Système

Systèmes compatibles

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases} \tag{1}$$

Le système 2 décrit les réactions chimiques entre 3 composés x_1, x_2, x_3 et le second membre des équations donne les quantités d'un 4e composant pour lesquels un patient est considéré en bonne santé.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4.3 \\ 4x_2 + 6x_3 = 6.8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3.6 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 6.35 \\ x_3 = 0.9 \\ 7x_1 + x_2 = 5.6 \end{cases} \tag{3}$$

Résoudre les systèmes 1, 2, 3 et donner les valeurs des inconnues.

Systèmes avec inconnues secondaires

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 = 2 \end{cases} \tag{6}$$

Résoudre les systèmes 4, 5, 6 puis :

1. Exprimer les ensembles de solutions sous la forme $S = \{(x, y, z), z \in \mathbb{R}\}$ (En remplaçant les inconnues par la fonction de l'inconnue secondaire correspondante)
2. Exprimer maintenant les ensembles de solutions sous la forme d'équation de droites ou de plans. $S = \{\vec{a} + \vec{b}z\}$ par exemple, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs (c'est-à-dire quelque chose de la forme $(1; 2; 3)$).
3. Dire si le système est une équation de droite ou bien de plan en justifiant.

Exemple résolu pour le système 4 :

1. $S_4 = \{(2 + \frac{3}{2}z, 1 - \frac{1}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$
2. $S_4^* = \{(2, 1, 0) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)z, z \in \mathbb{R}\}$

Matrices

Pour s'échauffer

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Quels sont les produits matriciels possibles en combinant une seule fois A, B, C ?
2. Peut on faire plus de produits si on prend la transposée des matrices ? Si oui, calculer les nouveaux produits.
3. Faire ces produits.

Matrices particulières

Voici plusieurs matrices :

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 86 & 31 \\ 31 & 26 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 30 \\ 25 & 50 & 35 \\ 30 & 35 & 37 \end{bmatrix}$$

1. Faire le produit DD^T et D^TD. Que remarque-t-on ?
2. Les matrices E et F ont une structure particulière, comment appelle-t-on ce type de matrice ?

Correction de la section Système

Si après avoir re-vérifié tes calculs tu ne trouves pas le même résultat que moi il est possible que je me sois trompé. Contacte-moi si besoin.

Systèmes compatibles

Pour résoudre les systèmes on applique le pivot et on obtient :
- Pour le système 1 : $(1.25, 0.5625, -0.125, -0.75)$
- Pour le système 2 : $(0.75, 0.35, 0.9)$
- Pour le système 3 : $(0.75, 0.35, 0.9)$

Systèmes avec inconnues secondaires

Le système 4 est résolu simplement et les écritures des ensembles de solutions sont fournies.

Le système 5 :
1. $S_5 = \{(2 - x_3 - 5x_4, -4 + x_3 + 10x_4, x_3, x_4), x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$
2. $S_5^* = \{(2, -4, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0)x_3 + (-5, 10, 0, 1)x_4, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$
3. Il y a 2 inconnues secondaires x_3 et x_4, il s'agit donc d'une équation de plan dans $\mathbb{R}^4$.

Le système 6 :
1. $S_6 = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$
2. $S_6^* = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0) + (0, -\frac{1}{3}, 1)x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$
3. Il y a 1 inconnue secondaire x_3, il s'agit donc d'une équation de droite dans $\mathbb{R}^3$ (le volume, c'est-à-dire à 3 dimensions (x, y, z)).

Matrices

Pour s'échauffer

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Quels sont les produits matriciels possibles en combinant une seule fois A, B, C ?
2. Peut on faire plus de produits si on prend la transposée des matrices ? Si oui, calculer les nouveaux produits.
3. Faire ces produits.

Pour savoir quels produits sont possibles il faut regarder si le nombre de colonnes de la première matrice correspond au nombre de lignes de la seconde.
AB est possible, A a 2 colonnes et B 2 lignes. Mais BA lui n'est pas possible ! En prenant la transposée de B, $B^T = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, on peut alors faire le calcul $B^T A$.

$$AB = \begin{bmatrix} 74 & 10 & 16 \\ 67 & 9 & 16 \end{bmatrix} \qquad B^T A = \begin{bmatrix} 60 & 83 \\ 8 & 11 \\ 16 & 24 \end{bmatrix} \quad A^T B = \begin{bmatrix} 60 & 8 & 16 \\ 83 & 11 & 24 \end{bmatrix} \qquad B^T A^T = \begin{bmatrix} 74 & 67 \\ 10 & 9 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 80 & 92 & 77 \\ 60 & 64 & 44 \end{bmatrix} \qquad CB^T = \begin{bmatrix} 92 & 64 \\ 76 & 36 \\ 57 & 26 \end{bmatrix} \quad C^T B^T = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 92 & 64 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Voici plusieurs matrices :

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 86 & 31 \\ 31 & 26 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 30 \\ 25 & 50 & 35 \\ 30 & 35 & 37 \end{bmatrix}$$

1. Faire le produit DD^T et D^TD. Que remarque-t-on ? On remarque que $DD^T = E$ et $D^TD = F$.
2. Les matrices E et F ont une structure particulière, comment appelle-t-on ce type de matrice ? Ces matrices sont symétriques, c'est-à-dire égales à leur transposée.

$$E^T = \begin{bmatrix} 86 & 31 \\ 31 & 26 \end{bmatrix} = E$$

$$F^T = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 30 \\ 25 & 50 & 35 \\ 30 & 35 & 37 \end{bmatrix} = F$$

On peut décomposer le calcul comme ceci grâce aux propriétés de la transposée :

$$E = DD^T \text{ et } E^T = (DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

On peut faire le même calcul pour F. N'hésite pas à le faire pour t'en convaincre.