小扩展变光速 (meVSL) 模型是在遵循宇宙学原理 (CP) 的弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克 (FLRW) 度规框架内建立的, 该原理通过确保宇宙在大尺度上保持空间均匀性和各向同性来实现[1-3] 这一原理要求支配宇宙的物理定律不得引入优先方向或位置 维持这些对称性的关键要素是绝热性的守恒, 因为宇宙介质中的任何净能流都将建立特权参考系, 从而破坏各向同性[4] 。

在meVSL模型中, 光速随宇宙时间的演化必须伴随其他基本物理常数的相应变化, 以确保理论框架的内在一致性 特别是普朗克常数必须与变化的光速协调演化, 以维持解释绝热膨胀的量子力学和热力学基本关系[4] 更广泛地说, 包括电磁相互作用和相对论动力学在内的其他物理量的宇宙学演化必须被诱导, 以保持与所有局部验证的物理定律 (如狭义相对论和麦克斯韦方程组) 的兼容性[1-4] 。

与传统VSL理论不同(后者通常需要显式机制来驱动 \tilde{c} 作为宇宙尺度因子 $a(t)$ 的函数变化),meVSL模型无需这种特设性规定。相反,它引入了宇宙时间膨胀(CTD)的广义条件,使得时间依赖的光速成为自然结果。在meVSL模型中,时移函数决定了超曲面间时钟速率的差异,反映了光速随时间的变化[5]。meVSL框架并非修改FLRW度规本身,而是允许 \tilde{c} 的变化从宇宙时间的底层结构中动态涌现,而无需强加特定函数形式 $\tilde{c}(a)$ 。

这一显著特征使meVSL区别于传统VSL模型——后者常假设或需要驱动光速演化的显式机制[6–80]。通过将基本常数的变化嵌入宇宙膨胀和时间膨胀的广义背景中,meVSL模型为探索膨胀宇宙中非固定光速的影响提供了更具普适性和自洽性的方法。

本文结构如下:第2节简要概述现有VSL模型;第3节在meVSL模型背景下引入FLRW度规,作为我们分析的基础;第4节讨论爱因斯坦-希尔伯特(EH)作用量,提供推导场方程的理论框架;第5节推导爱因斯坦场方程(EFEs),包括里奇张量、爱因斯坦张量、能量-动量张量和弗里德曼方程;第6节专述光速运动方程,探讨其在meVSL框架下的含义;最后在第6节总结研究成果并讨论其广泛意义。

II. 现有变光速理论概述

过去几十年间,学界提出了多种实现变光速(VSL)的理论框架,主要可分为以下几类:

- **洛伦兹对称性的硬性破缺:** 这类模型通过引入时空中的优先参照系或绝对结构,显式违反洛伦兹不变性[24–30]。虽然能直接实现光速 c 的变化,但通常面临严重的理论困难,例如与相对性原理的冲突以及难以构建自洽的量子场论。
- **双度量变光速理论:** 此类模型引入两个不同的度量:一个描述引力现象,另一个描述光子传播[31–36]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为引力子度量, $\hat{g}_{\mu\nu}$ 为物质度量, ϕ 为标量场。尽管保留了部分引力结构,双度量理论通常会引入额外的自由度,使得动力学复杂化并引发稳定性和因果性问题。

- **色依赖光速理论:** 该框架允许光速随光子频率变化,导致真空色散关系[37–47]。然而,此类色依赖变化受到天体物理观测(如伽马射线暴与引力波对应体)的严格限制,其可行性因而受限。
- **洛伦兹不变的变光速理论:**

TABLE I: 代表性VSL理论与meVSL框架的对比

Model	Variation Mechanism	Dyn	LI	New Fields	GR Co-variance	Obs. Target	References
Hard Lorentz breaking	Preferred frame with $c(t)$ imposed explicitly	✗/✓	✗	✗/✓	✗	Conceptual variation	[24–30]
Bimetric VSL	$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$	✓	Partial	✓	Partial	Propagation delay	[31–36]
Color-dependent VSL	$c(\nu)$ varies by frequency due to vacuum dispersion	✗	✗	✗	✗	High-energy astrophysics	[37–47]
Lorentz-invariant VSL	$c(x^\mu)$ as a scalar field in covariant framework	✓	✓	✓	✗	Model-dependent	[48–53]
String/M-theory	c varies via compactification or brane motion	✓	✓	✓	Partial	Early-universe physics	[54–65]
Field-theory VSL	$c = c(\phi)$ via scalar field ϕ	✓	Model-dep.	✓	✗	CMB, LSS, BBN	[66–78]
Hybrid models	Combine metric and scalar field frameworks	✓	Model-dep.	✓	Model-dep.	Mixed datasets	[79, 80]
meVSL	Lapse function $N(t)$ chosen via coordinate freedom $\Rightarrow \tilde{c}(t)$	✗	✓	✗	✓	CTD, H_0 tension	[1, 87, 89, 103–105]

可以构建保留洛伦兹不变性本质的可变光速 (VSL) 理论。一种由Moffat [48]提出的方法涉及局域洛伦兹对称性的自发破缺,其中洛伦兹标量场获得类时真空期望值,从而选定一个优先参考系并将 $O(3, 1)$ 对称性破缺至 $O(3)$ 。在此框架下,光速经历相变至当前较小值,而自发破缺方向为时间箭头与热力学第二定律提供了物理解释。另一方法 [30]则定义了协变且局域洛伦兹不变的场论,其中光速通过标量场 $\psi = \log(c/c_0)$ 变化。根据模型参数,这些理论既可能与标量-张量理论等价,也可能定义全新的理论框架。此类模型中,宇宙学常数 Λ 可随 c 变化,作为 ψ 的势函数,通常满足 $\Lambda \propto (c/c_0)^n$ 标度关系[49–53]。

- **弦论/M理论方案:** 在弦论或M理论中, c 的变化可自然源自额外维度的动力学或演化标量场 (模场) [54–65]。尽管这些场景在理论上颇具吸引力,但其高度依赖于紧致化方

案与稳定化机制的假设,其中许多仍属推测性质。

- **场论VSL预言:** 此类方法将 c 视为由动力学标量场驱动的有效耦合常数[66–78]。虽然更贴近标准场论技术,但要确保规范不变性与标准模型的兼容性仍需复杂构造。
- **混合模型:** 部分模型综合上述要素,例如采用双度量结构与动力学标量场的组合[79, 80]。这些混合方案旨在平衡各类优势,但往往同时继承多类别的理论挑战。

上述各类模型均面临非平庸的困难,尤其在保持基本对称性与观测数据吻合方面。相较而言,meVSL模型通过时移函数引入 \tilde{c} 的变化,将 \tilde{c} 的改变诠释为坐标效应而非引入新的物理自由度。这使得meVSL能在每个时刻保持CP对称性与相对性原理,相比传统VSL模型提供了概念更简洁、对称性更优的理论框架。表 I总结了前述VSL模型与meVSL模型的差异。其中,**Dyn**表示光速是否作为场方程支配的动力学量处理,**LI**指洛伦兹不变性,**Obs.** **Target**则标识各模型旨在解释的主要观测现象。

III. FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER 度规

FLRW 度规建立在宇宙学原理(CP)基础上,该原理假定宇宙在任意时刻都具有均匀性和各向同性。数学上这意味着生成空间各向同性与均匀性的基灵矢量(KVs)的李导数必须为零,从而确保度规在平移和旋转下保持不变[3, 81]。给定时刻 t'_l 下各向同性均匀空间的广义度规可表示为

$$g_{\mu\nu}^{(\text{CP})}(t'_l) = \text{diag} \left(g_{00}(t'_l), \frac{A(t'_l)}{1 - Kr^2}, A(t'_l)r^2, A(t'_l)r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2)$$

对应的四维线元为

$$ds^2(t'_l) = c_l^2 g_{00}(t'_l) dt_l'^2 + A(t'_l) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3)$$

其中 $A(t'_l)(= a^2(t'_l))$ 表示尺度因子的平方,而 $g_{00}(t'_l)$ 显式地由 $-g_{00}(t'_l) \equiv N^2(t'_l)$ 给出,这里 $N(t'_l)$ 是时移函数[5, 81]。通过采用外尔假设将式(3)描述的度规推广到宇宙时 t ,可将线元表示为

$$ds^2 = -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \equiv -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dl_{3D}^2, \quad (4)$$

其中光速被视为时间的函数,这与标准FLRW度规中的传统角色不同(即 $N = 1$)。初看之下,这种表述可能显得非常规甚至错误。然而如图 1 所示,标准FLRW度规表明在 t_l 或 t_k

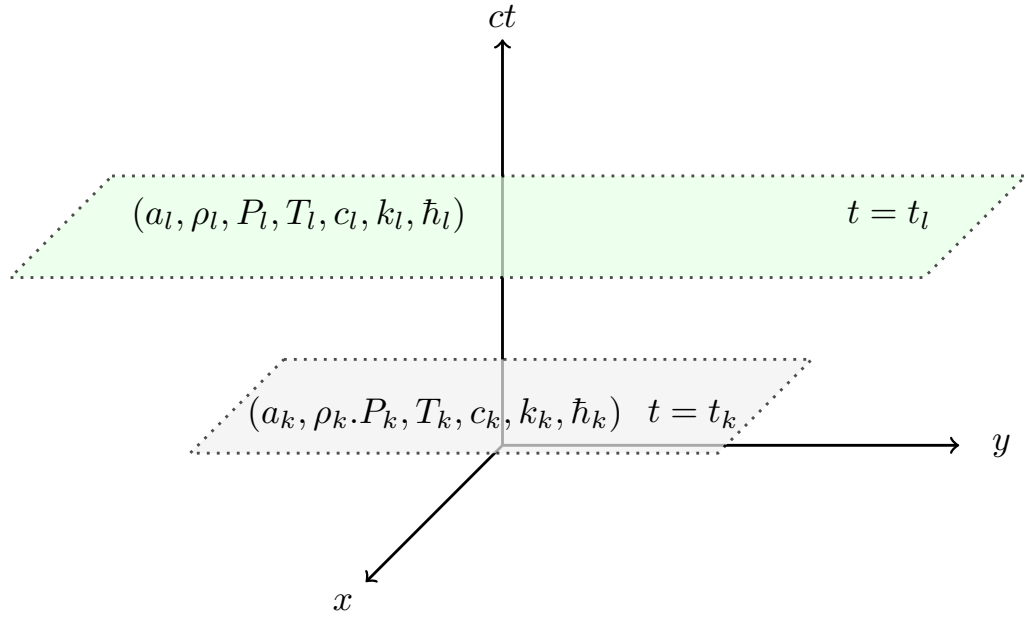


FIG. 1: 在 $t = t_k$ 时刻,物理量与常数的取值,如 a_k ρ_k P_k T_k \tilde{c}_k k_k 和 \hbar_k ,在 $t = t_k$ 超曲面上固定且与空间位置无关 随着宇宙膨胀,这些量与常数将过渡为 a_l ρ_l P_l T_l \tilde{c}_l k_l 和 \hbar_l 宇宙学原理与外尔假设并未限制 c_k 必须等于 c_l ,其值由CTD 关系决定 。

为常数的超曲面上,各类物理量——如尺度因子 $a_l = a(t_l)$ 质量密度 ρ_l 压强 P_l 温度 T_l 光速 \tilde{c}_l 玻尔兹曼常数 k_l 和普朗克常数 \hbar_l ——在三维空间所有位置均保持恒定 但根据外尔假设,这些量可随宇宙时 t 演化,体现宇宙学红移效应,如图1 所示 。

传统宇宙学模型通常假定包括光速在内的物理常数不随时间变化 然而这种认为 \tilde{c}_l 在整个宇宙时中恒等于 \tilde{c}_k 的假设,并非推导FLRW 度规的两个基本条件(即CP 和外尔假设)的内在要求 实际上,光速不变性与共形时间导数(CTD)相关 值得注意的是,广义相对论(GR)并未规定任何要求光速保持不变的基律 随着宇宙从 t_k 演化至 t_l ,物理参数如 $a(t)$ $\rho(t)$ $P(t)$ 和 $T(t)$ 均随时间演化,其具体行为由求解爱因斯坦场方程(EFEs)和比安基恒等式(BI)决定,同时需考虑宇宙流体的状态方程(e.o.s) 。

宇宙学中可观测物理量通常不表示为宇宙时 t 的函数,而是表示为宇宙学红移 z 或等价尺度因子 $a(t) = 1/(1 + z)$ 的函数 例如波长和温度等量会因宇宙膨胀发生红移,这反映了时空的几何特性 由此视角出发,若带量纲可观测量能自然地随红移演化,那么考虑某些物理常数(特别是光速 \tilde{c})也可能表示为红移函数就具有合理性 。

FLRW 度规中时间坐标为 $x^0 = ct$, 这表明若时移函数未被固定, 组合量 $\tilde{c}(t)$ 可如式 (35) 所示被解释为函数而非常数。这为在标准宇宙学模型中引入可变光速提供了理论可能性, 且无需引入新动力学场, 而是通过 GR 内禀的规范自由度实现[5]。这种诠释构建了一个框架, 其中传统归因于常数 \tilde{c} 的效应可能源于坐标选择, 或能为宇宙学现象提供新见解。

