

# 重审宇宙学中的光速可变性：基于弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克度规的新见解

Seokcheon Lee\*

*Department of Physics, Institute of Basic Science,  
Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea*

(Received)

## Abstract

在弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克度规中，光速可变（VSL）现象反映了超曲面上时钟速率的变化，这种变化由时移函数描述。该变化并非动力学场的演化，而是坐标选择的结果——由于外尔公设，宇宙时间与共动观测者的固有时保持一致。基于包含 $\tilde{c}$ 的作用量原理，我们推导出 $\tilde{c}$ 本身不具有动力学特性，而是对尺度因子 $a(t)$ 施加约束，表明其并非独立的自由度。这一认识将VSL概念重新阐释为广义相对论中规范自由度的体现，物理定律在光滑坐标变换下保持不变的特性在此得以彰显。此处的规范自由度特指时间坐标的选择自由（例如设定时移函数 $N(t) \neq 1$ ），它决定了光速在宇宙学方程中的表现形式。将 $\tilde{c}$ 理解为坐标依赖量，为重新诠释宇宙学时间及观测矛盾（如哈勃张力）提供了新视角，而无需引入新的物理场。这种重新定义在相对论框架的一致性范围内，开辟了解读宇宙膨胀的新理论路径。

---

\*Electronic address: [skylee@skku.edu](mailto:skylee@skku.edu)

## Contents

I. 引言	1
II. 现有变光速理论概述	2
III. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 度规	4
IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量	7
V. 爱因斯坦场方程	8
A. 里奇张量与爱因斯坦张量	8
B. 能量动量张量	9
C. 弗里德曼方程	10
VI. 光速的运动方程	11
VII. 结论与总结	13
Acknowledgments	13
References	14

## I. 引言

最小扩展变光速（meVSL）模型是在遵循宇宙学原理（CP）的弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克（FLRW）度规框架下建立的，该原理要求宇宙在大尺度上保持空间均匀性和各向同性[1–3]。这一原理要求支配宇宙的物理定律不能引入优先方向或位置。维持这些对称性的关键要素是绝热性的守恒，因为宇宙介质中的任何净能流都会建立一个优先参考系，从而破坏各向同性[4]。

在meVSL模型中，光速随宇宙时间的演化必须伴随其他基本物理常数的相应变化，以确保理论框架的内在一致性。特别是普朗克常数必须与变化的光速协调演化，以保持解释绝热膨胀所需的量子力学和热力学基本关系[4]。更广泛地说，包括电磁相互作用和相对论动力学在内的其他物理量的宇宙演化必须被诱导，以保持与所有局部验证的物理定律（如狭义相对论和麦克斯韦方程组）的兼容性[1–4]。

与传统VSL理论不同（后者通常需要显式机制来驱动 $\tilde{c}$ 作为宇宙尺度因子 $a(t)$ 的函数变化），meVSL模型不需要这种特设性规定。相反，它引入了宇宙时间膨胀（CTD）的广义条件，使得时间依赖的光速变化成为自然结果。在meVSL模型中，时移函数决定了超曲面间时钟速率的差异，反映了光速随时间的变化[5]。meVSL框架并非修改FLRW度规本身，而是允许 $\tilde{c}$ 的变化从宇宙时间的底层结构中动态涌现，而不强加特定的函数形式 $\tilde{c}(a)$ 。

这一特征使meVSL区别于传统VSL模型——后者往往假设或需要驱动光速演化的显式机制[6–80]。通过将基本常数的变化嵌入宇宙膨胀和时间膨胀的更广泛背景中，meVSL模型为探索膨胀宇宙中非固定光速的影响提供了更广义且自洽的方法。

本文结构如下：第2节简要概述现有VSL模型；第3节在meVSL模型背景下引入FLRW度规，作为分析基础；第4节讨论爱因斯坦-希尔伯特（EH）作用量，提供推导场方程的理论框架；第5节推导爱因斯坦场方程（EFEs），包括里奇张量、爱因斯坦张量、能量-动量张量和弗里德曼方程；第6节专述光速运动方程，探讨其在meVSL框架下的含义；最后第6节总结研究成果并讨论其广泛意义。

## II. 现有变光速理论概述

过去数十年来，学界提出了多种实现变光速（VSL）的理论框架，主要可分为以下几类：

- **洛伦兹对称性的硬性破坏**：这类模型通过引入时空中的优先参考系或绝对结构，显式违反洛伦兹不变性[24–30]。虽然能直接实现光速 $c$ 的变化，但通常面临严重的理论困境，例如与相对性原理的冲突以及构建自洽量子场论的困难。
- **双度量变光速理论**：此类模型引入两种不同的度量：一种用于引力现象，另一种用于光子传播[31–36]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为引力子度量， $\hat{g}_{\mu\nu}$ 为物质度量， $\phi$ 为标量场。尽管保留了部分引力结构，双度量理论通常会引入额外的自由度，使得动力学方程复杂化，并引发稳定性和因果性问题。

- **色依赖光速理论**：该框架允许光速随光子频率变化，导致真空色散关系[37–47]。然而，此类色依赖变化受到天体物理观测（如伽马射线暴与引力波对应体）的严格限制，削弱了其理论可行性。

TABLE I: 代表性VSL理论与meVSL框架的对比。

Model	Variation Mechanism	Dyn	LI	New Fields	GR Co- variance	Obs. Target	References
Hard Lorentz breaking	Preferred frame with $c(t)$ imposed explicitly	✗/✓	✗	✗/✓	✗	Conceptual variation	[24–30]
Bimetric VSL	$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$	✓	Partial	✓	Partial	Propagation delay	[31–36]
Color-dependent VSL	$c(\nu)$ varies by frequency due to vacuum dispersion	✗	✗	✗	✗	High-energy astrophysics	[37–47]
Lorentz-invariant VSL	$c(x^\mu)$ as a scalar field in covariant framework	✓	✓	✓	✗	Model-dependent	[48–53]
String/M-theory	$c$ varies via compactification or brane motion	✓	✓	✓	Partial	Early-universe physics	[54–65]
Field-theory VSL	$c = c(\phi)$ via scalar field $\phi$	✓	Model-dep.	✓	✗	CMB, LSS, BBN	[66–78]
Hybrid models	Combine metric and scalar field frameworks	✓	Model-dep.	✓	Model-dep.	Mixed datasets	[79, 80]
meVSL	Lapse function $N(t)$ chosen via coordinate freedom $\Rightarrow \tilde{c}(t)$	✗	✓	✗	✓	CTD, $H_0$ tension	[1, 87, 89, 103–105]

• 洛伦兹不变变光速理论:

可以构建保持洛伦兹不变性本质的可变光速（VSL）理论。一种由Moffat [48]提出的方法涉及局域洛伦兹对称性的自发破缺，其中洛伦兹标量场获得类时真空期望值，从而选定一个优先参考系并将 $O(3, 1)$ 对称性破缺至 $O(3)$ 。在此框架下，光速经历相变至当前较小值，而自发破缺方向为时间箭头与热力学第二定律提供了物理解释。另一方法 [30]则定义了协变且局域洛伦兹不变的场论，通过标量场 $\psi = \log(c/c_0)$ 实现光速变化。根据模型参数，这些理论既可能与标量-张量理论等价，也可能定义全新的理论框架。此类模型中，宇宙学常数 $\Lambda$ 可随 $c$ 变化并作为 $\psi$ 的势函数，通常满足 $\Lambda \propto (c/c_0)^n$ 标度关系[49–53]。

