

Kierunek: **Informatyka algorytmiczna (INA)**

Specjalność: **Algorytmika (ALG)**

PRACA DYPLOMOWA
MAGISTERSKA

**Zastosowanie szkiców danych w
analizie dużych grafów**

**Application of data sketches in the
analysis of large graphs**

Paweł Polerowicz

Opiekun pracy
dr inż. Jakub Lemiesz

Słowa kluczowe: TODO, TODO, TODO

Streszczenie

Polski

Słowa kluczowe: TODO, TODO, TODO

Abstract

English

Keywords: TODO, TODO, TODO

;

Spis treści

1. Wstęp	8
1.1. Struktura pracy	8
2. Opis problemu	9
2.1. Analiza grafów	9
2.2. Główne sposoby modelowania problemu	9
3. Przegląd literatury	12
3.1. Szkice danych	12
3.2. MDL – minimalna długość opisu	14
3.3. Metody oparte na modyfikacji macierzy sąsiedztwa	15
3.4. Znurzenia grafów	18
4. Operowanie na szkicach danych	26
4.1. Szkice danych	26
5. Ulepszenie algorytmu NodeSketch z wykorzystaniem FastExpSketch	31
5.1. Motywacja	31
5.2. Idea	31
6. Analiza wyników	34
6.1. Architektura eksperymentów	34
6.2. Badanie uzyskiwanych wyników w zależności od struktury grafów	34
6.3. Wykorzystanie stopnia wierzchołków przy rekonstrukcji	37
6.4. Wpływ rozmiaru szkicu na uzyskiwane wyniki	38
6.5. Dobór parametru alpha	39
6.6. Liczba operacji w zależności od liczby krawędzi w grafie	40
7. Podsumowanie	43
Literatura	44

Spis rysunków

3.1.	Graf wraz z odpowiadającymi wierzchołkom wartościami haszy, podpisami oraz adresami. W tym wypadku ustalono $F = 8$, $m = 4$ oraz $M = 32$. Przykład został zaczerpnięty z [12].	17
3.2.	Struktura GSS dla grafu przedstawionego na rysunku 3.1. Skompresowana macierz sąsiedztwa składa się z kubełków zawierających podpisy wierzchołków tworzących krawędzie oraz łączną wagę krawędzi pomiędzy nimi. Dodatkowy bufor przechowuje krawędzie, które nie mogły zostać wstawione do macierzy. Przykładowo, informacja o krawędzi $\langle a, b \rangle$ jest zawarta w komórce $M_{0,1}$, gdyż adresy wierzchołków a i b to odpowiednio 0 i 1. Krawędź $\langle a, e \rangle$ ma ten sam adres, ale inny podpis, dlatego została ona przekierowana do bufora.	17
3.3.	Drzewo prefiksowe dla struktury AUXO o 3 poziomach. W tym wypadku zastosowano drzewo binarne, gdzie prefiksy wierzchołka docelowego i startowego są wbudowywane w strukturę naprzemienne. Obok ukazano, jak para podpisów w kubełku różni się, zależnie od poziomu, na którym dana krawędź jest przechowywana.	19
3.4.	Przykładowy graf wraz z odpowiadającą mu macierzą SLA oraz macierzą wartości podobieństw min-max, obliczonych przy pomocy równania 3.1. Można spostrzec, że np. dla wierzchołka 4, jego sąsiedztwo jest najbardziej zbliżone do sąsiedztwa wierzchołka 5, czemu odpowiada wartość 0.33 podobieństwa min-max. Warto też zauważyć, że $Sim_{NMM}(V, V)$, czyli podobieństwo wierzchołka do siebie samego jest zawsze równe 1.	24
6.1.	Precyzja rekonstrukcji	39
6.2.	Liczba operacji	41
6.3.	Liczba operacji znormalizowana	42

Spis tabel

6.1. Model Erdosa-Renyiego	35
6.2. Stochastyczny model blokowy	35
6.3. Model Barabasiego-Alberta	36
6.4. Grafy ważone	37
6.5. Wyniki z wykorzystaniem stopnia wierzchołków przy rekonstrukcji	38
6.6. Wyniki dla różnych rozmiarów szkicu	39
6.7. Wyniki dla różnych wartości parametru α	40

Spis listingów

Skróty

TODO (ang. Uzupełnić lub usunąć ten wykaz, zależnie od potrzeb)

Rozdział 1

Wstęp

TODO: Tutaj będzie bardzo ogólne wprowadzenie do pracy.

- Motywacja
- Krótki i "wysokopoziomowy" opis problemu
- Podsumowanie osiągnięć pracy

1.1. Struktura pracy

TODO: Kilka(dziesiąt) słów o strukturze i zawartości pracy. Omówienie po kolei rozdziałów i ewentualnych dodatków. Bardzo skrótowo, bo wszystko będziemy potem i tak rozwijać. Coś w jak niżej (do dopracowania).

Pierwszy rozdział stanowi niniejszy wstęp, przedstawiający ogólny zarys problematyki pracy i skrótowo podsumowujący jej wkład badawczy. W drugim rozdziale znajduje się opis problemu wraz z formalną definicją i przedstawieniem różnych jego wariantów. Przedmiotem trzeciego rozdziału jest przegląd literatury związanej z analizą wielkich grafów, z podziałem na zastosowane metodyki oraz tabelą ilustrującą porównanie znanych struktur i algorytmów. W czwartym rozdziale szczegółowo omówione zostały szkice danych, od ich formalnej definicji do bardziej praktycznych przykładów ich wykorzystania, także w kontekście niniejszej pracy. Piąty rozdział zawiera właściwy opis tego, co zostało zrobione [TODO: przepisać nieco bardziej szczegółowo]. W rozdziale szóstym opisane zostały przeprowadzone eksperymenty, wraz z prezentacją wyników oraz wnioskami z nich płynącymi. Ostatni, siódmy rozdział, stanowi podsumowanie pracy. Zawarte zostały w nim ogólne konkluzje na temat pracy oraz możliwe kierunki dalszych badań. Pracy towarzyszy wykaz literatury oraz dodatek, zawierający opis dołączonej płyty CD [TODO: Na dalszym etapie sprawdzić, czy aktualne] i instrukcję użytkowania części implementacyjnej.

Rozdział 2

Opis problemu

2.1. Analiza grafów

Analiza danych jest dynamicznie rozwijającą się dziedziną informatyki, znajdującą zastosowania w wielu gałęziach przemysłu i badaniach naukowych. Wielka różnorodność rozważanych zbiorów danych, pochodzących z odmiennych źródeł, indukuje potrzebę znajdowania wszechstronnych i efektywnych struktur danych i algorytmów, które mogą służyć do ich reprezentacji i przetwarzania. Grafy doskonale nadają się jako narzędzie do tego typu zadań ze względu na ich wrodzoną zdolność do modelowania złożonych relacji i struktur, od sieci społecznościowych i topologii Internetu po systemy biologiczne i sieci transportowe. Dzięki tej wszechstronności algorytmy grafowe znajdują dziś zastosowania w praktyce, napędzając innowacje i wspomagając przetwarzanie coraz bardziej obszernych zestawów informacji. Pomimo że grafy towarzyszą informatyce niemal od samych jej początków, to jednak rozwój tej dziedziny nie ustaje, zwłaszcza że ilość i złożoność danych stale rośnie. W dzisiejszej erze, w której rozmiary danych często osiągają ogromne rozmiary, istnieje potrzeba dostosowania metodologii opartych na grafach do bardziej efektywnego przetwarzania informacji.

W niniejszej pracy będziemy posługiwać się głównie pojęciem grafu prostego, określanego po prostu jako graf. Będziemy go oznaczać przez $G = (V, E)$ - graf, gdzie V - zbiór wierzchołków i $E \subseteq V \times V$ - zbiór krawędzi. W domyśle będziemy skupiać się na grafach ważonych.

2.2. Główne sposoby modelowania problemu

W niniejszej pracy pochylamy się nad kwestią analizy wielkich zbiorów danych, przedstawionych w postaci grafów. Jednak przed przystąpieniem do omawiania istniejących lub konstrukcji nowych rozwiązań, należy zastanowić się nad istotą problemu, z którym się mierzymy oraz wymaganiami i ograniczeniami, które proponowane algorytmy powinny spełniać. Kluczową kwestią jest więc wybór sposobu modelowania problemu. W kontekście analizy grafów możemy wyróżnić kilka ważnych i użytecznych modeli.

2.2.1. Model klasyczny

W tradycyjnej analizie grafów przyjmuje się dość prosty model, gdzie cały graf reprezentujący zbiór danych jest nam dany na wejściu do algorytmu. W praktycznych zastosowaniach jest on zazwyczaj reprezentowany przez macierz sąsiedztwa lub listę sąsiedztwa, choć istnieją również alternatywne reprezentacje, jak macierz incydencji [41]. Charakterystyczną cechą tego modelu, odróżniającą go od omawianych dalej, jest fakt, że dostępna wiedza o grafie jest

pełna i dostępna w dowolnym momencie działania algorytmu. Zazwyczaj zakładamy również, że jest on niezmienny w czasie. Jest on niewątpliwie najprostszym i jednocześnie potężnym modelem, stąd też przez dekady to na nim opierały się badania w zakresie analizy grafów. Jednak zapamiętanie całego grafu wiąże się ze sporym narzutem pamięciowym, dla macierzy i listy sąsiedztwa odpowiednio rzędu $O(|V|^2)$ i $O(|E|)$. W świecie ogromnych grafów, gdzie rozmiary analizowanych zbiorów krawędzi mogą sięgać rzędu miliardów, taka złożoność może być nieakceptowalna.

2.2.2. Strumień grafowy

W odpowiedzi na charakterystykę problemu przetwarzania ogromnych zbiorów danych powstał model strumieniowy. Graf jest w nim reprezentowany przez strumień krawędzi, napływających stopniowo. Zakładamy, że zapisanie tego grafu w klasyczny sposób jest niepraktyczne lub niemożliwe ze względu na ograniczoną pamięć. Algorytmy oparte na tym modelu powinny więc działać on-line, na bieżąco aktualizując swój stan i będąc gotowe na obsługę zapytań w dowolnym momencie. Z uwagi na rozmiar, dynamikę i często nieznaną charakterystykę danych, takie metody muszą często pomijać niektóre, mniej istotne w danym kontekście informacje o grafie, ograniczając się do tych kluczowych. W związku z tym często dopuszcza się przybliżone odpowiedzi na zapytania, jednak najlepiej z rozsądnym ograniczeniem na możliwy błąd.

Dodatkowo możemy wyróżnić kilka podkategorii **w ramach strumieni danych grafowych**. Jeden z najważniejszych podziałów dotyczy, tego, jakiego typu zmiany mogą zachodzić w strukturze grafu. Z uwagi na tę kwestię będziemy wyróżniać dwa typy grafów. Graf nazwiemy statycznym, jeśli do grafu krawędzie są jedynie dodawane i raz ustanowione, nigdy nie znikną. W uproszczeniu możemy założyć, że graf, który badamy, jest stały i niezmienny, ale o kolejnych krawędziach dowiadujemy się stopniowo, gdy pojawiają się one w strumieniu. Z kolei grafy dynamiczne to takie, które dopuszczają szerszą gamę operacji, przede wszystkim usuwanie wcześniej istniejących krawędzi. Może to być przydatne przy reprezentowaniu szybko zmieniających się zbiorów danych, takich jak np. informacje o ruchu samochodowym czy podejrzanych aktywnościach na kontach bankowych. Strumienie grafowe będą głównym modelem rozważanym w ramach niniejszej pracy.

Definicja formalna

Niech $G = (V, E)$ - graf. Strumieniem grafowym nazywamy ciągłą sekwencję elementów, z których każdy ma postać trójki $e_i = (< s_i, d_i >; w_i, t_i)$, gdzie s_i, d_i wierzchołki grafu G i przez parę $< s_i, d_i >$ oznaczamy krawędź pomiędzy nimi. Z kolei w_i i t_i to odpowiednio waga tej krawędzi i moment jej wystąpienia. Określona krawędź może powtarzać się w różnych momentach czasowych z różnymi wagami. Zazwyczaj przyjmujemy, że wagi kolejnych wystąpień krawędzi są akumulowane. W literaturze można również spotkać nieco inne definicje, głównie różniące się dokładną postacią strumieniowanej krotki np. dla grafów dynamicznych może przybrać postać czwórki $e_i = (< s_i, d_i >; w_i, t_i, op)$, gdzie $op \in \{+, -\}$ indykuje typ operacji, a więc czy dana krawędź jest dodawana, czy usuwana z grafu[31].

2.2.3. Model półstrumieniowy

Model półstrumieniowy[10] (ang. *semi-streaming model*) różni się modelu strumieniowego w dwóch głównych kwestiach. Po pierwsze, narzuca on konkretne ograniczenia na pamięć wykorzystywaną przez algorytm, najczęściej $O(|V|polylog(|V|))$, a więc dla gęstych grafów znacznie mniejszą niż rozmiar grafu. Po drugie, wejście może być skanowane wielokrotnie, zwykle stałą lub logarytmiczną liczbę razy. Model ten można uznać więc za rodzaj pomostu

między klasyczną analizą grafów, w których dane znane są od początku i nie istnieją ograniczenia na dostęp do nich, a modelem strumieniowym, który nie pozwala na wielokrotne przeglądanie wcześniejszych krawędzi. Model ten jest często wybierany przez badaczy analizujących konkretne, złożone problemy grafowe takie, jak np. wyznaczanie najkrótszych ścieżek [9] lub minimalnego drzewa rozpinającego [1] przy rygorystycznych ograniczeniach pamięciowych. Podobnie jak w przypadku strumieni grafowych, możemy w tym modelu rozważać grafy statyczne i dynamiczne.

2.2.4. Model rozproszony

W wielu praktycznych zastosowaniach takich, jak analiza sieci społecznościowych, dane napływają z różnych źródeł – np. serwerów rozsianych po świecie i obsługujących różne obszary. Kolejne paczki danych są często relatywnie niezależne od siebie i mogą być rozpatrywane oddzielnie. W takich przypadkach wygodnie jest rozważać model rozproszony analizy grafów. W tym modelu dane są dzielone pomiędzy wiele węzłów obliczeniowych. Takie podejście umożliwia przetwarzanie równoległe, skracając czas obliczeń i ograniczając wielkość przesyłanych danych. Większość obliczeń jest wykonywana lokalnie, bez konieczności angażowania jednej centralnej jednostki. Komunikacja między węzłami ogranicza się do niezbędnych w danym przypadku aktualizacji, zamiast obejmować wszystkie dane. Należy pamiętać o wyzwaniach wynikających z często niepełnej wiedzy węzłów, która może utrudniać rozwiązywanie bardziej złożonych problemów. Obszar rozproszonej analizy grafów znalazł szerokie zastosowania w praktyce, czego dobrym przykładem są zaawansowane platformy ułatwiające pracę w tym modelu, takie jak Google Pregel[27], czy Apache Spark GraphX[44].

Rozdział 3

Przegląd literatury

Analiza wielkich grafów, zwłaszcza w ostatnich latach, przeżywa ogromny rozwój, budząc zainteresowanie grup badaczy z całego świata. Postępy w tej dziedzinie są naturalną odpowiedzią na potrzebę przetwarzania coraz większych zbiorów danych. Badanie interakcji w sieciach społecznościowych, zarządzanie ruchem internetowym, czy monitorowanie ruchu samochodowego to tylko niektóre z kluczowych w dzisiejszej rzeczywistości zastosowań. Grafy dobrze sprawdzają się jako modele do reprezentowania złożonych relacji między encjami, dzięki czemu odgrywają kluczową rolę w przetwarzaniu i wydobywaniu skondensowanych informacji ze strumieniowanych danych. Wybrane do tych celów algorytmy i metodologie w znacznym stopniu zależą od struktury badanych grafów, a także charakteru zapytań, które chcemy rozpatrywać. W zależności od wymagań dotyczących złożoności czasowej i pamięciowej, dokładności odpowiedzi, a także konkretnych informacji, na których zachowaniu nam zależy, inne metody mogą okazać się najlepszym wyborem. Przykładowo, odpowiedź na pytania o najkrótsze ścieżki między wierzchołkami może wymagać zapamiętania dodatkowych informacji o strukturze grafu, a więc potencjalnie użycia bardziej wyrafinowanego podejścia niż w przypadku zapytań wyłącznie o istnienie danej krawędzi.

W niniejszym przeglądzie literatury zagłębiamy się w sferę analizy dużych grafów ze szczególnym uwzględnieniem metod opartych na szkicach danych. Badamy ewoluujący krajobraz technik, algorytmów i aplikacji w tej dziedzinie, rzucając światło na metodologie stosowane w celu sprostania nieodłącznym wyzwaniom stawianym przez strumieniowe przesyłanie danych grafowych. Poprzez analizę najnowszych osiągnięć, staramy się zapewnić wgląd w znaczenie i potencjał analizy strumieni grafów w rozwiązywaniu złożonych zadań analitycznych w różnych dziedzinach, a także sformułować ogólne wnioski i wskazówki co do wyboru odpowiedniej metody do danego zastosowania. Dla lepszego ustrukturyzowania wiedzy omawiane algorytmy i struktury podzielone zostały na kilka kategorii, odpisanych dokładnie w dalszej części niniejszego rozdziału. Należy jednak pamiętać, że w niektórych przypadkach podział ten jest nieco umowny, gdyż różne podejścia i pomysły nierzadko przenikają się i inspirują wzajemnie, prowadząc do syntetycznych rozwiązań.