红移的推导源自光波传播的测地线方程, 其中 $ds^2 = 0$ 的条件如式 (4) 所示。在共动坐标系中, 空间间隔 dl_{3D} 随时间保持恒定[3, 5]。基于此框架, 径向光传播表达式为

$$dl_{3D} = \frac{c(t_i)dt_i}{a(t_i)} \quad : \quad \frac{\tilde{c}_1 dt_1}{a_1} = \frac{\tilde{c}_2 dt_2}{a_2} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = c & \text{if } \frac{dt_1}{a_1} = \frac{dt_2}{a_2} & \text{SMC} \\ \tilde{c}_1 = \frac{f(a_2)}{f(a_1)} \frac{a_1}{a_2} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{f(a_1)} = \frac{dt_2}{f(a_2)} & \text{VSL} \\ \tilde{c}_1 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{b}{4}} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{a_1^{1-\frac{b}{4}}} = \frac{dt_2}{a_2^{1-\frac{b}{4}}} & \text{meVSL} \end{cases}, \quad (5)$$

其中 $dt_i = 1/\nu(t_i)$ 表示 t_i 时刻连续波峰间的时间间隔, 对应于该时刻频率 ν_i 的倒数, 而 $f(a_i)$ 是尺度因子 $a(t_i)$ 的任意函数。在标准宇宙学模型 (SMC) 中, 额外引入了一个基本假设: 光速保持恒定值 c 。这一假设源于广义相对论 (GR) 的理论框架, 其中 c 传统上被视为基本常数。因此, 宇宙时间膨胀 (CTD) 与不同时间切片 t_1 和 t_2 处尺度因子倒数 $a(t)$ 的关系可直接导出。然而, 这种关系并非源自基本物理定律。与之相对, 若如 meVSL 模型所假设的光速随时间变化, 则传统红移关系需进行修正。

在膨胀宇宙中, 从一个超曲面过渡到另一个超曲面会导致尺度因子增大, 这自然会引入质量密度、温度等多种物理量的宇宙学红移。但仅凭宇宙学原理 (CP) 和韦尔假设, 在 FLRW 度规框架下无法确证 CTD 的存在。相反, 验证此类关系需要依赖实验数据。旨在测量距离衰变时间的超新星 (SNe) 光变曲线和光谱直接观测, 为 CTD 测量研究提供了重要依据[82–89]。另一研究路径通过分析伽马射线暴 (GRBs) 峰间时标的延长来探索 CTD[90–98]。此外, 遥远类星体 (QSOs) 的光变曲线也被用于检验潜在的 CTD 效应[99–101]。尽管已有这些研究, 当前观测数据尚未明确证实 CTD 与 SMC 预测之间的关联。同时, FLRW 模型缺乏确证 CTD 的明确机制。因此, 只要结果与 SMC 预测相符, 在这些观测中探索变光速 (VSL) 的可能性仍具有重要价值。

鉴于 FLRW 模型理论上不包含 CTD, 若将该关系视为尺度因子的函数 $f(a)$, 则光速可表示为

$$\tilde{c}(t_1) = \frac{f(a_2)}{f(a_1)} \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \tilde{c}(t_2). \quad (6)$$

这表明,虽然VSL模型在GR中的普适性无法确证,但它作为FLRW度规描述的膨胀宇宙的自然结果而显现 meVSL模型是VSL的特例,由 $f(a) = a^{1-b/4}$ 定义[1, 2]。

IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量

我们通过最小作用量原理,利用EH作用量推导爱因斯坦场方程(EFEs) 在变光速(VSL)模型中,光速是宇宙时间的函数 然而,若仅有光速为变量,帕拉蒂尼恒等式项会导致无法正确恢复爱因斯坦场方程 为解决此问题,必须同时允许引力常数(\tilde{G})随宇宙时间变化,从而确保能从EH作用量获得正确的场方程形式[1] 这一条件保证了EH作用量中引力常数与光速的组合——即所谓的爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa} \equiv 8\pi\tilde{G}/\tilde{c}^4$ ——与宇宙时间无关。

VSL模型中的EH作用量可表述为

$$S \equiv \int \left[\frac{1}{2\tilde{\kappa}} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_i \right] \sqrt{-g} dt d^3x, \quad (7)$$

其中 $\mathcal{L}_i = \rho_i(1 + \omega_i)\tilde{c}^2$ 表示理想流体(即物质与辐射)的拉格朗日密度 后文将证明,在meVSL理论框架下,要确保从EH作用量恢复广义相对论的场方程,光速与引力常数必须同时发生宇宙学演化。

对作用量求逆度规变分并令其为零,可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\left[\frac{(R - 2\Lambda)}{2\tilde{\kappa}} \right] \delta(\sqrt{-g}) + \frac{1}{2\tilde{\kappa}} \sqrt{-g} \delta R \right) dt d^3x + \int \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) dt d^3x \\ &= \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - \tilde{\kappa} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x \\ &\quad + \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x. \end{aligned} \quad (8)$$

为保持爱因斯坦场方程的有效性,式(8)中的第二项(帕拉蒂尼恒等式项)必须为零 这意味着尽管 \tilde{c} 和 \tilde{G} 均随时间演化, $\tilde{\kappa}$ 必须保持恒定:

$$\tilde{\kappa} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{G}_0}{\tilde{c}_0^4} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{c}^4} \quad \text{if} \quad \tilde{c} = \tilde{c}_0 f(a), \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0 f(a)^4, \quad (9)$$

此处设 $a_0 = 1$, \tilde{c}_0 与 \tilde{G}_0 分别表示光速和引力常数的当前值 利用这些关系式,我们得到包含宇宙学常数的爱因斯坦场方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\tilde{G}}{\tilde{c}^4} T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

该方程保持了广义相对论中场方程的标准协变形式 这表明变光速理论可以被纳入广义相对论的协变框架,且不违反广义坐标变换下的基本对称性。

V. 爱因斯坦场方程

我们需要在变光速 (VSL) 模型框架下, 利用FLRW度规和理想流体推导爱因斯坦场方程 通过这些方程, 我们可以得到修正后的弗里德曼方程, 进而将其与标准模型的方程进行比较以分析差异。

A. 里奇张量与爱因斯坦张量

我们现在利用FLRW度规推导VSL模型的EFEs方程[1, 102] 由式 (4)给出的FLRW度规, 其克里斯托费尔符号 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 为

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) , \quad (11)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a\dot{a}}{\tilde{c}} \gamma_{ij} , \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{\tilde{c}} \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i , \quad \Gamma_{jk}^i = {}^s \Gamma_{jk}^i , \quad (12)$$

其中 ${}^s \Gamma_{jk}^i$ 表示空间度规 γ_{ij} 对应的克里斯托费尔符号 如式 (12)所示, VSL模型中的克里斯托费尔符号形式与广义相对论中相同, 唯一区别在于 \tilde{c} 是标度因子的函数。