• 弦论/M理论方案: 在弦论或M理论中， $c$ 的变化可自然产生于额外维动力学或演化

标量场（模场）[54–65]。尽管这些场景具有理论吸引力，但其高度依赖于紧致化方案与稳定机制的假设，其中许多仍属推测性质。

- **场论VSL预言**: 此类方法将 $c$ 视为由动力学标量场调控的有效耦合常数[66–78]。虽然更贴近标准场论技术，但要确保规范不变性与标准模型的兼容性仍需复杂构造。
- **混合模型**: 部分模型融合上述要素，例如采用双度规结构与动力学标量场的组合[79, 80]。这些混合方案试图平衡各类优势，但往往同时继承多类别的理论挑战。

上述各类模型均面临非平庸的理论障碍，尤其在保持基本对称性与观测数据一致性方面。相较之下，meVSL模型通过时移函数引入 $\tilde{c}$ 的变化，将 $\tilde{c}$ 的改变诠释为坐标效应而非引入新的物理自由度。这使得meVSL能在每一时刻保持CP对称性与相对性原理，提供了比传统VSL模型更简洁且对称的理论框架。表 I总结了前述VSL模型与meVSL模型的差异。其中**Dyn**表示光速是否作为场方程支配的动力学量，**LI**指洛伦兹不变性，**Obs.****Target**则标识各模型旨在解释的主要观测现象。

### III. FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER 度规

FLRW度规建立在宇宙学原理(CP)之上，该原理假定宇宙在任意时刻都具有均匀性和各向同性。从数学角度而言，这意味着生成空间各向同性与均匀性的基灵矢量(KVs)的李导数必须为零，从而确保度规在平移和旋转变换下保持不变[3, 81]。给定时刻 $t'_l$ 下各向同性均匀空间的广义度规可表述为

$$g_{\mu\nu}^{(\text{CP})}(t'_l) = \text{diag} \left( g_{00}(t'_l), \frac{A(t'_l)}{1 - Kr^2}, A(t'_l)r^2, A(t'_l)r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2)$$

对应的四维线元表达式为

$$ds^2(t'_l) = c_l^2 g_{00}(t'_l) dt'^2_l + A(t'_l) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3)$$

其中 $A(t'_l)(= a^2(t'_l))$ 表示尺度因子的平方，而 $g_{00}(t'_l)$ 显式地由 $-g_{00}(t'_l) \equiv N^2(t'_l)$ 给出，这里 $N(t'_l)$ 是时移函数[5, 81]。通过采用外尔假设将式 (3)描述的度规推广到宇宙时 $t$ ，可将线元表示为

$$ds^2 = -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \equiv -\tilde{c}(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dl_{3D}^2, \quad (4)$$

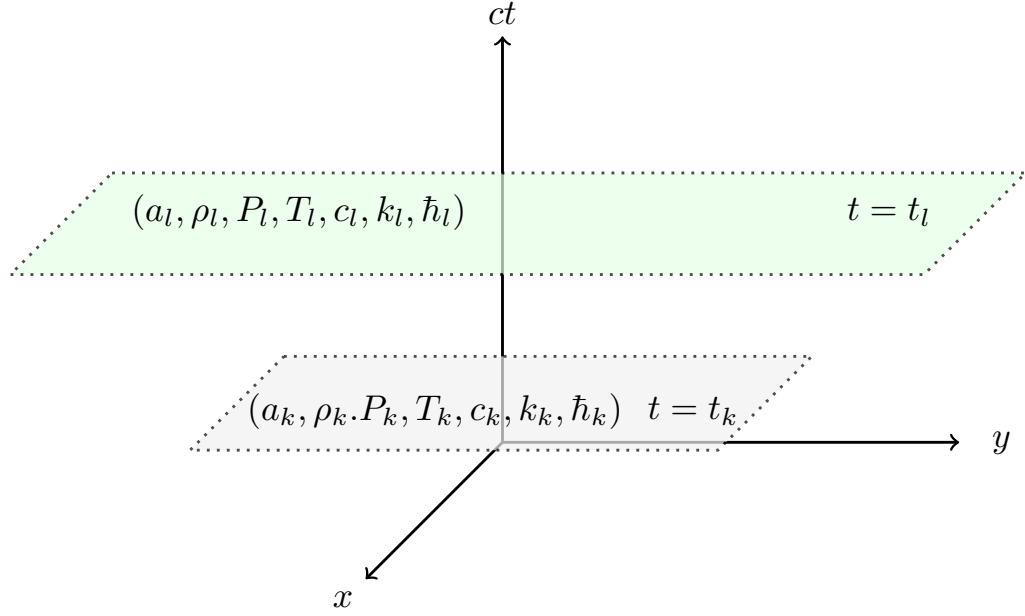


FIG. 1: 在 $t = t_k$  时刻，物理量和常数的值（如 $a_k$ 、 $\rho_k$ 、 $P_k$ 、 $T_k$ 、 $\tilde{c}_k$ 、 $k_k$  和 $\hbar_k$ ）是固定的，且在 $t = t_k$  超曲面上与空间位置无关。随着宇宙膨胀，这些量和常数会过渡到 $a_l$ 、 $\rho_l$ 、 $P_l$ 、 $T_l$ 、 $\tilde{c}_l$ 、 $k_l$  和 $\hbar_l$ 。宇宙学原理与外尔假设并不限制 $c_k$  必须等于 $c_l$ ，其值由CTD 关系决定。

其中光速被视为时间的函数，这与标准FLRW度规中的传统处理方式不同（即 $N = 1$ ）。初看之下，这种表述可能显得非常规甚至错误。然而如图 1所示，标准FLRW度规暗示在 $t_l$ 或 $t_k$ 为常数的超曲面上，各类物理量——包括尺度因子 $a_l = a(t_l)$ 、质量密度 $\rho_l$ 、压强 $P_l$ 、温度 $T_l$ 、光速 $\tilde{c}_l$ 、玻尔兹曼常数 $k_l$ 以及普朗克常数 $\hbar_l$ ——在三维空间所有位置均保持恒定。但根据外尔假设，这些量可演化为宇宙时 $t$ 的函数，从而体现宇宙学红移效应，如图1所示。

传统宇宙学模型通常假定包括光速在内的物理常数不随时间变化。然而这种认为 $\tilde{c}_l$ 在宇宙时标上恒等于 $\tilde{c}_k$ 的假设，并非推导FLRW度规的两个基本条件（即CP和外尔假设）的内在要求。实际上，光速不变性与共形时间导数(CTD)相关。值得注意的是，广义相对论(GR)并未规定任何要求光速保持不变的基律。当宇宙从 $t_k$ 演化至 $t_l$ 时，诸如 $a(t)$ 、 $\rho(t)$ 、 $P(t)$ 和 $T(t)$ 等物理参数将作为时间函数演化，其具体行为需通过求解爱因斯坦场方程(EFEs)和比安基恒等式(BI)，并考虑宇宙流体的状态方程(e.o.s)来确定。