3.1. **Szkice danych**

Analiza strumieni danych jest szeroką dziedziną, nieograniczającą się oczywiście wyłącznie do danych grafowych. Istnieje wiele bardziej ogólnych, uniwersalnych metod, na których podstawie można budować rozwiązania bardziej wyspecjalizowane do konkretnych zadań. Doskonałym przykładem są **szkice danych** (ang. *Sketch synopses*). Są to kompaktowe struktury zaprojektowane z myślą o wykorzystaniu ograniczonej ilości pamięci, umożliwiając jednocześnie aproksymację różnych statystyk i zapytań dotyczących strumienia danych,

takich jak zliczanie elementów, wyznaczanie mediany, czy wykrywanie wartości odstających. Utrzymując mały szkic o stałym rozmiarze, struktury te umożliwiają analizę strumieni danych w czasie rzeczywistym bez konieczności przechowywania wszystkich elementów strumienia, co zapewnia wysoką wydajność nawet przy analizowaniu ogromnych strumieni.

Istotną w kontekście budowy dalszych rozwiązań strukturą danych jest szkic Count-Min[7]. W przeciwieństwie do wielu proponowanych wcześniej **szkiców** zaprojektowanych do badania konkretnej statystyki stanowi on dość uniwersalną strukturę, oferując wsparcie dla **kilku fundamentalnych zapytań**. Konkretnie, wyrażając strumień danych jako $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, gdzie a_i oznacza liczbę wystąpień elementu i w strumieniu, Count-Min może zwrócić aproksymacje następujących wartości:

- $Q(i) = a_i$ – częstość występowania pojedynczego elementu
- $Q(l, r) = \sum_{i=l}^r a_i$ – łączna liczba wystąpień zakresu elementów
- $Q(a, b) = a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ – iloczyn skalarny dwóch wektorów.

Z kolei na ich podstawie można budować bardziej skomplikowane zapytania. Co ważne, Count-Min, choć zwraca przybliżone wyniki, to gwarantuje spełnienie pewnych założeń odnośnie dokładności. Konkretnie, wyraża się ją zazwyczaj w kontekście definiowanych przez użytkownika parametrów ϵ , δ , a więc wymagamy, aby błąd względny w odpowiedzi na zapytanie mieścił się w zakresie współczynnika ϵ z prawdopodobieństwem δ . Count-Min opiera się na zastosowaniu dwuwymiarowej tablicy o wymiarach $w \times d$, gdzie $w = \lceil \frac{e}{\epsilon} \rceil$ oraz $d = \lceil \ln \frac{1}{\delta} \rceil$. Nietrudno zauważyć, że zależą one od wymaganej dokładności. Struktura dalej wykorzystuje d niezależnych funkcji haszujących, mapujących elementy ze strumienia na kolumny tablicy. Każdy z napływających elementów wiąże się więc z aktualizacją jednej komórki w każdym wierszu tablicy. Wtedy, przykładowo częstotliwość elementu możemy aproksymować jako minimum z wartości odpowiadających mu komórek.

Do innych wartych wzmianki metod możemy zaliczyć np. Lossy Counting[28], ukierunkowany na wskazywanie szczególnie często występujących elementów. Z kolei AMS[2] skupia się na aproksymowaniu momentów częstotliwości (ang. frequency moments), a więc wartości postaci:

$$F_k = \sum_{i=1}^n a_i^k,$$

gdzie n jest liczbą unikalnych elementów, a_i jest liczbą wystąpień elementu i w strumieniu, a k jest numerem danego momentu. Momenty te niosą ze sobą istotne informacje statystyczne o przetwarzanych danych. Przykładowo F_0 to po prostu liczba unikalnych elementów, F_1 wyznacza długość strumienia, a F_2 można traktować jako miarę powtarzalności danych (ang. repeat rate)[11].

gSketch[49] stanowi jedną z pierwszych prób przeniesienia idei tych ogólnych metod do świata grafów. Obsługuje on proste zapytania dotyczących grafu, takie jak częstość występowania danej krawędzi w strumieniu lub gęstość wybranego podgrafu. Autorzy wychodzą od metody Count-Min, wykorzystując jej dwuwymiarową tablicę do składowania częstotliwości krawędzi. Dodatkowo, algorytm wykorzystuje próbkę testową do podziału zbioru krawędzi na podzbiory, bazując na ich częstotliwości w taki sposób, aby efektywnie wykorzystać dostępną pamięć, a następnie przetwarza właściwy strumień danych. To przetwarzanie wstępne daje cenny wgląd w charakterystykę grafu, ale należy pamiętać, że **wyznaczanie reprezentacyjnej dla danego zbioru próbki testowej nie zawsze jest trywialne**. Szczególnie w kontekście strumieniowanych danych grafowych, jakiegokolwiek istotne informacje o grafie mogą być niedostępne w momencie rozpoczęcia jego przetwarzania. Z kolei wybór podzioru krawędzi ze strumienia jako próbki może nie reprezentować całościowej charakterystyki grafu. gSketch, podobnie jak Count-Min jest metodą stratną, a praktycznym wyzwaniem jest odpowiednie

wyważenie parametrów tak, aby zachować balans między zużytą pamięcią a dokładnością wyników.

Choć metody takie jak gSketch mogą efektywnie zapamiętywać informacje dotyczące częstotliwości występowania krawędzi, to tracą przy tym wiedzę o strukturze grafu. Przykładowo, trudno za ich pomocą odpowiedzieć, czy istnieje ścieżka między danymi dwoma wierzchołkami. Jedną z prób rozwiązania tego problemu jest struktura gMatrix[18]. Wykorzystuje ona, podobnie jak gSketch, zasadę działania Min-Count. Jednak w tym wypadku tablica zliczająca elementy wzbogaciła się o trzeci wymiar. Konkretnie, długość i szerokość tablicy odpowiadają haszom wierzchołków, a jej głębokość związana jest ponownie z liczbą funkcji haszujących. Struktura może więc wspierać zapytania związane zarówno z krawędziami, jak i wierzchołkami. gMatrix wspiera również wykrywanie szczególnie często występujących krawędzi i wierzchołków, a więc tych, których częstotliwość przekracza dany parametr F . Wymaga to jednak, aby wybrane funkcje haszujące były odwracalne. Wtedy wystarczy wybrać komórki o odpowiednio dużych wartościach i obliczyć odwrotności haszy, aby odzyskać informacje o wierzchołkach. Podobnie, można rozważać osiągalność między wierzchołkami, wybierając krawędzie o częstotliwości występowania przekraczającej pewne F i przetwarzając je używając tradycyjnych algorytmów. Zwłaszcza w przypadku grafów o nierównej gęstości, możemy w ten sposób znacznie ograniczyć liczbę badanych krawędzi, zachowując wciąż odpowiednie ograniczenia na prawdopodobieństwo błędu.

3.2. MDL – minimalna długość opisu

Kluczowym problemem w analizie wielkich grafów jest rozmiar danych. Zasadne wydaje się więc pytanie, czy sposób zapisu analizowanych grafów jest efektywny. W wielu przypadkach może się okazać, że sama próba zmiany modelu opisującego dane przynosi znaczne oszczędności w kwestii wykorzystanej pamięci. Metoda minimalnej długości opisu (MDL - ang. Minimum Description Length) koncentruje się na znalezieniu najprostszego modelu, który najlepiej opisuje strukturę grafu. Techniki oparte na MDL identyfikują wzorce i kompresują graf, wybierając model, który minimalizuje całkowitą długość opisu modelu i danych przy danym modelu, ułatwiając w ten sposób wydajne przechowywanie, przesyłanie i analizę dużych grafów. Bardziej formalnie, dla danych D i rodziny dostępnych modeli MF szukamy takiego modelu $M \in MF$, który minimalizuje $L(M) + L(D|M)$, gdzie $L(M)$ i $L(D|M)$ oznaczają odpowiednio długość opisu modelu M oraz zakodowanych w nim danych D . Wiele metod opartych na MDL kompresuje dane w sposób bezstratny, co jest niewątpliwą zaletą tego modelu.

Istnieje wiele bezstratnych metod kompresujących grafy do reprezentacji o mniejszym narzucie pamięciowym. Jednak większość z nich zakładała działanie na tradycyjnej postaci grafu, gdzie dane są skończone i znane na wejściu. Rzeczywistość analizy strumieni grafowych wymaga jednak bardziej elastycznego podejścia. Jedną z pierwszych inkrementacyjnych metod kompresji grafu jest MoSSo[20]. Reprezentacja wyjściowa tej metody składa się ze zbioru superwęzłów, a więc zbiorów wierzchołków oraz superkrawędzi. Każda taka superkrawędź oznacza połączenie wszystkich wierzchołków z danego superwęzła z wierzchołkami drugiego superwęzła. Dodatkowo, częścią zapisu jest także zbiór korekt krawędzi. Mają one postać pary zbiorów $C = (C^+, C^-)$, oznaczających krawędzie, które należy dodać i usunąć, aby otrzymać prawdziwe dane. W ogólności aktualizowanie struktury dla nowych krawędzi sprowadza się do przemieszczania wierzchołków między superwęzłami w taki sposób, aby zminimalizować długość zapisu. Oczywiście sprawdzenie wszystkich możliwości byłoby kosztowne, dlatego autorzy zakładają sprawdzanie za każdym razem pewnego losowego zbioru potencjalnych wierzchołków do przemieszczania, co pozwala na znaczną oszczędność czasu, przy zachowaniu zadowalającego zużycia pamięci.

W opisanym wyżej MoSSo losowy wybór potencjalnych zmian jest sterowany parametrami takimi jak prawdopodobieństwo utworzenia nowego superwężła i liczba wierzchołków, których przesunięcie należy rozważyć w każdej rundzie. Jeśli wybrane wartości parametrów są zbyt małe lub zbyt wielkie, może to negatywnie wpływać na czas działania lub skuteczność kompresji. Jednak optymalne ich dobranie dla nieznanymi wcześniej danych może być niemożliwe. Problem ten zauważają autorzy SGS[26]. Jest to metoda bezparametryczna, w każdym kroku rozważająca przemieszczenie jedynie wierzchołków indukujących obecnie rozważaną krawędź (u, v) . Dodatkowo SGS opiera się na obserwacji, że w takim wypadku wystarczy rozważyć superwężły bazując na wierzchołkach znajdujących się w odległości co najwyżej dwóch kroków od u lub v . Następnie najlepsza zmiana jest wyznaczana zachłannie, bazując na funkcji podobieństwa sąsiedztwa wierzchołka oraz superwężła.

Przykładem nieco odmiennego podejścia może być z kolei metoda GS4[3]. O ile ona również wykorzystuje koncept grupowania wierzchołków w superwężły, o tyle robi to, bazując zarówno na strukturze grafu, jak i pewnym zbiorze atrybutów wierzchołków. Jest to przydatne w przypadku, gdy wierzchołki grafu reprezentują bardziej złożone informacje. Przykładowo, w przypadku analizy danych pochodzących z portali społecznościowych, wierzchołkiem może być użytkownik, a atrybutami jego imię, wiek, ulubione zwierzę z gromady stułbiopławów itd. Niektóre z tych danych mogą być ważniejsze niż inne. GS4 pozwala na ustalenie wag dla atrybutów, dzięki czemu jest rozwiązaniem bardziej elastycznym, pozwalającym na sterowanie tym, jakie cechy grafu będą zachowywane priorytetowo. W przeciwieństwie do omawianych wcześniej algorytmów GS4 jest jednak metodą strątną. Dla oszczędności czasu przechowywany graf nie jest aktualizowany dla każdej nowej krawędzi, a raczej w wypadku istotnych różnic.

3.3. Metody oparte na modyfikacji macierzy sąsiedztwa

Jednym z najbardziej popularnych i być może najprostszym koncepcyjnie sposobem reprezentacji grafu jest macierz sąsiedztwa. Jej wiersze i kolumny odpowiadają poszczególnym wierzchołkom, a w komórkach przechowywane są wagi krawędzi pomiędzy nimi, o ile takowe krawędzie istnieją. W przypadku grafów nieważonych może to być np. wartość logiczna indykująca istnienie krawędzi lub ustalona stała. Ten sposób reprezentacji ma niewątpliwe zalety takie jak prostota implementacji i, przede wszystkim, stały czas dostępu do wag krawędzi. Z tego powodu niezaskakujący jest pomysł zachowania ogólnej zasady działania macierzy sąsiedztwa, przy jednoczesnej próbie zmniejszenia jej rozmiaru.

Jedną z pierwszych realizacji tej idei jest struktura TCM[36]. Ma ona postać macierzy o boku długości m , gdzie m jest pewną stałą. Podobnie jak w klasycznej macierzy sąsiedztwa, w jej komórkach składowane są wagi krawędzi. Zasadniczą różnicą jest natomiast sposób wyznaczania rzędu i kolumny odpowiadających danej parze wierzchołków. Są one bowiem wyznaczone przez wynik funkcji haszującej $H : V \rightarrow [1..m]$. Czas obliczania hasza jest stały, a co za tym idzie, złożoność czasowa zapytań i dodawania nowych krawędzi również. Teoretyczna złożoność pamięciowa także jest stała i wynosi $O(m^2)$. W praktycznych zastosowaniach wybór m zależy jednak często od liczby krawędzi i przejmuję się najczęściej m rzędu $O(\sqrt{|V|})$. Dokładność rezultatów zależy od rozmiaru macierzy i może być niska ze względu na kolizje haszy. Łatwo zauważyć, że jeśli m jest istotnie mniejsze od $|V|$ to może do nich dochodzić często, co powoduje traktowanie różnych krawędzi jako kolejnych instancji tego samego połączenia. Autorzy, świadomi tego ograniczenia, proponują zastosowanie kilku parami niezależnych funkcji haszujących i stworzenie na ich podstawie wielu szkiców grafu. Przykładowo, jeśli badaną zmienną jest suma wag kolejnych instancji krawędzi między danymi dwoma wierzchołkami, to algorytm może sprawdzić odpowiednie komórki dla wszystkich szkiców, a następnie zwrócić minimalną wartość. Podejście to pozwala na analizę większych

grafów niż w przypadku pojedynczego szkicu, ale ostatecznie nie rozwiązuje całkowicie problemu. Użyteczność struktury TCM w bazowej formie jest dyskusyjna, stanowi ona jednak punkt wyjściowy dla bardziej zaawansowanych rozwiązań.