描述流形曲率的黎曼曲率张量由下式给出

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\beta\mu} , \quad (13)$$

$$R^0_{i0j} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2} \left(a\ddot{a} - \dot{a}^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) , \quad R^i_{00j} = \frac{\delta^i_j}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) , \quad (14)$$

$$R^i_{jkm} = \frac{\dot{a}^2}{\tilde{c}^2} (\delta^i_k \gamma_{jm} - \delta^i_m \gamma_{jk}) + {}^s R^i_{jkm} , \quad {}^s R^i_{jkm} = k (\delta^i_k \gamma_{jm} - \delta^i_m \gamma_{jk}) . \quad (15)$$

虽然VSL模型中的克里斯托费尔符号形式与GR相同, 但黎曼曲率张量存在差异 这种差异源于黎曼曲率张量由克里斯托费尔符号的导数导出, 而后者包含时变光速 这导致修正项的出现, 例如 $H^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a}$ 因子同时出现在 R^0_{i0j} 和 R^i_{00j} 中。

测量沿测地线运动时空间变形的里奇曲率张量, 可通过收缩式 (14)和(15)中的黎曼曲率张量获得

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} , \quad (16)$$

$$R_{00} = -\frac{3}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) , \quad R_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2} a^2 \left(2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) . \quad (17)$$

\tilde{c} 的时变特性在 R_{00} 和 R_{ij} 中都引入了修正项。

最后, 通过对里奇张量求迹可获得里奇标量

$$R = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) , \quad (18)$$

其中光速时变效应在末项中清晰体现。

爱因斯坦张量定义如下

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (19)$$

利用先前推导的里奇张量 (17) 和里奇标量 (18), 我们可得爱因斯坦张量分量

$$G_{00} = \frac{3}{\tilde{c}^2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} \right], \quad G_{ij} = -\frac{g_{ij}}{\tilde{c}^2} \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right]. \quad (20)$$

这两个分量的BI关系可通过式 (20) 简单证明

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (21)$$

B. 能量动量张量

为了求解方程(10)给出的爱因斯坦场方程, 必须将应力-能量张量(SET)与来自方程(17)和(18)的几何量相结合。对于作为时空曲率来源的热力学平衡态理想流体, 其SET具有对称形式

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{\tilde{c}^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (22)$$

其中 ρ 表示质量密度, P 代表流体静压, $U^\mu = (\tilde{c}, \vec{0})$ 为四维速度。爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 满足一个关键几何恒等式——BI方程(21)以及度规兼容条件(即 $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$)。鉴于爱因斯坦引力常数 κ 的不变性, BI方程直接导出能量-动量局域守恒律

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3H \left(\rho_i + \frac{P_i}{\tilde{c}^2} \right) + 2\rho_i H \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = 0 \\ &\Rightarrow d \ln (\rho_i \tilde{c}^2) + 3(1 + \omega_i) d \ln a = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

此处 ω_i 为状态方程参数, 定义为 $\omega_i = (P_i/\tilde{c}^2)/\rho_i$ 。

求解方程(23)可得到能量密度的表达式

$$\rho_i \tilde{c}^2 = \rho_{i0} \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}, \quad (24)$$

其中 i 代表对应于辐射或物质的理想流体组分。

C. Friedmann 方程

将式 (17) 、(18) 、(22) 和 (24) 代入式 (10) 后,VSL 模型的爱因斯坦场方程可表述为

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} = \frac{8\pi \tilde{G}}{3} \sum_i \rho_i, \quad (25)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \Lambda \tilde{c}^2 - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = - \frac{8\pi \tilde{G}}{\tilde{c}^2} \sum_i P_i. \quad (26)$$

这些是VSL效应修正后的Friedmann方程 由式 (25) 和(26) 可得宇宙膨胀加速度的控制方程为

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi \tilde{G}}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_i + \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a}. \quad (27)$$

通过式 (9) 和(24) 重写哈勃参数 H 与加速度 \ddot{a}/a ,可得

$$H^2 = \left[\frac{8\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} - k \frac{\tilde{c}_0^2}{a^2} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} \equiv H^{(\text{GR})2} \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \left[- \frac{4\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} + H^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \\ &= \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^{(\text{GR})} + H^{(\text{GR})2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

这些方程描述了VSL框架下FLRW宇宙的背景演化 VSL模型中的哈勃膨胀率 H 相比广义相对论中的对应量 $H^{(\text{GR})}$ 多出一个因子 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 值得注意的是,虽然当前时刻的哈勃参数在广义相对论与VSL模型中保持一致,但其历史演化过程存在差异 过去更高的(或更低的)光速会导致按比例增大(或减小)的 H 值 这种独特的标度行为可能为哈勃张力问题提供解决方案。

此外,meVSL模型中宇宙膨胀加速度的修正主要来自两个关键效应:其一是反映 \tilde{c} 变化的附加项 $d \ln \tilde{c}/d \ln a$;其二是整体标度因子 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 对膨胀速率的修正 这些偏差凸显了meVSL框架引入的宇宙演化本质差异。

尽管如式 (28) 所示,meVSL模型给出的哈勃参数 $H(a)$ 与标准宇宙学模型 $H^{(\text{GR})}(a)$ 不同,但其哈勃半径

$$\frac{\tilde{c}(a)}{H(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H^{(\text{GR})}(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_{0i} a^{-3(1+w_i)} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}}}, \quad (30)$$

仍与标准模型保持一致 这是因为 $\tilde{c}(a)$ 的构建保持了时空因果结构不变 因此,当红移定义相同时,诸如光度距离和角直径距离等可观测量——作为红移函数对哈勃半径的

积分——在meVSL框架下将给出与标准模型相同的结果 [1] 这意味着局部测量的 H_0 (如SH0ES结果)与距离指标推算值之间的差异可能在meVSL方案中得到调和 [105] 然而,若 \tilde{c} 的变化影响其他物理常数(如精细结构常数 普朗克常数或钱德拉塞卡质量),则可能产生额外的观测效应 [1, 106],例如超新星距离模数的可检测差异或最后散射面位置的变化 关于这些影响的详细分析,读者可参阅文献 [1] 。

VI. 光速的运动方程

式 (7)给出的作用量明确包含了式 (18)中的Ricci标量以及理想流体项,其形式如下

$$S \equiv \int \left[\frac{1}{2\tilde{\kappa}} \left(\frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) + \sum_{i=r,m} \rho_i(1 + \omega_i) \tilde{c}^2 \right] \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (31)$$

在方程 (31)中,理想流体的拉格朗日量看似显式依赖于 \tilde{c} 然而根据理想流体的BI方程 (24)可以证明,该项与 \tilde{c} 无关

$$\rho_i(1 + \omega_i) \tilde{c}^2 = \rho_{i0}(1 + \omega_i) \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (32)$$

此外,由于爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa}$ 与时间无关(如式 (9)所示),式 (31)可改写为仅含 \tilde{c} 和 $\dot{\tilde{c}}$ 项的形式

$$S = \int \left[\frac{\tilde{c}_0^4}{16\pi\tilde{G}_0} \left(\frac{6}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) \right] \sqrt{-g} dt d^3x \equiv \int \frac{1}{2\tilde{\kappa}_0} R \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (33)$$