宇宙学中可观测量通常不表述为宇宙时 $t$ 的函数，而是表示为宇宙学红移 $z$ 或等效尺度因子 $a(t) = 1/(1+z)$ 的函数。例如波长、温度等量会因宇宙膨胀而发生红移，这反映了时空的几何特性。由此视角出发，若具有量纲的观测量会自然地随红移演化，那么考虑某些物理常数（特别是光速 $\tilde{c}$ ）也可能表达为红移函数就具有合理性。

FLRW度规中时间坐标由 $x^0 = ct$ 给出，这表明若时移函数未被固定，组合量 $\tilde{c}(t)$ 可如式 (35)所示被解释为函数而非常数。这为在标准宇宙学模型中引入可变光速提供了理论可能性——无需新增动力学场，而是通过GR内禀的规范自由度实现[5]。这种诠释构建了一个框架，其中传统上归因于常数 $\tilde{c}$ 的效应可能源于坐标选择，从而为宇宙学现象提供新见解。

红移的推导源自光波传播的测地线方程，其中 $ds^2 = 0$ 条件如式 (4)所示。在共动坐标系中，空间间隔 $dl_{3D}$ 随时间保持恒定[3, 5]。基于此框架，径向光传播表达式为

$$dl_{3D} = \frac{c(t_i)dt_i}{a(t_i)} \quad : \quad \frac{\tilde{c}_1 dt_1}{a_1} = \frac{\tilde{c}_2 dt_2}{a_2} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = c & \text{if } \frac{dt_1}{a_1} = \frac{dt_2}{a_2} & \text{SMC} \\ \tilde{c}_1 = \frac{f(a_2)}{f(a_1)} \frac{a_1}{a_2} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{f(a_1)} = \frac{dt_2}{f(a_2)} & \text{VSL} \\ \tilde{c}_1 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{b}{4}} \tilde{c}_2 & \text{if } \frac{dt_1}{a_1^{1-\frac{b}{4}}} = \frac{dt_2}{a_2^{1-\frac{b}{4}}} & \text{meVSL} \end{cases} , \quad (5)$$

其中 $dt_i = 1/\nu(t_i)$ 表示 $t_i$ 时刻连续波峰间的时间间隔（对应该时刻频率 $\nu_i$ 的倒数）， $f(a_i)$ 为尺度因子 $a(t_i)$ 的任意函数。在标准宇宙学模型（SMC）中，存在一个附加假设：光速保持恒定值 $c$ 。这一假设源于广义相对论（GR）框架，其中 $c$ 传统上被视为基本常数。因此，不同时间切片 $t_1$ 和 $t_2$ 下宇宙时间膨胀（CTD）与尺度因子倒数 $a(t)$ 的关系可直接得出。然而，这种关系并非源自基本物理定律。相反，若如meVSL模型所提出的光速随时间变化，则传统的红移关系需进行修正。

在膨胀宇宙中，从一个超曲面过渡到另一个超曲面会导致尺度因子增大，这自然会引引起质量密度、温度等多种物理量的宇宙学红移。但仅凭宇宙学原理（CP）和韦尔假设，在FLRW度规框架内无法最终确定CTD。确认此类关系需要实验数据支撑。旨在评估距离衰减时间的超新星（SNe）光变曲线和光谱的直接观测，为测量CTD做出了贡献[82–89]。另一研究路径通过分析伽马射线暴（GRBs）峰间时间尺度的延长来探索CTD[90–98]。此外，遥远类星体（QSOs）的光变曲线也被用于检验潜在的CTD效应[99–101]。尽管存在这些努力，当前观测数据尚未明确证实CTD与SMC预测之间的关系。同时，FLRW模型缺乏确定CTD的明确机制。因此，只要结果与SMC预测相符，在这些观测中探索变光速（VSL）的可能性仍具价值。

鉴于FLRW模型理论上不存在CTD，若将该关系视为尺度因子的函数 $f(a)$ ，则光速可表示为

$$\tilde{c}(t_1) = \frac{f(a_2)}{f(a_1)} \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \tilde{c}(t_2). \quad (6)$$

这表明，虽然无法断言VSL模型在GR中的普适性应用，但它作为FLRW度规描述的膨胀宇宙的自然结果而出现。meVSL模型是VSL的特例，由 $f(a) = a^{1-b/4}$ 定义[1, 2]。

#### IV. 爱因斯坦-希尔伯特作用量

我们通过最小作用量原理，利用EH作用量推导爱因斯坦场方程(EFEs)。在变光速(VSL)模型中，光速是宇宙时间的函数。然而，若仅有光速是变量，帕拉蒂尼恒等式项会导致无法正确恢复EFEs。为解决此问题，必须让引力常数( $\tilde{G}$ )也随宇宙时间变化，从而确保能从EH作用量获得正确的EFEs形式[1]。这一条件保证了EH作用量中引力常数与光速的组合——即所谓的爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa} \equiv 8\pi\tilde{G}/\tilde{c}^4$ ——保持与宇宙时间无关。VSL模型中的EH作用量可表述为

$$S \equiv \int \left[ \frac{1}{2\tilde{\kappa}} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_i \right] \sqrt{-g} dt d^3x, \quad (7)$$

其中 $\mathcal{L}_i = \rho_i(1 + \omega_i)\tilde{c}^2$ 表示理想流体（即物质与辐射）的拉格朗日密度。我们将证明，在meVSL理论框架下，要使广义相对论的EFEs能从EH作用量导出，光速和引力常数都必须随宇宙演化。作用量对逆变度规的变分必须为零，由此可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left( \left[ \frac{(R - 2\Lambda)}{2\tilde{\kappa}} \right] \delta(\sqrt{-g}) + \frac{1}{2\tilde{\kappa}} \sqrt{-g} \delta R \right) dt d^3x + \int \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_i) dt d^3x \\ &= \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - \tilde{\kappa} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x \\ &\quad + \int \frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{\kappa}} [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] \delta g^{\mu\nu} dt d^3x. \end{aligned} \quad (8)$$

为保持EFEs不变，式(8)中第二项（帕拉蒂尼恒等式项）必须消失。这意味着尽管 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{G}$ 都随宇宙时间演化， $\tilde{\kappa}$ 必须保持恒定

$$\tilde{\kappa} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{G}_0}{\tilde{c}_0^4} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{c}^4} \quad \text{if} \quad \tilde{c} = \tilde{c}_0 f(a), \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0 f(a)^4, \quad (9)$$

此处设 $a_0 = 1$ ， $\tilde{c}_0$ 和 $\tilde{G}_0$ 分别表示光速和引力常数的当前值。利用这些关系，我们得到包含宇宙学常数的EFEs

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\tilde{G}}{\tilde{c}^4} T_{\mu\nu}, \quad (10)$$



该方程保持了广义相对论中EFEs的标准协变形式。这表明变光速理论可以被纳入广义相对论的协变框架，而不违反其在广义坐标变换下的基本对称性。

## V. 爱因斯坦场方程

我们需要在变光速（VSL）模型的框架下，利用FLRW度规和理想流体推导爱因斯坦场方程。通过这些方程，我们可以得到修正后的弗里德曼方程，进而将其与标准模型的方程进行对比以分析差异。

### A. 里奇张量与爱因斯坦张量

我们现在利用FLRW度规[1, 102]推导VSL模型的EFEs。方程 (4)中FLRW度规的克里斯托费尔符号 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 由下式给出