Strukturą opartą na koncepcie podobnym do TCM jest Graph Stream Sketch (GSS)[12]. Celem autorów było stworzenie metody oferującej lepszą skalowalność dla wielkich grafów. Podobnie jak w TCM, funkcja haszująca mapuje zbiór wierzchołków na pewien mniejszy zbiór M -elementowy. **Wymiary skompresowanej macierzy sąsiedztwa wynoszą natomiast $m \times m$, $m < M$.** Główną zmianą **względem TCM** jest wprowadzenie dodatkowych cech opisujących wierzchołki. **Pierwszą z nich jest podpis $f(v)$ ($0 \leq f(v) < F$) wierzchołka v , gdzie F jest stałą wyznaczającą maksymalną wartość liczbową podpisu, przy czym F i m są dobierane tak, aby spełnić $M = m \times F$. Dla każdego wierzchołka, jego podpis jest wyznaczany na podstawie hasza $H(v)$ jako:**

$$f(v) = H(v) \bmod F.$$

W podobny sposób definiowany jest także adres wierzchołka. Ma on postać:

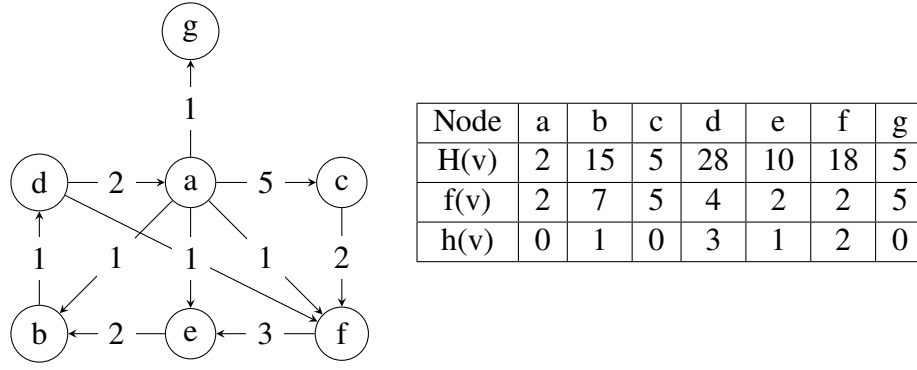
$$h(v) = \left\lfloor \frac{H(v)}{F} \right\rfloor.$$

Przykładowy graf wraz z podpisami oraz adresami wierzchołków przedstawiono na rysunku 3.1. Adresy służą do wyznaczania rzędu i kolumny komórek. Komórki te mają postać krotki lub, bardziej obrazowo, kubełka, w którym przechowywana jest para podpisów wierzchołków tworzących krawędź oraz kumulatywna waga krawędzi. Przechowywanie podpisów w komórkach pozwala zredukować ryzyko **scalania ze sobą krawędzi między różnymi parami wierzchołków ze względu na kolizję haszy.** Łatwo bowiem zauważyć, że nawet jeśli dwa różne wierzchołki mają taki sam adres, to prawdopodobieństwo, że ich podpisy również są identyczne, **jest niewielkie.** Z tego względu nowa krawędź jest dodawana do kubełka tylko w wypadku, gdy jest on pusty lub gdy istniejące w nim podpisy są zgodne z podpisami wierzchołków krawędzi tą tworzących. W przeciwnym przypadku jest ona zapisywana w dodatkowym buforze, mającym postać listy sąsiedztwa pełnych haszy. Pozwala on na dodawanie nowych krawędzi z niskim ryzykiem kolizji, nawet jeśli sama macierz jest już wypełniona. **Przykład częściowo wypełnionej struktury GSS wraz z buforem przedstawia rysunek 3.2.** Należy natomiast zauważyć, że część macierzowa struktury jest bardziej efektywna czasowo, oferując stały czas odpowiedzi na zapytanie, podczas gdy dla bufora jest on liniowy względem liczby wierzchołków. Dokładność odpowiedzi w części macierzowej zależy od długości podpisów. Potencjalnym problemem GSS jest niskie wykorzystanie pamięci w macierzy. Przy kolizji adresów nowe krawędzie mogą trafiać do bufora, mimo, że w samej macierzy pozostaje wiele pustych komórek. Aby temu zaradzić, autorzy proponują haszowanie krzyżowe (ang. square-hashing). Zakłada ono obliczanie dla każdego wierzchołka sekwencji niezależnych adresów. Podczas wstawiania nowych krawędzi algorytm sprawdza nie jedną komórkę macierzy, a kilka, zgodnie z sekwencją adresów i wybiera pierwszą spełniającą wymagania co do zgodności podpisów. Autorzy przedstawiają probabilistyczne ograniczenie na błąd względny zapytań postaci:

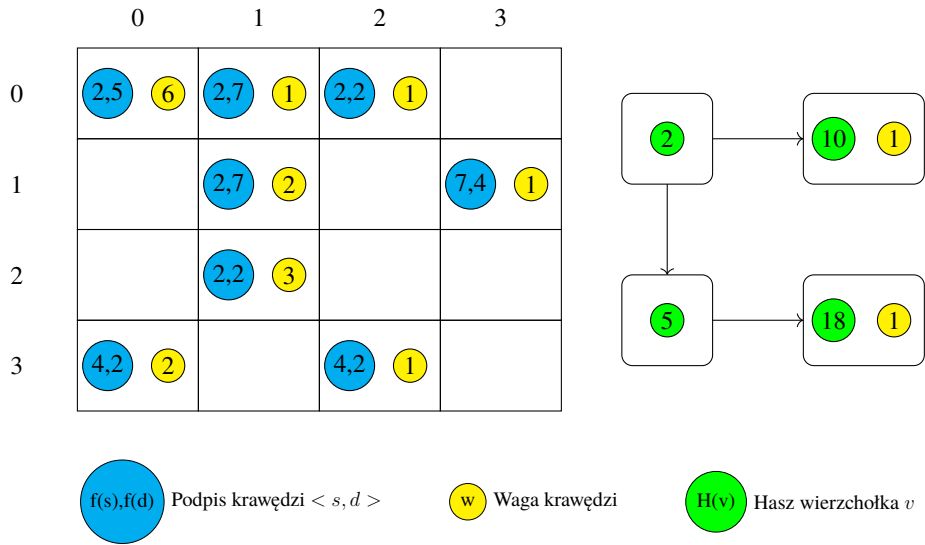
$$Pr(\tilde{f}(s, d) - f(s, d)/\bar{w} > \delta) \leq \frac{|E|}{\delta m^{24f}},$$

gdzie $\tilde{f}(s, d)$ jest zwróconą sumą wag krawędzi (s, d) , $f(s, d)$ jej rzeczywistą wartością, \bar{w} średnią wagą krawędzi, a f długością podpisu.

Większość struktur **służących analizie strumieniowanych grafów** nie przechowuje informacji o czasie wystąpienia krawędzi. Nie wspierają one więc zapytań z zakresem czasowym, a więc np., czy dana krawędź wystąpiła w zakresie $[t, t + L)$. Tego typu zapytania mogą być kluczowe np. w przypadku analizy danych dotyczących rozprzestrzeniania się



Rys. 3.1: Graf wraz z odpowiadającymi wierzchołkom wartościami haszy, podpisami oraz adresami. W tym wypadku ustalono $F = 8$, $m = 4$ oraz $M = 32$. Przykład został zaczerpnięty z [12].



Rys. 3.2: Struktura GSS dla grafu przedstawionego na rysunku 3.1. Skompresowana macierz sąsiedztwa składa się z kubełków zawierających podpisy wierzchołków tworzących krawędź oraz łączną wagę krawędzi pomiędzy nimi. Dodatkowy bufor przechowuje krawędzie, które nie mogły zostać wstawione do macierzy. Przykładowo, informacja o krawędzi $\langle a, b \rangle$ jest zawarta w komórce $M_{0,1}$, gdyż adresy wierzchołków a i b to odpowiednio 0 i 1. Krawędź $\langle a, e \rangle$ ma ten sam adres, ale inny podpis, dlatego została ona przekierowana do bufora.

wirusów (TODO: Citation needed). Problem ten podejmuje praca proponująca strukturę Horae[6]. W jej wypadku krawędź $e_i = (\langle s_i, d_i \rangle, w_i, t_i)$ jest wstawiana do komórki o adresie $(h(s_i | \gamma(t_i)), h(d_i | \gamma(t_i)))$, gdzie $\gamma(t_i) = \lfloor \frac{t_i}{gl} \rfloor$ i gl jest długością przedziałów czasowych. Intuicyjnie, zapytanie o pojawienie się krawędzi w zakresie czasowym $[T_b, T_e]$ może być transformowane w sekwencję zapytań o pojedyncze zakresy, których wyniki są sumowane, a więc $Q([T_b, T_e]) = Q([T_b]), Q([T_{b+1}]), \dots, Q([T_e])$. Jednak dla takiego algorytmu złożoność czasowa jest liniowa względem liczby zakresów. Autorzy starają się poprawić ten aspekt, zauważając, iż przedział długości L może zostać zdekomponowany do co najwyżej $2 \log L$ podprzedziałów posiadających dwie szczególne cechy. Po pierwsze, wszystkie zakresy czasowe w danym podprzedziale mają wspólny prefiks binarny. Po drugie, prefiksy różnych podprzedziałów mają różne długości. Z tego względu Horae zapamiętuje $O(\log(T))$ identycznych skompresowanych macierzy, gdzie T jest liczbą rozróżnialnych zakresów czasowych. Każda z nich jest utożsamiana z jedną warstwą struktury. Warstwy odpowiadają z kolei różnym długościom prefiksów. Dzięki temu zamiast wykonywać liniową

względem długości przedziału czasowego liczbę zapytań, wystarczy zdekomponować przedział na podprzedziały i na ich podstawie wykonać co najwyżej jedno zapytanie na warstwę.

Metody oparte na macierzach w większości przypadków nie czynią założeń co do struktury grafu. Takie ogólne podejście oczywiście zapewnia wysoką uniwersalność, jednak w niektórych przypadkach może być nieefektywne. Przykładowo, jeśli wierzchołki w grafie są mocno zróżnicowane pod względem stopnia, a więc bardziej obrazowo, da się wyróżnić obszary gęste i rzadkie w grafie, to kolizje haszy mogą zdarzać się często. Struktura Scube[5] używa probabilistycznego zliczania do identyfikacji wierzchołków wysokiego stopnia. Przeznaczone jest dla nich więcej kubełków w macierzy niż dla wierzchołków o niskich stopniach, co pozwala bardziej efektywnie zarządzać wypełnieniem macierzy.

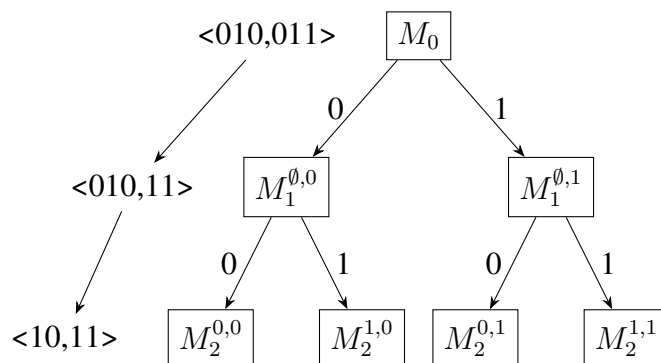
Metody takie jak GSS czy Horae, choć często dają przyzwoite wyniki przy odpowiednim dobraniu parametrów do badanego grafu, to ostatecznie cierpią z uwagi na ograniczoną skalowalność. Jedną z prób odpowiedzi na ten problem jest struktura AUXO[16]. Korzysta ona z macierzy przechowujących podpisy wierzchołków, podobnie jak GSS. Jednak, zamiast wstawiać nadmiarowe krawędzie do bufora o liniowym czasie dostępu, AUXO wykorzystuje wiele macierzy ustawionych w strukturę drzewa. Konkretnie, jest to binarne lub czwórkowe drzewo prefiksowe, w którego strukturę zaszyte zostały prefiksy podpisów wierzchołków. W ten sposób na każdym kolejnym poziomie drzewa podpisy przechowywane w komórkach mogą być coraz krótsze, gdyż informacja ta jest wbudowana w kształt struktury. Pozwala to osiągnąć logarytmiczny względem liczby krawędzi czas odpowiedzi na zapytania. **Rysunek 3.3 ukazuje ogólny schemat działania Auxo. Autorzy pokazują, że koszt pamięciowy struktury Auxo o l poziomach można wyrazić za pomocą wzoru:**

$$M_A = m^2 b(2^l - 1) - \sum_{i=0}^{l-1} m^2 i 2^i,$$

gdzie b jest rozmiarem kubełka na zerowym poziomie drzewa. Składnik $m^2 b(2^l - 1)$ odpowiada za koszt przechowywania wszystkich macierzy z pełnymi podpisami, a $\sum_{i=0}^{l-1} m^2 i 2^i$ to pamięć zaoszczędzona przy użyciu prefiksów zaszytych w strukturze drzewa. Przyjmując średni współczynnik wypełnienia macierzy α , otrzymujemy wysokość drzewa $l = \log_2 \frac{|E|}{m^2 \alpha}$. Złożoność pamięciową można wtedy sprowadzić do $O(|E|(1 - \log(E)))$. Należy jednak pamiętać, że w rzeczywistości złożoność pamięciowa AUXO jest ograniczona przez długość podpisów, która wyznacza maksymalną głębokość drzewa. Dlatego podane obliczenia mają zastosowanie pod warunkiem wyboru podpisów odpowiednio długich w stosunku do liczby krawędzi. Niemniej jednak liczba możliwych do przetworzenia krawędzi jest eksponencjalna w stosunku do liczby bitów podpisu, więc w praktycznych zastosowaniach stosunkowo łatwo można dobrać wystarczające wartości. W porównaniu do TCM i GSS, AUXO osiąga lepszą efektywność pamięciową i skalowalność kosztem zwiększenia złożoności czasowej, co może być potencjalną wadą tego rozwiązania.

3.4. Znurzenia grafów

Kolejną, dość rozległą i rozwijającą się metodologią w dziedzinie analizy grafów są zanurzenia grafów (ang. *graph embeddings*). Nazwa odnosi się do reprezentowania wierzchołków przez wektory cech, a więc bardziej obrazowo, zanurzania grafu w niskowymiarowych przestrzeniach wektorowych. Wektory te mogą zachowywać między innymi kluczowe informacje topologiczne związane z połączeniami danego wierzchołka z jego sąsiadami. Przyjmują one najczęściej wartości rzeczywiste, a podobieństwo między wektorami może być mierzone na różne sposoby, np. za pomocą podobieństwa cosinusów (ang. *cosine similarity*) lub odległości Hamminga[25].



Rys. 3.3: Drzewo prefiksowe dla struktury AUXO o 3 poziomach. W tym wypadku zastosowano drzewo binarne, gdzie prefiksy wierzchołka docelowego i startowego są wbudowywane w strukturę naprzemienne. Obok ukazano, jak para podpisów w kubelku różni się, zależnie od poziomu, na którym dana krawędź jest przechowywana.

W tym kontekście, przez podobieństwo lub bliskość wierzchołków rozumieć będziemy ich wzajemne położenie w grafie. W szczególności, podobieństwo pierwszego rzędu zależy od liczby i czasem również wagi bezpośrednich połączeń między wierzchołkami, podczas gdy bliskość drugiego rzędu bierze pod uwagę połączenia poprzez jeden wierzchołek pośredni. Co istotne, tego typu reprezentacja pozwala na łatwe zastosowanie uczenia maszynowego do analizy danych. W ogólności zanurzenia są stosowane szczególnie często w takich zadaniach jak klasyfikacja węzłów, przewidywanie połączeń między nimi oraz rekonstrukcja grafu. Wśród algorytmów opartych na tej metodologii możemy wyróżnić kilka unikalnych podkategorii, cechujących się odmiennymi podejściami do tego, jak cechy są wybierane i przetwarzane. Praca [45] stanowi stosunkowo aktualny i rozbudowany przegląd tego typu metod, ukazując przy okazji wpływ hiperparametrów na uzyskiwane wyniki, zwłaszcza dla metod opartych na faktoryzacji i próbkowaniu. Dla tych dwóch kategorii rozwiązań, autorzy proponują też uogólnione algorytmy, których szczegółowe działanie może być łatwo regulowane za pomocą paramterów. Autorzy dzielą się również pewnymi wskazówkami co do wyboru hiperparametrów dla konkretnych scenariuszy.

3.4.1. Próbkowanie

Techniki oparte na próbkowaniu koncentrują się na wyborze reprezentatywnego zbioru par węzłów z grafu wejściowego, w celu uchwycenia jego podstawowych właściwości strukturalnych. Na ich podstawie określony model uczy się reprezentowania wierzchołków poprzez optymalizację stochastyczną, często wykorzystując SGD (Stochastic gradient descent) do iteracyjnego poprawiania rezultatów. Funkcja straty może przybierać różne postaci, ale w ogólności powinna ona zachowywać informacje o sąsiedztwie wierzchołków. Zapewnienie zadowalającej jakości reprezentacji wyjściowej wymaga często próbkowania znacznej liczby par węzłów, a zatem wymaga dużych zasobów obliczeniowych, w szczególności czasu procesora.

Znanym przykładem tego typu techniki jest DeepWalk[32], wywodzący się, jak sama nazwa wskazuje, z uczenia głębokiego (ang. deep learning). Wykorzystuje on sekwencję krótkich, losowych spacerów po wierzchołkach grafu do zapamiętywania tzw. reprezentacji społecznej (social representation) wierzchołków grafu, zawierającej informacje o podobieństwie sąsiedztwa wierzchołków i przynależności do większych klastrów. DeepWalk wykorzystuje algorytm SkipGram[29] do efektywnego wyznaczania wektorów cech. Co ciekawe, można na ten schemat działania patrzeć jak na uogólnienie metod przetwarzania języka naturalnego do przetwarzania języka losowych spacerów, traktowanych jako zdania.

Node2Vec[13] rozwija ideę DeepWalk, wprowadzając dodatkowe parametry sterujące spacerem. Pozwala to na wybranie, jak szybko spacer może oddalać się od startowego wierzchołka, efektywnie regulując, jak bardzo spacer zbliżony jest do przeszukiwania wszerz lub przeszukiwania włąb. Odpowiednie regulowanie tych parametrów sprzyja lepszemu poznaniu struktury grafu, która mogłaby być trudna do uchwycenia przy zwykłym spacerze losowym.

Kolejną wartą uwagi metodą tego typu jest LINE[35]. Opiera się on na badaniu bliskości zarówno pierwszego, jak i drugiego rzędu między wierzchołkami. Bliskość pierwszego rzędu zależy od wagi połączeń między wierzchołkami. Z kolei bliskość drugiego rzędu mierzy podobieństwo struktury sąsiedztwa dwóch wierzchołków. Wiąże się to z założeniem, że wierzchołki o podobnym sąsiedztwie z dużym prawdopodobieństwem są podobne do siebie. LINE próbkując bezpośrednio pary węzłów z grafu, ucząc się zanurzeń oddzielnie dla bliskości pierwszego i drugiego rzędu, a następnie łącząc je razem.

VERSE[38] jest uniwersalną metodą, zdolną dostosować się do dowolnej miary podobieństwa węzłów, co pozwala na lepsze jej dostosowanie do konkretnych przypadków. Trenuje ona sieć neuronową złożoną z jednej warstwy, próbując pary węzłów i starając się zachować wybraną miarę podobieństwa.