由式 (33)可导出关于 c 的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\tilde{c}}} - \frac{\partial R}{\partial \tilde{c}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = (c_1 + c_2 t)^{1/4}. \quad (34)$$

通常欧拉-拉格朗日方程应决定给定变量的动力学行为 但在求解 \tilde{c} 的方程时,我们发现它并未给出 \tilde{c} 本身的动力学方程,而是导致对 $a(t)$ 的约束条件 这意味着 \tilde{c} 并非独立的动力学自由度,而是作为强制 $a(t)$ 满足特定约束条件的参数 。

这表明 $a(t)$ 和 \tilde{c} 只有在满足特定条件时才能被重新解释为独立变量 这种关系揭示了 \tilde{c} 与 a 之间的强关联性,暗示 \tilde{c} 可能并非完全独立的物理量 \tilde{c} 的变化与我们定义时间的方式密切相关 如果 \tilde{c} 始终仅作为 $a(t)$ 的函数被确定,很可能是因为我们的时间定义已被固定为特定形式 因此,若能重新定义时间,我们或许可将 \tilde{c} 视为独立变量 反之,若无论时间变量如何选择 \tilde{c} 都依赖于 $a(t)$,则 \tilde{c} 本质上很可能是个因变量 。

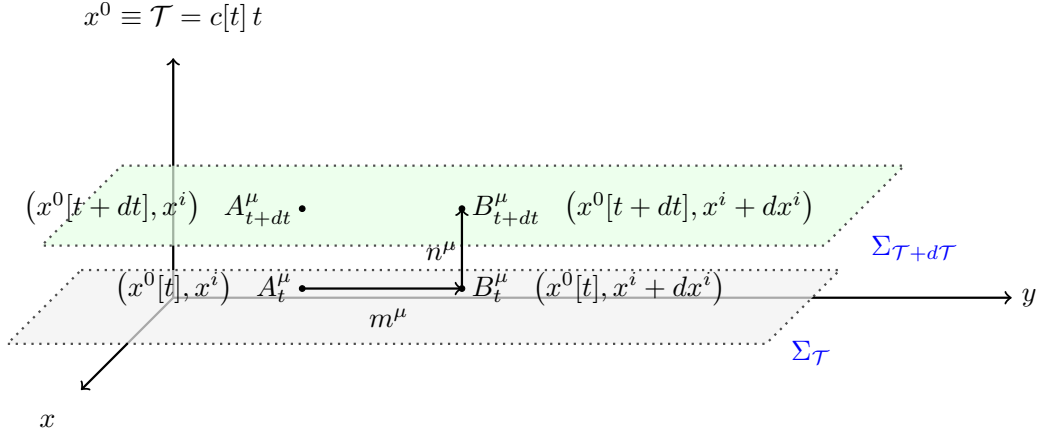


FIG. 2: 此图展示了RW度规框架下时空的叶状结构。超曲面 Σ 表示时间坐标 \mathcal{T} 的恒定值,对应不同的时间时刻。lapse函数控制这些超曲面之间的间距,确保法向量 $\bar{n} = n^\mu e_\mu$ 始终与它们保持正交。

在meVSL模型中,时移函数描述了 \tilde{c} 的变化。我们可将时移函数定义为 $N \equiv \tilde{c}/c$

$$\begin{aligned} x^0(t+dt) - x^0(t) &= (c[t+dt])(t+dt) - c(t)t \stackrel{\mathcal{O}(1)}{\approx} c[t]dt + dc[t]t \\ &= \left(1 + \frac{d \ln c}{d \ln t}\right) c[t]dt \equiv \tilde{c}[t]dt \equiv N[t]c[t]dt. \end{aligned} \quad (35)$$

通过时移函数表征 \tilde{c} 变化的能力意味着, \tilde{c} 的改变并非纯粹的物理动力学过程,而是依赖于所选时间变量的定义。因此 \tilde{c} 更可能是由坐标选择(时移函数)决定的量,而非独立变量。换言之,有必要重新考量:应将 \tilde{c} 视为独立的动力学自由度,还是应通过时移函数将其解释为坐标效应。

在meVSL模型中,时移函数表征了各超曲面上的时间流逝。若不存在确定时移函数的机制,则关于 \tilde{c} 的欧拉-拉格朗日方程并不描述动力学演化,而仅给出约束方程。 \tilde{c} 可通过时移函数表达的事实表明,它并非独立的动力学自由度,而是由坐标选择决定的量。因此,在没有额外机制固定时移函数的情况下, \tilde{c} 不能被视作真正的独立变量。

时移函数 $N(t)$ 决定了固有时间相对于给定时空叶层中坐标时间的流逝速率。在ADM分解中,它反映了时间切片的任意性,编码了空间超曲面间的时间推进方式。物理上,它设定了共动观测者体验的时钟速率,即时移的变化对应非平庸的时间规范。在meVSL框架下,这使我们能将有效光速 $\tilde{c}(t)$ 的时间依赖性解释为源于时移函数的选择,而非独立场动力学。这种解释保持了广义相对论的广义协变性,并将 \tilde{c} 的变化重新定义为坐标效应而非新物理学的

征兆。

VII. 结论与总结

本工作中,我们考察了Robertson-Walker度规下光速可变性的物理意义。研究表明, \tilde{c} 的变化并不必然意味着光速发生了根本性的物理改变,而是反映了与宇宙时间选择相关的坐标效应。

关键发现在于:RW度规中的宇宙时间与共动观测者的固有时相同——这一特性由Weyl公设保证。在此框架下,可变光速对应的是超曲面间钟速的变化,而非内在的物理演化。通过从包含 \tilde{c} 的作用量推导Euler-Lagrange方程,这一解释得到进一步验证。所得方程并不描述 c 自身的动力学,而是对尺度因子 $a(t)$ 的演化施加约束。这表明 \tilde{c} 并非独立自由度,而是依赖于宇宙时间流逝函数。

这种对VSL的重新诠释挑战了宇宙学中的传统假设。许多VSL模型认为 \tilde{c} 的变化代表时空物理的根本修改,常引入额外假设或机制来证明这种变化。然而我们的分析表明,这些变化可理解为坐标选择的结果,无需引入新物理。从这个角度看, \tilde{c} 的表观演化反映的是宇宙时间结构的参数化方式,而非光传播的实际改变。

综上所述,我们的研究结果表明VSL是宇宙时间的坐标依赖特征,而非物理定律的根本修改。这一认识为VSL模型及其宇宙学意义提供了新视角,特别是在宇宙膨胀和观测张力背景下。需要进一步研究该框架能否为现代宇宙学关键问题提供更一致、更自然的解决方案。