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}), \quad (11)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a\dot{a}}{\tilde{c}}\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{\tilde{c}}\frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = {}^s\Gamma_{jk}^i, \quad (12)$$

其中 ${}^s\Gamma_{jk}^i$ 表示空间度规 $\gamma_{ij}$ 对应的克里斯托费尔符号。如方程 (12)所示，VSL模型中的克里斯托费尔符号形式与广义相对论相同，唯一区别在于 $\tilde{c}$ 是尺度因子的函数。

描述流形曲率的黎曼曲率张量由下式给出

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}, \quad (13)$$

$$R^0{}_{i0j} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2} \left( a\ddot{a} - \dot{a}^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right), \quad R^i{}_{00j} = \frac{\delta^i{}_j}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right), \quad (14)$$

$$R^i{}_{jkm} = \frac{\dot{a}^2}{\tilde{c}^2} (\delta^i{}_k \gamma_{jm} - \delta_m^i \gamma_{jk}) + {}^sR^i{}_{jkm}, \quad {}^sR^i{}_{jkm} = k (\delta_k^i \gamma_{jm} - \delta_m^i \gamma_{jk}). \quad (15)$$

虽然VSL模型中的克里斯托费尔符号与广义相对论形式相同，但黎曼曲率张量存在差异。这种差异源于黎曼曲率张量由克里斯托费尔符号的导数导出，而后者包含时变光速。这导致修正项的出现，例如 $H^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a}$ 因子同时出现在 $R^0{}_{i0j}$ 和 $R^i{}_{00j}$ 中。

测量沿测地线运动时空间形变的里奇曲率张量，可通过收缩方程 (14)和(15)中的黎曼曲率张量获得

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}, \quad (16)$$

$$R_{00} = -\frac{3}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right), \quad R_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\tilde{c}^2} a^2 \left( 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k\frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right). \quad (17)$$

$\tilde{c}$ 的时变特性在 $R_{00}$ 和 $R_{ij}$ 中均引入了修正项。

最后，通过对里奇张量求迹可获得里奇标量

$$R = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right) = \frac{6}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right), \quad (18)$$

其中末项明显体现了光速的时变效应。

爱因斯坦张量定义如下

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (19)$$

利用先前推导的里奇张量 (17) 和里奇标量 (18)，我们现在可以得到爱因斯坦张量的分量

$$G_{00} = \frac{3}{\tilde{c}^2} \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} \right], \quad G_{ij} = -\frac{g_{ij}}{\tilde{c}^2} \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right]. \quad (20)$$

这两个分量的BI关系可通过方程 (20) 简单证明

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (21)$$

## B. 能量动量张量

为了求解方程(10)给出的爱因斯坦场方程，必须将应力-能量张量（SET）与来自方程(17)和(17)的几何量相结合。对于作为时空曲率源的热力学平衡态理想流体，SET具有对称形式

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{P}{\tilde{c}^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (22)$$

其中 $\rho$ 表示质量密度， $P$ 代表流体静压， $U^\mu = (\tilde{c}, \vec{0})$ 为四维速度。爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 满足一个关键几何恒等式——BI方程(21)及度规相容条件（即 $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ ）。鉴于爱因斯坦引力常数 $\kappa$ 的恒定性，BI方程直接导出能量-动量局域守恒律

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3H \left( \rho_i + \frac{P_i}{\tilde{c}^2} \right) + 2\rho_i H \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = 0 \\ &\Rightarrow d \ln (\rho_i \tilde{c}^2) + 3(1 + \omega_i) d \ln a = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

此处 $\omega_i$ 为状态方程参数，定义为 $\omega_i = (P_i/\tilde{c}^2)/\rho_i$ 。求解方程(23)可得能量密度的表达式

$$\rho_i \tilde{c}^2 = \rho_{i0} \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}, \quad (24)$$

其中 $i$ 代表对应于辐射或物质的理想流体组分。

### C. 弗里德曼方程

将式 (17)、(18)、(22) 和 (24) 代入式 (10) 后, VSL 模型的爱因斯坦场方程可表示为

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} = \frac{8\pi \tilde{G}}{3} \sum_i \rho_i, \quad (25)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \Lambda \tilde{c}^2 - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} = - \frac{8\pi \tilde{G}}{\tilde{c}^2} \sum_i P_i. \quad (26)$$

这些是VSL效应修正后的弗里德曼方程。由式 (25) 和(26) 可得宇宙膨胀加速度的控制方程为

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi \tilde{G}}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_i + \frac{\Lambda \tilde{c}^2}{3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a}. \quad (27)$$

通过式 (9) 和(24) 重写哈勃参数 $H$  与加速度 $\ddot{a}/a$ , 可得

$$H^2 = \left[ \frac{8\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} - k \frac{\tilde{c}_0^2}{a^2} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} \equiv H^{(\text{GR})2} \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \left[ - \frac{4\pi \tilde{G}_0}{3} \sum_i (1 + 3\omega_i) \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} + \frac{\Lambda \tilde{c}_0^2}{3} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2} + H^2 \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \\ &= \left[ \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)^{(\text{GR})} + H^{(\text{GR})2} \frac{d \ln \tilde{c}}{d \ln a} \right] \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{c}_0^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

这些方程描述了VSL框架下FLRW宇宙的背景演化。VSL模型中的哈勃膨胀率 $H$  相比广义相对论中的对应量 $H^{(\text{GR})}$  多了一个附加因子 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 。值得注意的是, 虽然当前时刻的哈勃参数在广义相对论与VSL模型中保持一致, 但其历史演化过程存在差异。过去光速的升高(或降低)会导致 $H$  成比例地增大(或减小)。这种独特的标度行为可能为解决哈勃张力提供新思路。

此外, meVSL模型中宇宙膨胀加速度的修正主要来自两个关键效应: 其一是反映 $\tilde{c}$ 变化的附加项 $d \ln \tilde{c}/d \ln a$ ; 其二是整体标度因子 $\tilde{c}^2/\tilde{c}_0^2$ 对膨胀率的修正。这些偏差凸显了meVSL框架引入的宇宙演化本质差异。

尽管如式 (28) 所示, meVSL模型给出的哈勃参数 $H(a)$  与标准宇宙学模型 $H^{(\text{GR})}(a)$  不同, 但由此得到的哈勃半径

$$\frac{\tilde{c}(a)}{H(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H^{(\text{GR})}(a)} = \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_{0i} a^{-3(1+w_i)} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}}}, \quad (30)$$

仍与标准模型保持一致。这是因为 $\tilde{c}(a)$  的构建旨在保持时空因果结构不变。因此, 当红移定义相同时, 诸如光度距离和角直径距离等可观测量——作为红移函数对哈

勃半径的积分——在meVSL框架下将给出与标准模型相同的结果 [1]。这意味着局部测量的 $H_0$ （如SH0ES数据）与距离指标推算值之间的差异可能在meVSL方案中得到调和 [105]。然而，若 $\tilde{c}$ 的变化影响了其他物理常数（如精细结构常数、普朗克常数或钱德拉塞卡质量），则可能产生额外的观测效应 [1, 106]，例如超新星距离模数的可检测差异或最后散射面位置的变化。关于这些影响的详细分析，读者可参阅文献 [1]。