3.4.2. Faktoryzacja

Metody opierające się na faktoryzacji zakładają dekompozycję reprezentacji macierzowej grafu w taki sposób, aby uchwycić ukryte relacje między węzłami w przestrzeni o niższym wymiarze. Ma to na celu zachowanie właściwości strukturalnych grafu, takich jak bliskość węzłów i struktura sąsiedztwa. Jednak koszt obliczeniowych faktoryzacji macierzy może być bardzo wysoki w przypadku dużych grafów, zarówno w kontekście wykorzystania pamięci, jak i czasu obliczeń.

Jedną z istotniejszych metod opartych na faktoryzacji jest GraRep[4]. Wyróżnia się ona uwzględnieniem **nie tylko lokalnych, ale i globalnych informacji strukturalnych w zanurzeniach, mając na celu dokładniejsze uchwycenie charakterystyki grafu**. Wykorzystywany model **badania sąsiedztwa wierzchołków, rozważając różnej długości ścieżki pomiędzy nimi**. Czyni to poprzez manipulowanie globalnymi macierzami przejścia zdefiniowanymi na grafie, bez angażowania procesów próbkowania. Autorzy proponują **naprzemienne wykorzystanie różnych wartości długości ścieżek, a także definiują funkcję straty, zależną od tychże długości**. Ostateczna reprezentacja dla każdego wierzchołka ma charakter globalny i powstaje z połączenia wielu wyuczonych modeli. Wykorzystanym sposobem dekompozycji jest rozkład według wartości osobliwych, szerzej znany jako SVD (Singular Value Decomposition). Sprowadza się on do przedstawienia macierzy A w postaci

$$A = U\Sigma V^T,$$

gdzie U i V - macierze ortogonalne i Σ - macierz diagonalna.

HOPE[30] działa na podobnej zasadzie, faktoryzując macierze odpowiadające sąsiadom w odległości co najwyżej k od danego wierzchołka z wykorzystaniem SVD. Autorzy biorą sobie jednak za cel zachowanie asymetrycznej przechodniości. Przedstawia ona korelacje między skierowanymi krawędziami, a więc, istnienie skierowanej ścieżki z u do v może sugerować istnienie skierowanej krawędzi z u do v . Prawdopodobieństwo ich istnienia jest wyliczane na podstawie indeksu Katza[17]. **Indeks ten jest definiowany jako suma ważona ścieżek między dwoma wierzchołkami. Waga ścieżki jest natomiast wykładniczą funkcją jej długości.**

NetMF[33] jest rozwiązaniem syntetycznym, generalizującym metody próbujące takie, jak DeepWalk, Node2Vec i LINE. Autorzy zauważają, że sposób działania tych metod można przedstawić jako niejawne faktoryzacje macierzy. Na podstawie tej obserwacji wyznaczają oni jawne postaci **macierzy, które są aproksymowane i faktoryzowane przez omawiane algorytmy.**

Dodatkowo, bazując na relacji między metodą DeepWalk i macierzy Laplace’a dla grafu (ang. Laplacian matrix), autorzy proponują algorytm efektywnie aproksymujący jawną postać tej macierzy.

Z kolei ProNE[48] jest wykorzystuje, składającą się z dwóch zasadniczych kroków. Pierwszy z nich polega na sprowadzeniu generowania zanurzeń wierzchołków do faktoryzacji rzadkich macierzy. W drugim kroku uzyskane wyniki są poprawiane w celu lepszego ukazania globalnych zależności w grafie. Aby to osiągnąć, ProNE stosuje nierówność Cheegera wyższego rzędu[21] do propagacji zanurzeń. Jak twierdzą autorzy, taki sposób przeprowadzania obliczeń może istotnie zwiększyć wydajność w praktycznych zastosowaniach.

3.4.3. Metody oparte na sieciach neuronowych

Większość algorytmów opisywanych w tym podrozdziale wykorzystuje sieci neuronowe w mniejszym lub większym stopniu. Jednak często nie stanowią one istoty rozwiązania. Przykładowo, mogą one być eksploatowane tylko na dalszym etapie rozwiązania, np. do samej klasyfikacji wierzchołków, podczas gdy właściwe wektory zanurzeń są generowane w inny sposób. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby i do tego zadania zaprząć moc sieci neuronowych. Istnieje wiele rozwiązań, które budują zaawansowane modele sieci, zdolne radzić sobie z danymi grafowymi, bez konieczności użycia kosztownych faktoryzacji macierzy, czy próbkowania.

Jednym z przykładów tego podejścia jest SDNE[39]. Jest to metoda wykorzystująca głęboki, wielowarstwowy model dostosowany do uczenia pół-nadzorowanego. Konkretnie, część nadzorowana bada sąsiedztwo pierwszego rzędu między wierzchołkami, ucząc się lokalnej struktury grafu. Z kolei w uczeniu nienadzorowanym, mającym na celu wychwycenie globalnych informacji, SDNE używa sąsiedztwa drugiego rzędu. Autorzy proponują również użycie autoenkodera, aby minimalizować błędy rekonstrukcji danych. Taki model pozwala na zachowanie kompleksowej struktury grafu.

DVNE[50] wyróżnia się na tle innych rozwiązań tym, że generuje zanurzenia wierzchołków w przestrzeni Wassersteina. Dokładniej, autorzy wykorzystują dystans 2-Wassersteina jako miarę podobieństwa między rozkładami prawdopodobieństwa, a więc, w tym przypadku, wygenerowanymi zanurzeniami oraz prawdziwymi danymi. Miara ta dobrze zachowuje tranzytywność oraz może modelować niepewność wierzchołków, powiązaną z wariancją rozkładu. Proces uczenia postulowany w DVNE jest uczeniem nienadzorowanym.

GCN[19] jest kolejnym przykładem uczenia pół-nadzorowanego. W tym przypadku autorzy przyglądają się głównie zadaniu klasyfikacji wierzchołków. W tym celu definiują sprytną zasadę propagacji w konwolucyjnej sieci neuronowej, pozwalającą na jej działanie bezpośrednio na macierzy sąsiedztwa. Inspiracją są w tym przypadku metody aproksymacji spektralnych splotów grafów.

GraphSAGE[14] wykorzystuje uczenie z nadzorem. Bierze pod uwagę nie tylko topologię grafu, ale także cechy wierzchołków. W przeciwieństwie do większości podobnych metod GraphSAGE nie generuje unikalnego wektora zanurzenia dla każdego wierzchołka. Zamiast tego, trenuje zbiór funkcji agregujących informacje o cechach z lokalnego sąsiedztwa węzła. Mogą one być potem stosowane dla zupełnie nowych wierzchołków.

3.4.4. Szkice

Szczególnie istotne z perspektywy niniejszej pracy są techniki zanurzania oparte na szkicach danych. Ich głównym założeniem jest tworzenie kompaktowych szkiców dla oryginalnych wielowymiarowych danych, przy jednoczesnym zachowaniu pewnej miary podobieństwa między wierzchołkami. Często stosowanym pomysłem jest generowanie reprezentacji

wierzchołków w przestrzeni Hamminga[15], a więc wykorzystanie kodów binarnych. Metody te opierają się na zastosowaniu zachowujących podobieństwo technik haszowania w celu generowania zanurzeń węzłów. Wykorzystywane przez nie haszowanie może być zależne albo niezależne od danych. W literaturze te warianty bywają również opisywane jako odpowiednio learning-to-hash i locality sensitive hashing[40].

INH-MF[25] to pierwsza tego typu technika zaproponowana dla problemu zanurzeń grafu. Wykorzystuje ona haszowanie zależne od danych i uczy się reprezentowania szkicu grafu poprzez faktoryzację macierzy, zachowując jednocześnie wysokopoziomowe informacje o bliskości węzłów w grafie. W celu poprawy wydajności procesu uczenia autorzy proponują także zastosowanie uczenia w podprzestrzeni Hamminga, który przy przetwarzaniu nowych krawędzi aktualizuje tylko niektóre części wyjściowej reprezentacji.

Większość opisywanych w tym podrozdziale metod skupia się na zachowaniu informacji strukturalnych dotyczących badanego grafu. O ile w wielu scenariuszach jest to wystarczające, o tyle istnieją przypadki, gdy przydatne może się okazać bardziej elastyczne podejście do definiowania cech wierzchołków, które algorytm powinien brać pod uwagę przy wyznaczaniu zanurzeń. Naprzeciw tym wymaganiom wychodzi algorytm NetHash[42]. Korzysta on ze zrandomizowanej techniki haszowania MinHash. Za jej pomocą koduje płytkie drzewa, z których każde jest zakorzenione w wierzchołku grafu. Właściwe szkice powstają poprzez rekurencyjne szkicowanie drzewa od dołu do góry, a więc od predefiniowanych sąsiednich węzłów najwyższego rzędu do węzła głównego. W ten sposób kodowane są zarówno atrybuty, jak i informacje o strukturze każdego węzła. NetHash zachowuje w szczególności informacje zawarte bliżej węzła głównego.

GNN[34] (Graph Neural Network) jest popularną metodą w zadaniach związanych z użyciem uczenia maszynowego dla danych grafowych. Zakłada ona zastosowanie konwolucyjnej sieci neuronowej do pół-nadzorowanych zadań klasyfikacji węzłów, a więc takich wykorzystujących zarówno etykietowane, jak i nieetykietowane dane. Jednak jej efektywne wykorzystanie zazwyczaj wymaga znacznych zasobów obliczeniowych ze względu na konieczność uczenia się dużej liczby parametrów. Sprawia to, że algorytmy oparte na GNN mogą być niepraktyczne dla problemu przetwarzania ogromnych grafów. #GNN[43] modyfikuje GNN w celu znalezienia kompromisu między dokładnością a wydajnością. Autorzy proponują wprowadzenie zrandomizowanego haszowania do implementacji przekazywania wiadomości i przechwytywania informacji o sąsiedztwie wysokiego rzędu w sieci GNN.

NodeSketch

Ważnym i interesującym, także w kontekście niniejszej pracy, krokiem w rozwoju analizy wielkich grafów z wykorzystaniem szkiców jest algorytm NodeSketch[47]. Autorzy wykorzystują rekursywne szkicowanie niezależne od danych, aby tworzyć szkice, które dla każdego wierzchołka zachowują informacje o jego sąsiedztwie wysokiego rzędu. Bardziej konkretnie, zaczynają oni od przedstawienia idei spójnego ważonego próbkowania ([ang. consistent weighted sampling](#)).

Niech $V^a, V^b \in \mathbb{R}_+^D$ - nieujemne wektory *D-elementowe*. Wtedy ich podobieństwo min-max, zwane też ważonym indeksem Jaccarda możemy zdefiniować jako

$$Sim_{MM}(V^a, V^b) = \frac{\sum_{i=1}^D \min(V_i^a, V_i^b)}{\sum_{i=1}^D \max(V_i^a, V_i^b)}. \quad (3.1)$$

Możemy wobec tej wartości zastosować normalizację sum-to-one $\sum_{i=1}^D V_i^a = \sum_{i=1}^D V_i^b = 1$ i oznaczyć takie znormalizowane podobieństwo przez Sim_{NMM} . Jest to efektywny

sposób mierzenia podobieństwa **między wektorami nieujemnych liczb rzeczywistych**, co ukazano w [24]. **Przykładowy graf wraz z macierzą SLA oraz odpowiadającą jej macierzą znormalizowanych podobieństw min-max** ukazuje rysunek 3.4. Zasadniczo spójne ważne próbkowanie sprowadza się do generowania próbek danych w taki sposób, aby prawdopodobieństwo wylosowania identycznych wartości dla obu wektorów było równe ich podobieństwu min-max. Próbki te są następnie traktowane jako szkic wektora wejściowego. Proponowany proces generowania próbek dla wektora $V = [V_1, V_2, \dots, V_D]$ jest dość prosty. Zaczyna się on od wyboru funkcji haszującej h_j , takiej, że $h_j(i) \sim \text{Uniform}(0, 1)$. Za jej pomocą próbka S_j wyznaczana jest jako:

$$S_j = \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{V_i}. \quad (3.2)$$

Wybierając L ($L \ll D$) niezależnych funkcji haszujących i generując na ich podstawie próbki otrzymujemy szkic S o rozmiarze L wektora V . Ponadto, wynikowe szkice zachowują własność:

$$\Pr[S_j^a = S_j^b] = \text{Sim}_{NMM}(V^a, V^b), j = 1, 2, \dots, L. \quad (3.3)$$

Na podstawie tego schematu, autorzy budują właściwy algorytm NodeSketch. Jego działanie rozpoczyna się od wygenerowania zanurzeń dla wierzchołków na podstawie sąsiedztwa pierwszego i drugiego stopnia. Wykorzystuje do tego macierz sąsiedztwa SLA (Self-Loop-Augmented) grafu. Różni się ona od zwykłej macierzy tym, że zawiera połączenia z każdego wierzchołka do niego samego, co pozwala prawidłowo zachowywać sąsiedztwo pierwszego rzędu. Innymi słowy, jeśli A jest oryginalną macierzą sąsiedztwa, to macierz SLA ma postać:

$$\tilde{A} = I + A,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. zanurzenia k -tego rzędu są generowane rekurencyjnie na podstawie macierzy SLA i zanurzeń $(k - 1)$ -wszego rzędu. Ważną cechą spójnego ważonego próbkowania jest jednostajność generowanych próbek, co oznacza, że prawdopodobieństwo wybrania wartości i jest proporcjonalne do V_i , a więc

$$\Pr(S_j = i) = \frac{V_i}{\sum_m V_m}.$$

Własności ta implikuje, że udział elementu i w szkicu S stanowi nieobciążony estymator V_i , z czego można wywnioskować, że poprzez empiryczną obserwację rozkładu elementów w szkicu można aproksymać wektor V .

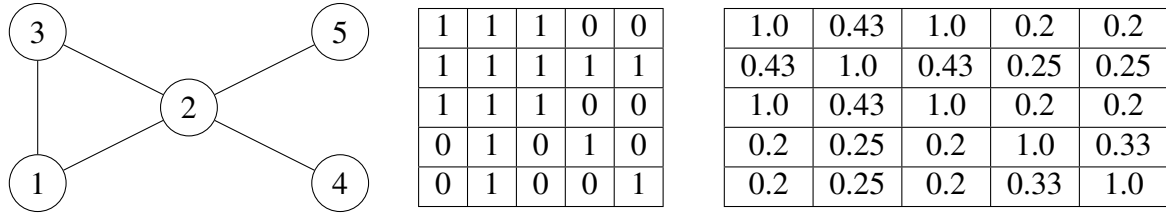
Bazując na powyższych obserwacjach, autorzy przechodzą do właściwego sformułowania algorytmu. Dla każdego węzła r , obliczany jest przybliżony wektor SLA k -tego rzędu. Odbywa się to poprzez połączenie oryginalnego wektora SLA z wektorem $(k-1)$ -wszego rzędu z odpowiednią wagą:

$$\tilde{V}_i^r(k) = \tilde{V}_i^r + \sum_{n \in \Gamma(r)} \frac{\alpha}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{[S_j^n(k-1)=i]}, \quad (3.4)$$

gdzie $\Gamma(r)$ to zbiór sąsiadów wierzchołka r , a $S^n(k - 1)$ jest szkicem $(k-1)$ -wszego rzędu dla wierzchołka n . Dodatkowo parametr α **steruje tym, jaki wpływ ma na wagę połączenia między wierzchołkami ma rząd ich sąsiedztwa, czyli liczba wierzchołków pośrednich. Dzięki temu krótkie połączenia są traktowane z wyższym priorytetem niż te dłużej bliskiej k .** Następnie, szkic wierzchołka r oznaczany jako $S^r(k)$ jest wyznaczany z równania 3.2. **Ostatecznym rezultatem wykonania algorytmu jest szkic**

$$S(k) = [S^1(k), S^2(k), \dots, S^D(k)]^T, S(k) \in \mathbb{R}_+^{D \times L}.$$

Działanie algorytmu ukazuje pseudokod 1.



Rys. 3.4: Przykładowy graf wraz z odpowiadającą mu macierzą SLA oraz macierzą wartości podobieństw min-max, obliczonych przy pomocy równania 3.1. Można spostrzec, że np. dla wierzchołka 4, jego sąsiedztwo jest najbardziej zbliżone do sąsiedztwa wierzchołka 5, czemu odpowiada wartość 0.33 podobieństwa min-max. Warto też zauważyć, że $Sim_{NMM}(V, V)$, czyli podobieństwo wierzchołka do siebie samego jest zawsze równe 1.