该方法也可能为当前观测张力(如哈勃张力或Ia型超新星时间膨胀异常)提供新解释,且无需引入新的动力学自由度。需进一步研究该框架能否一致重现宇宙学可观测量(如光度距离-红移关系),以及能否为标准宇宙学模型提供可行替代方案。作为规范选择,我们可以任意设定可变光速的形式为 $\tilde{c} = \tilde{c}_0 a^{b/4}$ 。通过将该参数化与Ia型超新星时间膨胀测量等宇宙学观测进行比较,可以检验 b 值是否偏离零。若观测数据支持 $b \neq 0$,则表明常用规范选择 $b = 0$ (对应标准宇宙学模型)可能未能准确描述宇宙的时间结构;反之若 $b = 0$ 仍被支持,则强化标准规范与观测的一致性。

Acknowledgments

本研究由韩国国家研究基金会(NRF)资助,教育部拨款(项目编号NRF-

-
- [1] S. Lee, JCAP **08**, 054 (2021) doi:10.1088/1475-7516/2021/08/054 [arXiv:2011.09274 [astro-ph.CO]].
 - [2] S. Lee, Found. Phys. **53**, 40 (2023) doi:10.1007/s10701-023-00682-1 [arXiv:2303.13772 [physics.gen-ph]].
 - [3] S. Lee, Particles **7**, no.2, 309-326 (2024) doi:10.3390/particles7020019 [arXiv:2406.02556 [physics.gen-ph]].
 - [4] S. Lee, Phys. Dark Univ. **42**, 101286 (2023) doi:10.1016/j.dark.2023.101286 [arXiv:2212.03728 [astro-ph.CO]].
 - [5] S. Lee, Class. Quant. Grav. **42**, no.2, 025026 (2025) doi:10.1088/1361-6382/ada2d5 [arXiv:2412.19049 [gr-qc]].
 - [6] P. P. Avelino and C. J. A. P. Martins, Phys. Lett. B **459** (1999), 468-472 doi:10.1016/S0370-2693(99)00694-2 [arXiv:astro-ph/9906117 [astro-ph]].
 - [7] J. A. Belinchon, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1669-1686 (2000) doi:10.1023/A:1003644614145 [arXiv:gr-qc/9907003 [gr-qc]].
 - [8] P. P. Avelino, C. J. A. P. Martins and G. Rocha, Phys. Lett. B **483** (2000), 210 doi:10.1016/S0370-2693(00)00567-0 [arXiv:astro-ph/0001292 [astro-ph]].
 - [9] M. Szydlowski and A. Krawiec, Phys. Rev. D **68**, 063511 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.063511 [arXiv:gr-qc/0212068 [gr-qc]].
 - [10] J. Magueijo, Rept. Prog. Phys. **66**, 2025 (2003) doi:10.1088/0034-4885/66/11/R04 [arXiv:astro-ph/0305457 [astro-ph]].
 - [11] H. Shojaie and M. Farhoudi, Can. J. Phys. **85**, 1395-1408 (2007) doi:10.1139/P07-132 [arXiv:gr-qc/0406027 [gr-qc]].
 - [12] H. Shojaie and M. Farhoudi, Can. J. Phys. **84**, 933-944 (2006) doi:10.1139/P06-070 [arXiv:gr-qc/0407096 [gr-qc]].
 - [13] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, Phys. Lett. B **728**, 15-18 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2013.11.029 [arXiv:1310.7231 [astro-ph.CO]].
 - [14] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, JCAP **06**, 035 (2014) doi:10.1088/1475-7516/2014/06/035 [arXiv:1406.0150 [astro-ph.CO]].

- [15] G. Franzmann, [arXiv:1704.07368 [gr-qc]].
- [16] E. T. Hanimeli, B. Lamine, A. Blanchard and I. Tutusaus, Phys. Rev. D **101**, no.6, 063513 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063513 [arXiv:1910.08325 [astro-ph.CO]].
- [17] F. Skara and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **101**, no.6, 063521 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063521 [arXiv:1911.10609 [astro-ph.CO]].
- [18] S. Bhattacharjee 与 P. K. Sahoo, 《欧洲物理杂志Plus》**135**, 第1期, 86页 (2020年) doi:10.1140/epjp/s13360-020-00116-1 [arXiv:2001.06569 [gr-qc]] °
- [19] R. P. Gupta, doi:10.1093/mnras/staa2472 [arXiv:2009.08878 [astro-ph.CO]] °
- [20] R. R. Cuzinatto R. P. Gupta R. F. L. Holanda J. F. Jesus 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**515**, 第4期, 5981-5992页 (2022年) doi:10.1093/mnras/stac2039 [arXiv:2204.10764 [gr-qc]] °
- [21] R. R. Cuzinatto R. F. L. Holanda 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**519**, 633-640页 (2023年) doi:10.1093/mnras/stac3267 [arXiv:2202.01371 [gr-qc]] °
- [22] R. R. Cuzinatto R. P. Gupta 和 P. J. Pompeia, 《对称性》**15**, 第3期, 709页 (2023年) doi:10.3390/sym15030709 [arXiv:2204.00119 [gr-qc]] °
- [23] M. Bileska, 《经典与量子引力》**41**, 第18期, 183001 (2024年) doi:10.1088/1361-6382/ad68f0
- [24] S. R. Coleman 和 S. L. Glashow, 《物理快报B》**405**, 249-252页 (1997年) doi:10.1016/S0370-2693(97)00638-2 [arXiv:hep-ph/9703240 [hep-ph]] °
- [25] A. Albrecht 和 J. Magueijo, 《物理评论D》**59**, 043516 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043516 [arXiv:astro-ph/9811018 [astro-ph]] °
- [26] J. D. Barrow 和 J. Magueijo, 《物理快报B》**443**, 104-110页 (1998年) doi:10.1016/S0370-2693(98)01294-5 [arXiv:astro-ph/9811072 [astro-ph]] °
- [27] J. D. Barrow, 《物理评论D》**59**, 043515 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043515
- [28] B. A. Bassett S. Liberati C. Molina-Paris 和 M. Visser, 《物理评论D》**62**, 103518 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103518 [arXiv:astro-ph/0001441 [astro-ph]] °
- [29] T. Jacobson 和 D. Mattingly, 《物理评论D》**64**, 024028 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.024028 [arXiv:gr-qc/0007031 [gr-qc]] °
- [30] J. Magueijo, 《物理评论D》**62**, 103521 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103521 [arXiv:gr-qc/0007036 [gr-qc]] °
- [31] M. A. Clayton 和 J. W. Moffat, 《物理快报B》**460**, 263-270页 (1999年) doi:10.1016/S0370-2693(99)00774-1 [arXiv:astro-ph/9812481 [astro-ph]] °