## VI. 光速的运动方程

式 (7)给出的作用量显式包含了式 (18)中的里奇标量及理想流体项，其形式可表示为

$$S \equiv \int \left[ \frac{1}{2\tilde{\kappa}} \left( \frac{6}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) + \sum_{i=r,m} \rho_i (1 + \omega_i) \tilde{c}^2 \right] \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (31)$$

在方程 (31)中，理想流体的拉格朗日量看似显式依赖于 $\tilde{c}$ 。然而根据理想流体的BI方程 (24)，可以证明该项与 $\tilde{c}$ 无关

$$\rho_i (1 + \omega_i) \tilde{c}^2 = \rho_{i0} (1 + \omega_i) \tilde{c}_0^2 a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (32)$$

此外，由于爱因斯坦引力常数 $\tilde{\kappa}$ 与时间无关（如式 (9)所示），式 (31)可改写为仅含 $\tilde{c}$ 和 $\dot{\tilde{c}}$ 的形式

$$S = \int \left[ \frac{\tilde{c}_0^4}{16\pi\tilde{G}_0} \left( \frac{6}{\tilde{c}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \frac{\tilde{c}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) - 2\Lambda \right) \right] \sqrt{-g} dt d^3x \equiv \int \frac{1}{2\tilde{\kappa}_0} R \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (33)$$

由式 (33)可导出关于 $c$ 的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\tilde{c}}} - \frac{\partial R}{\partial \tilde{c}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = (c_1 + c_2 t)^{1/4}. \quad (34)$$

通常，欧拉-拉格朗日方程应决定给定变量的动力学行为。但在求解 $\tilde{c}$ 的方程时，我们发现其并未给出 $\tilde{c}$ 本身的动力学方程，而是导致对 $a(t)$ 的约束条件。这意味着 $\tilde{c}$ 并非独立的动力学自由度，而是作为强制 $a(t)$ 满足特定约束条件的参数存在。

这表明 $a(t)$ 与 $\tilde{c}$ 只有在满足特定条件时才能被重新解释为独立变量。这种关系揭示了 $\tilde{c}$ 与 $a$ 之间的强关联性，暗示 $\tilde{c}$ 可能并非完全独立的物理量。 $\tilde{c}$ 的变化与我们定义时间的方式密切相关。如果 $\tilde{c}$ 总是仅作为 $a(t)$ 的函数被确定，这很可能是因为我们所采用的时间定义已被固定为特定形式。因此，若能重新定义时间，或许可将 $\tilde{c}$ 视为独立变量。反之，若无论时间变量如何选择 $\tilde{c}$ 始终依赖于 $a(t)$ ，则 $\tilde{c}$ 本质上更可能是一个因变量。

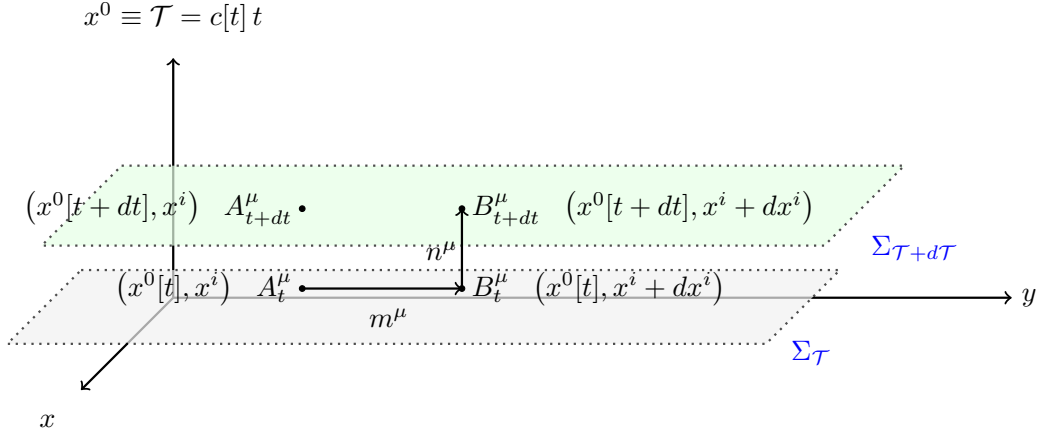


FIG. 2: 该图展示了RW度规框架下时空的叶状结构。超曲面 $\Sigma$ 表示时间坐标 $\mathcal{T}$ 的常数值，对应于不同的时间时刻。lapse函数控制这些超曲面之间的间隔，确保法向量 $\bar{n} = n^\mu e_\mu$ 始终与它们正交。

在meVSL模型中，时移函数解释了 $\tilde{c}$ 的变化。我们可将时移函数定义为 $N \equiv \tilde{c}/c$

$$\begin{aligned} x^0(t+dt) - x^0(t) &= (c[t+dt])(t+dt) - c(t)t \stackrel{\mathcal{O}(1)}{\approx} c[t]dt + dc[t]t \\ &= \left(1 + \frac{d \ln c}{d \ln t}\right) c[t]dt \equiv \tilde{c}[t]dt \equiv N[t]c[t]dt. \end{aligned} \quad (35)$$

通过时移函数表征 $\tilde{c}$ 变化的能力意味着， $\tilde{c}$ 的改变并非纯粹的物理动力学过程，而是依赖于所选时间变量的定义。因此， $\tilde{c}$ 更可能是由坐标选择（时移函数）决定的量，而非独立变量。换言之，有必要重新考量 $\tilde{c}$ 应被视为独立动力学自由度，还是应通过时移函数解释为坐标效应。

在meVSL模型中，时移函数表征了各超曲面上的时间流逝。若不存在确定时移函数的机制，则关于 $\tilde{c}$ 的欧拉-拉格朗日方程并不描述动力学演化，而仅施加约束方程。 $\tilde{c}$ 可通过时移函数表达的事实表明，它并非独立的动力学自由度，而是由坐标选择决定的量。因此，在没有额外机制固定时移函数的情况下， $\tilde{c}$ 不能被视作真正独立的变量。

时移函数 $N(t)$ 决定了固有时间相对于给定时空叶层中坐标时间的流逝速率。在ADM分解中，它反映了时间切片的任意性，并编码了空间超曲面间的时间推进方式。物理上，它设定了共动观测者所经历的时间速率，这意味着变化的时移函数对应于非平凡的时空调制。在meVSL框架下，这使我们能将有效光速 $\tilde{c}(t)$ 的时间依赖性解释为源于时移函数的选择，而非独立场动力学。这种解释保持了广义相对论的协变性，并将 $\tilde{c}$ 的变化重新定义为

坐标效应而非新物理学的征兆。

## VII. 结论与总结

本文研究了Robertson-Walker度规中光速可变性的物理意义。我们证明，在此框架下 $\tilde{c}$ 的变化并不必然意味着光速发生了根本性的物理改变，而是反映了与宇宙时间选择相关的坐标效应。

关键发现在于：RW度规中的宇宙时间与共动观测者的固有时相同——这一性质由Weyl公设保证。在此设定下，可变的光速对应的是超曲面间时钟速率的变化，而非内在的物理演化。通过从包含 $\tilde{c}$ 的作用量推导Euler-Lagrange方程，我们进一步强化了这一解释。所得方程并不描述 $c$ 自身的动力学，而是对尺度因子 $a(t)$ 的演化施加约束。这表明 $\tilde{c}$ 并非独立的自由度，而是依赖于宇宙时间流逝函数。