Algorithm 1: NodeSketch(\tilde{A}, k, α)

```

1 if  $k > 2$  then
2    $S(k-1) \leftarrow NodeSketch(\tilde{A}, k-1, \alpha)$ ;
3   foreach rząd  $r$  w  $\tilde{A}$  do
4      $\tilde{V}_i^r(k) \leftarrow \tilde{V}_i^r + \sum_{n \in \Gamma(r)} \frac{\alpha}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{[S_j^n(k-1)=i]}, i \in \{1, 2, \dots, D\}$ ;
5      $S_j^r(k) \leftarrow \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{\tilde{V}_i^r(k)}, j \in \{1, 2, \dots, L\}$ ;
6 else if  $k = 2$  then
7   foreach rząd  $r$  w  $\tilde{A}$  do
8      $S_j^r(2) \leftarrow \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{\tilde{V}_i^r(2)}, j \in \{1, 2, \dots, L\}$ ;
9 return  $S(k)$ 

```

SGSketch

Choć NodeSketch okazuje się efektywny w wielu scenariuszach testowych, to nie da się ukryć, że jego możliwości, podobnie jak wielu omawianych wcześniej metod generowania zanurzeń wierzchołków, są ograniczone. Po pierwsze, nie bierze on pod uwagę wag krawędzi, a tylko ich istnienie. Tymczasem waga połączenia może nieść ze sobą cenne informacje. **Po drugie, zakłada on, że cała macierz sąsiedztwa SLA jest znana w chwili wywołania algorytmu. Fakt ten sprawia, że NodeSketch nie jest przystosowany do działania w formie On-Line, a więc reagowania na zmiany w grafie, jak np. ustanawianie nowych krawędzi.** Ta obserwacja, choć z pozoru nieco rozczarowująca, **może stanowić inspirację do budowy kolejnych, bardziej elastycznych rozwiązań.**

Jedną z prób stworzenia metody mogącej radzić sobie z ewoluującym strumieniem krawędzi jest, oparty na NodeSketch, algorytm SGSketch[46]. Jego główna idea polega na stopniowym zapominaniu dawnych krawędzi i wykorzystaniu efektywnego, inkrementacyjnego mechanizmu aktualizacji wygenerowanych zanurzeń.

Niech SG będzie strumieniowym grafem. Typowa implementacja stopniowego zapominania krawędzi **polega na obliczaniu jej wagi bazując na momencie wystąpienia w strumieniu.** Starszym krawędziom przypisywane będą mniejsze wartości, zgodnie z **prawem rozpadu naturalnego (ang. exponential decay).** Możemy więc przyjąć wagę krawędzi, która pojawiła się w chwili t jako $w_t = e^{\lambda(t_n - t)}$, gdzie t_n jest momentem wystąpienia najnowszej krawędzi, a λ jest parametrem sterującym szybkością zapominania. Stąd elementy macierzy

sąsiedztwa wyznaczane są ze wzoru:

$$A_{i,j} = A_{j,i} = \max_{t \leq t_n} e^{-\lambda(t_n - t)} \mathbb{1}_{[(r_i, r_j)^t \in SG]}. \quad (3.5)$$

Taka forma zapominania ma charakter globalny, co oznacza, że waga wszystkich istniejących krawędzi zmniejsza się w wyniku przetwarzania każdej nowej krawędzi. Może to prowadzić do kosztownych i niepotrzebnych zmian dla wierzchołków znajdujących się daleko od nowych krawędzi. Dlatego autorzy proponują zastosowanie lokalnej techniki zmniejszania wag. Formalnie, aby obliczyć wagę krawędzi (r_i, r_j) zaobserwowanej w chwili t dla wierzchołka r_i , wyznaczamy najpierw liczbę krawędzi wchodzących i wychodzących z r_i w przedziale czasowym $(t, t_n]$:

$$\phi_{(t, t_n]}(r_i) = |\{(r_p, r_q)^{t'} | r_i \in (r_p, r_q), t' \in (t, t_n]\}|. \quad (3.6)$$

Ostatecznie, elementy macierzy mają postać:

$$A_{i,j} = \max_{t \leq t_n} e^{-\lambda \phi_{(t, t_n]}(r_i)} \mathbb{1}_{[(r_i, r_j)^t \in SG]}. \quad (3.7)$$

Działanie właściwego algorytmu SGSketch rozpoczyna się od wygenerowania początkowego szkicu. Odbywa się to sposób w zasadzie identyczny jak w algorytmie NodeSketch, z tą różnicą, że wykorzystywana jest macierz SLA z lokalnym zapominaniem krawędzi. Zasada działania procedury aktualizacji szkicu ukazana jest w pseudokodzie 2. Argumentami wejściowymi jest macierz sąsiedztwa SLA A , aktualny szkic S , zbiór wierzchołków **indukujących** nową krawędź lub krawędzie Ω , rząd k oraz współczynnik α . Zasadniczo, mechanizm jest podobny do **pierwszego generowania szkicu, ale w tym przypadku większość wartości jest już znana, a przeliczane są** zanurzenia tylko tych elementów, które znajdują się w sąsiedztwie nowych krawędzi. Pozwala to na znaczną oszczędność w kwestii czasu obliczeń.

Algorithm 2: SGSketchUpdate($\tilde{A}, S, \Omega, k, \alpha$)

```

1 if  $k > 2$  then
2   zaktualizuj  $S(k-1)$  i zbiór  $\Omega$ :  $SGSketchUpdate(\tilde{A}, S, \Omega, k-1, \alpha)$ ;
3   foreach  $r \in \Omega$  do
4      $\tilde{V}^r(k) \leftarrow \tilde{V}_i^r + \sum_{n \in \Gamma(r)} \frac{\alpha}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{[S_j^n(k-1)=i]}, i \in \{1, 2, \dots, D\}$ ;
5      $S_j^r(k) \leftarrow \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{\tilde{V}_i^r(k)}, j \in \{1, 2, \dots, L\}$ ;
6 else if  $k = 2$  then
7   foreach  $r \in \Omega$  do
8      $S_j^r(2) \leftarrow \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{\tilde{V}_i^r(2)}, j \in \{1, 2, \dots, L\}$ ;
9 foreach  $r \in \Omega$  do
10   $\Omega \leftarrow \Omega \cup \Gamma(r)$ ;

```

Rozdział 4

Operowanie na szkicach danych

W niniejszym rozdziale przedstawimy szerzej operacje, które mogą być wykonywane na szkicach danych oraz skomentujemy ich praktyczne zastosowania. Omówimy także algorytmy ExpSketch i FastExpSketch, generujące szkice, na których możliwe jest wykonywanie między innymi działań teoriomnogościowych.

4.1. Szkice danych

Jak już wspomniano w poprzednich rozdziałach, szkice danych to kompaktowe struktury, które pozwalają na efektywną reprezentację kluczowych informacji o dużych zbiorach danych. Są one najczęściej generowane przez algorytmy online, przetwarzające strumień danych i wykorzystujące funkcje haszujące do przypisywania identycznym elementom strumienia tych samych, pseudolosowych wartości. Formalnie, możemy zdefiniować strumień danych jako multizbiór $\mathfrak{M} = (\mathbb{S}, m)$, gdzie \mathbb{S} to zbiór unikalnych elementów, a funkcja $m : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ wyznacza ich licznosc w strumieniu.

Szkice danych były początkowo wykorzystywane głównie do estymacji prostych statystyk, takich jak liczba unikalnych elementów, czy częstość ich występowania. Tego typu wiedza bywa wystarczająca w wielu zastosowaniach, ale w niektórych przypadkach może okazać się niewystarczająca. Użyteczniejsze są szkice przechowujące dodatkowe informacje o elementach, takie jak ich wagi, czy dodatkowe atrybuty, a także umożliwiające wykonywanie działań na wyznaczonych szkicach. Przykładowo, posiadając szkice dwóch zbiorów danych, przydatna byłaby możliwość efektywnego wyznaczenia szkicu ich sumy lub przecięcia.

4.1.1. ExpSketch

Szczególnie ciekawym przykładem algorytmu mającego na celu zwiększyć liczbę możliwych do wykonania operacji, a tym samym użyteczność szkicu, jest ExpSketch[22]. Operuje on na elementach postaci (i, λ_i) , gdzie i jest identyfikatorem elementu, a λ_i jego wagą. Wynikiem jego działania jest natomiast wektor zanurzeń o pewnym ustalonym rozmiarze m . W praktyce ExpSketch może reprezentować wiele różnych cech zbioru danych poprzez dodanie dodatkowego wymiaru w zanurzeniach elementów. W takim wypadku zamiast jednej wagi λ_i do każdego elementu i przypisany jest wektor wag $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,d})$, a szkic elementu przyjmuje formę macierzy o rozmiarze $d \times m$. Jednak w kontekście szkicowania grafów jedyną cechą, którą będziemy rozważać, jest związana z wagami krawędzi. Dlatego przedstawimy wersję algorytmu dla $d = 1$.

Schemat działania algorytmu ExpSketch jest dość prosty. Przetwarza on elementy w strumieniu sekwencyjnie. Dla każdego elementu (i, λ_i) obliczane jest m haszy:

$$h(i||1), h(i||2), \dots, h(i||m),$$

gdzie $h : \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją haszującą, a $||$ oznacza konkatenację reprezentacji binarnych liczb o ustalonej długości. Każdy z haszy jest następnie przekształcany przy użyciu odwrotności funkcji rozkładu wykładniczego z parametrem λ_i :

$$F^{-1}(u) = -\frac{\ln u}{\lambda_i}.$$

Zgodnie z *inverse transform sampling theorem*[8], otrzymujemy w ten sposób zmienną losową o rozkładzie wykładniczym:

$$E = -\frac{\ln(h(i||k))}{\lambda_i} \sim \text{Exp}(\lambda_i).$$

Każda z otrzymanych w ten sposób wartości jest porównywana z odpowiadającą jej pozycją w szkicu i zapisywana, jeśli jest mniejsza. Zasadę działania algorytmu ilustruje pseudokod 3. Co istotne, na tak zdefiniowanych szkicach można w prosty sposób wykonywać operacje teoriomnogościowe.

JL:przysłałoby
się zmienić
słowo
Algorithm na
Algorytm we
wszystkich
listingach

Algorithm 3: ExpSketch(\mathfrak{M}, m)

```

1  $M = (M_1, M_2, \dots, M_m) \leftarrow (\infty, \infty, \dots, \infty);$ 
2 foreach  $(i, \lambda_i) \in \mathfrak{M}$  do
3   foreach  $k \in 1, 2, \dots, m$  do
4      $U \leftarrow h(i||k);$ 
5      $E \leftarrow -\ln(U/\lambda_i);$ 
6      $M_k \leftarrow \min \{M_k, E\};$ 
7 return  $M$ 
```

4.1.2. Operacja teoriomnogościowe na szkicach

Rozważmy dwa zbiory \mathbb{A} i \mathbb{B} oraz odpowiadające im szkice:

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_m) \quad \text{i} \quad B = (B_1, B_2, \dots, B_m).$$

Wiemy, że elementy A_k i B_k szkiców A i B reprezentują minimalne wartości zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym:

$$A_k \sim \text{Exp}(|\mathbb{A}|_w) \quad \text{i} \quad B_k \sim \text{Exp}(|\mathbb{B}|_w),$$

gdzie $|\mathbb{S}|_w = \sum_{i \in \mathbb{S}} \lambda_i$.

Suma

Chcąc otrzymać szkic C , gdzie $C_k \sim \text{Exp}(|\mathbb{A} \cup \mathbb{B}|_w)$, możemy zastosować operację minimum na odpowiadających sobie elementach szkiców A i B :

$$A \cup B = (\min \{A_1, B_1\}, \min \{A_2, B_2\}, \dots, \min \{A_m, B_m\}).$$

Taka konstrukcja jest oczywiście intuicyjna. Gdyby algorytm ExpSketch otrzymał na wejściu zbiór $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, to każdy z elementów obu zbiorów zostałby wykorzystany do wygenerowania hasza, a wynikowy szkic zawierałby najmniejsze z otrzymanych wartości.

Z kolei samą wartość $|\mathbb{A} \cup \mathbb{B}|_w$ możemy estymować jako:

$$\hat{U}(A, B) = \frac{m-1}{\sum_{k=1}^m \min\{A_k, B_k\}}.$$

Ważone podobieństwo Jaccarda

Podobieństwo Jaccarda to miara podobieństwa dwóch zbiorów, zdefiniowana jako stosunek liczby elementów wspólnych do liczby elementów w sumie zbiorów:

$$J(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{|\mathbb{A} \cap \mathbb{B}|}{|\mathbb{A} \cup \mathbb{B}|}.$$

Jak pokazano w [22],

$$J_w(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = Pr[A_k = B_k].$$

Stąd można łatwo wyznaczyć estymator podobieństwa Jaccarda zbiorów \mathbb{A} i \mathbb{B} jako:

$$\hat{J}_w(A, B) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbb{1}[A_k = B_k].$$

JL: Przydałoby się formalnie zdefiniować ważne podobieństwo Jaccarda.

Przecięcie

Statystyki dotyczące przecięcia zbiorów można łatwo estymować na podstawie sumy i podobieństwa Jaccarda. Dla $|\mathbb{A} \cap \mathbb{B}|_w$ mamy:

$$\hat{I}(A, B) = \hat{J}_w(A, B) \cdot \hat{U}(A, B).$$

Estymator sumy wag elementów

Oznaczmy sumę wag wszystkich elementów w strumieniu jako $\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i roważmy k -tą pozycję w szkicu. Dla każdego elementu i generowana jest próbka $E_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, a w ostatecznym szkicu zapisywana jest najmniejsza z tych próbek:

$$M_k = \min\{E_1, E_2, \dots, E_n\}.$$

. Oczywiście minimum zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym również ma rozkład wykładniczy, z parametrem równym Λ :

$$M_k \sim \text{Exp}(\Lambda).$$

Warto zauważyć, że wartości M_1, M_2, \dots, M_m są niezależne od siebie. Wiadomo również, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym i o tej samej wartości oczekiwanej ma rozkład gamma. Korzystając z tego faktu, oznaczmy $G_m = M_1 + M_2 + \dots + M_m$. Wtedy

$$G_m \sim \Gamma(m, \Lambda).$$

Korzystając z własności rozkładu gamma, możemy wyznaczyć estymator sumy wag elementów w strumieniu jako:

$$\hat{\Lambda} = \frac{m-1}{G_m}.$$

Jest to estymator nieobciążony.

JL: Przydałoby się napisać, że wszystkie powyższe estymatory są nieobciążone

4.1.3. FastExpSketch

Łatwo zauważyć, że ExpSketch dla każdego elementu w strumieniu wykonuje m iteracji pętli, po jednej dla każdej wartości przechowywanej w szkicu. Pojedyncza iteracja polega na obliczeniu hasza, wygenerowaniu liczby losowej, obliczeniu wartości E i zaktualizowaniu szkicu. Każda z tych operacji wykonywana jest w czasie stałym, co daje złożoność czasową $\Omega(m)$ dla pojedynczego elementu w strumieniu. W przypadku przetwarzania krawędzi grafu oznacza to łączną złożoność czasową $\Omega(m|E|)$, gdzie $|E|$ to liczba krawędzi w grafie. Taka liczba operacji może być w praktyce zbyt duża, dlatego rozważać będziemy zoptymalizowaną wersję algorytmu, FastExpSketch [23]. Jego idea opiera się na wykorzystaniu następującego twierdzenia (cf. [8]):

Twierdzenie 1 Niech E_1, E_2, \dots, E_m będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym. Oznaczmy przez:

$$E_{(1)} \leq E_{(2)} \leq \dots \leq E_{(m)}$$

ich statystyki pozycyjne. Wtedy dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi równość rozkładów:

$$E_{(k)} \stackrel{d}{=} E_{(k-1)} + \frac{E_k}{m - k + 1}.$$

W oryginalnym algorytmie ExpSketch, dla każdego elementu generowanych jest m wartości E_1, E_2, \dots, E_m , które są następnie porównywane z analogicznymi wartościami w szkicu. Można zauważyć, że jeśli dla danego k zachodzi:

$$E_k > \max \{M_1, M_2, \dots, M_m\},$$

to oczywiście E_k nie zostanie zapisane w szkicu. Ten fakt pozwala na zmniejszenie liczby operacji wykonywanych przez algorytm, przy utrzymaniu identycznych wyników. Konkretnie, zamiast wartości E_1, E_2, \dots , generowane są ich statystyki pozycyjne $E_{(1)}, E_{(2)}, \dots$, dopóki nie zajdzie warunek $E_{(i)} > \max \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. Następnie wygenerowane wartości $E_{(1)}, E_{(2)}, \dots, E_{(i-1)}$ są porównywane z wartościami w szkicu.

JL:na losowo
wybranych
pozycjach

Działanie FastExpSketch ilustruje pseudokod Algorytm 4. Algorytm rozpoczyna się od inicjalizacji szkicu, oraz zmiennych pomocniczych. Dla każdego elementu w strumieniu ustawiamy zmienną S przechowującą aktualną pozycyjną na 0. W liniijkach 9 – 11 obliczamy kolejne statystyki pozycyjne, korzystając z Twierdzenia 1 i zapisujemy je na losowej pozycji j w szkicu, o ile są mniejsze od aktualnie zapisanej tam wartości. Pozycje w szkicu wyznaczamy liniijkach 14 – 16 na podstawie losowej permutacji P , za pomocą kroków analogicznych do algorytmu Fischera-Yatesa. Cała procedura jest przerywana, jeśli wygenerowana wartość S przekroczy aktualne maksimum MAX wartości w szkicu. Na końcu wartość MAX jest aktualizowana, o ile zaszła taka potrzeba.