- [32] I. T. Drummond, [arXiv:gr-qc/9908058 [gr-qc]] °
- [33] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《物理快报B》**477**, 269-275页 (2000年) doi:10.1016/S0370-2693(00)00192-1 [arXiv:gr-qc/9910112 [gr-qc]] °
- [34] S. Liberati B. A. Bassett C. Molina-Paris 和M. Visser, 《核物理B辑增刊》**88**, 259-262页 (2000年) doi:10.1016/S0920-5632(00)00780-5 [arXiv:astro-ph/0001481 [astro-ph]] °
- [35] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《现代物理国际期刊D》**11**, 187-206页 (2002年) doi:10.1142/S0218271802001457 [arXiv:gr-qc/0003070 [gr-qc]] °
- [36] I. T. Drummond, 《物理评论D》**63**, 043503 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.63.043503 [arXiv:astro-ph/0008234 [astro-ph]] °
- [37] G. Amelino-Camelia J. R. Ellis N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《现代物理国际期刊A》**12**, 607-624页 (1997年) doi:10.1142/S0217751X97000566 [arXiv:hep-th/9605211 [hep-th]] °
- [38] G. Amelino-Camelia J. R. Ellis N. E. Mavromatos D. V. Nanopoulos 和S. Sarkar, 《自然》**393**, 763-765页 (1998年) doi:10.1038/31647 [arXiv:astro-ph/9712103 [astro-ph]] °
- [39] J. R. Ellis K. Farakos N. E. Mavromatos V. A. Mitsou 和D. V. Nanopoulos, 《天体物理学杂志》**535**, 139-151页 (2000年) doi:10.1086/308825 [arXiv:astro-ph/9907340 [astro-ph]] °
- [40] G. Amelino-Camelia 和T. Piran, 《物理评论D》**64**, 036005 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.036005 [arXiv:astro-ph/0008107 [astro-ph]] °
- [41] G. Amelino-Camelia, 《物理快报B》**510**, 255-263页 (2001年) doi:10.1016/S0370-2693(01)00506-8 [arXiv:hep-th/0012238 [hep-th]] °
- [42] J. R. Ellis N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《物理评论D》**63**, 124025 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.124025 [arXiv:hep-th/0012216 [hep-th]] °
- [43] J. Kowalski-Glikman, 《物理快报A》**286**, 391-394 (2001) doi:10.1016/S0375-9601(01)00465-0 [arXiv:hep-th/0102098 [hep-th]] °
- [44] N. R. Bruno G. Amelino-Camelia 和J. Kowalski-Glikman, 《物理快报B》**522**, 133-138 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)01264-3 [arXiv:hep-th/0107039 [hep-th]] °
- [45] J. Magueijo 和L. Smolin, 《物理评论快报》**88**, 190403 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.190403 [arXiv:hep-th/0112090 [hep-th]] °
- [46] G. Amelino-Camelia, 《现代物理国际期刊D》**11**, 1643 (2002) doi:10.1142/S021827180200302X [arXiv:gr-qc/0210063 [gr-qc]] °
- [47] J. Magueijo 和L. Pogosian, 《物理评论D》**67**, 043518 (2003)

- doi:10.1103/PhysRevD.67.043518 [arXiv:astro-ph/0211337 [astro-ph]] °
- [48] J. W. Moffat, 《现代物理国际期刊D》**2**, 351-366 (1993) doi:10.1142/S0218271893000246 [arXiv:gr-qc/9211020 [gr-qc]] °
- [49] S. N. Manida, [arXiv:gr-qc/9905046 [gr-qc]] °
- [50] J. D. Barrow 和J. Magueijo, 《天体物理学杂志快报》**532**, L87 (2000) doi:10.1086/312572 [arXiv:astro-ph/9907354 [astro-ph]] °
- [51] S. S. Stepanov, 《物理评论D》**62**, 023507 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.023507 [arXiv:astro-ph/9909311 [astro-ph]] °
- [52] J. Magueijo, 《物理评论D》**63**, 043502 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.043502 [arXiv:astro-ph/0010591 [astro-ph]] °
- [53] J. W. Moffat, [arXiv:hep-th/0208122 [hep-th]] °
- [54] G. Kaelbermann 和H. Halevi, [arXiv:gr-qc/9810083 [gr-qc]] °
- [55] L. Randall 和R. Sundrum, 《物理评论快报》**83**, 3370-3373 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370 [arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph]] °
- [56] L. Randall 和R. Sundrum, 《物理评论快报》**83**, 4690-4693 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [arXiv:hep-th/9906064 [hep-th]] °
- [57] E. Kiritsis, 《高能物理杂志》**10**, 010 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/10/010 [arXiv:hep-th/9906206 [hep-th]] °
- [58] D. J. H. Chung 和K. Freese, 《物理评论D》**62**, 063513 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.063513 [arXiv:hep-ph/9910235 [hep-ph]] °
- [59] S. H. S. Alexander, 《高能物理杂志》**11**, 017 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/11/017 [arXiv:hep-th/9912037 [hep-th]] °
- [60] H. Ishihara, 《物理评论快报》**86**, 381-384 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.86.381 [arXiv:gr-qc/0007070 [gr-qc]] °
- [61] C. Csaki J. Erlich 和C. Grojean, 《核物理B》**604**, 312-342 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00175-4 [arXiv:hep-th/0012143 [hep-th]] °
- [62] D. Youm, 《物理评论D》**63**, 125011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.125011 [arXiv:hep-th/0101228 [hep-th]] °
- [63] D. Youm, 《物理评论D》**64**, 085011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.64.085011 [arXiv:hep-th/0102194 [hep-th]] °
- [64] C. Grojean F. Quevedo G. Tasinato 和I. Zavala, 《高能物理杂志》**08**, 005 (2001)