这种对VSL（可变光速）的重新诠释挑战了宇宙学中的传统假设。许多VSL模型认为 $\tilde{c}$ 的变化代表时空物理的根本修改，往往需要引入额外假设或机制来证明这种变化的合理性。然而，我们的分析表明，这些变化可以理解为坐标选择的结果，而非需要新物理的介入。从这个角度看， $\tilde{c}$ 的表观演化反映的是宇宙时间结构的参数化方式，而非光传播的实际改变。

综上所述，我们的研究结果表明VSL是宇宙时间的坐标依赖特征，而非物理定律的根本修改。这一认识为VSL模型及其宇宙学意义提供了新视角，特别是在宇宙膨胀和观测张力背景下。需要进一步研究该框架能否为现代宇宙学关键问题提供更一致、更自然的解决方案。

该方法还可能为当前观测张力（如哈勃张力或Ia型超新星时间膨胀异常）提供新的解释思路，在不引入新动力学自由度的前提下实现重新诠释。需进一步验证该框架能否一致地重现宇宙学可观测量（如光度距离-红移关系），以及能否为标准宇宙学模型提供可行替代方案。作为规范选择，我们可以任意设定可变光速的形式为 $\tilde{c} = \tilde{c}_0 a^{b/4}$ 。通过将该参数化与Ia型超新星时间膨胀测量等宇宙学观测进行比较，可以检验 $b$ 值是否偏离零。若观测数据支持 $b \neq 0$ ，则表明通常采用的 $b = 0$ 规范选择（对应标准宇宙学模型）可能未能准确描述宇宙的时间结构；反之若 $b = 0$ 仍被支持，则强化了标准规范与观测的一致性。

## Acknowledgments

本研究由韩国国家研究基金会(NRF)资助，资金来源为教育部(资助编号NRF-



- [1] S. Lee, JCAP **08**, 054 (2021) doi:10.1088/1475-7516/2021/08/054 [arXiv:2011.09274 [astro-ph.CO]].
- [2] S. Lee, Found. Phys. **53**, 40 (2023) doi:10.1007/s10701-023-00682-1 [arXiv:2303.13772 [physics.gen-ph]].
- [3] S. Lee, Particles **7**, no.2, 309-326 (2024) doi:10.3390/particles7020019 [arXiv:2406.02556 [physics.gen-ph]].
- [4] S. Lee, Phys. Dark Univ. **42**, 101286 (2023) doi:10.1016/j.dark.2023.101286 [arXiv:2212.03728 [astro-ph.CO]].
- [5] S. Lee, Class. Quant. Grav. **42**, no.2, 025026 (2025) doi:10.1088/1361-6382/ada2d5 [arXiv:2412.19049 [gr-qc]].
- [6] P. P. Avelino and C. J. A. P. Martins, Phys. Lett. B **459** (1999), 468-472 doi:10.1016/S0370-2693(99)00694-2 [arXiv:astro-ph/9906117 [astro-ph]].
- [7] J. A. Belinchon, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1669-1686 (2000) doi:10.1023/A:1003644614145 [arXiv:gr-qc/9907003 [gr-qc]].
- [8] P. P. Avelino, C. J. A. P. Martins and G. Rocha, Phys. Lett. B **483** (2000), 210 doi:10.1016/S0370-2693(00)00567-0 [arXiv:astro-ph/0001292 [astro-ph]].
- [9] M. Szydlowski and A. Krawiec, Phys. Rev. D **68**, 063511 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.063511 [arXiv:gr-qc/0212068 [gr-qc]].
- [10] J. Magueijo, Rept. Prog. Phys. **66**, 2025 (2003) doi:10.1088/0034-4885/66/11/R04 [arXiv:astro-ph/0305457 [astro-ph]].
- [11] H. Shojaie and M. Farhoudi, Can. J. Phys. **85**, 1395-1408 (2007) doi:10.1139/P07-132 [arXiv:gr-qc/0406027 [gr-qc]].
- [12] H. Shojaie and M. Farhoudi, Can. J. Phys. **84**, 933-944 (2006) doi:10.1139/P06-070 [arXiv:gr-qc/0407096 [gr-qc]].
- [13] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, Phys. Lett. B **728**, 15-18 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2013.11.029 [arXiv:1310.7231 [astro-ph.CO]].
- [14] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski, JCAP **06**, 035 (2014) doi:10.1088/1475-7516/2014/06/035 [arXiv:1406.0150 [astro-ph.CO]].

- [15] G. Franzmann, [arXiv:1704.07368 [gr-qc]].
- [16] E. T. Hanimeli, B. Lamine, A. Blanchard and I. Tutusaus, Phys. Rev. D **101**, no.6, 063513 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063513 [arXiv:1910.08325 [astro-ph.CO]].
- [17] F. Skara and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **101**, no.6, 063521 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063521 [arXiv:1911.10609 [astro-ph.CO]].
- [18] S. Bhattacharjee 与 P. K. Sahoo, 《欧洲物理杂志Plus》**135**, 第1期, 86页 (2020年) doi:10.1140/epjp/s13360-020-00116-1 [arXiv:2001.06569 [gr-qc]]。
- [19] R. P. Gupta, doi:10.1093/mnras/staa2472 [arXiv:2009.08878 [astro-ph.CO]]。
- [20] R. R. Cuzinatto、R. P. Gupta、R. F. L. Holanda、J. F. Jesus 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**515**, 第4期, 5981-5992页 (2022年) doi:10.1093/mnras/stac2039 [arXiv:2204.10764 [gr-qc]]。
- [21] R. R. Cuzinatto、R. F. L. Holanda 和 S. H. Pereira, 《皇家天文学会月报》**519**, 633-640页 (2023年) doi:10.1093/mnras/stac3267 [arXiv:2202.01371 [gr-qc]]。
- [22] R. R. Cuzinatto、R. P. Gupta 和 P. J. Pompeia, 《对称性》**15**, 第3期, 709页 (2023年) doi:10.3390/sym15030709 [arXiv:2204.00119 [gr-qc]]。
- [23] M. Bileska, 《经典与量子引力》**41**, 第18期, 183001 (2024年) doi:10.1088/1361-6382/ad68f0
- [24] S. R. Coleman 和 S. L. Glashow, 《物理快报B》**405**, 249-252页 (1997年) doi:10.1016/S0370-2693(97)00638-2 [arXiv:hep-ph/9703240 [hep-ph]]。
- [25] A. Albrecht 和 J. Magueijo, 《物理评论D》**59**, 043516 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043516 [arXiv:astro-ph/9811018 [astro-ph]]。
- [26] J. D. Barrow 和 J. Magueijo, 《物理快报B》**443**, 104-110页 (1998年) doi:10.1016/S0370-2693(98)01294-5 [arXiv:astro-ph/9811072 [astro-ph]]。
- [27] J. D. Barrow, 《物理评论D》**59**, 043515 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.043515
- [28] B. A. Bassett、S. Liberati、C. Molina-Paris 和 M. Visser, 《物理评论D》**62**, 103518 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103518 [arXiv:astro-ph/0001441 [astro-ph]]。
- [29] T. Jacobson 和 D. Mattingly, 《物理评论D》**64**, 024028 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.024028 [arXiv:gr-qc/0007031 [gr-qc]]。
- [30] J. Magueijo, 《物理评论D》**62**, 103521 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.62.103521 [arXiv:gr-qc/0007036 [gr-qc]]。