Rozważając złożoność algorytmu, możemy skupić się na liczbie porównań w linii 19. Oznaczmy przez C_i zmienną losową wyznaczającą liczbę takich porównań dla elementu i . Rozważymy twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [23]:

Twierdzenie 2 Dla $i \geq 2$, $\Lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ oraz $r_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda_{i-1}}$, zachodzi:

$$\mathbb{E}[C_i] = m \left(1 - \prod_{j=1}^m \frac{j}{j + r_i} \right).$$

W przypadku ogólnym wartość oczekiwana zależy więc od wag elementów w strumieniu. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że są one jednakowe, co ma uzasadnienie np. w przypadku grafów nieważonych. W takim przypadku wartość oczekiwana liczby porównań wynosi:

$$\mathbb{E}[C_i] = m \left(1 - \prod_{j=1}^m \frac{j}{j + \frac{1}{i-1}} \right).$$

Korzystając z własności liczb Stirlinga pierwszego rodzaju, możemy pokazać, że:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i\mathbb{E}[C_i] = mH_m \quad \text{ i } \quad \mathbb{E}[C_i] \leq \frac{mH_m}{i},$$

gdzie H_m jest m -tą liczbą harmoniczną. Stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[C] \leq \sum_{i=1}^n \frac{mH_m}{i} = mH_m H_n,$$

gdzie $H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$, więc wartość oczekiwana liczby porównań jest logarytmiczna względem liczby elementów w strumieniu.

Algorithm 4: FastExpSketch(\mathfrak{M}, m)

```

1 permInit  $\leftarrow (1, 2, 3, \dots, m)$ ;
2  $M = (M_1, M_2, \dots, M_m) \leftarrow (\infty, \infty, \dots, \infty)$ ;
3  $MAX \leftarrow \infty$ ;
4 foreach  $(i, \lambda_i) \in \mathfrak{M}$  do
5    $S \leftarrow 0$ ;
6   updateMAX  $\leftarrow false$ ;
7    $P \leftarrow permInit$ ;
8   foreach  $k \in 1, 2, \dots, m$  do
9      $U \leftarrow h(i||k)$ ;
10     $E \leftarrow -\ln(U/\lambda_i)$ ;
11     $S \leftarrow S + E/(m - k + 1)$ ;
12    if  $S > MAX$  then
13      break;
14     $r \leftarrow RandomInteger([k, m], seed = i)$ ;
15    swap( $P[k], P[r]$ );
16     $j \leftarrow P[k]$ ;
17    if  $M_j = MAX$  then
18      updateMAX  $\leftarrow true$ ;
19     $M_j \leftarrow \min \{M_j, S\}$ ;
20  if updateMAX then
21     $MAX \leftarrow \max \{M_1, \dots, M_m\}$ ;
22 return  $\underline{M}$ 

```

Rozdział 5

Ulepszenie algorytmu NodeSketch z wykorzystaniem FastExpSketch

5.1. Motywacja

Algorytm NodeSketch cechuje się wysoką efektywnością pamięciową i czasową. Eksperymenty pokazują, że osiąga on także dobre rezultaty na rzeczywistych danych (cf. [47]). Niemniej jednak, gama operacji, które można wykonać na wynikowych szkicach jest dość ograniczona. Ponadto, NodeSketch w swej bazowej postaci nie uwzględnia wag krawędzi w zanurzeniach, co potencjalnie ogranicza jego użyteczność dla grafów ważonych. W niniejszym rozdziale przyglądamy się generalizacji algorytmu NodeSketch, polegającej na wykorzystaniu metody FastExpSketch do szkicowania wierzchołków. Wyjaśniamy zasadę działania tej metody, przedstawiamy jej implementację i analizujemy jej złożoność. Zwracamy także uwagę na korzyści płynące z zastosowania takiego podejścia, takie jak możliwość wykonywania operacji teoriomnogościowych na szkicach, czy uwzględnienie wag krawędzi.

5.2. Idea

NodeSketch wykorzystuje *inverse sampling theorem* do generowania próbek z rozkładu wykładniczego. Konkretnie j -ta pozycja w zanurzeniu jest obliczana jako:

$$S_j = \arg \min_{i \in \{1, 2, \dots, D\}} \frac{-\log h_j(i)}{V_i},$$

gdzie $V = (V_1, V_2, \dots, V_D)$ to wektor sąsiedztwa. Łatwo zauważyć, że jest to bardzo podobny pomysł do tego, na którym opierają się algorytmy ExpSketch i FastExpSketch. Podstawowa różnica polega na tym, że w przypadku NodeSketch, w szkicu przechowywane będą indeksy wierzchołków, podczas gdy w przypadku ExpSketch - rzeczywista wartość wygenerowana z rozkładu wykładniczego. Pozwala to między innymi na lepsze uwzględnienie wag krawędzi w zanurzeniach. Dlatego też, naturalnym krokiem wydaje się zastąpienie tej części algorytmu NodeSketch szkicowaniem wierzchołków z wykorzystaniem FastExpSketch.

Przedstawiona modyfikacja powinna zmniejszyć również średnią liczbę wykonywanych operacji, ze względu na bardziej efektywne podejście do szkicowania. To założenie zostało zweryfikowane eksperymentalnie w Rozdziale 6.6.1. Pseudokod zmodyfikowanej wersji algorytmu, którą określać będziemy dalej jako EdgeSketch, przedstawia pseudokod **Algorytm 5**. W każdej iteracji głównej pętli rozważamy jeden wiersz w macierzy sąsiedztwa, a więc jeden wierzchołek. W linii 2 wybieramy sąsiadów wierzchołka oraz wagi połączeń. Etykieta

krawędzi powstaje przez połączenie etykiet wierzchołków w porządku leksykograficznym. Wynika to z faktu, że rozważamy grafy nieskierowane i krawędź (a, b) powinna być nierozróżnialna od krawędzi (b, a) . Następnie, krawędzie te są przekazywane do metody FastExpSketch, która generuje na ich podstawie właściwe szkice.

Algorithm 5: EdgeSketch(\tilde{A}, m)

```

1 foreach rząd  $r$  w  $\tilde{A}$  do
2    $ns \leftarrow \{((\min(i, r) || \max(i, r)), \tilde{A}[r, i]) : \tilde{A}[r, i] \neq 0\};$ 
3    $S^r \leftarrow FastExpSketch(ns, m);$ 
4 return  $S$ 

```

Co ciekawe, w tak zmodyfikowanym algorytmie można pominąć parametr k przy tworzeniu zanurzeń. Zamiast tego, sąsiedztwo wyższych rzędów może zostać wykorzystane **uzyskane** poprzez odpowiednie operacje na szkicu. Jako przykład, a zarazem ciekawe zastosowanie algorytmu, będziemy rozważać zadanie rekonstrukcji grafu. Konkretnie, zależy nam będzie na wyznaczeniu na podstawie szkicu t najbardziej prawdopodobnych krawędzi. W tym celu wykorzystane zostanie podobieństwo Jaccarda między zanurzeniami wierzchołków. Procedura polega na obliczeniu macierzy podobieństwa $simM$ między każdymi dwoma wierzchołkami w grafie, co ilustruje pseudokod **Algorytm 6**. W przypadku oryginalnego algorytmu NodeSketch, operacja ta jest wykonywana na podstawie zanurzeń k -tego rzędu. Z kolei w przypadku EdgeSketcha, macierze podobieństwa są **mogą być** obliczane oddzielnie dla różnych stopni sąsiedztwa. **Na przykład**, dla $k = 3$, do reprezentacji wierzchołka używana jest suma teoriomnościowa zanurzeń tego wierzchołka i jego sąsiadów, dla $k = 4$ wszystkich wierzchołków odległych o co najwyżej 2 i tak dalej. Ostateczny rezultat powstaje przez połączenie wszystkich macierzy podobieństwa. Parametr rozkładu wykładniczego α decyduje o tym, jakie wagi nadawane są macierzom wyższych rzędów, według wzoru:

$$simM = \sum_{k=2}^K \alpha^{k-2} simM_k. \quad (5.1)$$

Algorithm 6: ComputeSimilarityMatrix($embeddings, n, m$)

```

1  $simM \leftarrow [n, n];$  // pusta macierz  $n \times n$ 
2 foreach  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
3   foreach  $j \in \{i, \dots, n\}$  do
4      $simCount \leftarrow 0;$ 
5     foreach  $l \in \{1, \dots, m\}$  do
6       if  $embeddings[i, l] = embeddings[j, l]$  then
7          $simCount \leftarrow simCount + 1;$ 
8        $simM[i, j] = simM[j, i] \leftarrow simCount / m$ 
9 return  $simM$ 

```

JL:przysłałoby
się napisać,
że powyższa
formuła
pochodzi
z jeszcze
nieopublikowanej
pracy mojej i
Prof. Philippe
Cudré-
Mauroux

5.2.1. Złożoność obliczeniowa

Dla uproszczenia, będziemy rozważać złożoność algorytmów dla grafów nieważonych. Podstawowy algorytm NodeSketch przetwarza po kolei $|V|$ wierzchołków, dla każdego z nich generując $m|V|$ próbek, co daje łączną złożoność $O(m(|V|)^2)$.

JL:dokładniej
wyjaśnić z
czego wynika
powyższa
złożoność
NodeSketch

EdgeSketch również przetwarza po kolei wierzchołki. Dla każdego z nich wyszukiwani są sąsiedzi w czasie liniowym. Z kolei czas potrzebny na stworzenie zanurzeń dla danego wierzchołka zależy od liczby krawędzi z niego wychodzących. Liczba ta nie przekroczy jednak oczywiście liczby wierzchołków, dlatego możemy przyjąć górne ograniczenie w postaci złożoności $O(mH_mH_{|V|}) = O(m \ln(m) \ln(|V|))$. Daje to łączną złożoność algorytmu $O((|V|)^2 + |V|(m \ln(m) \ln(|V|)))$ lub, traktując m jako stałą, $O((|V|)^2 + |V|(\ln(|V|)))$. Choć oczywiście pierwszy składnik sumy jest asymptotycznie dominujący, w praktyce dla wielu grafów drugi składnik może okazać się kluczowy, głównie ze względu na stosunkowo wysoki koszt obliczania haszy. Warto też zauważyć, że obliczenia wykonywane w każdej iteracji pętli są niezależne od siebie, co pozwala na łatwe zrównoleglenie obliczeń.

JL:tutaj
też można
by trochę
dokładniej,
dlaczego
mamy $|V|^2$,
dlaczego
mamy
dodawanie,
przypomnieć
skąd się
bierze formuła
 $O(mH_mH_{|V|})$

JL:Może
jeszcze coś
o złożoności
pamięciowej?

Rozdział 6

Analiza wyników

W niniejszym rozdziale zweryfikowano eksperymentalnie działanie algorytmu EdgeSketch oraz porównano go z algorytmem NodeSketch. Przeprowadzono szereg testów na różnych grafach i zbadano wpływ parametrów na jakość uzyskiwanych wyników. Sprawdzono także średnią liczbę operacji wykonywanych przez algorytmy w zależności od liczby krawędzi w grafie.

6.1. Architektura eksperymentów

Na działanie algorytmów NodeSketch i EdgeSketch wpływ mają trzy główne parametry. Są to:

- k - rząd sąsiedztwa. Przyjmujemy, że przy $k = 2$ rozpatrujemy tylko bezpośrednie połączenia, przy $k = 3$ także ścieżki długości 2 itd.
- m - rozmiar szkicu. Jest to liczba elementów w wektorze opisującym pojedynczy wierzchołek w grafie.
- α - parametr rozkładu wykładniczego. Decyduje on, jakie wagi nadawane są sąsiedztwom wyższych rzędów.

Jednak uzyskiwane wyniki zależą też w naturalny sposób od grafu, na którym przeprowadzane są eksperymenty. W związku z tym, w celu zbadania wpływu tych parametrów na jakość uzyskiwanych wyników, przeprowadzono szereg eksperymentów na różnych grafach. Główną badaną statystyką była precyzja, czyli stosunek liczby poprawnie odgadniętych krawędzi do wartości t , a więc wielkości próbki. Rozważano próbki wielkości $t \in \{100, 1000, 10000, |E|\}$, gdzie $|E|$ to liczba krawędzi w grafie. Algorytmy zostały zaimplementowane w języku Julia[37].

6.2. Badanie uzyskiwanych wyników w zależności od struktury grafów

Model Erdosa-Renyiego

Model Erdosa-Renyiego jednym z najpowszechniejszych modeli grafów losowych. W modelu tym, każda para wierzchołków jest połączona krawędzią z jednakowym prawdopodobieństwem p . Steruje on gęstością grafu, a co za tym idzie, średnim stopniem wierzchołków. Grafy w tym modelu charakteryzują się dość jednorodną strukturą, bez wyraźnych klastrów, czy wierzchołków o dysproporcjonalnie wysokich stopniach.

Eksperyment przeprowadzono dla różnych prawdopodobieństw wystąpienia krawędzi p oraz stopni sąsiedztwa $k \in \{2, 3, 4\}$. W każdym przypadku liczba wierzchołków w grafie wynosiła

10000. Rozmiar szkicu wyniósł $m = 10$, a parametr rozkładu wykładniczego $\alpha = 0.3$. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.2.

p	k	NodeSketch				EdgeSketch			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
0.0005	2	0.94	0.762	0.4745	0.3688	1	1	1	0.5562
	3	0.86	0.732	0.3947	0.2515	1	1	0.9446	0.6179
	4	0.55	0.164	0.0409	0.023	1	0.985	0.8983	0.6072
0.001	2	0.58	0.433	0.2779	0.2048	1	1	1	0.3721
	3	0.38	0.074	0.0185	0.007	1	1	0.9748	0.4285
	4	0	0.004	0.0012	0.0017	1	1	0.9665	0.4301
0.005	2	0.26	0.144	0.0901	0.0497	1	1	1	0.0981
	3	0.11	0.033	0.0137	0.0062	1	0.936	0.3025	0.0557
	4	0.01	0.006	0.0038	0.005	1	0.936	0.3025	0.0557
0.01	2	0.05	0.079	0.0595	0.033	1	1	0.9998	0.0576
	3	0.05	0.026	0.0157	0.0104	1	1	1	0.05
	4	0	0.006	0.0091	0.0102	1	1	1	0.05

Tab. 6.1: Model Erdosa-Renyiego

Stochastyczny model blokowy

Stochastyczny model blokowy (ang. *stochastic block model*) jest modelem, w którym wierzchołki grafu są podzielone losowo na b bloków. Prawdopodobieństwo wystąpienia krawędzi między dwoma wierzchołkami w tym samym bloku wynosi p , a pomiędzy wierzchołkami z różnych bloków q . Zazwyczaj przyjmuje się $p \gg q$. W modelu tym występują wyraźne klastry, ale stopnie poszczególnych wierzchołków są do siebie dość zbliżone. Sprawdza się on w symulowaniu zbiorów danych, w których można wyróżnić grupy podobnych do siebie punktów, jak np. grupy użytkowników o podobnych zainteresowaniach, albo artykuły z podobnymi słowami kluczowymi.

W przeprowadzonym eksperymencie przyjęto rozmiar grafu $n = 1000$, prawdopodobieństwo wystąpienia krawędzi wewnątrz bloku $p = 0.5$ oraz między blokami $q = 0.001$. Zbadano także różne liczby bloków $b \in \{2, 4, 8\}$. Rozmiar szkicu m ustalono na 10, a paramter rozkładu wykładniczego wyniósł $\alpha = 0.3$. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.2.

bloki	k	NodeSketch				EdgeSketch			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
2	2	0.57	0.525	0.5136	0.5072	1	1	0.4391	0.2616
	3	0.47	0.527	0.5089	0.5016	1	1	0.4545	0.3426
	4	0.44	0.523	0.5079	0.5022	1	1	0.4545	0.3426
4	2	0.5	0.542	0.5343	0.5131	1	1	0.3352	0.1547
	3	0.53	0.483	0.4991	0.5003	1	1	0.5342	0.4087
	4	0.46	0.499	0.4983	0.5008	1	1	0.5342	0.4087
8	2	0.66	0.594	0.5521	0.5234	1	1	0.2831	0.1289
	3	0.51	0.528	0.5158	0.5063	1	0.884	0.5825	0.4762
	4	0.5	0.496	0.5002	0.5029	1	0.884	0.5821	0.4755

Tab. 6.2: Stochastyczny model blokowy

Model Barabasiiego-Alberta

W modelu Barabasiiego-Alberta (ang. Barabasi-Albert Model) wierzchołki dodawane są do grafu sekwencyjnie. Nowy wierzchołek łączy się z istniejącymi wierzchołkami z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do ich stopnia. Bardziej formalnie, konstrukcja grafu rozpoczyna się od wyboru małego zbioru m_0 początkowych wierzchołków i poprowadzenia wśród nich krawędzi w taki sposób, aby każdy wierzchołek był połączony z co najmniej jednym innym. Następnie, w każdym kroku dodawany jest nowy wierzchołek wraz z m_{ba} krawędziami łączącymi go z innymi z prawdopodobieństwem tym większym, im większy jest stopień danego wierzchołka. Konkretnie, prawdopodobieństwo istnienia krawędzi do wierzchołka i wynosi

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_{j \in V^*} k_j},$$

gdzie k_i to stopień wierzchołka i , a V^* to zbiór aktualnie występujących w grafie wierzchołków. W powstałych w ten sposób grafach można zaobserwować duże zróżnicowanie stopni wierzchołków, z wyraźnie odznaczającymi się węzłami centralnymi (ang. hubs).