- doi:10.1088/1126-6708/2001/08/005 [arXiv:hep-th/0106120 [hep-th]] °
- [65] D. Youm, [arXiv:hep-th/0108237 [hep-th]] °
- [66] I. T. Drummond 和 S. J. Hathrell, 《物理评论D》**22**, 343 (1980)
doi:10.1103/PhysRevD.22.343
- [67] M. Novello 和 S. D. Jorda, 《现代物理快报A》**4**, 1809 (1989) doi:10.1142/S0217732389002045
- [68] G. Barton, 《物理快报B》**237**, 559-562 (1990) doi:10.1016/0370-2693(90)91224-Y
- [69] K. Scharnhorst, 物理快报B **236**, 第3期, 354-359 (1990) [勘误:物理快报B **787**, 204-204 (2018)] doi:10.1016/0370-2693(90)90997-K
- [70] G. M. Shore, 核物理B **460**, 379-396 (1996) doi:10.1016/0550-3213(95)00646-X [arXiv:gr-qc/9504041 [gr-qc]].
- [71] D. Colladay 与 V. A. Kostelecky, 物理评论D **52**, 6224-6230 (1995)
doi:10.1103/PhysRevD.52.6224 [arXiv:hep-ph/9510365 [hep-ph]].
- [72] S. R. Coleman 和 S. L. Glashow, 物理评论D **59**, 116008 (1999)
doi:10.1103/PhysRevD.59.116008 [arXiv:hep-ph/9812418 [hep-ph]].
- [73] O. Bertolami 与 C. S. Carvalho, 物理评论D **61**, 103002 (2000)
doi:10.1103/PhysRevD.61.103002 [arXiv:gr-qc/9912117 [gr-qc]].
- [74] G. M. Shore, 核物理B **605**, 455-466 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00137-7 [arXiv:gr-qc/0012063 [gr-qc]].
- [75] O. W. Greenberg, 物理评论快报**89**, 231602 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.89.231602
[arXiv:hep-ph/0201258 [hep-ph]].
- [76] P. Teyssandier, 布罗意基金会年鉴**29**, 173 (2004) [arXiv:gr-qc/0303081 [gr-qc]].
- [77] G. M. Shore, 当代物理**44**, 503-521 (2003) doi:10.1080/00107510310001617106 [arXiv:gr-qc/0304059 [gr-qc]].
- [78] M. Blasone, J. Magueijo 和 P. Pires-Pacheco, 欧洲物理快报**70**, 600 (2005)
doi:10.1209/epl/i2005-10027-1 [arXiv:hep-ph/0307205 [hep-ph]].
- [79] S. Alexander, R. Brandenberger 和 J. Magueijo, 物理评论D **67**, 081301 (2003)
doi:10.1103/PhysRevD.67.081301 [arXiv:hep-th/0108190 [hep-th]].
- [80] C. P. Burgess, J. M. Cline, E. Filotas, J. Matias 和 G. D. Moore, 高能物理杂志**03**, 043 (2002)
doi:10.1088/1126-6708/2002/03/043 [arXiv:hep-ph/0201082 [hep-ph]].
- [81] L. Ryder, 广义相对论导论 (剑桥大学出版社, 2009).
- [82] B. Leibundgut, 天体物理学报快报**466**, L21 (1996) doi:10.1086/310164 [arXiv:astro-

- ph/9605134 [astro-ph]].
- [83] A. G. Riess 等[超新星搜索团队], 天文学杂志**114**, 722 (1997) doi:10.1086/118506 [arXiv:astro-ph/9707260 [astro-ph]].
 - [84] R. J. Foley, A. V. Filippenko, D. C. Leonard, A. G. Riess, P. Nugent 和 S. Perlmutter, 天体物理学报快报**626**, L11-L14 (2005) doi:10.1086/431241 [arXiv:astro-ph/0504481 [astro-ph]].
 - [85] S. Blondin 和 J. L. Tonry, 天体物理学报**666**, 1024-1047 (2007) doi:10.1086/520494 [arXiv:0709.4488 [astro-ph]].
 - [86] S. Blondin, T. M. Davis, K. Krisciunas, B. P. Schmidt, J. Sollerman, W. M. Wood-Vasey, A. C. Becker, P. Challis, A. Clocchiatti 和 G. Damke 等, 天体物理学报**682**, 724-736 (2008) doi:10.1086/589568 [arXiv:0804.3595 [astro-ph]].
 - [87] S. Lee, 皇家天文学会月刊**524**, 第3期, 4019-4023 (2023) doi:10.1093/mnras/stad2084 [arXiv:2302.09735 [astro-ph.CO]].
 - [88] R. M. T. White 等[DES], 皇家天文学会月刊**533**, 第3期, 3365-3378 (2024) doi:10.1093/mnras/stae2008 [arXiv:2406.05050 [astro-ph.CO]].
 - [89] S. Lee, 暗物质物理**46**, 101703 (2024) doi:10.1016/j.dark.2024.101703 [arXiv:2407.09532 [physics.gen-ph]].
 - [90] J. P. Norris, R. J. Nemiroff, J. D. Scargle, C. Kouveliotou, G. J. Fishman, C. A. Meegan, W. S. Paciesas 和 J. T. Bonnell, 天体物理学报**424**, 540 (1994) doi:10.1086/173912 [arXiv:astro-ph/9312049 [astro-ph]].
 - [91] R. A. M. J. Wijers 和 B. Paczynski, 天体物理学报快报**437**, L107 (1994) doi:10.1086/187694 [arXiv:astro-ph/9406007 [astro-ph]].
 - [92] D. Band, 天体物理学报快报**432**, L23 (1994) doi:10.1086/187502 [arXiv:astro-ph/9407007 [astro-ph]].
 - [93] A. Meszaros 和 P. Meszaros, 《天体物理学报》**466**, 29 (1996) doi:10.1086/177491 [arXiv:astro-ph/9512164 [astro-ph]]。
 - [94] T. T. Lee 和 V. Petrosian, 《天体物理学报》**474**, 37 (1997) doi:10.1086/303458 [arXiv:astro-ph/9607127 [astro-ph]]。
 - [95] H. Y. Chang, 《天体物理学报快报》**557**, L85 (2001) doi:10.1086/323331 [arXiv:astro-ph/0106220 [astro-ph]]。
 - [96] D. F. Crawford, [arXiv:0901.4169 [astro-ph.CO]]。
 - [97] F. W. Zhang Y. Z. Fan L. Shao 和 D. M. Wei, 《天体物理学报快报》**778**, L11 (2013)

- doi:10.1088/2041-8205/778/1/L11 [arXiv:1309.5612 [astro-ph.HE]] °
- [98] A. Singh 和S. Desai, 《宇宙学与天体粒子物理学报》**02**, no.02, 010 (2022) doi:10.1088/1475-7516/2022/02/010 [arXiv:2108.00395 [astro-ph.HE]] °
- [99] M. R. S. Hawkins, 《天体物理学报快报》**553**, L97 (2001) doi:10.1086/320683 [arXiv:astro-ph/0105073 [astro-ph]] °
- [100] D. C. Dai G. D. Starkman B. Stojkovic D. Stojkovic 和A. Weltman, 《物理评论快报》**108**, 231302 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.231302 [arXiv:1204.5191 [astro-ph.CO]] °
- [101] G. F. Lewis 和B. J. Brewer, 《自然·天文学》**7**, no.10, 1265-1269 (2023) doi:10.1038/s41550-023-02029-2 [arXiv:2306.04053 [astro-ph.CO]] °
- [102] S. Lee, [arXiv:2504.07975 [astro-ph.CO]] °
- [103] S. Lee, 《宇宙》**10**, no.6, 268 (2024) doi:10.3390/universe10060268 [arXiv:2101.09862 [astro-ph.CO]] °
- [104] S. Lee, 《皇家天文学会月报》**522**, no.3, 3248-3255 (2023) doi:10.1093/mnras/stad1190 [arXiv:2301.06947 [astro-ph.CO]] °
- [105] S. Lee, 《天文学》**3**, 100-113 (2024) doi:10.3390/astronomy3020007 [arXiv:2406.05990 [physics.gen-ph]] °
- [106] S. Lee, [arXiv:2108.06043 [astro-ph.CO]] °