Système

Systèmes compatibles

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases} \tag{1}$$

Le système 2 décrit les réactions chimiques entre 3 composés x_1, x_2, x_3 et le second membre des équations donne les quantités d'un 4e composant pour lesquels un patient est considéré en bonne santé.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4.3 \\ 4x_2 + 6x_3 = 6.8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3.6 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 6.35 \\ x_3 = 0.9 \\ 7x_1 + x_2 = 5.6 \end{cases} \tag{3}$$

Résoudre les systèmes 1, 2, 3 et donner les valeurs des inconnues.

Systèmes avec inconnues secondaires

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 = 2 \end{cases} \tag{6}$$

Résoudre les systèmes 4, 5, 6 puis :

1. Exprimer les ensembles de solutions sous la forme $S = \{(x, y, z), z \in \mathbb{R}\}$ (En remplaçant les inconnues par la fonction de l'inconnue secondaire correspondante)
2. Exprimer maintenant les ensembles de solutions sous la forme d'équation de droites ou de plans. $S = \{\vec{a} + \vec{b}z\}$ par exemple, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs (c'est-à-dire quelque chose de la forme $(1; 2; 3)$).
3. Dire si le système est une équation de droite ou bien de plan en justifiant.

Exemple résolu pour le système 4 :

1. $S_4 = \{(2 + \frac{3}{2}z, 1 - \frac{1}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$
2. $S_4^* = \{(2, 1, 0) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)z, z \in \mathbb{R}\}$

Matrices

Pour s'échauffer

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Quels sont les produits matriciels possibles en combinant une seule fois A, B, C ? Peut on faire plus de produits si on prend la transposée des matrices ? Si oui, calculer les nouveaux produits.
2. Faire ces produits.

Correction de la section Système

Si après avoir re-vérifié tes calculs tu ne trouves pas le même résultat que moi il est possible que je me sois trompé. Contacte-moi si besoin.

Systèmes compatibles

Pour résoudre les systèmes on applique le pivot et on obtient :
- Pour le système 1 : $(1.25, 0.5625, -0.125, -0.75)$
- Pour le système 2 : $(0.75, 0.35, 0.9)$
- Pour le système 3 : $(0.75, 0.35, 0.9)$

Systèmes avec inconnues secondaires

Le système 4 est résolu simplement et les écritures des ensembles de solutions sont fournies.

Le système 5 :
1. $S_5 = \{(2 - x_3 - 5x_4, -4 + x_3 + 10x_4, x_3, x_4), x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$
2. $S_5^* = \{(2, -4, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0)x_3 + (-5, 10, 0, 1)x_4, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$
3. Il y a 2 inconnues secondaires x_3 et x_4, il s'agit donc d'une équation de plan dans $\mathbb{R}^4$.

Le système 6 :
1. $S_6 = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$
2. $S_6^* = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0) + (0, -\frac{1}{3}, 1)x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$
3. Il y a 1 inconnue secondaire x_3, il s'agit donc d'une équation de droite dans $\mathbb{R}^3$ (le volume, c'est-à-dire à 3 dimensions (x, y, z)).

Matrices

Pour s'échauffer

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Pour savoir quels produits sont possibles il faut regarder si le nombre de colonnes de la première matrice correspond au nombre de lignes de la seconde.
   AB est possible, A a 2 colonnes et B 2 lignes. Mais BA lui n'est pas possible ! En prenant la transposée de B, $B^T = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, on peut alors faire le calcul $B^T A$.

$$AB = \begin{bmatrix} 74 & 10 & 16 \\ 67 & 9 & 16 \end{bmatrix} \qquad B^T A = \begin{bmatrix} 60 & 83 \\ 8 & 11 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}, A^T B = \begin{bmatrix} 60 & 8 & 16 \\ 83 & 11 & 24 \end{bmatrix} \qquad B^T A^T = \begin{bmatrix} 74 & 67 \\ 10 & 9 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 80 & 92 & 77 \\ 60 & 64 & 44 \end{bmatrix} \qquad CB^T = \begin{bmatrix} 92 & 64 \\ 76 & 36 \\ 57 & 26 \end{bmatrix}, C^T B^T = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 92 & 64 \\ 77 & 44 \end{bmatrix},$$