W przeprowadzonym eksperymencie przyjęto liczbę wierzchołków $n = 1000$ i stopień wierzchołków $m_{ba} \in \{2, 4, 8\}$, a rozmiar początkowego zbioru wierzchołków ustalono na $m_0 = m_{ba}$. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.2. W przypadku $m_{ba} = 2$ pominięto wyniki dla $t = 10000$, ponieważ liczba wierzchołków w grafie wynosiła tylko 3994.

m	k	NodeSketch				EdgeSketch			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
2	2	0.52	0.269	X	0.2163	1	0.974	X	0.4877
	3	0.32	0.152	X	0.1232	1	0.213	X	0.1567
	4	0.56	0.289	X	0.2153	1	0.134	X	0.0941
8	2	0.19	0.14	0.0709	0.0892	1	1	0.178	0.2241
	3	0.12	0.063	0.0406	0.0511	1	0.921	0.1765	0.2222
	4	0.08	0.07	0.0313	0.0394	1	0.921	0.1765	0.2222
16	2	0.12	0.079	0.0939	0.0939	1	1	0.2105	0.1424
	3	0.1	0.107	0.0656	0.0595	1	1	0.2197	0.1578
	4	0.06	0.028	0.0359	0.0376	1	1	0.2197	0.1578

Tab. 6.3: Model Barabasiiego-Alberta

Grafy ważne

Wyniki dla grafów ważonych przedstawiono w tabeli 6.2.

6.2.1. Wnioski

Algorytm EdgeSketch uzyskuje wyższą precyzję niż NodeSketch dla większości zbiorów, na których przeprowadzono eksperymenty. W szczególności dla małych wartości t , uzyskiwana przez EdgeSketch precyzja jest bliska 1, co oznacza że wszystkie lub niemal wszystkie krawędzie zostały przewidziane poprawnie. NodeSketch uzyskuje dość zróżnicowane wyniki, od zbliżonych, lecz nieco niższych, jak w przypadku grafu w modelu Erdosa-Renyiego z parametrem $p = 0.0005$, po bliskie 0, jak przy gęstzych grafach w tym samym modelu. Dla obu algorytmów wyniki pogarszają się wraz ze wzrostem t , ale EdgeSketch osiąga nadal lepsze wyniki niż NodeSketch na wszystkich grafach poza tymi w stochastycznym modelu blokowym.

p	k	NodeSketch				EdgeSketch			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
0.0005	2	0	0	0.0012	0.0031	1	1	1	0.5505
	3	0	0	0.007	0.0248	1	1	0.94	0.6125
	4	0	0.006	0.0122	0.012	1	1	0.9207	0.6073
0.001	2	0	0	0.0016	0.0055	1	1	1	0.3721
	3	0.01	0.017	0.012	0.006	1	1	0.9671	0.4235
	4	0	0.003	0.0084	0.0099	1	1	0.9714	0.4275
0.005	2	0.01	0.008	0.0054	0.0065	1	1	1	0.0989
	3	0	0.007	0.0086	0.0063	1	0.941	0.3344	0.0581
	4	0	0.004	0.0064	0.0088	1	0.941	0.3344	0.0581
0.01	2	0	0.01	0.0086	0.0107	1	1	1	0.0583
	3	0.03	0.012	0.0101	0.0117	1	1	1	0.05
	4	0.01	0.011	0.0151	0.0138	1	1	1	0.05

Tab. 6.4: Grafy ważne

W przypadku algorytmu NodeSketch, wybór większej wartości parametru k zazwyczaj albo nie zmienia znacząco precyzji albo ją pogarsza, niezależnie od t . Inaczej jest w przypadku EdgeSketch, gdzie dobór optymalnego k zależy od konkretnego zbioru oraz wartości t . O ile w przypadku małych próbek, np $t = 100$, najlepiej sprawdza się $k = 2$, o tyle dla $t = |E|$, dobór większego k może poprawić wyniki, co widać szczególnie wyraźnie w stochastycznym modelu blokowym oraz w rzadkich grafach w modelu Erdosa-Renyiego.

W przypadku grafów ważonych, różnica pomiędzy algorytmami jest szczególnie wyraźna. ExpSketch uzyskuje wyniki bardzo zbliżone do tych osiągniętych dla grafów nieważonych o podobnej strukturze. Pozostaje on więc skuteczny w przewidywaniu krawędzi. W przypadku NodeSketcha, wyniki są natomiast znacznie gorsze, często bliskie zeru. Wynikać to może z faktu, że algorytm ten tworzy szkic, w którym przechowywane są indeksy wierzchołków, a nie próbki z rozkładu wykładniczego, jak w przypadku EdgeSketcha.

6.3. Wykorzystanie stopnia wierzchołków przy rekonstrukcji

Jak wspomniano w rozdziale 4.1.2, szkice generowane przez algorytm ExpSketch pozwalają na zdefiniowanie nieobciążonego estymatora sumy wag elementów w strumieniu. W przypadku algorytmu EdgeSketch, ExpSketch jest wywoływany dla pojedynczego wierzchołka, a w strumieniu znajdują się wychodzące z niego krawędzie. Jeśli graf jest nieważony, to suma wag krawędzi jest po prostu stopniem wierzchołka. Przeprowadzono eksperyment mający na celu sprawdzenie, czy ta właściwość może być wykorzystana do poprawy jakości rekonstrukcji. Konkretnie podczas wyboru najbardziej podobnych wierzchołków, śledzono liczbę krawędzi wychodzących z każdego z nich. Jeśli wierzchołek v osiągał swój estymowany stopień, to był on pomijany w dalszym procesie.

Testy przeprowadzono na trzech zbiorach zawierających rzeczywiste dane. Pierwszy z nich to HomoSapiens, zbiór danych zawierający relacje między białkami dla gatunku ludzkiego. Blogcatalog to zbiór danych zawierający relacje między blogerami, a dblp to fragment zbioru autorów artykułów naukowych, gdzie krawędzie reprezentują współautorstwo. W eksperymencie przyjęto $\alpha = 0.3$ oraz $m = 10$. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.3.

zbiór danych	k	EdgeSketch				EdgeSketch z oszacowaniem stopnia			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
HomoSapiens	2	1	1	0.4459	0.1202	0.99	0.998	0.4413	0.1669
	3	1	1	0.3036	0.1153	1	0.999	0.2923	0.1576
	4	1	1	0.3035	0.1163	1	1	0.2921	0.1573
blogcatalog	2	1	1	0.7757	0.0343	1	1	0.7755	0.1943
	3	1	1	0.7649	0.0377	1	1	0.7647	0.1988
	4	1	1	0.7649	0.0377	1	1	0.7647	0.1988
dblp	2	1	1	1	0.4453	0.99	0.994	0.9489	0.426
	3	1	1	0.7684	0.3214	1	0.995	0.731	0.449
	4	1	1	0.6666	0.2927	1	0.997	0.6317	0.4303

Tab. 6.5: Wyniki z wykorzystaniem stopnia wierzchołków przy rekonstrukcji

6.3.1. Wnioski

Wyniki pokazują, że wykorzystanie stopnia wierzchołków przy rekonstrukcji rzeczywiście może wpływać na poprawę precyzji. Jest to szczególnie widoczne dla $t = |E|$. Choć zazwyczaj różnice nie były duże, to np. w przypadku zbioru *blogcatalog* precyzja wzrosła z niecałych 4% do niemal 20%, co jest znaczącą poprawą. Nieco gorzej było w przypadku małych t , gdzie nieco lepsze wyniki uzyskał oryginalny algorytm.

6.4. Wpływ rozmiaru szkicu na uzyskiwane wyniki

Jednym z kluczowych parametrów wpływających na działanie algorytmów NodeSketch i EdgeSketch jest rozmiar szkicu. Wybór odpowiedniej wartości m może nie być oczywisty. Z jednej strony, większy szkic jest w stanie przechować więcej informacji, lecz z drugiej strony, zwiększa to czas obliczeń oraz ilość używanej pamięci. Poniższe eksperymenty miały na celu weryfikację wpływu rozmiaru szkicu na uzyskiwane wyniki.

Pierwszy z nich przeprowadzono na zbiorach danych *blogcatalog* oraz *dblp*. W obu przypadkach rozważano różne wartości parametru $m \in \{8, 16, 32, 64, 128, 256\}$. W eksperymencie przyjęto $\alpha = 0.3$ oraz $k = 2$. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.4.

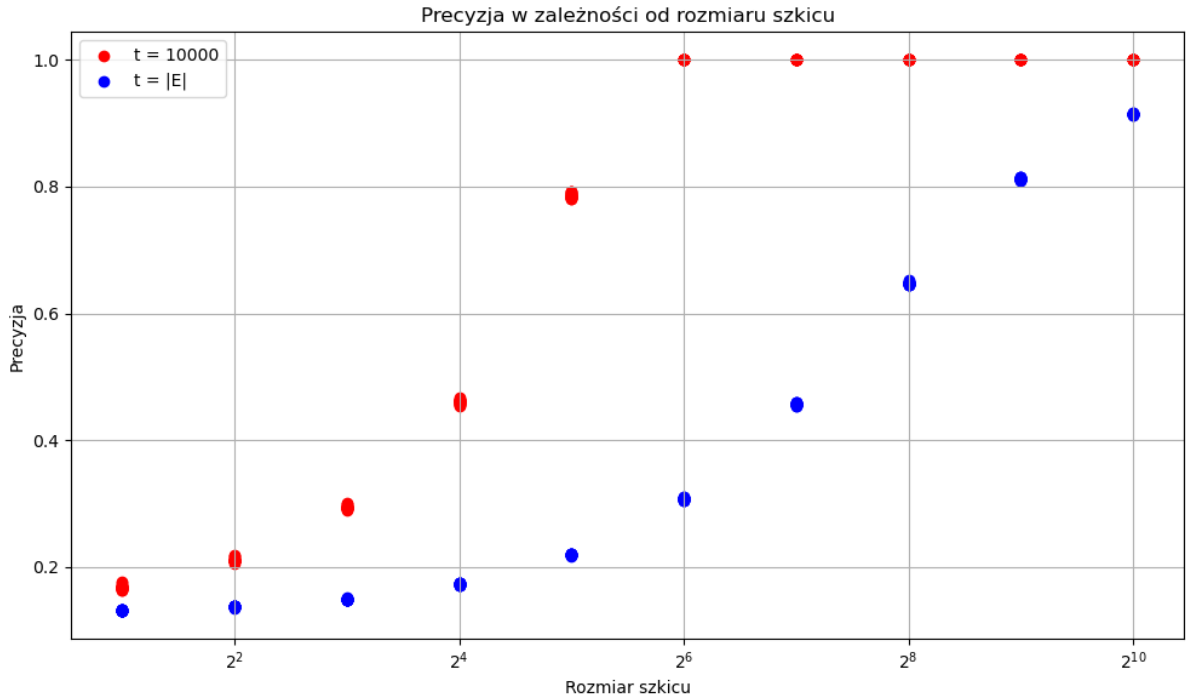
Drugi eksperyment przeprowadzono jedynie dla algorytmu EdgeSketch z tymi samymi parametrami. Został on wykonany na 20 grafach w stochastycznym modelu blokowym, z których każdy miał 1000 wierzchołków. Zbadano zmiany precyzji dla $t = 10000$ oraz $t = |E|$ wraz z rozmiarem szkicu. Rezultaty ilustruje wykres 6.4.

6.4.1. Wnioski

Zgodnie z intuicją, zwiększenie rozmiaru szkicu ma korzystny wpływ na uzyskiwaną precyzję. Algorytm EdgeSketch jest szczególnie widoczne w przypadku dużych wartości t . Warto jednak zaznaczyć, że im większy szkic, tym dalsze jego zwiększanie ma mniejszy wpływ na precyzję. Co ciekawe, dla małych t , EdgeSketch jest w stanie uzyskać wysoką precyzję nawet przy małym rozmiarze szkicu. Przykładowo, dla $t = 10000$, szkic o rozmiarze 64 jest wystarczający, aby w każdym z badanych przypadków uzyskać precyzję 1, a w dla zbioru *dblp*, wystarczający jest nawet szkic o 8 elementach. W przypadku algorytmu NodeSketch, zyski występują, ale są niewielkie w porównaniu do EdgeSketcha. Warto zaznaczyć, że większy rozmiar szkicu implikuje większą liczbę wykonywanych operacji oraz większe zapotrzebowanie na

zbiór danych	m	NodeSketch			EdgeSketch		
		t = 1000	t = 10000	t = E	t = 1000	t = 10000	t = E
blogcatalog	8	0.031	0.0298	0.0277	1	0.6228	0.0298
	16	0.023	0.0276	0.0292	1	0.9998	0.0474
	32	0.009	0.0224	0.034	1	0.9998	0.0805
	64	0.016	0.0224	0.0312	1	1	0.138
	128	0.01	0.0185	0.0466	1	1	0.2302
	256	0.018	0.0257	0.0406	1	1	0.3609
dblp	8	0.996	0.8975	0.5495	1	1	0.3839
	16	1	0.9381	0.5892	1	1	0.5737
	32	1	0.9264	0.5974	1	1	0.7481
	64	1	0.9333	0.589	1	1	0.87
	128	1	0.9389	0.6017	1	1	0.9421
	256	1	0.9415	0.6051	1	1	0.9757

Tab. 6.6: Wyniki dla różnych rozmiarów szkicu



Rys. 6.1: Precyzja rekonstrukcji w zależności od rozmiaru szkicu dla algorytmu EdgeSketch.

pamięć, dlatego w praktycznych zastosowaniach konieczne może być znalezienie kompromisu pomiędzy jakością uzyskiwanych wyników a kosztem obliczeniowym.

6.5. Dobór parametru α

Kolejnym parametrem, mającym znaczenie dla obu algorytmów jest α . Jego wartość decyduje, jak szybko maleje wpływ kolejnych, coraz bardziej odległych sąsiadów na generowane szkice, lub, w przypadku EdgeSketcha, obliczane podobieństwa Jaccarda. Grafy wykorzystane w eksperymencie zostały wygenerowane w modelu Erdosa-Renyiego i miały 5000 wierzchołków. Badano różne wartości $\alpha \in \{0, 0.15, 0.3, 0.45\}$, przy czym $\alpha = 0$ oznacza, że sąsiedztwa

wyższych rzędów nie były brane pod uwagę. Rozmiar szkicu m ustalono na 10, a parametr k na 4. Rezultaty przedstawiono w tabeli 6.5.

p	α	NodeSketch				EdgeSketch			
		t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E	t = 100	t = 1000	t = 10000	t = E
0.0005	0	0.97	0.826	0.3424	0.5415	1	1	0.4462	0.7057
	0.15	0.9	0.798	0.2917	0.4613	1	1	0.4678	0.7398
	0.3	0.95	0.782	0.2863	0.4528	1	1	0.4363	0.69
	0.45	0.9	0.788	0.2743	0.4338	1	0.785	0.3954	0.6253
0.001	0	0.91	0.69	0.4114	0.3773	1	1	0.6996	0.5548
	0.15	0.15	0.056	0.0168	0.0146	1	1	0.7469	0.6264
	0.3	0.16	0.047	0.0185	0.0164	1	0.996	0.7014	0.6161
	0.45	0.19	0.069	0.0198	0.0173	0.97	0.939	0.6041	0.5373
0.005	0	0.38	0.258	0.144	0.0972	1	1	1	0.1814
	0.15	0	0.007	0.0049	0.0053	1	1	0.9276	0.1871
	0.3	0	0.004	0.0042	0.005	1	0.932	0.3196	0.1062
	0.45	0	0.006	0.0044	0.0052	0.95	0.381	0.1227	0.0559
0.01	0	0.15	0.185	0.1091	0.0563	1	1	1	0.1011
	0.15	0.01	0.011	0.0101	0.0094	1	1	0.9231	0.1022
	0.3	0.01	0.009	0.0095	0.0095	1	1	0.3234	0.0647
	0.45	0.01	0.009	0.0094	0.0095	1	0.63	0.1928	0.0428

Tab. 6.7: Wyniki dla różnych wartości parametru α

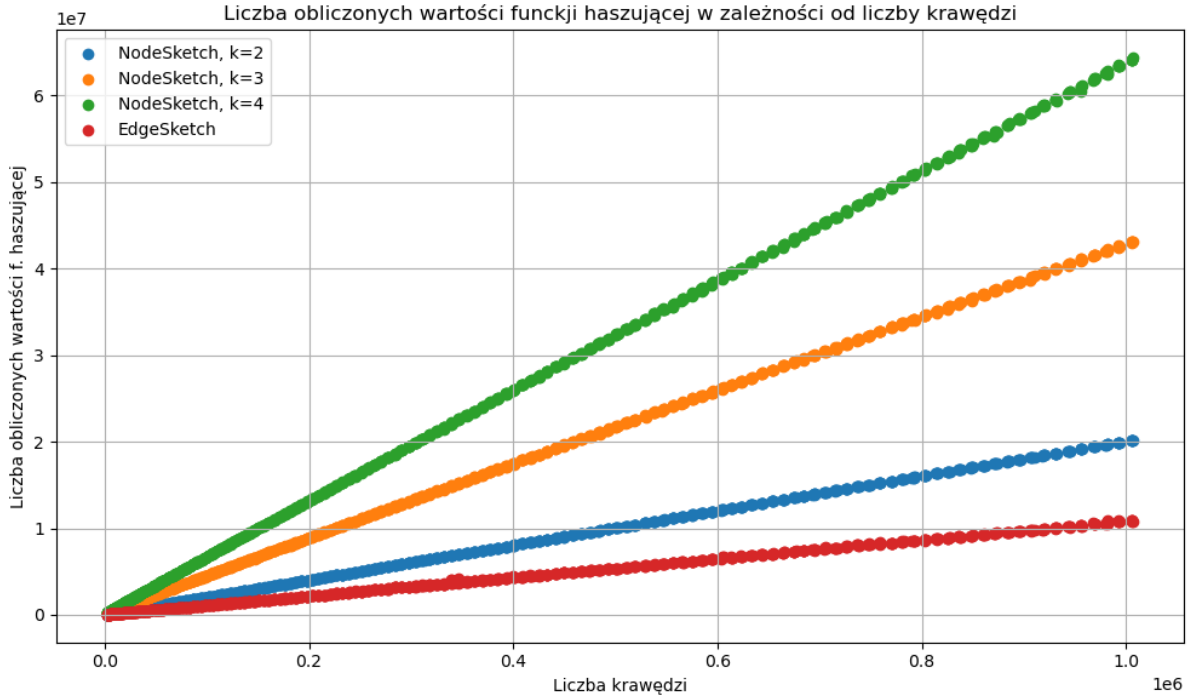
6.5.1. Wnioski

Odpowiedni dobór parametru rozkładu wykładniczego zależy od konkretnego grafu. W badanym modelu dla algorytmu NodeSketch najlepsze wyniki uzyskano ignorując sąsiedztwa wyższych rzędów. Inaczej było w przypadku EdgeSketcha, gdzie niewielkie wartości parametru, zwłaszcza $\alpha = 0.15$ lub $\alpha = 0.3$ wpływały korzystnie na uzyskiwane wyniki. Pogarszały się one jednak przy wyborze większych współczynników. Większa α pozwala na ujęcie większej ilości informacji o dalszym sąsiedztwie, ale może również przykrywać informacje o najbliższych sąsiadach wierzchołka, co później zaburza proces rekonstrukcji krawędzi. W większości przypadków wybór małych wartości α wydaje się więc najskuteczniejszą strategią dla algorytmu NodeSketch.