- [31] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《物理快报B》**460**, 263-270页 (1999年) doi:10.1016/S0370-2693(99)00774-1 [arXiv:astro-ph/9812481 [astro-ph]]。
- [32] I. T. Drummond, [arXiv:gr-qc/9908058 [gr-qc]]。
- [33] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《物理快报B》**477**, 269-275页 (2000年) doi:10.1016/S0370-2693(00)00192-1 [arXiv:gr-qc/9910112 [gr-qc]]。
- [34] S. Liberati、B. A. Bassett、C. Molina-Paris 和M. Visser, 《核物理B 增刊》**88**, 259-262页 (2000年) doi:10.1016/S0920-5632(00)00780-5 [arXiv:astro-ph/0001481 [astro-ph]]。
- [35] M. A. Clayton 和J. W. Moffat, 《现代物理国际期刊D》**11**, 187-206页 (2002年) doi:10.1142/S0218271802001457 [arXiv:gr-qc/0003070 [gr-qc]]。
- [36] I. T. Drummond, 《物理评论D》**63**, 043503 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.63.043503 [arXiv:astro-ph/0008234 [astro-ph]]。
- [37] G. Amelino-Camelia、J. R. Ellis、N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《现代物理国际期刊A》**12**, 607-624页 (1997年) doi:10.1142/S0217751X97000566 [arXiv:hep-th/9605211 [hep-th]]。
- [38] G. Amelino-Camelia、J. R. Ellis、N. E. Mavromatos、D. V. Nanopoulos 和S. Sarkar, 《自然》**393**, 763-765页 (1998年) doi:10.1038/31647 [arXiv:astro-ph/9712103 [astro-ph]]。
- [39] J. R. Ellis、K. Farakos、N. E. Mavromatos、V. A. Mitsou 和D. V. Nanopoulos, 《天体物理学杂志》**535**, 139-151页 (2000年) doi:10.1086/308825 [arXiv:astro-ph/9907340 [astro-ph]]。
- [40] G. Amelino-Camelia 和T. Piran, 《物理评论D》**64**, 036005 (2001年) doi:10.1103/PhysRevD.64.036005 [arXiv:astro-ph/0008107 [astro-ph]]。
- [41] G. Amelino-Camelia, 《物理快报B》**510**, 255-263页 (2001年) doi:10.1016/S0370-2693(01)00506-8 [arXiv:hep-th/0012238 [hep-th]]。
- [42] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos 和D. V. Nanopoulos, 《物理评论D》**63**, 124025 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.124025 [arXiv:hep-th/0012216 [hep-th]]。
- [43] J. Kowalski-Glikman, 《物理快报A》**286**, 391-394 (2001) doi:10.1016/S0375-9601(01)00465-0 [arXiv:hep-th/0102098 [hep-th]]。
- [44] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia 和J. Kowalski-Glikman, 《物理快报B》**522**, 133-138 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)01264-3 [arXiv:hep-th/0107039 [hep-th]]。
- [45] J. Magueijo 和L. Smolin, 《物理评论快报》**88**, 190403 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.190403 [arXiv:hep-th/0112090 [hep-th]]。

- [46] G. Amelino-Camelia, 《国际现代物理D 辑》 **11**, 1643 (2002) doi:10.1142/S021827180200302X [arXiv:gr-qc/0210063 [gr-qc]].
- [47] J. Magueijo 和L. Pogosian, 《物理评论D》 **67**, 043518 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.67.043518 [arXiv:astro-ph/0211337 [astro-ph]].
- [48] J. W. Moffat, 《国际现代物理D 辑》 **2**, 351-366 (1993) doi:10.1142/S0218271893000246 [arXiv:gr-qc/9211020 [gr-qc]].
- [49] S. N. Manida, [arXiv:gr-qc/9905046 [gr-qc]].
- [50] J. D. Barrow 和J. Magueijo, 《天体物理学杂志快报》 **532**, L87 (2000) doi:10.1086/312572 [arXiv:astro-ph/9907354 [astro-ph]].
- [51] S. S. Stepanov, 《物理评论D》 **62**, 023507 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.023507 [arXiv:astro-ph/9909311 [astro-ph]].
- [52] J. Magueijo, 《物理评论D》 **63**, 043502 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.043502 [arXiv:astro-ph/0010591 [astro-ph]].
- [53] J. W. Moffat, [arXiv:hep-th/0208122 [hep-th]].
- [54] G. Kaelbermann 和H. Halevi, [arXiv:gr-qc/9810083 [gr-qc]].
- [55] L. Randall 和R. Sundrum, 《物理评论快报》 **83**, 3370-3373 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370 [arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph]].
- [56] L. Randall 和R. Sundrum, 《物理评论快报》 **83**, 4690-4693 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [arXiv:hep-th/9906064 [hep-th]].
- [57] E. Kiritsis, 《高能物理杂志》 **10**, 010 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/10/010 [arXiv:hep-th/9906206 [hep-th]].
- [58] D. J. H. Chung 和K. Freese, 《物理评论D》 **62**, 063513 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.063513 [arXiv:hep-ph/9910235 [hep-ph]].
- [59] S. H. S. Alexander, 《高能物理杂志》 **11**, 017 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/11/017 [arXiv:hep-th/9912037 [hep-th]].
- [60] H. Ishihara, 《物理评论快报》 **86**, 381-384 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.86.381 [arXiv:gr-qc/0007070 [gr-qc]].
- [61] C. Csaki, J. Erlich 和C. Grojean, 《核物理B》 **604**, 312-342 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00175-4 [arXiv:hep-th/0012143 [hep-th]].
- [62] D. Youm, 《物理评论D》 **63**, 125011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.125011 [arXiv:hep-th/0101228 [hep-th]].

- [63] D. Youm, 《物理评论D》 **64**, 085011 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.64.085011 [arXiv:hep-th/0102194 [hep-th]].
- [64] C. Grojean, F. Quevedo, G. Tasinato 和I. Zavala, 《高能物理杂志》 **08**, 005 (2001) doi:10.1088/1126-6708/2001/08/005 [arXiv:hep-th/0106120 [hep-th]].
- [65] D. Youm, [arXiv:hep-th/0108237 [hep-th]].
- [66] I. T. Drummond 和S. J. Hathrell, 《物理评论D》 **22**, 343 (1980) doi:10.1103/PhysRevD.22.343
- [67] M. Novello 和S. D. Jorda, 《现代物理快报A》 **4**, 1809 (1989) doi:10.1142/S0217732389002045
- [68] G. Barton, 《物理快报B》 **237**, 559-562 (1990) doi:10.1016/0370-2693(90)91224-Y
- [69] K. Scharnhorst, 物理快报B **236**, 第3期, 354-359页(1990年) [勘误: 物理快报B **787**, 204-204页(2018年)] doi:10.1016/0370-2693(90)90997-K
- [70] G. M. 肖尔, 核物理B **460**, 379-396页(1996年) doi:10.1016/0550-3213(95)00646-X [arXiv:gr-qc/9504041 [gr-qc]].
- [71] D. 科拉戴与V. A. 科斯特莱茨基, 物理评论D **52**, 6224-6230页(1995年) doi:10.1103/PhysRevD.52.6224 [arXiv:hep-ph/9510365 [hep-ph]].
- [72] S. R. 科尔曼与S. L. 格拉肖, 物理评论D **59**, 116008 (1999年) doi:10.1103/PhysRevD.59.116008 [arXiv:hep-ph/9812418 [hep-ph]].
- [73] O. 贝尔托拉米与C. S. 卡瓦略, 物理评论D **61**, 103002 (2000年) doi:10.1103/PhysRevD.61.103002 [arXiv:gr-qc/9912117 [gr-qc]].
- [74] G. M. 肖尔, 核物理B **605**, 455-466页(2001年) doi:10.1016/S0550-3213(01)00137-7 [arXiv:gr-qc/0012063 [gr-qc]].
- [75] O. W. 格林伯格, 物理评论快报**89**, 231602 (2002年) doi:10.1103/PhysRevLett.89.231602 [arXiv:hep-ph/0201258 [hep-ph]].
- [76] P. 泰桑迪耶, 布罗格利基金会年鉴**29**, 173页(2004年) [arXiv:gr-qc/0303081 [gr-qc]].
- [77] G. M. 肖尔, 当代物理**44**, 503-521页(2003年) doi:10.1080/00107510310001617106 [arXiv:gr-qc/0304059 [gr-qc]].
- [78] M. 布拉索内, J. 马圭霍与P. 皮雷斯帕切科, 欧洲物理快报**70**, 600 (2005年) doi:10.1209/epl/i2005-10027-1 [arXiv:hep-ph/0307205 [hep-ph]].
- [79] S. 亚历山大, R. 布兰登伯格与J. 马圭霍, 物理评论D **67**, 081301 (2003年) doi:10.1103/PhysRevD.67.081301 [arXiv:hep-th/0108190 [hep-th]].

- [80] C. P. 伯吉斯, J. M. 克莱恩, E. 菲洛塔斯, J. 马蒂亚斯与G. D. 摩尔, 高能物理杂志**03**, 043 (2002年) doi:10.1088/1126-6708/2002/03/043 [arXiv:hep-ph/0201082 [hep-ph]].
- [81] L. 莱德, 广义相对论导论 (剑桥大学出版社, 2009年).
- [82] B. 莱本古特, 天体物理期刊快报**466**, L21 (1996年) doi:10.1086/310164 [arXiv:astro-ph/9605134 [astro-ph]].
- [83] A. G. 里斯等[超新星搜索团队], 天文学杂志**114**, 722 (1997年) doi:10.1086/118506 [arXiv:astro-ph/9707260 [astro-ph]].
- [84] R. J. 弗利, A. V. 菲利彭科, D. C. 伦纳德, A. G. 里斯, P. 纽金特与S. 珀尔马特, 天体物理期刊快报**626**, L11-L14 (2005年) doi:10.1086/431241 [arXiv:astro-ph/0504481 [astro-ph]].
- [85] S. 布隆丹与J. L. 通里, 天体物理期刊**666**, 1024-1047 (2007年) doi:10.1086/520494 [arXiv:0709.4488 [astro-ph]].
- [86] S. 布隆丹等, 天体物理期刊**682**, 724-736 (2008年) doi:10.1086/589568 [arXiv:0804.3595 [astro-ph]].
- [87] S. 李, 皇家天文学会月报**524**, 第3期, 4019-4023页(2023年) doi:10.1093/mnras/stad2084 [arXiv:2302.09735 [astro-ph.CO]].
- [88] R. M. T. 怀特等[DES], 皇家天文学会月报**533**, 第3期, 3365-3378页(2024年) doi:10.1093/mnras/stae2008 [arXiv:2406.05050 [astro-ph.CO]].
- [89] S. 李, 暗物质物理**46**, 101703 (2024年) doi:10.1016/j.dark.2024.101703 [arXiv:2407.09532 [physics.gen-ph]].
- [90] J. P. 诺里斯等, 天体物理期刊**424**, 540页(1994年) doi:10.1086/173912 [arXiv:astro-ph/9312049 [astro-ph]].
- [91] R. A. M. J. 维杰斯与B. 帕钦斯基, 天体物理期刊快报**437**, L107 (1994年) doi:10.1086/187694 [arXiv:astro-ph/9406007 [astro-ph]].
- [92] D. 班德, 天体物理期刊快报**432**, L23 (1994年) doi:10.1086/187502 [arXiv:astro-ph/9407007 [astro-ph]].
- [93] A. Meszaros 和P. Meszaros, 《天体物理学报》**466**, 29 (1996) doi:10.1086/177491 [arXiv:astro-ph/9512164 [astro-ph]]。
- [94] T. T. Lee 和V. Petrosian, 《天体物理学报》**474**, 37 (1997) doi:10.1086/303458 [arXiv:astro-ph/9607127 [astro-ph]]。
- [95] H. Y. Chang, 《天体物理学报快报》**557**, L85 (2001) doi:10.1086/323331 [arXiv:astro-ph/0106220 [astro-ph]]。



- [96] D. F. Crawford, [arXiv:0901.4169 [astro-ph.CO]]。
- [97] F. W. Zhang、Y. Z. Fan、L. Shao 和D. M. Wei, 《天体物理学报快报》 **778**, L11 (2013) doi:10.1088/2041-8205/778/1/L11 [arXiv:1309.5612 [astro-ph.HE]]。
- [98] A. Singh 和S. Desai, 《宇宙学与天体粒子物理学报》 **02**, no.02, 010 (2022) doi:10.1088/1475-7516/2022/02/010 [arXiv:2108.00395 [astro-ph.HE]]。
- [99] M. R. S. Hawkins, 《天体物理学报快报》 **553**, L97 (2001) doi:10.1086/320683 [arXiv:astro-ph/0105073 [astro-ph]]。
- [100] D. C. Dai、G. D. Starkman、B. Stojkovic、D. Stojkovic 和A. Weltman, 《物理评论快报》 **108**, 231302 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.231302 [arXiv:1204.5191 [astro-ph.CO]]。
- [101] G. F. Lewis 和B. J. Brewer, 《自然·天文学》 **7**, no.10, 1265-1269 (2023) doi:10.1038/s41550-023-02029-2 [arXiv:2306.04053 [astro-ph.CO]]。
- [102] S. Lee, [arXiv:2504.07975 [astro-ph.CO]]。
- [103] S. Lee, 《宇宙》 **10**, no.6, 268 (2024) doi:10.3390/universe10060268 [arXiv:2101.09862 [astro-ph.CO]]。
- [104] S. Lee, 《皇家天文学会月报》 **522**, no.3, 3248-3255 (2023) doi:10.1093/mnras/stad1190 [arXiv:2301.06947 [astro-ph.CO]]。
- [105] S. Lee, 《天文学》 **3**, 100-113 (2024) doi:10.3390/astronomy3020007 [arXiv:2406.05990 [physics.gen-ph]]。
- [106] S. Lee, [arXiv:2108.06043 [astro-ph.CO]]。