6.6. Liczba operacji w zależności od liczby krawędzi w grafie

Teoretyczna złożoność obliczeniowa algorytmów NodeSketch i EdgeSketch została skomentowana w rozdziale 5.2.1. Analiza ta obejmowała wszystkie kroki wykonywane w trakcie działania algorytmów. Jednak w praktyce, pewne operacje mogą mieć o wiele istotniejszy wpływ na ostateczny czas działania niż inne. W szczególności, obliczenie wartości funkcji haszujące, choć odbywa się w czasie $O(1)$, to przy dużej liczbie wywołań ma znaczący wpływ na efektywność algorytmu. W poniższym eksperymencie zbadano średnią liczbę obliczonych wartości funkcji haszujących w zależności od liczby krawędzi w grafie. W tym celu wygenerowano grafy w stochastycznym modelu blokowym o różnych rozmiarach, od 200 do 8000 wierzchołków. Wszystkie z nich miały 4 bloki, a prawdopodobieństwa krawędzi wewnątrz bloku i pomiędzy blokami wynosiły odpowiednio 0.5 i 0.001. Podobnie jak w innych eksperymentach, rozmiar szkicu m wynosił 10 i przyjęto $\alpha = 0.3$. Wyniki przedstawiono na

wykreście 6.6. Dodatkowo, wykres 6.6 przedstawia te same wyniki, ale znormalizowane względem liczby krawędzi w grafie. Warto zaznaczyć, że w implementacji algorytmu NodeSketch zastosowano podobną optymalizację jak w algorytmie EdgeSketch, polegającą na obliczaniu wartości funkcji haszującej tylko dla niezerowych elementów w macierzy SLA .



Rys. 6.2: Liczba obliczonych wartości funkcji haszującej w zależności od liczby krawędzi w grafie

6.6.1. Wnioski

W przypadku obu algorytmów, liczba wywołań funkcji haszującej rośnie liniowo wraz z liczbą krawędzi w grafie. Jest to spodziewany wynik, ponieważ każda krawędź może być wykorzystywana tylko przy generowaniu zanurzeń dla dwóch wierzchołków, które ją wyznaczają. Jest to także zgodne z teoretyczną złożonością obliczeniową algorytmu EdgeSketch. Zauważymy, że procedura FastExpSketch jest wywoływana $|V|$ razy, a średnia liczba przekazywanych do niej elementów to iloraz liczby krawędzi i liczby wierzchołków, a więc gęstość grafu

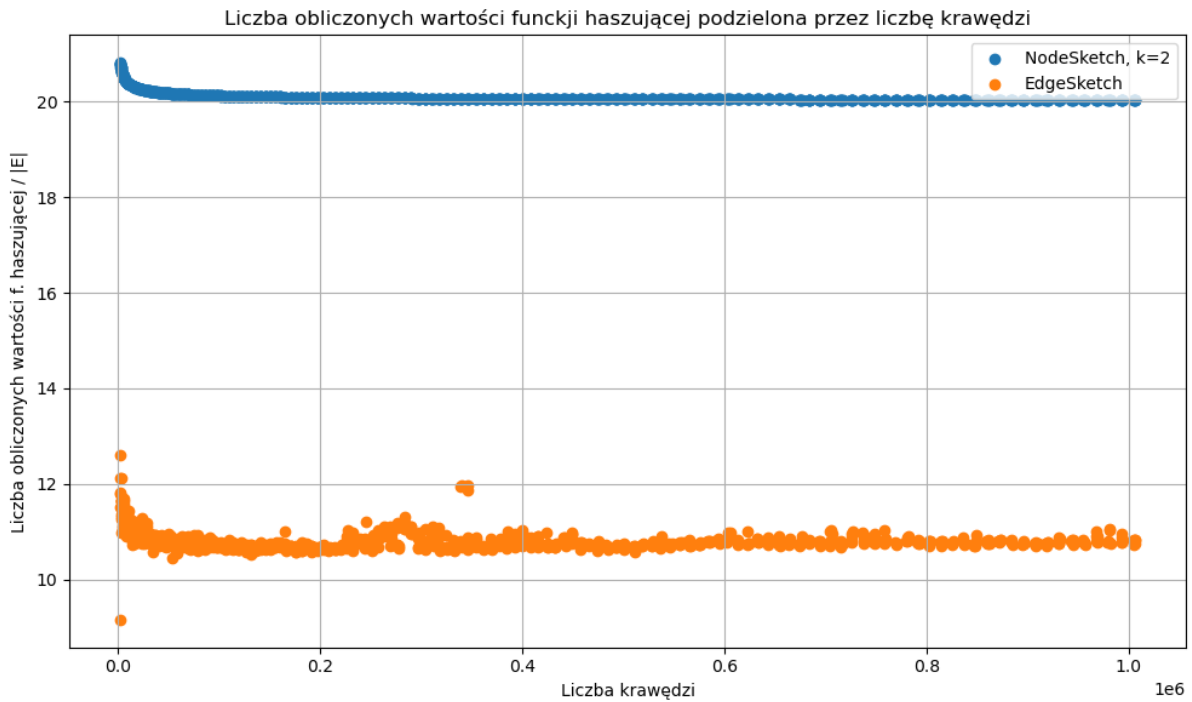
$$\rho = \frac{|E|}{|V|},$$

która w rozważanym modelu jest stała. Ostatecznie otrzymujemy więc:

$$O(|V| \frac{|E|}{|V|} \ln(\rho)) = O(|E| \ln(\rho)) = O(|E|)$$

Wraz ze wzrostem parametru k , NodeSketch wykonuje więcej operacji ze względu na rekurencyjną procedurę szkicowania. Oczywiście EdgeSketch generuje zanurzenia tylko raz, co daje mu przewagę przy rozważaniu wyższych stopni sąsiedztwa. Jednak nawet dla $k = 2$, EdgeSketch wykonuje wyraźnie mniej wywołań funkcji haszującej niż NodeSketch.

Na drugim wykresie widać ukazującym liczbę wywołań podzieloną przez liczbę krawędzi, widać, że stosunek ten jest rzeczywiście liniowy. Jedynie dla małych grafów odznaczają się nieco



Rys. 6.3: Liczba obliczonych wartości funkcji haszującej znormalizowana względem liczby krawędzi w grafie

większe wartości. Wynika to z faktu, że algorytmy wykorzystują macierz *SLA*, a nie zwykłą macierz sąsiedztwa, a więc biorą pod uwagę sztuczną pętlę od wierzchołka do siebie samego, nie ujętą w zaprezentowanej liczbie krawędzi. Dla algorytmu NodeSketch stosunek ten stabilizuje się na ok 20. Wynika to z faktu, że szkic ma rozmiar 10, a każdą z krawędzi rozważamy dla dokładnie dwóch wierzchołków. Wykorzystanie procedury FastExpSketch pozwala zredukować tę wartość prawie dwukrotnie, choć jest to okupione większą wariancją.

Rozdział 7

Podsumowanie

Hello

Literatura

- [1] K. J. Ahn, S. Guha, A. McGregor. Analyzing graph structure via linear measurements. Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Jan 2012.
- [2] N. Alon, Y. Matias, M. Szegedy. The space complexity of approximating the frequency moments. Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '96, 1996.
- [3] N. Ashrafi-Payaman, M. R. Kangavari, S. Hosseini, A. M. Fander. Gs4: Graph stream summarization based on both the structure and semantics. The Journal of Supercomputing, 77(3):2713–2733, 2020.
- [4] S. Cao, W. Lu, Q. Xu. Grarep. Proceedings of the 24th ACM International on Conference on Information and Knowledge Management, Oct 2015.
- [5] M. Chen, R. Zhou, H. Chen, H. Jin. Scube: Efficient summarization for skewed graph streams. 2022 IEEE 42nd International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS), 2022.
- [6] M. Chen, R. Zhou, H. Chen, J. Xiao, H. Jin, B. Li. Horae: A graph stream summarization structure for efficient temporal range query. 2022 IEEE 38th International Conference on Data Engineering (ICDE), 2022.
- [7] G. Cormode, S. Muthukrishnan. An improved data stream summary: The count-min sketch and its applications. Journal of Algorithms, 55(1):58–75, Apr 2005.
- [8] L. Devroye. Non-Uniform Random Variate Generation. Springer New York, 1986.
- [9] M. Elkin, C. Trehan. Brief announcement: $(1+\epsilon)$ -approximate shortest paths in dynamic streams. Proceedings of the 2022 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, 2022.
- [10] J. Feigenbaum, S. Kannan, A. McGregor, S. Suri, J. Zhang. On graph problems in a semi-streaming model. Theoretical Computer Science, 348(2–3):207–216, 2005.
- [11] I. J. Good. Diversity as a concept and its measurement: Comment. Journal of the American Statistical Association, 77(379):561, Sep 1982.
- [12] X. Gou, L. Zou, C. Zhao, T. Yang. Fast and accurate graph stream summarization. 2019 IEEE 35th International Conference on Data Engineering (ICDE), 2019.
- [13] A. Grover, J. Leskovec. Node2vec. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Aug 2016.
- [14] W. L. Hamilton, R. Ying, J. Leskovec. Inductive representation learning on large graphs. CoRR, abs/1706.02216, 2017.

-
- [15] R. W. Hamming. Error detecting and error correcting codes. Bell System Technical Journal, 29(2):147–160, Apr 1950.
 - [16] Z. Jiang, H. Chen, H. Jin. Auxo: A scalable and efficient graph stream summarization structure. Proceedings of the VLDB Endowment, 16(6):1386–1398, 2023.
 - [17] L. Katz. A new status index derived from sociometric analysis. Psychometrika, 18(1):39–43, Mar 1953.
 - [18] A. Khan, C. Aggarwal. Query-friendly compression of graph streams. 2016 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM), 2016.
 - [19] T. N. Kipf, M. Welling. Semi-supervised classification with graph convolutional networks. CoRR, abs/1609.02907, 2016.
 - [20] J. Ko, Y. Kook, K. Shin. Incremental lossless graph summarization. Proceedings of the 26th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, Aug 2020.
 - [21] J. R. Lee, S. O. Gharan, L. Trevisan. Multiway spectral partitioning and higher-order cheeger inequalities. Journal of the ACM, 61(6):1–30, Dec 2014.
 - [22] J. Lemiesz. On the algebra of data sketches. Proceedings of the VLDB Endowment, 14(9):1655–1667, May 2021.
 - [23] J. Lemiesz. Efficient framework for operating on data sketches. Proceedings of the VLDB Endowment, 16(8):1967–1978, 2023.
 - [24] P. Li. 0-bit consistent weighted sampling. Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD '15, strona 665–674, New York, NY, USA, 2015. Association for Computing Machinery.
 - [25] D. Lian, K. Zheng, V. W. Zheng, Y. Ge, L. Cao, I. W. Tsang, X. Xie. High-order proximity preserving information network hashing. Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, Jul 2018.
 - [26] Z. Ma, Y. Liu, Z. Yang, J. Yang, K. Li. A parameter-free approach to lossless summarization of fully dynamic graphs. Information Sciences, 589:376–394, Apr 2022.
 - [27] G. Malewicz, M. H. Austern, A. J. Bik, J. C. Dehnert, I. Horn, N. Leiser, G. Czajkowski. Pregel. Proceedings of the 2010 ACM SIGMOD International Conference on Management of data, Jun 2010.
 - [28] G. S. Manku, R. Motwani. Approximate frequency counts over data streams. Proceedings of the VLDB Endowment, 5(12):1699–1699, Aug 2012.
 - [29] T. Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean. Efficient estimation of word representations in vector space, 2013.
 - [30] M. Ou, P. Cui, J. Pei, Z. Zhang, W. Zhu. Asymmetric transitivity preserving graph embedding. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Aug 2016.
 - [31] A. Pacaci, A. Bonifati, M. T. Özsu. Regular path query evaluation on streaming graphs. Proceedings of the 2020 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, May 2020.
 - [32] B. Perozzi, R. Al-Rfou, S. Skiena. Deepwalk. Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, Aug 2014.
-

-
- [33] J. Qiu, Y. Dong, H. Ma, J. Li, K. Wang, J. Tang. Network embedding as matrix factorization. Proceedings of the Eleventh ACM International Conference on Web Search and Data Mining, Feb 2018.
 - [34] F. Scarselli, M. Gori, A. C. Tsoi, M. Hagenbuchner, G. Monfardini. The graph neural network model. IEEE Transactions on Neural Networks, 20(1):61–80, 2009.
 - [35] J. Tang, M. Qu, M. Wang, M. Zhang, J. Yan, Q. Mei. Line. Proceedings of the 24th International Conference on World Wide Web, May 2015.
 - [36] N. Tang, Q. Chen, P. Mitra. Graph stream summarization. Proceedings of the 2016 International Conference on Management of Data, 2016.
 - [37] The Julia Language Development Team. The Julia Language Documentation, 2024. Accessed: 2024-06-07.
 - [38] A. Tsitsulin, D. Mottin, P. Karras, E. Müller. Verse. Proceedings of the 2018 World Wide Web Conference on World Wide Web - WWW '18, 2018.
 - [39] D. Wang, P. Cui, W. Zhu. Structural deep network embedding. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Aug 2016.
 - [40] J. Wang, T. Zhang, J. Song, N. Sebe, H. T. Shen. A survey on learning to hash, 2017.
 - [41] R. J. Wilson. Introduction to graph theory. Prentice Hall, 2015.
 - [42] W. Wu, B. Li, L. Chen, C. Zhang. Efficient attributed network embedding via recursive randomized hashing. Proceedings of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, Jul 2018.
 - [43] W. Wu, B. Li, C. Luo, W. Nejdl. Hashing-accelerated graph neural networks for link prediction. Proceedings of the Web Conference 2021, Apr 2021.
 - [44] R. S. Xin, J. E. Gonzalez, M. J. Franklin, I. Stoica. Graphx. First International Workshop on Graph Data Management Experiences and Systems, Jun 2013.
 - [45] D. Yang, B. Qu, R. Hussein, P. Rosso, P. Cudré-Mauroux, J. Liu. Revisiting embedding based graph analyses: Hyperparameters matter! IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 35(11):11830–11845, Nov 2023.
 - [46] D. Yang, B. Qu, J. Yang, L. Wang, P. Cudre-Mauroux. Streaming graph embeddings via incremental neighborhood sketching. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, strona 1–1, 2022.
 - [47] D. Yang, P. Rosso, B. Li, P. Cudre-Mauroux. Nodesketch. Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, Jul 2019.
 - [48] J. Zhang, Y. Dong, Y. Wang, J. Tang, M. Ding. Prone: Fast and scalable network representation learning. Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence, Aug 2019.
 - [49] P. Zhao, C. C. Aggarwal, M. Wang. gsketch: On query estimation in graph streams. Proceedings of the VLDB Endowment, 5(3):193–204, 2011.
 - [50] D. Zhu, P. Cui, D. Wang, W. Zhu. Deep variational network embedding in wasserstein space. Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, Jul 2018.